UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

Tópicos de Mécanica Cuántica
Guia 3
Enrique Valbuena Ordonez

Nombre:
Giovanni Gamaliel López Padilla

Matricula:
1837522

29 de noviembre de 2020

1. Demostrar que la lagrangiana de interacción de Klein-Gordon es invariante de norma, posee simetria U(1) y obtener las corrientes de Noether asociadas a las respectivas transformaciones

- Invariante de norma.
  Se tiene que:
  $$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi)^* (\partial^\mu \phi) - m^2 \phi^* \phi$$
  aplicando la transformaciónes:
  $$\partial^\mu \to \partial^\mu - igA^\mu$$
  se tiene lo siguiente:
  $$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi^* + igA_\mu \phi^*)(\partial^\mu \phi - igA^\mu \phi) - m^2 \phi^* \phi.$$
  Realizando las operaciones se tiene que:
  $$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi + igA_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - igA^\mu \phi \partial_\mu \phi^* + g^2 A^\mu A_\mu \phi^* \phi$$
  tomando en cuenta las transformaciones de norma, tales que:
  $$\phi \to e^{i\theta}\phi \qquad A_\mu \to A_\mu + \frac{1}{g}\partial_\mu \theta$$
  se tiene que
  $$\begin{aligned}\mathcal{L}' = &(\partial_\mu \phi^*)(\partial^\mu \phi) + ig(A_\mu - \partial_\mu \theta)\phi'^* \partial^\mu \phi' \\ &- ig(A^\mu - \partial^\mu \theta)\phi'^* \partial_\mu \phi' + g^2 \left(A^\mu + \frac{1}{g}\partial^\mu \theta\right)\left(A_\mu + \frac{1}{g}\partial_\mu \theta\right)\phi'^* \phi'\end{aligned}$$
  calculando $(\partial_\mu \phi^*)(\partial^\mu \phi)$
  $$\begin{aligned}(\partial_\mu \phi^* - igA_\mu \phi^*)(\partial^\mu \phi - igA^\mu \phi) &= \left(e^{-i\theta}\partial_\mu \phi^* - ie^{-i\theta}\phi^* \partial_\mu \theta\right)\left(e^{i\theta}\partial_\mu \phi^* + ie^{i\theta}\phi^* \partial_\mu \theta\right) \\ &(\partial_\mu \phi^* - i\phi^* \partial_\mu \theta)(\partial_\mu \phi^* + i\phi^* \partial_\mu \theta)\end{aligned}$$
  teniendo asi
  $$(\partial_\mu \phi^* + igA_\mu \phi^*)(\partial^\mu \phi - igA^\mu \phi) = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - i\phi^* \partial_\mu \theta \partial^\mu \phi + i\phi \partial^\mu \partial_\mu \phi^* + \phi^* \phi \partial_\mu \theta \partial^\mu \theta$$
  calculando $ig\left(A_\mu + \frac{1}{g}\partial_\mu \theta\right)\phi'^* \partial^\mu \phi'$
  $$\begin{aligned}ig\left(A_\mu + g^{-1}\partial_\mu \theta\right)\phi'^* \partial^\mu \phi' &= (-igA_\mu + i\partial_\mu \theta)(\phi'^* \partial^\mu \phi') \\ &= (igA_\mu + i\partial_\mu \theta)e^{-i\theta}\phi^* \left(e^{i\theta}\partial^\mu \phi + i\phi e^{i\theta}\partial^\mu \theta\right) \\ &= (igA_\mu + i\partial_\mu \theta)\phi^* (\partial^\mu \phi + i\phi \partial^\mu \theta)\end{aligned}$$
  teniendo asi:
  $$ig\left(A_\mu + g^{-1}\partial_\mu \theta\right)\phi' \partial^\mu \phi'^* = igA_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - g\phi^* A_\mu \partial^\mu \theta + i\phi^* \partial^\mu \phi \partial_\mu \theta - \phi \phi^* \partial^\mu \theta \partial_\mu \theta$$

calculando $ig\left(A^\mu + \frac{1}{g}\partial^\mu\theta\right)\phi'\partial_\mu\phi'^*$

$$
\begin{aligned}
ig\left(A^\mu + \frac{1}{g}\partial^\mu\theta\right)\phi'\partial_\mu\phi'^* =& ig\left(A^\mu + \frac{1}{g}\partial^\mu\theta\right)e^{i\theta}\phi\left(e^{-i\theta}\partial_\mu\phi^* - i\phi^*e^{-i\theta}\partial_\mu\theta\right) \\
=& ig\left(A^\mu + \frac{1}{g}\partial^\mu\theta\right)\phi\left(\partial_\mu\phi^* - i\phi^*\partial_\mu\theta\right) \\
=& \left(igA^\mu + i\partial^\mu\theta\right)\phi\left(\partial_\mu\phi^* - i\phi^*\partial_\mu\theta\right)
\end{aligned}
$$

teniendo asi:

$$ig\left(A^\mu + \frac{1}{g}\partial^\mu\theta\right)\phi'^*\partial_\mu\phi' = igA^\mu\phi\partial_\mu\phi^* + g\phi^*\phi A^\mu\partial_\mu\theta + i\phi\partial^\mu\theta\partial_\mu\phi^* + \phi^*\phi\partial^\mu\theta\partial_\mu\theta$$

calculando $g^2\left(A^\mu + \frac{1}{g}\partial^\mu\theta\right)\left(A_\mu + \frac{1}{g}\partial_\mu\theta\right)\phi'^*\phi'$

$$
\begin{aligned}
g^2\left(A^\mu + \frac{1}{g}\partial^\mu\theta\right)\left(A_\mu + \frac{1}{g}\partial_\mu\theta\right)\phi'^*\phi' =& g^2\left(A^\mu A_\mu + \frac{1}{g}A^\mu\partial_\mu\theta + \frac{1}{g}A_\mu\partial^\mu\theta + \frac{1}{g^2}\partial^\mu\theta\partial_\mu\theta\right)\phi^*\phi \\
=& \left(g^2A^\mu A_\mu + gA^\mu\partial_\mu\theta + gA_\mu\partial^\mu\theta + \partial^\mu\theta\partial_\mu\theta\right)\phi^*\phi
\end{aligned}
$$

teniendo asi

$$g^2\left(A^\mu + \frac{1}{g}\partial^\mu\theta\right)\left(A_\mu + \frac{1}{g}\partial_\mu\theta\right)\phi'^*\phi' = g^2A^\mu A_\mu\phi^*\phi + gA^\mu\partial_\mu\theta\phi^*\phi + gA_\mu\partial^\mu\theta\phi^*\phi + \partial^\mu\theta\partial_\mu\theta\phi^*\phi$$

Realizando la suma de cada parte se tiene que

$$
\begin{array}{cccc}
\partial_\mu\phi^*\partial^\mu\phi & \cancel{-i\phi^*\partial_\mu\theta\partial^\mu\phi} & \cancel{+i\phi\partial^\mu\partial_\mu\phi^*} & \cancel{+\phi^*\phi\partial_\mu\theta\partial^\mu\theta} \\
+igA_\mu\phi^*\partial^\mu\phi & \cancel{-g\phi^*A_\mu\partial^\mu\theta} & \cancel{+i\phi^*\partial^\mu\phi\partial_\mu\theta} & \cancel{-\phi\phi^*\partial^\mu\theta\partial_\mu\theta} \\
-igA^\mu\phi\partial_\mu\phi^* & \cancel{-g\phi^*\phi A^\mu\partial_\mu\theta} & \cancel{-i\phi\partial^\mu\theta\partial_\mu\phi^*} & \cancel{-\phi^*\phi\partial^\mu\theta\partial_\mu\theta} \\
+g^2A^\mu A_\mu\phi^*\phi & \cancel{+gA^\mu\partial_\mu\theta\phi^*\phi} & \cancel{+gA_\mu\partial^\mu\theta\phi^*\phi} & \cancel{+\partial^\mu\theta\partial_\mu\theta\phi^*\phi}
\end{array}
$$

teniendo asi la invarianza en la lagrangiana de interacción de Klein-Gordon

- Corrientes de Noether.
  Se tiene que:

$$\delta\mathcal{L} = 0$$

entonces:

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^*}\delta\phi^* + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi)}\delta(\partial^\mu\phi) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi^*)}\delta(\partial^\mu\phi^*)$$

donde

$$\delta\phi = i\alpha\phi \qquad \delta(\partial^\mu\phi) = i\alpha\partial_\mu\phi$$

$$\delta\phi = -i\alpha\phi \qquad \delta(\partial^\mu\phi) = -i\alpha\partial_\mu\phi$$

entonces

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{L} =& i\alpha\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\phi - i\alpha\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^*}\phi^* + i\alpha\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi)}\partial_\mu\phi - i\alpha\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi^*)}\partial_\mu\phi^* \\
=& i\alpha\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\phi - i\alpha\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^*}\phi^* - i\alpha\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi)}\right)\phi + i\alpha\partial^\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi)}\phi\right) - i\alpha\partial^\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi^*)}\phi^*\right) \\
=& i\alpha\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi)}\right)\right]\phi - i\alpha\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^*} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi^*)}\right)\right]\phi^* + i\alpha\partial^\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi)}\phi - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi^*)}\phi^*\right] \\
=& \partial^\mu\left(i\alpha\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi)}\phi - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi^*)}\phi^*\right]\right)
\end{aligned}$$

con lo cual obtenemos que:

$$\partial^\mu\left(i\alpha\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi)}\phi - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi^*)}\phi^*\right]\right) = 0$$

donde

$$j_\mu = i\alpha\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi)}\phi - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi^*)}\phi^*\right]$$

calculando las derivadas parciales se tiene que:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi)} = \partial_\mu\phi^* + igA_\mu\phi^* \qquad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi^*)} = 0$$

por lo tanto:

$$j_\mu = g\alpha\left(\phi\partial_\mu\phi^* + igA_\mu\phi\phi^*\right)$$

2. Obtener la expresión para los términos de la energía de un sistema descrito por la ecuación de Schrödinger originalmente degenerado al primer orden de la teoría de perturbaciones.

Se tiene que la energía de un sistema es:

$$\left\langle\psi_a^0\left|H^1\right|\psi_b^0\right\rangle = E'\delta_{ab}$$

entonces definiendo

$$\left\langle\psi_a^0\left|H^1\right|\psi_b^0\right\rangle = W_{ab}$$

y se obtiene que:

$$\begin{aligned}
\alpha\left\langle\psi_m^0\left|H^1\right|\psi_m^0\right\rangle + \beta\left\langle\psi_m^0\left|H^1\right|\psi_n^0\right\rangle &= \alpha E' \\
\alpha\left\langle\psi_n^0\left|H^1\right|\psi_m^0\right\rangle + \beta\left\langle\psi_n^0\left|H^1\right|\psi_n^0\right\rangle &= \beta E'
\end{aligned}$$

lo cual lo podemos escribir como

$$\alpha W_{mm} + \beta W_{mn} = \alpha E' \tag{1}$$
$$\alpha W_{nm} + \beta W_{nn} = \beta E' \tag{2}$$

en donde se puede obtener que

$$W_{nm} = W_{mn}^*$$

de la ecuación 1 se tiene que

$$W_{mn} = \frac{\alpha}{\beta}\left(E' - W_{mm}\right) \tag{3}$$

multiplicando por la derecha W_{mn} en la ecuación 2, se tiene que

$$\alpha W_{mn}W_{nm} + \beta W_{mn}W_{nn} = \beta E' W_{mn} \alpha W_{mn}W^{*}_{mn} = \beta W_{mm}\left(E' - W_{mn}\right)$$

mutlplicando la ecuación 3

$$\begin{aligned}
\alpha \left|W_{mn}\right|^2 =& \alpha\left(E' - W_{mm}\right)\left(E' - W_{nn}\right)\\
=& E'^2 - (W_{mm} + W_{nn})E' + W_{mm}W_{nn}\\
=& \left(E' - \frac{\left(W_{mm} + W_{nn}\right)^2}{2}\right)^2 - \frac{\left(W_{mm} + W_{nn}\right)^2}{4} + W_{mm}W_{nn}
\end{aligned}$$

por lo que se tiene la expresión:

$$\alpha \left|W_{mn}\right|^2 - W_{mm}W_{nn} = \left(E' - \frac{\left(W_{mm} + W_{nn}\right)^2}{2}\right)^2 - \frac{\left(W_{mm} + W_{nn}\right)^2}{4}$$

despejando el término E'

$$\begin{aligned}
\alpha \left|W_{mn}\right|^2 - W_{mm}W_{nn} + \frac{\left(W_{mm} + W_{nn}\right)^2}{4} =& \left(E' - \frac{\left(W_{mm} + W_{nn}\right)^2}{2}\right)^2\\
\frac{\sqrt{4\left(\alpha\left|W_{mn}\right|^2 - W_{mm}W_{nn}\right) + \left(W_{mm} + W_{nn}\right)^2}}{2} =& E' - \frac{\left(W_{mm} + W_{nn}\right)^2}{2}
\end{aligned}$$

$$E' = \frac{\left(W_{mm} + W_{nn}\right)^2}{2} + \frac{\sqrt{4\left(\alpha\left|W_{mn}\right|^2 - W_{mm}W_{nn}\right) + \left(W_{mm} + W_{nn}\right)^2}}{2}$$

por lo tanto, la expresión para los términos de la energía de un sistema degenerado al primer orden de la teoría de perturbaciones es

$$E' = \frac{\left(W_{mm} + W_{nn}\right)^2 + \sqrt{4\left(\alpha\left|W_{mn}\right|^2 - W_{mm}W_{nn}\right) + \left(W_{mm} + W_{nn}\right)^2}}{2}$$

3. Obtener la expresión cuántica para el campo electromagnético a partir de la lagrangiana electromagnética clásica.

Se tiene que el campo eléctrico y magnético puedes obtenerse a partir de las siguientes operaciones:

$$E = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \qquad \vec{B} = -\left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right)$$

donde $\vec{A}$, es el potencial vector, el cual cumple la ecuación de onda:

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0$$

es por ello que se propone que el potencial vector $\vec{A}$, puede escribirse como una serie de Fourier tal que:

$$A(\vec{r},t) = \sum_k \left[\vec{a}_{\vec{p}} e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_k t\right)} + \vec{a}^*_{\vec{p}} e^{-i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_k t\right)} \right]$$

donde $\vec{a}_{\vec{p}}$ es un operador tal que contiene la infomación de la polarización y depende unicamente del tiempo, $\vec{k}$ es el número de onda asociado al momento, ω_k, es la frecuencia que contiene cada onda asociada a la energía de De Broglie. Reescribiendo esta expresión podemos separar la dependencia temporal en la forma

$$A(\vec{r},t) = \sum_k \left[\vec{\epsilon}_k e^{-i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}\right)} + \vec{\epsilon}^*_k e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}\right)} \right]$$

donde

$$\vec{\epsilon}_k = \vec{a}_{\vec{p}} e^{i\omega_k t} \qquad \vec{\epsilon}^*_k = \vec{a}^*_{\vec{p}} e^{-i\omega_k t}$$

por lo mismo, las expresiones del campo electríco y magnetico las podemos escribir de la siguiente manera:

$$\vec{E} = \sum_k \left(\vec{E}_k(t) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + \vec{E}^*_k(t) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \right)$$
$$\vec{B} = \sum_k \left(\vec{B}_k(t) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + \vec{B}^*_k(t) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \right)$$

calculando $\partial\vec{A}/\partial t$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} =& \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\sum_k \left[\vec{\epsilon}_k e^{-i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}\right)} + \vec{\epsilon}^*_{\vec{p}} e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}\right)} \right] \\
=& \frac{1}{c}\sum_k \left[e^{-i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}\right)} \frac{\partial\vec{\epsilon}_k}{\partial t} + e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}\right)} \frac{\partial\vec{\epsilon}^*_{\vec{p}}}{\partial t} \right] \\
=& \frac{1}{c}\sum_k \left[e^{-i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}\right)} (i\omega_k)\vec{\epsilon}_k + e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}\right)} (i\omega_k\vec{\epsilon}_k)^* \right] \\
=& \sum_k \left[e^{-i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}\right)} (i|\vec{k}|)\vec{\epsilon}_k + e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}\right)} (i|\vec{k}|\vec{\epsilon}_k)^* \right]
\end{aligned}$$

por lo tanto:

$$\sum_k \left(\vec{E}_k(t) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + \vec{E}^*_k(t) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \right) = \sum_k \left[e^{-i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}\right)} (ik)\vec{\epsilon}_k + e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}\right)} (ik\vec{\epsilon}_k)^* \right]$$

donde se apreia que:

$$\vec{E}_k = i|\vec{k}|\vec{\epsilon}_k$$

calculando $\vec{\nabla}\times\vec{A}$ se tiene que:

$$\begin{aligned}
\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)_k =& \epsilon_{xyz}\partial_y A_z \\
=& i\epsilon_{xyz} k_y A_z \\
=& i\vec{k}\times\vec{A}_k
\end{aligned}$$

por lo tanto:

$$\vec{B}_k = i\vec{k} \times \vec{A}_k$$

por lo tanto, el campo electromagnético es

$$EM = \sum_k i\left(|\vec{k}|\vec{\epsilon}_k + \vec{k} \times \vec{A}_k\right) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} - i\left(|\vec{k}|\vec{\epsilon}_k^*(t) + \vec{k} \times \vec{A}_k^*\right) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$