



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FCFM

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS



**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS**

**Aplicaciones de la Mecánica Cuántica
Radiación de cuerpo negro
Carlos Luna Criado**

Nombre:
Giovanni Gamaliel López Padilla

Matricula:
1837522

14 de octubre de 2020

Introducción

A finales del siglo XIX y comienzos del siglo XX se desarrollaron avances científicos que influyeron en la teoría cuántica de la radiación del cuerpo negro, este problema en su época fue conocido como radiación negra [7]. Si una cavidad de paredes perfectamente absorbentes se mantiene a una temperatura fija T , su interior contendrá energía en forma de ondas. Si la radiación está en equilibrio, ya sea en su interior como en las paredes, entonces la tasa con la que la energía es radiada a través de cualquier área unidad es independiente de la posición orientación de dicha superficie. El determinar y explicar la forma de la intensidad de la radiación son las componentes principales del problema del cuerpo negro.

A principios del siglo XX, Rayleigh [4] y Jeans [1] realizaron cálculos de la densidad de energía de la irradiancia (radiación solar de un solo rango de longitudes de onda) emitida por un cuerpo negro. Este resultado llevó a que las investigaciones hacia un conflicto entre los resultados experimentales y física clásica. Para encontrar alguna ley de distribución clásica, los dos autores tomaron como base a la teoría electromagnética clásica para demostrar la radiación dentro de la cavidad, en donde ellos proponían que esta debía de existir en forma de ondas estacionarias con nodos en las superficies dentro del cuerpo negro. De este modo, fue encontrada una ecuación para el número de ondas electromagnéticas estacionarias dentro del cuerpo, esta ecuación es la siguiente:

$$N(\nu)d\nu = \frac{8\pi V}{c^3} \nu^2 d\nu. \quad (1)$$

En seguida, los autores realizaron el cálculo de la energía total promedio del sistema para cada onda con frecuencia ν utilizando la ley de equipartición de la

energía, llegando a la ecuación

$$\bar{E} = kT. \quad (2)$$

Finalmente la irradiancia espectral clásica deducida por Rayleigh y Jeans es el producto del número de ondas estacionarias por unidad de volumen por la energía promedio y por la velocidad de la luz.

$$R_T(\nu)d\nu = \frac{8\pi\nu^2 kT}{c^2} d\nu \quad (3)$$

dando así también la ecuación para la densidad de energía emitida por el cuerpo negro.

$$\rho_T(\nu)d\nu = \frac{8\pi\nu^2 kT}{c^3} d\nu \quad (4)$$

Al momento de comparar con los datos experimentales se percataron que para frecuencias altas (longitudes de onda cortas) el espectro se iba hacia infinito, por lo que esto llevó a un problema, ya que esto no podía estar pasando. Esto se puede apreciar en la figura 1.

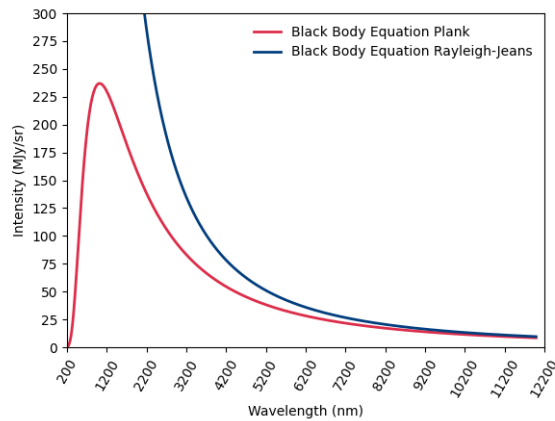


Figura 1: Espectro de un cuerpo negro obtenido a partir de la ecuación de Planck y ecuación de Rayleigh-Jeans

Planck se percató que sucedía esto con la teoría de Rayleigh y Jeans, pero empezó a plantear que mientras más subía la

frecuencia la energía media tenía que ir tendiendo a cero.

$$\begin{aligned}\bar{E} &\xrightarrow{\nu \rightarrow 0} kT \\ \bar{E} &\xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} 0\end{aligned}$$

Para calcular la energía promedio es necesario determinar el valor de la integral de la ecuación 5 donde cada valor de \bar{E} este pesado por su probabilidad.

$$\bar{E} = \frac{\int_0^{\infty} EP(E)dE}{\int_0^{\infty} P(E)dE} = kT \quad (5)$$

Donde la distribución de probabilidad $P(E)$ de Boltzmann es:

$$P(E) = \frac{e^{-E/kT}}{kT} \quad (6)$$

La contribución de Planck surgió cuando postuló que la energía de las ondas electromagnéticas dentro de la cavidad se intercambian discretamente. De este modo, Planck tomó los valores de $E = 0, \Delta E, 2\Delta E, \dots$, como el conjunto de valores permitidos para la energía siendo ΔE el intervalo uniforme entre valores sucesivos.

En donde Planck determinó una relación lineal entre ΔE y ν , a partir de ajustes experimentales Planck determinó el valor de la constante $h = 6.57 \times 10^{-34} Js$, el cual es muy cercano al actual ($h = 6.63 \times 10^{-34} Js$).

A partir de resolver la integral 5, Planck obtuvo la energía promedio dada por:

$$E(\nu) = \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}. \quad (7)$$

De este modo, el valor que se obtiene para la densidad energía espectral $\rho_T(\nu)$ usando la energía $\bar{E}(\nu)$ es:

$$\rho_T(\nu)d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1} \quad (8)$$

Metodología

En el paper [2] se menciona la manera en la cual se obtuvieron los datos del COBE-FIRAS, junto con la ecuación 9, la cual da el espectro electromagnético de un cuerpo negro con temperatura T , esto con unidades de $W/m^2 sr Hz$, las mediciones de COBE-FIRAS se realizaron en Mjy/sr , por lo que se procedió a realizar un cambio de unidades tomando en cuenta que $1Jy/sr \rightarrow 10^{-26}W/m^2 sr Hz$

$$S(\nu, T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} \quad (9)$$

Y la frecuencia se encuentra medida en cm^{-1} , por lo que se pasara de esta unidad a Hz tomando en cuenta la relación $c = \lambda\nu$.

Resultados

Al realizar el ajuste por medio de *scipy* en el lenguaje *python*, se obtuvo que la temperatura a la cual se ajusta a los datos es:

$$T = 2.72502K$$

Comparando los datos con el espectro electromagnético correspondiente a esta temperatura se obtiene la figura 2

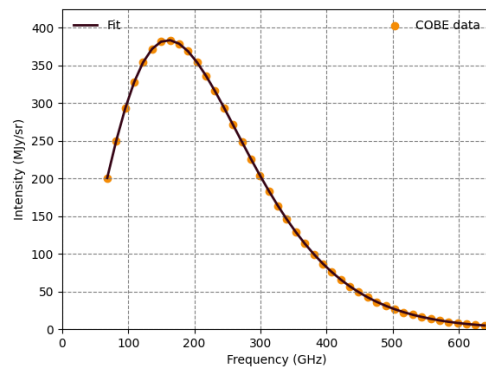


Figura 2: Fit de los datos proporcionados por el satélite FIRAS de la misión COBE

obteniendo así, un coeficiente de determinación con el ajuste de:

$$R^2 = 0.99999972482939$$

Y para calcular la diferencia relativa entre la medición y el modelo planteado por Planck se uso la ecuación 10 en cada punto donde tengamos el conjunto medición-modelo

$$RD_i = \frac{100|S_i(\nu, T) - COBE_i|}{COBE_i} \quad (10)$$

Y calculando el valor medio de estos valores obtenemos que este es igual a:

$$\langle RD \rangle = 0.3205 \%$$

Realizando el calculo para diferentes temperaturas en el intervalo [3000, 6000] para así, calcular el espectro electromagnético correspondiente al cuerpo negro a esa temperatura obtenemos la figura 3

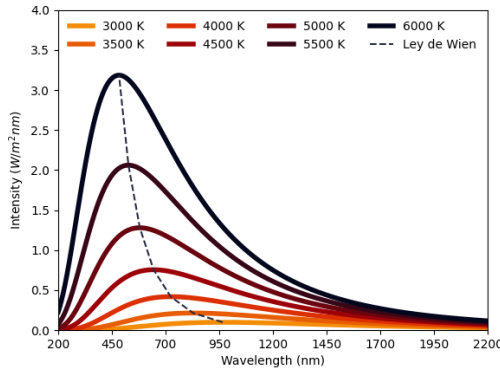


Figura 3: Espectro electromagnético para varias temperaturas.

en donde al encontrar las posiciones en que suceden los picos del espectro y unirlos se llega a formar una curva, la cual es llamada la ley de Wien.

Los puntos que se obtuvieron para las diferentes temperaturas son los siguientes:

Temperatura (k)	λ (nm)
3000	966
3500	828
4000	724
4500	644
5000	580
5500	527
6000	483

Cuadro 1: Longitudes de onda en donde sucedio un pico en el espectro electromagnético con su respectiva temperatura del cuerpo negro

La ley de Wien es la siguiente:

$$\lambda_{max} = \frac{2.898 \times 10^{-3} m \cdot K}{T} \quad (11)$$

la cual se puede reescribir de la siguiente manera para que esta sea una linea recta:

$$\lambda_{max} = 2.898 \times 10^{-3} T^{-1} \quad (12)$$

por lo que le podemos aplicar una regresión lineal a los datos de la tabla 1 para así poder nosotros calcular la constante de Wien.

En la figura 4 se observan los datos de la tabla 1, la ecuación 11 y la regresión lineal que se realizó, en donde la constante de Wien calculada fue:

$$C_{Wien} = 2.8968 \times 10^{-3}$$

y su diferencia relativa a la teorica es de:

$$RD_{Wien} = 0.0347 \%$$

por lo que se pudo llegar a comprobar la ley de Wien con estos datos.

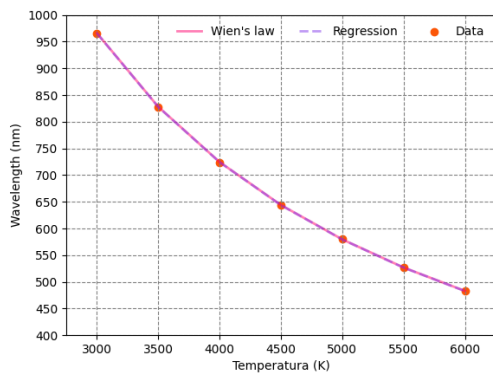


Figura 4: Regresión de los datos para comprobar la ley de Wien

Los códigos se encuentran en la sección **Código**, estos como link hacia un *Github*

Conclusiones

El planteamiento que habían realizado Rayleigh y Jeans sobre que la energía estaba distribuida de manera uniforme era errónea y que el cambio que realizó Planck al proponer la distribución de Boltzmann esto debido a los límites de la energía media fue lo que ayudó a que el problema de la radiación de cuerpo negro sea solucionado y corroborado por mediciones experimentales.

Código

- Github - black_body.py
Este código realiza el fit de los datos de COBE guardados en el archivo *data.txt* y crea la figura 2
- Github - wien law.py
Este código realiza el cálculo del es-

pectro electromagnético de un cuerpo negro para diferentes temperaturas, localiza sus picos y en base a ello opera una regresión lineal para obtener la constante de Wien.

Referencias

- [1] J.H. Jeans B.A. Lxv. on the conditions necessary for equipartition of energy. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 4(23):585–596, 1902.
- [2] C Ecilia C Eccarelli, D Avid J H Ollenbach, and A Lexander G G M T Ielens. Received 1996 January 16 ; accepted 1996 May 13. 1:400–426, 1996.
- [3] D. J. Fixsen and J. C. Mather. The Spectral Results of the Far-Infrared Absolute Spectrophotometer Instrument on COBE . *The Astrophysical Journal*, 581(2):817–822, 2002.
- [4] Lord Rayleigh F.R.S. Liii. remarks upon the law of complete radiation. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 49(301):539–540, 1900.
- [5] Timm Kr. Unit conversion in LBM. *Metal Forming*, pages 1–4, 2011.
- [6] Emiliano Muñoz. Revisión histórica del concepto del cuanto de luz, 07 2015.
- [7] M. Planck. Ueber das Gesetx. *Annalen der Physik*, 4(October):553–563, 1901.