UANL
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FCFM
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

Tópicos de Mécanica Cuántica
Examen primer parcial

Enrique Valbuena Ordonez

Nombre:
Giovanni Gamaliel López Padilla

Matricula:
1837522

21 de septiembre de 2020

Calcular los siguientes conmutadores e interpretar físicamente el resultado

1) $[\hat{H}, \hat{x}]$
Se sabe que el conmutador es igual a:

$$[\hat{H}, \hat{x}] = (\hat{H}\hat{x} - \hat{x}\hat{H})\psi \tag{1}$$

donde

$$\hat{H} = \frac{\hat{P}^2}{2m} + V(\vec{x}) \tag{2}$$

$$\hat{x} = x \tag{3}$$

calculando la parte izquierda de la ecuación 1 con 2 y 3, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\hat{H}\hat{x}\psi &= \left(\frac{\hat{P}^2}{2m} + V(\vec{r})\right)(x\psi) \\
&= \frac{\hat{P}^2}{2m}x\psi + V(\vec{r})x\psi \\
&= \left(\frac{\hat{P}_x^2 + \hat{P}_y^2 + \hat{P}_z^2}{2m}\right)x\psi + V(\vec{r})x\psi \\
&= -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\nabla^2(x\psi)\right) + V(\vec{r})x\psi \\
&= -\frac{\hbar^2}{2m}\left(x\nabla^2(\psi) + 2\nabla\psi\right) + V(\vec{r})x\psi
\end{aligned}$$

por lo tanto:

$$\hat{H}\hat{x}\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(x\nabla^2(\psi) + 2\nabla\psi\right) + V(\vec{r})x\psi \tag{4}$$

calculando la parte derecha de la ecuación 1 con 2 y 3, se tiene que:

$$\hat{x}\hat{H}\psi = x\left(\frac{\hat{P}^2}{2m} + V(\vec{r})\right)(\psi) \tag{5}$$

$$= x\left(\frac{\hat{P}^2}{2m}\psi + V(\vec{r})\psi\right) \tag{6}$$

$$= x\left(\frac{\hat{P}_x^2 + \hat{P}_y^2 + \hat{P}_z^2}{2m}\right)\psi + xV(\vec{r})\psi \tag{7}$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m}x\left(\nabla^2(\psi)\right) + xV(\vec{r})\psi \tag{8}$$

$$\tag{9}$$

juntando por lo tanto la ecuación 1 es:

$$\begin{aligned}
[\hat{H}, \hat{x}] &= (\hat{H}\hat{x} - \hat{x}\hat{H})\psi \\
&= -\frac{\hbar^2}{2m}\left(x\nabla^2(\psi) + 2\nabla\psi\right) + V(\vec{r})x\psi + \frac{\hbar^2}{2m}x\left(\nabla^2(\psi)\right) - xV(\vec{r})\psi \\
&= -\frac{\hbar^2}{m}\nabla\psi
\end{aligned}$$

por lo tanto:

$$[\hat{H}, \hat{x}] = -\frac{\hbar^2}{m}\nabla\psi$$

La interpretación física es que no se puede realizar a la energía y posición de la partícula simultaneamente, ya que la medición que no se realice su valor se vera afectado.

4) $[\hat{x}, \hat{P}_x]$
Se sabe que el conmutador es igual a:

$$[\hat{x}, \hat{P}_x] = (\hat{x}\hat{P} - \hat{x}\hat{P}_x)\psi \tag{10}$$

calculando la parte izquierda de la ecuación 10, se tiene que:

$$\begin{aligned}\hat{x}\hat{P}_x &= x\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\psi\right)\\ &= -i\hbar x\frac{\partial}{\partial x}\psi\end{aligned}$$

por lo que:

$$\hat{x}\hat{P}_x = -i\hbar x\frac{\partial}{\partial x}\psi \tag{11}$$

calculando la parte derecha de la ecuación 10, se tiene que:

$$\begin{aligned}\hat{P}_x\hat{x} &= -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}(x\psi)\\ &= -i\hbar x\frac{\partial}{\partial x}\psi - i\hbar\psi\end{aligned}$$

por lo que:

$$\hat{P}_x\hat{x} = -i\hbar x\frac{\partial}{\partial x}\psi - i\hbar\psi \tag{12}$$

por lo que juntando la ecuación 11 y 12 en la ecuación 10, lo cual se obtiene que:

$$\begin{aligned}[\hat{x}, \hat{P}_x] &= i\hbar\psi + i\hbar x\frac{\partial}{\partial x}\psi - i\hbar x\frac{\partial}{\partial x}\psi\\ &= i\hbar\psi\end{aligned}$$

por lo tanto:

$$[\hat{x}, \hat{P}_x] = i\hbar \tag{13}$$

La interpretación física que le daria es que cuando sucede alguna alteración la posición o al momento lineal en x inmediatamente sucede un cambio en el estado no afectado inicialmente.

7) $[\hat{L_y}, \hat{L_z}]$
Se sabe que

$$[\hat{L_y}, \hat{L_z}] = (\hat{L_y}\hat{L_z} - \hat{L_z}\hat{L_y}) \tag{14}$$

$$L_y = \frac{\hbar}{i}\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right) \tag{15}$$

$$L_z = \frac{\hbar}{i}\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right) \tag{16}$$

Calculando la parte izquierda de la ecuación 14 con 15 y 16, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\hat{L}_y\hat{L}_z &= \hbar^2\left(z\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial}{\partial y}\right) - z\frac{\partial}{\partial x}\left(y\frac{\partial}{\partial x}\right) - x\frac{\partial}{\partial z}\left(x\frac{\partial}{\partial y}\right) + x\frac{\partial}{\partial z}\left(y\frac{\partial}{\partial x}\right)\right) \\
&= -\hbar^2\left(z\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x}x + zx\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} - zy\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} - z\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}y\right. \\
&\left.-x^2\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial y} - x\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial z}x + xy\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x}y\right) \\
&= -\hbar^2\left(z\frac{\partial}{\partial y} + zx\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} - +zy\frac{\partial^2}{\partial x^2} - x^2\frac{\partial^2}{\partial z\partial y} + xy\frac{\partial^2}{\partial z\partial x}\right)
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\hat{L}_y\hat{L}_z = -\hbar^2\left(z\frac{\partial}{\partial y} + zx\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} - +zy\frac{\partial^2}{\partial x^2} - x^2\frac{\partial^2}{\partial z\partial y} + xy\frac{\partial^2}{\partial z\partial x}\right) \tag{17}$$

Calculando la parte izquierda de la ecuación 14 con 15 y 16, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\hat{L}_y\hat{L}_z &= \hbar^2\left(x\frac{\partial}{\partial y}\left(z\frac{\partial}{\partial x}\right) - y\frac{\partial}{\partial x}\left(z\frac{\partial}{\partial x}\right) - x\frac{\partial}{\partial y}\left(x\frac{\partial}{\partial z}\right) + y\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial}{\partial z}\right)\right) \\
&= -\hbar^2\left(xz\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} - x^2\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial z} - zy\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} - yx\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial z}\right)
\end{aligned}$$

por lo tanto:

$$\hat{L}_y\hat{L}_z = -\hbar^2\left(xz\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} - x^2\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial z} - zy\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} - yx\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial z}\right) \tag{18}$$

sustitutendo las ecuaciones 17 y 18 en 14, se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
[\hat{L_y}, \hat{L_z}] &= -\hbar^2\left(z\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial z}\right) \\
&= i\hbar L_x
\end{aligned}$$

por lo tanto:

$$[\hat{L_y}, \hat{L_z}] = i\hbar L_x \tag{19}$$

La interpretación física de esto, es que los estados del momento angular x,y y z estan relacionados de forma en que si uno cambia, los otros lo haran.

Demostrar que los siguientes estados satisfacen la ecuación de Schrödinger

- $\hat{P}_x\psi$

Sea
$$\psi' = \hat{P}_x\psi \tag{20}$$
sustituyendo esta función en la ecuación de Schrödinger se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi' + V(r)\psi' &= i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi' \\
-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi' + V(r)\psi' &= i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi' \\
-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\psi\right) + V(r)\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\psi\right) &= i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\psi\right) \\
\left(\frac{\hbar}{i}\right)\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}\psi\right) + \left(\frac{\partial}{\partial x}\psi\right)V(r)\right] &= \left(\frac{\hbar}{i}\right)i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial x}\psi\right) \\
-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\frac{\partial}{\partial x}\right)(\psi) + \left(\frac{\partial}{\partial x}\psi\right)V(r) &= i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x}\psi \\
-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)(\psi) + \left(\frac{\partial}{\partial x}\psi\right)V(r) &= i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t}\psi \\
\left[\frac{\partial}{\partial x}\right]\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)(\psi) + \psi V(r)\right) &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi \\
\left[\frac{\partial}{\partial x}\right]\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V(r)\psi\right) &= \left[\frac{\partial}{\partial x}\right]\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi\right)
\end{aligned}$$

y como la función ψ es solución a la ecuación de Schrödinger, entonces la función ψ' definida en 20 es solución a la ecuación de Schrödinger

Demostrar que las siguientes transformaciones discretas dejan invariante a la ecuación de Schrödinger en 1D y especificar qué condiciones son necesarias para que esto ocurra; usar una solución separable

- $\Pi\psi(t) = \psi(-t)$

Sea el operador de paridad
$$\Pi\psi(t) = \psi(-t) \tag{21}$$
Para demostrar que se deja invariante a la ecuación de Schrödinger se tiene que comprobar que:
$$[\Pi, \hat{H}] = 0 \tag{22}$$
ya que con esto podemos decir que el operador paridad es constante del movimiento, de modo que si en el instante inical el estado de la partícula tiene paridad, en cualquier instante posterior seguirá teniendo la misma paridad.
Calculando la ecuación 22 tomando en cuenta que la funció de onda es separable se tiene que:
$$[\Pi, \hat{H}] = \Pi\hat{H}\psi(x,t) - \hat{H}\Pi\psi(x,t)$$
La parte izquierda es igual a:
$$\begin{aligned}
\hat{H}\Pi\psi(x,t) &= \hat{H}\Pi\psi(x)\psi(t) \\
&= \hat{H}\psi(x)\Pi\psi(t) \\
&= \hat{H}\psi(x)\psi(-t) \\
&- \frac{\hbar}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x)\psi(-t) + V(x)\psi(x)\psi(-t) \\
&- \frac{\hbar}{2m}\psi(-t)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x) + \psi(-t)V(x)\psi(x)
\end{aligned}$$
$$\hat{H}\Pi\psi(x,t) = -\frac{\hbar}{2m}\psi(-t)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x) + \psi(-t)V(x)\psi(x) \tag{23}$$
La parte derecha es igual a:
$$\begin{aligned}
\Pi\hat{H}\psi(x,t) &= \Pi\left(-\frac{\hbar}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t) + V(x)\psi(x,t)\right) \\
&= \Pi\left(-\frac{\hbar}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x)\psi(t) + V(x)\psi(x)\psi(t)\right) \\
&= \Pi\left(-\frac{\hbar}{2m}\psi(t)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x) + \psi(t)V(x)\psi(x)\right) \\
&= -\frac{\hbar}{2m}\Pi\psi(t)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x) + \Pi\psi(t)V(x)\psi(x) \\
&= -\frac{\hbar}{2m}\psi(-t)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x) + \psi(-t)V(x)\psi(x)
\end{aligned}$$

$$\Pi\hat{H}\psi(x,t) = -\frac{\hbar}{2m}\psi(-t)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x) + \psi(-t)V(x)\psi(x) \tag{24}$$

como la ecuacion 24 y 23 son lo mismo, entonces la ecuación 22 es cierta, por lo tanto el operador paridad deja invariante a la ecuación de Schrödinger.

Las condiciones encontradas para que esto se cumpla es que la transformación de paridad sea una transformación lineal y que afecte unicamente al tiempo, ya que si induce algun cambio en el espacio esta sería diferente, otra condición es que este solamente puede dejar invariante ante potenciales que tiene paridad en el tiempo, o en su caso no dependa de esta variable.