UANL
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FCFM
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

Tópicos de Mécanica Cuántica
Examen parcial N°3

Enrique Valbuena Ordonez

Nombre:
Giovanni Gamaliel López Padilla

Matricula:
1837522

30 de noviembre de 2020

Obtener la expresión cuántica para el campo electromagnético a partir de la lagrangiana electromagnética clásica.
Se tiene que la lagrangiana del electromagnétismo clásico es

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

donde

$$F^{\mu\nu} = F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{Ex}{c} & -\frac{Ey}{c} & -\frac{Ez}{c} \\ \frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ \frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ \frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

por lo que el lagrangiano puede ser descrito de la siguiente manera:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2\mu_0}\left(\frac{E^2}{c^2} + B^2\right) = \frac{1}{2}\left(\epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0}\right)$$

Se tiene que el campo eléctrico y magnético puedes obtenerse a partir de las siguientes operaciones:

$$E = -\nabla V - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \qquad \vec{B} = \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right)$$

sustituyendo el campo eléctrico y magnético en la lagrangiana se obtiene lo siguiente:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\epsilon_0\left((\nabla V)^2 + \frac{2}{c}\nabla V \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right)^2\right) + \frac{1}{\mu_0}\left(\nabla \times \vec{A}\right)^2\right)$$

donde se puede obtener las coordenasas generalizadas y momento generalizado es

$$q = \left\langle v, \vec{A}\right\rangle \qquad p = \left\langle 0, -\frac{\epsilon_0}{c}\vec{E}\right\rangle$$

calculando el hamiltoniano se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} =& \sum p_i \dot{q}_i - \mathcal{L} \\
=& -\frac{\epsilon_0}{c}\vec{E}\cdot\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{B^2}{\mu_0} - \epsilon E^2 \\
=& -\frac{\epsilon_0}{c}\vec{E}\cdot\left[-c\left[\vec{E} + \nabla V\right]\right] + \frac{B^2}{\mu_0} - \epsilon_0 E^2 \\
=& \epsilon_0 E^2 + \epsilon \vec{E}\cdot\nabla V + \frac{B^2}{2\mu_0} - \frac{\epsilon_0}{2}E^2 \\
=& \epsilon_0 \vec{E}\cdot\nabla V + \frac{1}{2}\left(\frac{B^2}{\mu_0} + \epsilon_0 \vec{E}^2\right)
\end{aligned}$$

usando la norma de Coulomb, que son las siguientes

$$V = 0 \qquad \nabla\cdot\vec{A} = 0$$

por lo que el hamiltoniano del sistema es

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\left(\epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0}\right)$$

y los campos eléctricos y magnético pasan a tener la siguiente forma

$$E = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \qquad \vec{B} = \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right)$$

de las expresión del campo eléctrico podemos obtener que

$$\dot{q} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -cE$$

y de la expresión para p, se puede obtener que

$$\frac{c^2}{\epsilon_0} p = -c\vec{E}$$

por lo tanto

$$\dot{q} = \frac{c^2}{\epsilon_0} p$$

de otra manera:

$$\begin{aligned} p =& -\frac{\epsilon_0}{c}\vec{E} \\ =& -\frac{\epsilon_0}{c}\left(-\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) \\ =& \frac{\epsilon_0}{c^2}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\epsilon_0}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}$$

donde

$$\dot{p} = \epsilon_0 \ddot{q} = \epsilon_0 \nabla^2 A$$

al igualar estas dos expresiones obtenemos la siguiente ecuación

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0$$

la cual es la ecuación diferencial de una onda, es por ello que se propone que el potencial vector $\vec{A}$, puede escribirse como una serie de Fourier tal que:

$$A(\vec{r}, t) = \sum_k \left[\vec{a}_p e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega_k t\right)} + \vec{a}_p^* e^{-i\left(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega_k t\right)}\right]$$

donde $\vec{a}_p$ es un operador tal que contiene la infomación de la polarización y depende unicamente del tiempo, $\vec{k}$ es el número de onda asociado al momento, ω_k, es la frecuencia que contiene cada onda asociada a la energía de De Broglie. Reescribiendo esta expresión podemos separar la dependencia temporal en la forma

$$A(\vec{r}, t) = \sum_k \left[\vec{\epsilon}_k e^{-i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}\right)} + \vec{\epsilon}_k^* e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}\right)}\right]$$

donde

$$\vec{\epsilon}_k = \vec{a}_p e^{i\omega_k t} \qquad \vec{\epsilon}_k^* = \vec{a}_p^* e^{-i\omega_k t}$$

por lo mismo, las expresiones del campo eléctrico y magnético las podemos escribir de la siguiente manera:

$$\vec{E} = \sum_k \left(\vec{E}_k(t) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + \vec{E}_k^*(t) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \right)$$
$$\vec{B} = \sum_k \left(\vec{B}_k(t) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + \vec{B}_k^*(t) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \right)$$

calculando $\partial\vec{A}/\partial t$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} =& \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\sum_k \left[\vec{\epsilon}_k e^{-i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}\right)} + \vec{\epsilon}_p^* e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}\right)} \right] \\
=& \frac{1}{c}\sum_k \left[e^{-i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}\right)} \frac{\partial\vec{\epsilon}_k}{\partial t} + e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}\right)} \frac{\partial\vec{\epsilon}_p^*}{\partial t} \right] \\
=& \frac{1}{c}\sum_k \left[e^{-i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}\right)} (i\omega_k)\vec{\epsilon}_k + e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}\right)} (i\omega_k\vec{\epsilon}_k)^* \right] \\
=& \sum_k \left[e^{-i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}\right)} (i|\vec{k}|)\vec{\epsilon}_k + e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}\right)} (i|\vec{k}|\vec{\epsilon}_k)^* \right]
\end{aligned}$$

por lo tanto:

$$\sum_k \left(\vec{E}_k(t) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + \vec{E}_k^*(t) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \right) = \sum_k \left[e^{-i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}\right)} (ik)\vec{\epsilon}_k + e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}\right)} (ik\vec{\epsilon}_k)^* \right]$$

donde se apreia que:

$$\vec{E}_k = i|\vec{k}|\vec{\epsilon}_k$$

calculando $\vec{\nabla}\times\vec{A}$ se tiene que:

$$\begin{aligned}
\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)_k =& \epsilon_{xyz}\partial_y A_z \\
=& i\epsilon_{xyz} k_y A_z \\
=& i\vec{k}\times\vec{A}_k
\end{aligned}$$

por lo tanto:

$$\vec{B}_k = i\vec{k}\times\vec{A}_k$$

por lo tanto, el campo electromagnético es

$$EM = \sum_k i\left(|\vec{k}|\vec{\epsilon}_k + \vec{k}\times\vec{A}_k \right) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} - i\left(|\vec{k}|\vec{\epsilon}_k^*(t) + \vec{k}\times\vec{A}_k^* \right) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$