UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

Mécaninca Cuántica Relativista
Examen parcial 1
Francisco Baez

Nombre:
Giovanni Gamaliel López Padilla

Matricula:
1837522

1 de octubre de 2020

1. Sean las transformaciones de Lorentz

$$\begin{aligned} A_0' &= \gamma(A_0 - \vec{\beta} \cdot \vec{A}) \\ A_\parallel' &= \gamma(A_\parallel - \beta A_0) \\ A_\perp' &= A_\perp \end{aligned}$$

Mostrar que el producto escalar tensorial es un invariante, es decir, $A_0'B_0' - \vec{A}' \cdot \vec{B}' = A_0B_0 - \vec{A} \cdot \vec{B}$

2. Sea un sistema k' que se mueve en el eje x_i con una velocidad de $\nu = c\beta$ con respecto a K. Mostrar que la velocidad perpendicular a la dirección de movimiento k' vistas en el sistema K es:

$$U_\perp = \frac{u_i}{\gamma_v \left[1 + \frac{v \cdot v}{c^2}\right]}$$

De las transformaciones:

$$\begin{aligned} r_\parallel &= \gamma_v[r_\parallel{}' + vt'] \\ r_\perp &= r_\perp{}' \\ t &= \gamma_v \left[t' + \frac{v \cdot v}{c^2}\right] \end{aligned}$$

tomando los diferenciales:

$$\begin{aligned} dr_\parallel &= \gamma_v \left[dr_\parallel' + vdt\right] \\ dr_\perp &= dr_p'erp \\ dt &= \gamma_v \left[dt + \frac{vdr}{c^2}\right] \end{aligned}$$

entonces:

$$\begin{aligned} \frac{dr_\perp}{dt} &= \frac{dr_\perp'}{\gamma_v dt' \left[1 + \frac{v}{c^2}\frac{dr'}{dt'}\right]} \\ u_\perp &= \frac{dr_\perp'}{\gamma_v dt' \left[1 + \frac{v}{c^2}\frac{dr'}{dt'}\right]} \\ &= \frac{u_\perp'}{\gamma_v \left[1 + \frac{v \cdot u'}{c^2}\right]} \end{aligned}$$

por lo tanto:

$$u_\perp = \frac{u_\perp'}{\gamma_v \left[1 + \frac{v \cdot u'}{c^2}\right]}$$

3. Sea el tensor de primer rango contravariante $A^\mu = (A^0, \vec{A})$. Expresar las componentes del tensor de primer rango contravariante A_μ en términos de las componentes de A^μ.
La transformación de un tensor contracovariante a covariante es la siguiente:

$$A_\mu = g_{\gamma\mu} A^\gamma$$

donde $g = diag(1, -1, -1, -1)$, entonces:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^0 \\ A^1 \\ A^2 \\ A^3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A^0 \\ -A^1 \\ -A^2 \\ -A^3 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

por lo tanto:

$$\begin{aligned} A_0 &= A^0 \\ A_1 &= -A^1 \\ A_2 &= -A^2 \\ A_3 &= -A^3 \end{aligned}$$

4. Sea el tensor métrico en una representación matricial en la notación tradicional diag(1,-1,-1,-1) y sea L la matriz sin traza tal que se cumple que $(Lg)^T = -gL$, donde T significa la transpuesta. Mostrar que la forma matricial de L es:

$$L = \begin{pmatrix} 0 & L_{01} & L_{02} & L_{03} \\ L_{01} & 0 & L_{12} & L_{13} \\ L_{02} & -L_{12} & 0 & L_{23} \\ L_{03} & -L_{13} & -L_{23} & 0 \end{pmatrix}$$

tomando en cuenta que:

$$g = diag(1, -1, -1, -1)$$

y que

$$g^T = g = g^{-1}$$

por lo tanto:

$$\begin{aligned} (Lg)^T &= -gL \\ gL^T &= -gL \\ g(gL^T) &= g(-gL) \\ (gg)L^T &= -(gg)L \\ L^T &= -L \end{aligned}$$

por lo tanto:

$$L_{ji} = -L_{ij}$$

si $i = j$, entonces $L_{ii} = 0$

5. Sea la matriz de transformación de Lorentz más general dada por $A = e^{\vec{\omega}\cdot\vec{s}-\vec{\xi}\cdot\vec{k}}$, donde $\vec{\omega}, \vec{\xi}$ contienen seis parámetros de la transformación general de Lorentz y $\vec{S}, \vec{K}$ son los generadores de las transformaciones de Lorentz. Determina la matriz de transformación de Lorentz para $\vec{\xi} = 0$ y $\vec{\omega} = \omega\hat{z}$.
Se tiene la base, S_μ, K_μ, donde $L = -\vec{\omega}\cdot\vec{s} - \vec{\xi}\cdot\vec{k}$, para rotar con respecto $\hat{z}$, se tiene que cumplir que: $\vec{\xi} = 0, \vec{\omega} = \omega_z\hat{z}$, entonces:

$$L = -\vec{\omega}\cdot\vec{s} = -\omega_z s_3$$

por lo tanto:

$$\begin{aligned} A &= e^L \\ &= e^{-\omega s_3} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i(\omega s_3)^i}{i!} \end{aligned}$$

donde se cumple que:

$$\begin{aligned} s_3^3 &= -s_3 \\ s_3^4 &= -s_3^2 \\ s_3^5 &= s_3 \end{aligned}$$

entonces:

$$\begin{aligned} A &= 1 - \omega s_3 + \frac{\omega^2}{2!}s_3^2 + \frac{\omega^3}{3!}s_3 - \frac{\omega^4}{4!}s_3^2 \\ &= (1 + s_3^2) - s_3^2\left[1 - \frac{\omega^2}{2!} + \frac{\omega^4}{4!} - \dots\right] - s_3\left[\omega - \frac{\omega^3}{3!} + \frac{\omega^5}{5!} - \dots\right] \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} cos(\omega) - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} sen(\omega) \end{aligned}$$

entonces:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cos(\omega) & sen(\omega) & 0 \\ 0 & -sen(\omega) & cos(\omega) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$