UANL
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FCFM
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

Tópicos de Mécanica Cuántica
Tarea 6

Dr. Carlos Luna Criado

Nombre:
Giovanni Gamaliel López Padilla

Matricula:
1837522

13 de noviembre de 2020

Razone si los siguientes pares tienen estructura de grupo o no:

- $(\mathbb{R}, +)$
  Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$, entonces:
  - Cerradura
    Proponiendo la operación $a + b$, esto nos da como resultado un elemento, el cual esta dentro del conjunto $\mathbb{R}$
  - Elemento neutro
    El elemento neutro en este conjunto con la operación $+$ es el número 0, el cual es elemento del conjunto $\mathbb{R}$
  - Elemento inverso
    El elemento inverso para cada número en este conjunto es el mismo múmero pero de signo opuesto, para obtener que $a + (-a) = (-a) + a = 0$
  - Propiedad asociativa
    Se tiene que:

    $$a + (b + c) = (a + b) + c$$

  por todo lo anterior, se tiene que el conjunto $\mathbb{R}$ con la operación $+$, forman un grupo.

- $(\mathbb{Z}, \times)$
  Sea $a, b, c \in \mathbb{Z}$, entonces
  - Cerradura Usando la operación $\times$, se tiene que $a \times b \in \mathbb{Z}$.
  - Elemento neutro El elemento neutro de este conjunto con esta operación sería el 1, ya que $a \times 1 = 1 \times a = a$
  - Elemento inverso El elemento inverso para este conjunto no existe, ya que para que esto sea necesario este deberia ser $1/a$ y al no estar dentro del conjunto $\mathbb{Z}$, no existe.

  Por lo tanto, el conjunto $\mathbb{Z}$ con la operación $\times$ no es un grupo

- El conjunto de matrices de $n \times n$ construidas con los números reales y determinante no nulo, junto a la operación producto de matrices.
  Sean a, b, c elemento de $M_{n \times n}$, entonces
  - Cerradura
    Calculando el determinante de ab, se tiene que:

    $$det(ab) = det(a)det(b)$$

    como $det(a), det(b) \neq 0$ entonces $det(a)det(b) \neq 0$, por lo tanto $ab \in M_{n \times n}$
  - Elemento neutro
    El elemento neutro en este conjunto sería la matriz identidad ya que: $a\mathbb{I} = \mathbb{I}a = a$, como $det(\mathbb{I}) = 1$, entonces $\mathbb{I} \in M_{n \times n}$

- Elemento inverso
  El elemento inverso de cada elemento del conjunto sería a^{-1}, el cual contiene numeros reales en sus elementos y

  $$det(a^{-1}) = 1/det(a) \neq 0,$$

  es por ello que $a^{-1} \in M_{n\times n}$
- Propiedad asociativa
  Se tiene que se cumple que

  $$a(bc) = (ab)c$$

por lo tanto el conjunto $M_{n\times n}$ es un conjunto con la operación de multiplicación.

- $(V, \cdot$ siendo V el conjunto de vectores de un espacio vectorial y $\cdot$ el producto escalar o producto interno

  - Cerradura
    Como la operación del producto interno nos llevaria al grupo de los reales, entonces no cumpliria la condición de cerradura, por lo tanto el conjunto V no es un grupo bajo el producto interno.

- $(V, \times)$ siendo V el conjunto de vectores de un espacio vectorial y $\times$ el prodcuto vectorial.
  Sea $a, b, c \in V$

  - Propiedad asociativa
    En este conjunto, la propiedad asociativa no se llega a cumplir ya que,

    $$a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$$
    $$a \times \hat{d}|b||c|sin(\theta_d) = |a||b|sin(\theta_f)\hat{f} \times c$$
    $$|a||b||c|sin(\theta_d)sin(\theta_g) = |a||b||c|sin(\theta_f)sin(\theta_h)$$

    como los argumentos de las funciones seno no necesariamente son iguales, entonces las dos expresions son diferentes, es por esto que el conjunto V no forma un grupo con el producto vectorial.