UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

Tópicos de Mécanica Cuántica
Tarea 5

Dr. Carlos Luna Criado

Nombre:
Giovanni Gamaliel López Padilla

Matricula:
1837522

4 de noviembre de 2020

Un operador importante en computación cuántica es el operador "puerta de Hadamard" ($\hat{H}$), que representa una de las puestas lógicas cuánticas más comúnmente empleadas.
La puerta lógica cuántica de Hadamard viene representada con la matriz:

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. ¿Es esta matriz hermitica?
   Una matriz es hermitica si $H = H^\dagger$, por lo que calculando $H^\dagger = (H^T)^*$, se tiene que:
   $$H^T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$
   realizando la compleja conjugada de H^T se obtiene lo siguiente:
   $$(H^T)^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$
   como $H = (H^T)^*$, entonces H es hermitica.

2. ¿Es unitaria?
   Para que una matriz sea unitaria se tiene que cumplir que $AA^* = A^*A = I$, calculando H^* se tiene que:
   $$H^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$
   entonces calculando HH^*:
   $$\begin{aligned} HH^* &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$
   calculando H^*H:
   $$\begin{aligned} H^*H &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$
   como $H^*H = HH^* = I$, entonces H es unitaria.

3. Encuentre los eigenvalores y eigenvectores de $\hat{H}$.
   Haciendo uso del código que fue escrito por el estudiante (eigen.py), se obtiene que los eigenvalores del operador H son:
   $$\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \lambda_1 = 1 \qquad \lambda_2 = -1$$

y los eigenvectores son

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 + \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} \qquad v_2 = \begin{bmatrix} 1 - \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$