



**UANL**

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

**FCFM**

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS



**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS**

## **Tópicos de Mecánica Cuántica**

### **Guía 2**

Enrique Valbuena Ordonez

Nombre:  
Giovanni Gamaliel López Padilla

Matricula:  
1837522

21 de octubre de 2020

# 1. Obtener la ecuación de Schrödinger y su forma compleja conjugada con las ecuaciones de Euler-Lagrange.

Se tiene que la ecuación de Schrödinger normal y compleja conjugada son las siguientes:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \right)} \right). \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)} \right). \quad (2)$$

Y la densidad lagrangiana de Schrödinger es:

$$\mathcal{L} \left( \psi, \psi^*, \frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi^*}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial t}, \frac{\partial \psi^*}{\partial t}, x \right) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi^*}{\partial x} + i\hbar \left[ \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right] - V(x) \psi \psi^*. \quad (3)$$

Para calcular la ecuación de Schrödinger usando 1 con 3, calculando la parte izquierda de la ecuación 1 se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \right)} &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \right)} \right) &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}. \end{aligned}$$

Calculando la parte derecha de la ecuación 1 se tiene lo siguiente:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*} = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} - V(x) \psi$$

por lo tanto, se obtiene lo siguiente:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} - V(x) \psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad (4)$$

Para calcular la ecuación de Schrödinger usando 2 con 3, calculando la parte izquierda de la ecuación 2 se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)} &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)} \right) &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^2}. \end{aligned}$$

Calculando la parte derecha de la ecuación 1 se tiene lo siguiente:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*} = -i\hbar \frac{\partial \psi^*}{\partial t} - V(x)\psi^*$$

por lo tanto, se obtiene lo siguiente:

$$-i\hbar \frac{\partial \psi^*}{\partial t} - V(x)\psi^* = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^2} \quad (5)$$

Por lo tanto, la ecuación 4 y 5 son las ecuaciones de Schrödinger normal y compleja conjugada respectivamente.

## 2. Demostrar que la ecuación de Schrödinger es invariante ante el grupo de transformaciones globales U(1).

Se tiene que las transformaciones U(1) estan definidas como:

$$\psi' = U\psi \equiv e^{i\theta}\psi \quad (6)$$

$$\psi'^* = U\psi^* \equiv e^{-i\theta}\psi^* \quad (7)$$

tal que  $\theta \in \mathcal{R}$ , entonces realizando el calculo con con la ecuación 3, se tiene que:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left( \psi', \psi'^*, \frac{\partial \psi'}{\partial x}, \frac{\partial \psi'^*}{\partial x}, \frac{\partial \psi'}{\partial t}, \frac{\partial \psi'^*}{\partial t}, x \right) &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial \psi'}{\partial x} \frac{\partial \psi'^*}{\partial x} + i\hbar \left[ \psi'^* \frac{\partial \psi'}{\partial t} - \psi' \frac{\partial \psi'^*}{\partial t} \right] - V(x)\psi'\psi'^* \\ &= \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial (e^{i\theta})\psi}{\partial x} \frac{\partial (e^{-i\theta})\psi^*}{\partial x} \right) + i\hbar \left[ (e^{-i\theta})\psi^* \frac{\partial (e^{i\theta})\psi}{\partial t} - (e^{i\theta})\psi \frac{\partial (e^{-i\theta})\psi^*}{\partial t} \right] - V(x)e^{i\theta}\psi (e^{-i\theta})\psi^* \\ &= (e^{i\theta})(e^{-i\theta}) \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \right) + i\hbar \left[ (e^{i\theta})(e^{-i\theta})\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - (e^{i\theta})(e^{-i\theta})\psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right] - V(x)(e^{i\theta})(e^{-i\theta})\psi\psi^* \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi^*}{\partial x} + i\hbar \left[ \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right] - V(x)\psi\psi^* \\ &= \mathcal{L} \left( \psi, \psi^*, \frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi^*}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial t}, \frac{\partial \psi^*}{\partial t}, x \right) \end{aligned}$$

Por lo tanto, el grupo de las transformaciones U(1) deja invariante a la ecuación de Schrödinger.

## 3. Calcular la lagrangiana de interacción de Schrödinger en términos del cuadrivector de potencial.

Se tiene que la lagrangiana de Schroödinger es la ecuación 3 y tomando en consideración que:

$$\partial_t \rightarrow \partial_t - igA_0$$

$$\partial_t^* \rightarrow \partial_t + igA_0$$

$$\nabla' \rightarrow \nabla - ig\vec{A}$$

$$\nabla'^* \rightarrow \nabla + ig\vec{A}$$

Esto para obtener los terminos de interacción dentro de la lagrangiana, introduciendo estos terminos en la ecuación 3, se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= -\frac{\hbar^2}{2m} [\nabla' \psi \cdot \nabla' \psi^*] + i\hbar [\psi^* \partial_t' \psi - \psi \partial_t' \psi^*] \\
&= -\frac{\hbar^2}{2m} \left[ \left( \nabla - ig\vec{A} \right) \psi \cdot \left( \nabla + ig\vec{A} \right) \psi^* \right] + i\hbar [\psi^* (\partial_t - igA_0) \psi - \psi (\partial_t + igA_0) \psi^*] \\
&= -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla \psi \cdot \nabla \psi^* - \frac{\hbar^2}{2m} \left[ \nabla \psi \cdot ig\vec{A} \psi^* - ig\vec{A} \psi \cdot \nabla \psi^* + g^2 \vec{A} \psi \cdot \vec{A} \psi^* \right] \\
&\quad + i\hbar [\psi^* \partial_t \psi - \psi \partial_t \psi^* - 2igA_0 \psi \psi^*] \\
&= -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla \psi \cdot \nabla \psi^* + i\hbar [\psi^* \partial_t \psi - \psi \partial_t \psi^*] \\
&\quad - \frac{\hbar^2}{2m} \left[ \nabla \psi \cdot ig\vec{A} \psi^* - ig\vec{A} \psi \cdot \nabla \psi^* + g^2 \vec{A} \psi \cdot \vec{A} \psi^* \right] + 2\hbar g A_0 \psi \psi^* \\
&= \mathcal{L}_f - \frac{\hbar^2 g}{2m} \left[ \nabla \psi \cdot i\vec{A} \psi^* - i\vec{A} \psi \cdot \nabla \psi^* + g\vec{A} \psi \cdot \vec{A} \psi^* \right] + 2\hbar g A_0 \psi \psi^* \\
&= \mathcal{L}_f - \frac{\hbar^2}{2m} igA \cdot \left[ \psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^* + \frac{1}{i} Ag \psi \psi^* \right] + 2g\hbar A_0 \psi \psi^* \\
&= \mathcal{L}_f + \hbar A \cdot \left[ \frac{\hbar}{2mi} g (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) + \frac{\hbar}{2m} g^2 A |\psi|^2 \right] + \hbar g A_0 |\psi|^2 \\
&= \mathcal{L}_f + g\hbar J^\alpha A_\alpha
\end{aligned}$$

por lo tanto la lagrangiana de interacción de Schrödinger en términos del cuadrivector del potencial es:

$$L_A = g\hbar J^\alpha A_\alpha \quad (8)$$

donde:

$$J^\alpha = \frac{\hbar}{2mi} [(\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) - gA^\alpha |\psi|^2]$$

Agregando el termino del lagrangiano de interacción con el campo electromagnético, el lagrangiano de interacción se transforma en lo siguiente:

$$\mathcal{L}_i = g\hbar J^\alpha A_\alpha + \square A^\mu A_\mu - \frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (9)$$

#### 4. Demostrar que la lagrangiana de interacción de Schrödinger es invariante ante transformaciones de norma

A partir de la ecuación 8 aplicaremos las transformaciones de norma, las cuales son las siguientes:

$$\begin{aligned}\psi &\rightarrow \hat{G}\psi \\ \psi^* &\rightarrow \hat{G}^*\psi^* \\ A_0 &\rightarrow A_0 + \frac{1}{g}\partial_t\lambda \\ \vec{A} &\rightarrow \vec{A} + \frac{1}{g}\nabla\lambda\end{aligned}$$

por lo tanto, aplicando estas transformaciones en la ecuación 8 se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= -\frac{\hbar^2}{2m} \left[ \left( \nabla - ig \left( \vec{A} + \frac{1}{g}\nabla\lambda \right) \right) \hat{G}\psi \left( \nabla + ig \left( \vec{A} + \frac{1}{g}\nabla\lambda \right) \right) \hat{G}^*\psi^* \right] \\ &\quad + i\hbar \left[ \hat{G}^*\psi^* \left( \partial_t - ig \left( \vec{A} + \frac{1}{g}\nabla\lambda \right) + \frac{1}{g}\nabla\lambda \right) \hat{G}\psi - \hat{G}\psi \left( \partial_t + ig \left( \vec{A} + \frac{1}{g}\nabla\lambda \right) \right) \hat{G}^*\psi^* \right] \\ \mathcal{L} &= -\frac{\hbar^2}{2m} \left[ \left( \nabla \left( \hat{G}\psi \right) - ig \left( \vec{A} + \frac{1}{g}\nabla\lambda \right) \hat{G}\psi \right) \left( \nabla \left( \hat{G}^*\psi^* \right) + ig \left( \vec{A} + \frac{1}{g}\nabla\lambda \right) \hat{G}^*\psi^* \right) \right] \\ &\quad + i\hbar \left[ \hat{G}^*\psi^* \left( \partial_t \left[ \hat{G}\psi \right] - ig \left( A_0 + \frac{1}{g}\partial_t\lambda \right) \hat{G}\psi \right) - \hat{G}\psi \left( \partial_t \left( \hat{G}^*\psi^* \right) + ig \left( A_0 + \frac{1}{g}\partial_t\lambda \right) \hat{G}^*\psi^* \right) \right] \\ \mathcal{L} &= -\frac{\hbar^2}{2m} \left[ \left( \hat{G}\nabla\psi + \psi\nabla\hat{G} - ig\vec{A}\hat{G}\psi - i\nabla\lambda\hat{G}\psi \right) \left( \hat{G}^*\nabla\psi^* + \psi^*\nabla\hat{G}^* + ig\vec{A}\hat{G}^*\psi^* + i\nabla\lambda\hat{G}^*\psi^* \right) \right] \\ &\quad + i\hbar \left[ \hat{G}^*\psi^* \left( \hat{G}\partial_t\psi + \psi\partial_t\hat{G} - igA_0\hat{G}\psi - i\partial_t\lambda\hat{G}\psi - i\partial_t\lambda\hat{G}\psi \right) \right. \\ &\quad \left. - \hat{G}\psi \left( \hat{G}^*\partial_t\psi^* + \psi^*\partial_t\hat{G}^* + igA_0\hat{G}^*\psi^* + i\partial_t\lambda\hat{G}^*\psi^* \right) \right] \\ \mathcal{L} &= -\frac{\hbar^2}{2m} \left[ \left( \hat{G}\nabla\psi + i\hat{G}\psi\nabla\lambda - ig\vec{A}\hat{G}\psi - i\nabla\lambda\hat{G}\psi \right) \left( \hat{G}^*\nabla\psi^* - i\hat{G}^*\psi^*\nabla\lambda + ig\vec{A}\hat{G}^*\psi^* + i\nabla\lambda\hat{G}^*\psi^* \right) \right] \\ &\quad + i\hbar \left[ \hat{G}^*\psi^* \left( \hat{G}\partial_t\psi + i\psi\hat{G}\partial_t\lambda - igA_0\hat{G}\psi - i\partial_t\lambda\hat{G}\psi - i\partial_t\lambda\hat{G}\psi \right) \right. \\ &\quad \left. - \hat{G}\psi \left( \hat{G}^*\partial_t\psi^* - i\hat{G}^*\psi^*\partial_t\lambda + igA_0\hat{G}^*\psi^* + i\partial_t\lambda\hat{G}^*\psi^* \right) \right] \\ \mathcal{L} &= -\frac{\hbar^2}{2m} \left[ \left( \hat{G}\nabla\psi - ig\vec{A}\hat{G}\psi \right) \left( \hat{G}^*\nabla\psi^* + ig\vec{A}\hat{G}^*\psi^* \right) \right] \\ &\quad + i\hbar \left[ \hat{G}^*\psi^* \left( \hat{G}\partial_t\psi - igA_0\hat{G}\psi \right) - \hat{G}\psi \left( \partial_t\psi^* + igA_0\hat{G}^*\psi^* \right) \right] \\ \mathcal{L} &= -\frac{\hbar^2}{2m} \left[ \hat{G} \left( \nabla\psi - ig\vec{A}\psi \right) \hat{G}^* \left( \nabla\psi^* + ig\vec{A}\psi^* \right) \right] \\ &\quad + i\hbar \left[ \hat{G}^*\psi^* \hat{G}\partial_t\psi - i\hat{G}^*\psi^*gA_0\hat{G}\psi - \hat{G}\psi\hat{G}^*\partial_t\psi^* - i\hat{G}\psi gA_0\hat{G}^*\psi^* \right] \\ \mathcal{L} &= -\frac{\hbar^2}{2m} \left[ \left( \nabla\psi - ig\vec{A}\psi \right) \left( \nabla\psi^* + ig\vec{A}\psi^* \right) \right] + i\hbar [\psi^*\partial_t\psi - i\psi^*gA_0\psi - \psi\partial_t\psi^* - i\psi gA_0\psi^*] \\ \mathcal{L} &= -\frac{\hbar^2}{2m} \left[ \left( \nabla\psi - ig\vec{A}\psi \right) \left( \nabla\psi^* + ig\vec{A}\psi^* \right) \right] + i\hbar [\psi^*(\partial_t - igA_0)\psi - \psi(\partial_t + igA_0)\psi^*]\end{aligned}$$

por lo tanto:

$$\mathcal{L} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left[ \left( \nabla\psi - ig\vec{A}\psi \right) \left( \nabla\psi^* + ig\vec{A}\psi^* \right) \right] + i\hbar [\psi^* (\partial_t - igA_0) \psi - \psi (\partial_t + igA_0) \psi^*] \quad (10)$$

la cual se logra visualizar que tiene la misma forma que la ecuación 3, por lo tanto la lagrangiana de interacción de Schrödinger es invariante ante las transformaciones de norma.

## 5. Calcular la ecuación de Klein-Gordon (para la partícula libre) a partir de la relación energía-momento de Einstein y las definiciones de los operadores en mecánica cuántica.

A partir de la mecánica cuántica elemental conocemos la ecuación de Schrödinger:

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m_0} \nabla^2 + V(x) \right] \psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (11)$$

la relación de la energía no relativista en forma de operador corresponde a lo siguiente:

$$E = -\frac{\hat{p}^2}{2m_0} + V(x) \quad (12)$$

donde:

$$\begin{aligned} \hat{p} &= i\hbar \nabla \\ \hat{E} &= i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \end{aligned}$$

por lo que teniendo definidos los operadores de la energía y momento podemos obtener una ecuación para la onda relativista, es por ello que consideramos a las partículas libres de modo que su relación relativista es la siguiente:

$$p^\mu p_\mu = \frac{E^2}{c^2} - p \cdot p = m_0^2 c^2 \quad (13)$$

por lo tanto, la ecuación de Klein-Gordon para las partículas libres es:

$$p^\mu p_\mu \psi = m_0^2 c^2 \psi \quad (14)$$

tomando en cuenta que:

$$p^\mu p_\mu = -\hbar^2 \frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} = -\hbar^2 \left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \right) \quad (15)$$

y renombrando a:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) = \square$$

se tiene que:

$$p^\mu p_\mu = -\hbar^2 \square$$

por lo tanto la ecuación 14 se escribe como:

$$\begin{aligned} p^\mu p_\mu \psi &= m_0^2 c^2 \psi \\ -\hbar^2 \square \psi &= m_0^2 c^2 \psi \\ \square \psi &= -\frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \psi \\ \left( \square + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \right) \psi &= 0 \end{aligned}$$

por lo tanto, la ecuación de Klein-Gordon es:

$$\left( \square + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \right) \psi = 0 \tag{16}$$

- 6. Calcular las soluciones de la ecuación de Klein-Gordon (generalizada sin condiciones a la frontera).**