Covarianza de Lorentz de la ecuación de Dirac

$$x'^{\mu} = \underline{a}^{\mu}{}_{\nu}\, x^{\nu}$$

Transformaciones propias: $\det[\underline{a}^{\mu}{}_{\nu}] = +1$

A partir de la transformación identidad se genera una sucesión infinitesimal

Transformaciones impropias: $\det[a^{\mu}{}_{\nu}] = -1$

Transformaciones discretas que no se pueden obtener, a partir de la identidad, con sucesiones infinitesimales

$$\left.\begin{array}{l}\text{Ecuación de Dirac}\\ \text{Espinor}\end{array}\right\} \quad O,\ O'$$

$$\left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + i\hbar c \sum \hat{\alpha}_k \frac{\partial}{\partial x^k} - \hat{\beta} m_0 c^2 \right] \psi = 0$$

Multiplicando por $\hat{\beta}/c$

$$\left[i\hbar \hat{\beta} \underline{\frac{\partial}{c\partial t}} + i\hbar \sum \hat{\beta} \alpha_k \frac{\partial}{\partial x^k} - \underline{\hat{\beta}}^2 m_0 c \right] \psi = 0$$

Se define $\underline{\gamma^0 = \hat{\beta}}$, $\gamma^i = \hat{\beta}\alpha_i$ $i = 1, 2, 3$

$$\left[i\hbar \gamma^0 \frac{\partial}{\partial x_0} + i\hbar \sum \gamma^i \frac{\partial}{\partial x^i} - m_0 c \right] \psi = 0$$

$$\boxed{i\hbar \left[\gamma^0 \partial_0 + \gamma^1 \partial_1 + \gamma^2 \partial_2 + \gamma^3 \partial_3 \right] \psi - m_0 c \psi = 0}$$

Las relaciones $\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = 2\delta_{ij} \mathbb{1}$

$\boxed{\alpha_i \beta + \beta \alpha_i = 0}$ $\alpha_i^2 = \beta^2 = \mathbb{1}$

Ahora $\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2 g^{\mu\nu} \mathbb{1}$

Además γ^i $(i=1,2,3)$ son unitarias

es decir $\gamma^{i\dagger} = \gamma^{i^{-1}}$, y son antihermíticas ya que $(\gamma^i)^\dagger = -\gamma^i$

Se puede observar $\gamma^{i^2} = -\mathbb{1} = -[\gamma^i \gamma^{i\dagger}]$

$$i = 1,2,3$$

Son antihermíticas ya que

$$\gamma^{i\dagger} = (\beta\alpha^i)^\dagger = \alpha_i^\dagger \beta^\dagger = \alpha_i \beta$$

$$= -\beta\alpha_i = -\gamma^i$$

¿y γ^0? Es unitaria y hermítica

$$(\gamma^0)^2 = \beta^2 = \mathbb{1} = \gamma^0 \gamma^{0\dagger}$$

La representación estándar para γ^μ

$$\gamma^0 = \begin{bmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{bmatrix} \qquad \gamma^i = \begin{bmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{bmatrix}$$

Notación Dagger de Feynman

$$\underbrace{\gamma^\mu A_\mu = \cancel{A} =}\ \gamma_\nu A^\nu = g_{\mu\nu}\gamma^\mu A^\nu$$

$$= \gamma^0 A^0 - \vec{\gamma}\cdot\vec{A}$$

Si usamos ∂_μ

$$\gamma^\mu \partial_\mu = \gamma^0 \partial_0 - \vec{\gamma}\cdot\vec{\partial}$$

$$= \gamma^0 \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \vec{\gamma}\cdot\vec{\nabla} = \cancel{\partial} = \cancel{\nabla}$$

Así entonces, la ec. de Dirac

$$[i\hbar \cancel{\nabla} - m_0 c]\psi = 0 \qquad \text{pero } P_\mu = i\hbar\frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

$$[\not{P} - m_0 c]\psi = 0 \quad \text{I} \quad \Theta$$

El acoplumiento mínimo para interacción de Coulomb $\not{P} \longrightarrow \not{P} - \frac{e}{c}\not{A}$

$$[\not{P} - \frac{e}{c}\not{A} - m_0 c]\psi = 0 \quad \text{II}$$

Si deseamos que la ec. I sea covariante de Lorentz, entonces

- debe existir una regla para que Θ' calcule $\psi'(x')$, a partir de que Θ conozca $\psi(x)$
- es fundamental que en el sistema Θ'

$$[i\hbar\gamma'^{\mu}\partial'_{\mu} - m_0 c]\psi'(x') = 0$$

Es importante que se satisfaga que

$$\gamma^{\mu'}\gamma^{\nu'} + \gamma^{\nu'}\gamma^{\mu'} = g^{\mu\nu}\mathbb{1}$$

es decir, se debe satisfacer

$$\gamma^{0'\dagger} = \gamma^{0'} \qquad \gamma^{i'\dagger} = \bar{\gamma}^{i'}$$

Verifiquemos esta suposición

$$i\hbar\gamma^{0'}\frac{\partial}{\partial(ct')}\psi'(x') = \left[-i\hbar\sum\gamma^{k'}\frac{\partial}{\partial x'^{k}} + m_0 c\right]\psi'(x')$$

$$① \; i\hbar\gamma^{0'}\frac{\partial}{\partial t'}\psi'(x') = \left[-i\hbar c\sum\gamma^{'k}\frac{\partial}{\partial x'^{k}} + m_0 c^2\right]\psi'(x')$$

Sea $\underline{\tilde{\mathbb{H}}}'\psi'(x')$

Multiplicamos ec. (1) a la izquierda por $\gamma^{0'}$

(2) $i\hbar \dfrac{\partial}{\partial t'} \psi'(x') = \left[-i\hbar c \sum \gamma^{0'} \gamma'^{k} \dfrac{\partial}{\partial x'^{k}} + m_0 c^2 \gamma^{0'} \right] \psi'(x')$

$= \hat{H}' \psi'(x')$

(3) $\hat{H}' = -i\hbar c \sum \gamma^{0'} \gamma'^{k} \dfrac{\partial}{\partial x'^{k}} + \boxed{m_0 c^2 \gamma^{0'}}$

$\hat{H}'$ debe ser hermitiano, tal que sus eigenvalores sean reales.

$[\hat{H}']^{\dagger} = \hat{H}'$

El operador de momento es Hermítico y conmuta con γ^{μ}

$P'_{\mu} = i\hbar \dfrac{\partial}{\partial x'^{\mu}}$, entonces para que

la ec 3 produzca un Hamiltoniano Hermítico, cada parte (sumando) debe ser Hermítico

$[\gamma^{0'}]^{\dagger} = \underline{\gamma^{0'}}$

Ahora $[\gamma^{0'}\gamma^{k'}]^{\dagger} = \gamma^{k'\dagger}\gamma^{0'\dagger}$

$= \gamma^{k'\dagger}\gamma^{0'}$

Si $\underline{\hat{H}'^{\dagger}} = \underline{\hat{H}'}$

$\Rightarrow \boxed{\gamma^{k'\dagger}\gamma^{0'} = \gamma^{0'}\gamma^{k'}}$

$$[\gamma^{0'}\gamma^{k'}]^{\dagger} = \gamma^{k'\dagger}\gamma^{0'} = \gamma^{0'}\gamma^{k'}$$

Multiplicamos por $\gamma^{0'}$ a la derecha

$$\gamma^{k'\dagger}\underline{\gamma^{0'}\gamma^{0'}} = \gamma^{0'}\underline{\gamma^{k'}\gamma^{0'}} \qquad k=1,2,3$$

$$\gamma^{k'\dagger} = \gamma^{0'}[-\gamma^{0'}\gamma^{k'}] = -\gamma^{0'^2}\gamma^{k'}$$

$$\boxed{\gamma^{k'\dagger} = -\gamma^{k'}}$$

Asi entonces $\underline{\hat{H}'^{\dagger} = \hat{H}'}$ es $\underline{\text{Hermítico}}$

Recordemos que $\tilde{\hat{H}}' \neq \hat{H}'$ ✓

Se puede mostrar que las matices 4×4 que satisfacen

$$[\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}+\gamma^{\nu}\gamma^{\mu}] = g^{\mu\nu}\mathbb{1} \qquad \gamma^{0\dagger}=\gamma^{0}, \quad \gamma^{i\dagger}=-\gamma^{i}$$

Son idénticas hasta una transformación unitaria,

$$\boxed{\gamma'^{\mu} = \hat{u}^{+} \gamma^{\mu} u}$$ ✓

con $u^{+} = \hat{u}^{-1}$

Entonces $\boxed{[\not{P}' - m_0 c]\, \psi'(x')}$

con $\not{P}' = i\hbar \gamma^{\nu} \partial_{\nu}'$

Revisemos ahora la transformación entre

$\psi'(x')$, $\psi(x)$ $\qquad \boxed{x'^{\mu} = a^{\mu}{}_{\nu}\, x^{\nu}}$

$$\boxed{\psi'(\underline{x}')} = \psi'(\bar{a}\, x) = \hat{S}(\hat{a})\, \psi(x)$$

$$= \hat{S}(\hat{a})\, \psi(a^{-1} x') \quad \text{I}$$

$$\boxed{\psi'(x') = \hat{S}(a)\, \psi(x)}$$

A su vez

$$\psi(x) = \hat{S}^{-1}(a)\left[\psi'(x')\right]$$

$$= \hat{S}^{-1}(a)\,\psi'(a x) \quad \text{II}$$

Usando I

$\psi'(x') = \hat{S}(a)\,\psi(x)$, multiplicando a la izq. por $\hat{S}(a^{-1})$

$$\hat{S}(a^{-1})\,\psi'(x') = \hat{S}(a^{-1})\,\hat{S}(a)\,\psi(x)$$

Se debe cumplir $\hat{S}(a^{-1})\,\hat{S}(a) = \mathbb{1}$

$$\boxed{\hat{S}(a^{-1})\,\psi'(x') = \psi(x)} \quad \text{III}$$

Comparando ec. II con ec. III

$$\hat{S}^{-1}(a) = \hat{S}(a^{-1})$$

La meta es construir $\hat{S}$ tal que satisfaga las condiciones propuestas

Regresemos a la ec. de Dirac

$$\boxed{[i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - m_0c]\,\psi(x) = 0} \quad \psi(x) = \hat{S}^{-1}\psi'$$

$$[i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - m_0c]\,S^{-1}\psi' = 0$$

además, multiplicamos por S a la izq.

$$[\underline{\hat{S}}\, i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - \underline{S\, m_0c}]\,S^{-1}\psi' = 0$$

$$[i\hbar\,\hat{S}\gamma^\mu S^{-1}\partial_\mu - m_0c\,\underline{SS^{-1}}]\,\psi'$$

$$[i\hbar\,(\hat{S}\gamma^\mu S^{-1})\,\partial_\mu - m_0c]\,\psi' = 0$$

pero $\partial_\mu = a_\mu^{\ \nu} \partial_\nu'$

$$\left[i\hbar\, \hat{S} \gamma^\mu S^{-1} a_\mu^{\ \nu} \partial_\nu' - m_0 c\right] \psi' = 0$$

$$\left[i\hbar\, \underline{(\hat{S} \gamma^\mu S^{-1} a_\mu^{\ \nu})} \partial_\nu' - m_0 c\right] \psi' = 0 \checkmark$$

Requerimos que la ec. de Dirac sea invariante

$$\Rightarrow \boxed{\hat{S} \gamma^\mu S^{-1} a_\mu^{\ \nu} = \gamma^\nu}$$

$$\left[i\hbar\, \gamma^\nu \partial_\nu' - m_0 c\right] \psi' = 0$$

$\Rightarrow$ se debe cumplir

$$\hat{S}(a) \underline{\gamma^\mu} S^{-1}(a) \underline{a_\mu^{\ \nu}} = \gamma^\nu$$

$$\hat{S}(a) \gamma^\nu S^{-1}(a) = \gamma^\nu = a^\nu_{\ \mu} \gamma^\mu$$

Se define al espinor como el objeto que transforma como

$$\boxed{\Psi'(x') = \Psi'(ax) = \hat{S}(a)\Psi(x)}$$

Método sistemático para construir $\hat{S}$

- Transformaciones infinitesimales
- mediante una sucesión de operadores infinitesimales se construye el operador finito.

Transformaciones <u>infinitesimales</u> de Lorentz

$$x'^{\nu} = a^{\nu}{}_{\mu}\, x^{\mu}$$

Infinitesimal: Se parte de la transformación identidad

$$x'^{\nu} = \delta^{\nu}{}_{\mu} x^{\mu} = x^{\nu} \qquad \delta^{\nu}{}_{\mu} = \begin{cases} 1 & \nu = \mu \\ 0 & \nu \neq \mu \end{cases}$$

Ahora agregamos variación (transformación) infinitesimal

$$\boxed{a^{\nu}{}_{\mu} = \delta^{\nu}{}_{\mu} + \Delta \omega^{\nu}{}_{\mu}}$$

con $\boxed{\Delta \omega^{\nu\mu} = - \Delta \omega^{\mu\nu}}$

La invariancia de $dx'_{\mu} dx'^{\mu} = dx_{\mu} dx^{\mu}$

$$= [a_{\mu}{}^{\nu} dx_{\nu}][a^{\mu\beta} dx_{\beta}]$$

$$= a_{\mu}{}^{\nu} a^{\mu}{}_{\beta} \, dx_{\nu} dx_{\beta} = \boxed{dx_{\beta} dx^{\beta}}$$

$$= \delta^{\nu}_{\beta} dx_{\nu} dx_{\beta}$$

$$a_{\mu}{}^{\nu} a^{\mu}{}_{\beta} = \delta^{\nu}_{\beta}$$

$$a^{\mu}{}_{\nu}\, q_{\mu}{}^{\sigma} = \delta_{\nu}{}^{\sigma} = [\delta^{\mu}{}_{\nu} + \Delta \omega^{\mu}{}_{\nu}] \cdot$$

$$[\delta_{\mu}{}^{\sigma} + \Delta \omega_{\mu}{}^{\sigma}]$$

$$= \delta^{\mu}{}_{\nu}\, \delta_{\mu}{}^{\sigma} + \delta^{\mu}{}_{\nu}\, \Delta \omega_{\mu}{}^{\sigma}$$

$$+ \delta_{\mu}{}^{\sigma}\, \Delta \omega^{\mu}{}_{\nu} + \Delta \omega^{\mu}{}_{\nu}\, \Delta \omega_{\mu}{}^{\sigma} \to 0$$

$$\delta_{\nu}{}^{\sigma} = \delta_{\nu}{}^{\sigma} + \underbrace{\Delta \omega_{\nu}{}^{\sigma} + \Delta \omega^{\sigma}{}_{\nu}}$$

$$\Rightarrow \Delta \omega_{\nu}{}^{\sigma} + \Delta \omega^{\sigma}{}_{\nu} = 0$$

$$g_{\nu\beta}\, \Delta \omega^{\beta\sigma} + g_{\nu\beta}\, \Delta \omega^{\sigma\beta} = 0$$

$$g_{\nu\beta} [\Delta \omega^{\beta\sigma} + \Delta \omega^{\sigma\beta}] = 0$$

$$\boxed{\Delta \omega^{\beta\sigma} + \Delta \omega^{\sigma\beta} = 0}$$