UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FCFM

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

Relatividad General
Tranformación de Lorentz

Carlos Luna Criado

Nombre:
Giovanni Gamaliel López Padilla

Matricula:
1837522

12 de septiembre de 2020

Transformación por el eje x

De esta manera podemos definir una transformación de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} t' \\ x' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ x \end{bmatrix} \tag{1}$$

al realizar la multiplicación de 1 se obtiene que:

$$\begin{bmatrix} t' \\ x' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} At + Bx \\ Ct + Dx \end{bmatrix} \tag{2}$$

cuando $x' = 0$ se cumple que:

$$Dx + Ct = 0 \Rightarrow x = -\frac{C}{D}t = vt \Rightarrow -v = \frac{C}{D} \tag{3}$$

por lo tanto, la componente x' de 2 es

$$x' = D(x - vt) \tag{4}$$

introduciendo esto en el invariante de Lorentz, encontramos que:

$$D^2(x - vt)^2 + y^{2'} + z^{2'} - c^2(At + Bx)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2$$

de la cual separando los coeficientes de los terminos x^2, xt, t^2 obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$D^2 - c^2B^2 = 1 \tag{5}$$
$$vD^2 + c^2AB = 0 \tag{6}$$
$$-v^2D^2 + c^2A^2 = c^2 \tag{7}$$

despejando de 5 y 7 D^2 y A^2 y multiplicandolas

$$\begin{aligned} A^2B^2c^4 &= (D^2 - 1)(v^2D^2 + c^2) \\ &= v^2D^4 + D^2c^2 - v^2D^2 - c^2 \end{aligned}$$

por la ecuación 6 al despejar c^2AB y elevar al cuadrado, la operación anterior es igual a :

$$\begin{aligned} v^2D^4 + D^2c^2 - v^2D^2 - c^2 &= D^4v^2 \\ D^2(c^2 - v^2) &= c^2 \end{aligned}$$

$$D = \gamma \tag{8}$$

por lo tanto, de la ecuación 7,obtenemos que:

$$A = \sqrt{\frac{c^2 - v^2\gamma^2}{c^2}} = \gamma \tag{9}$$

y de la ecuación 5, obtenemos lo siguiente:

$$B = -\sqrt{\frac{\gamma^2 - 1}{c^2}} = -\frac{v}{c^2}\gamma \tag{10}$$

y de la relación encontrada en 3, encontramos que:

$$C = -v\gamma \tag{11}$$

ya habiendo obtenido los resultados de las ecuaciones 11, 10, 9, 8 e introduciendolas en la matriz 1, obetnemos que:

$$\begin{bmatrix} t' \\ x' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\frac{v}{c^2}\gamma \\ -v\gamma & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ x \end{bmatrix} \tag{12}$$

expandiendo esta matriz de transformación a 4 dimensiones tendriamos la siguiente:

$$\begin{bmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\frac{v}{c^2}\gamma & 0 & 0 \\ -v\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} \tag{13}$$

Forma del Boost generalizado

Un vector lo podemos escribir de la siguiente manera:

$$\vec{r} = \vec{r}_\perp + \vec{r}_\parallel \tag{14}$$

realizando la comparación con un segundo vector $\vec{r'}$, se tiene lo siguiente:

$$\vec{r'}_\perp = \vec{r}_\perp \tag{15}$$

$$\vec{r'}_\parallel = \gamma(\vec{r'}_\parallel - \vec{v}t) \tag{16}$$

usando 15 y 16 en 14 se obtiene que

$$\vec{r'} = \vec{r'}_\perp + \gamma(\vec{r'}_\parallel - \vec{v}t) \tag{17}$$

donde

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}\cdot\vec{v}}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{|v^2|}{c^2}}} \tag{18}$$

calculando el producto escalar entre $\vec{r}$ y $\vec{v}$ en donde $\hat{r} = \hat{v}$

$$\begin{aligned} \vec{r}\cdot\vec{v} &= \vec{r}_\parallel \cdot \vec{v} + \vec{r}_p erp \cdot \vec{v} \\ &= \vec{r}_\parallel \cdot \vec{v} \\ &= |\vec{r}_\parallel||\vec{v}| \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\vec{r}\cdot\vec{v} = |\vec{r}_\parallel||\vec{v}| \tag{19}$$

en la configuración estandar se tiene que:

$$t' = \gamma \left(t - \frac{\vec{r} \cdot \vec{v}}{c^2} \right) \tag{20}$$

expandiento los terminos de 20

$$\begin{aligned} t' &= \gamma t - \gamma \frac{x v_x}{c^2} - \gamma \frac{y v_y}{c^2} - \gamma \frac{z v_z}{c^2} \\ &= \gamma c t - \gamma \frac{x v_x}{c} - \gamma \frac{y v_y}{c} - \gamma \frac{z v_z}{c} \\ &= \gamma c t - \gamma x \beta_x - \gamma y \beta_y - \gamma z \beta_z \end{aligned}$$

por lo tanto:

$$t' = \gamma c t - \gamma x \beta_x - \gamma y \beta_y - \gamma z \beta_z \tag{21}$$

usando 17 tomando en cuenta que $\vec{r_\perp} = \vec{r} - \vec{r}_\parallel$, entonces:

$$\vec{r'} = \vec{r} - \vec{r}_\parallel + \gamma(\vec{r'_\parallel} - \vec{v} t) \tag{22}$$

de la relacion de la ecuacion 19, tenemos que:

$$|\vec{r}_\parallel| = \frac{\vec{r}_\parallel \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{\vec{r} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|} \tag{23}$$

entonces:

$$\begin{aligned} \vec{r}_\parallel &= |\vec{r}_\parallel| \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \\ &= \left(\frac{\vec{r} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|} \right) \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \end{aligned}$$

por lo tanto la ecuacion 22 se puede reescribir como lo siguiente:

$$\begin{aligned} \vec{r'} &= \vec{r} - \vec{r}_\parallel + \gamma(\vec{r'_\parallel} - \vec{v} t) \\ &= \vec{r} + (\gamma - 1)\vec{r}_\parallel - \gamma \vec{v} t \\ &= \vec{r} + (\gamma - 1) \left(\frac{\vec{r} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|} \right) \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} - \gamma \vec{v} t \\ &= -\gamma \vec{v} t + \vec{r} + (\gamma - 1) \left(\frac{\vec{r} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|} \right) \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \\ &= -\gamma \vec{v} t + \vec{r} + (\gamma - 1)(\vec{r} \cdot \vec{v}) \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|^2} \end{aligned}$$

porlo tanto:

$$\vec{r'} = -\gamma \vec{v} t + \vec{r} + (\gamma - 1)(\vec{r} \cdot \vec{v}) \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|^2} \tag{24}$$

Calculando para cada componente:

$$\begin{aligned} x' &= -\gamma v_x t + x + (\gamma - 1)(x v_x + y v_Y + z v_z) \frac{v_x}{|v_x|^2} \\ y' &= -\gamma v_y t + y + (\gamma - 1)(x v_x + y v_Y + z v_z) \frac{v_y}{|v_y|^2} \\ z' &= -\gamma v_z t + z + (\gamma - 1)(x v_x + y v_Y + z v_z) \frac{v_z}{|v_z|^2} \end{aligned}$$

utilizando la relación $\beta_i = v_i/c$ en cada una de las componentes se tiene que:

$$x' = -\gamma\beta_x ct + x + (\gamma - 1)(x\beta_x + y\beta_y + z\beta_z)\frac{\beta_x}{|\beta_x|^2} \tag{25}$$

$$y' = -\gamma\beta_y ct + y + (\gamma - 1)(x\beta_x + y\beta_y + z\beta_z)\frac{\beta_y}{|\beta_y|^2} \tag{26}$$

$$z' = -\gamma\beta_z ct + z + (\gamma - 1)(x\beta_x + y\beta_y + z\beta_z)\frac{\beta_z}{|\beta_z|^2} \tag{27}$$

reescribiendo las ecuaciones 25, 27, 26 y 21 como producto puntos de vectores se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} x^0 &= \Lambda^0_\nu \cdot x^\nu \\ x^1 &= \Lambda^1_\nu \cdot y^\nu \\ x^2 &= \Lambda^2_\nu \cdot y^\nu \\ x^3 &= \Lambda^3_\nu \cdot y^\nu \end{aligned}$$

de modo que la matriz Λ que la relación entre $\vec{r}$ y $\vec{r}'$:

$$\begin{bmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta_x & -\gamma\beta_y & -\gamma\beta_z \\ -\gamma\beta_x & 1 + (\gamma-1)\frac{\beta_x^2}{|\beta|^2} & (\gamma-1)\frac{\beta_x\beta_y}{|\beta|^2} & (\gamma-1)\frac{\beta_x\beta_z}{|\beta|^2} \\ -\gamma\beta_y & (\gamma-1)\frac{\beta_x\beta_y}{|\beta|^2} & 1 + (\gamma-1)\frac{\beta_y^2}{|\beta|^2} & (\gamma-1)\frac{\beta_y\beta_z}{|\beta|^2} \\ -\gamma\beta_x & (\gamma-1)\frac{\beta_x\beta_z}{|\beta|^2} & (\gamma-1)\frac{\beta_z\beta_y}{|\beta|^2} & 1 + (\gamma-1)\frac{\beta_z^2}{|\beta|^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} \tag{28}$$

de modo que la relación 28 se pueda escribir de manera tensorial como

$$r^{\mu\prime} = \Lambda^{\mu\prime}{}_{\nu} r^\nu \tag{29}$$