



**UANL**

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

**FCFM**

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS



**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS**

**Relatividad General  
Proyecto final:  
Modelo de evolución de un Pulsar Binario**

Dr. Carlos Luna Criado

Nombre:  
Giovanni Gamaliel López Padilla  
Ivan Arturo Pla Guzman

Matricula:  
1837522  
1837515

25 de octubre de 2020

# Índice

<b>1. Resumen</b>	<b>2</b>
<b>2. Introducción</b>	<b>2</b>
<b>3. Objetivo</b>	<b>2</b>
<b>4. Marco teórico</b>	<b>2</b>
4.1. Problema de Kepler Newtoniano . . . . .	2
4.2. Potencia radiada por un sistema binario . . . . .	8
<b>5. Resultados</b>	<b>12</b>
<b>6. Conclusiones y discusión</b>	<b>12</b>
<b>7. Código</b>	<b>12</b>

## 1. Resumen

## 2. Introducción

La mecánica newtoniana o mecánica vectorial es un conjunto de formulaciones de la mecánica clásica que estudia el movimiento de partículas y sólidos en un espacio euclideo tridimensional. Cada cuerpo contiene una velocidad inicial referenciada desde un sistema de referencia inercial donde las ecuaciones del movimiento se ven reducidas a las leyes de Newton. La mecánica newtoniana es un modelo físico que funciona para describir la dinámica de los cuerpos en el espacio por medio de las fuerzas que contiene cada objeto. Historicamente, la mecánica newtoniana fue el primer modelo físico en poder representar de buena manera la dinámica de los objetos al punto de predecir acciones importantes sobre el movimiento de los cuerpos, en donde se incluyen las trayectorias de ciertos planetas. La mecánica newtoniana es suficientemente válida para la casos en los cuales sus aproximaciones compatan con los resultados experimentales, ya sea como el movimiento de cohetes, trayectorias de planetas, moléculas orgánicas, trayectorias de móviles, etc. Sin embargo, existen problemas en donde el modelo newtoniano se complica matemáticamente en comparación a otras teorías como la mecánica lagrangiana o hamiltoniana, es por ello que debemos observar con detenimiento el sistema de estudio para decidir que teoría utilizar y resolver el problema de una manera sencilla.

## 3. Objetivo

## 4. Marco teórico

### 4.1. Problema de Kepler Newtoniano

Si  $\vec{x}_1$  y  $\vec{x}_2$  son las coordenadas de  $m_1$  y  $m_2$  respecto a un sistema de referencia inercial, entonces las ecuaciones de movimiento correspondientes son:

$$\ddot{\vec{x}}_1 = -Gm_2 \frac{(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^3}, \quad (1)$$

$$\ddot{\vec{x}}_2 = -Gm_1 \frac{(\vec{x}_2 - \vec{x}_1)}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^3}. \quad (2)$$

Es conveniente definir una coordenada para el centro de masa  $\vec{x}_{cm}$ , la cual está dada por:

$$\vec{x}_{cm} := \frac{m_1 \vec{x}_1 + m_2 \vec{x}_2}{M}, \quad M := m_1 + m_2. \quad (3)$$

Con estas ecuaciones definidas se puede comprobar que a partir de 1 y 2 el centro de masa  $\vec{x}_{cm}$  es igual a cero.

$$\ddot{\vec{x}}_{cm} = \vec{0}.$$

Por lo tanto, la coordenada del centro de masa se mueve a velocidad constante. Esto permite simplificar el problema describiendo el movimiento desde el sistema

de referencia inercial en el que el centro de masa del sistema está en reposo y ubicado en el origen, es decir:

$$\vec{x}_{\text{cm}} \stackrel{!}{=} \vec{0}. \quad (4)$$

Por la condición 4 implica que, en el sistema de referencia inercial del centro de masa, las coordenadas de  $m_1$  y  $m_2$  están relacionadas por:

$$\vec{x}_2 = -\frac{m_1}{m_2}\vec{x}_1. \quad (5)$$

Definiendo así una coordenada relativa dada por:

$$\vec{r} := \vec{x}_2 - \vec{x}_1. \quad (6)$$

Con esto definido, podemos escribir a la ecuación 5 comprobar

$$\vec{x}_1 = -\frac{m_2}{M}\vec{r}, \quad \vec{x}_2 = \frac{m_1}{M}\vec{r}. \quad (7)$$

Usando estas relaciones podemos transformar las ecuaciones de movimiento 1 y 2 en ecuaciones para la coordenada relativa:

$$\ddot{\vec{r}} = -GM\frac{\hat{r}}{r^2}. \quad (8)$$

Por otro lado, la energía total del sistema

$$E = \frac{1}{2}m_1\vec{v}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\vec{v}_2^2 - \frac{Gm_1m_2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|}, \quad (9)$$

y el momentum angular total respecto al origen,

$$\vec{L} = m_1\vec{x}_1 \times \vec{v}_1 + m_2\vec{x}_2 \times \vec{v}_2, \quad (10)$$

pueden reescribirse en términos de la coordenada relativa, resultando

$$E = \frac{1}{2}\mu\vec{v}^2 - \frac{G\mu M}{r}, \quad (11)$$

$$\vec{L} = \mu\vec{r} \times \vec{v}, \quad (12)$$

donde  $\vec{v} := \dot{\vec{r}}$  y  $\mu := m_1m_2/M$  es llamada la *masa reducida* del sistema.

Los resultados de las ecuaciones 8, 11 y 12 muestran que el movimiento relativo es equivalente al de un cuerpo de masa  $\mu$  moviéndose en el potencial central fijo generado por una masa  $M$  situada en el origen  $\phi = -GM/r$ . Como este potencial es central, el momentum angular total del sistema es constante a lo largo de la trayectoria. Como consecuencia, el movimiento está confinado al plano perpendicular  $\vec{L}$ . Podemos elegir el eje  $z$  normal a este plano, de modo que la trayectoria del cuerpo satisface  $\theta = \pi/2$ , y entonces realizando la transformación de coordenadas rectangulares a coordenadas polares y usando  $\vec{r} = r\hat{r}$  podemos escribir la velocidad y la aceleración como:

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\phi}\hat{\phi}, \quad (13)$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)\hat{r} + (r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi})\hat{\phi}. \quad (14)$$

Reemplazando la ecuación 14 en 8 obtenemos

$$\left(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2\right) \hat{r} + (r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi}) \hat{\phi} = -\frac{GM}{r^2} \hat{r}. \quad (15)$$

De aqui, encontramos

$$\ddot{r} - r\dot{\phi}^2 = -\frac{GM}{r^2}, \quad (16)$$

$$r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi} = 0. \quad (17)$$

Multiplicando la ecuación 17 por r, se encuentra que el término  $r^2\dot{\phi}$  es constante sobre la trayectoria

$$\begin{aligned} 0 &= r^2\ddot{\phi} + 2r\dot{r}\dot{\phi} \\ &= \frac{d}{dt} (r^2\dot{\phi}), \end{aligned}$$

que expresa la conservación del momento angular, ya que

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \mu \vec{r} \times \vec{v} \\ &= \mu r \hat{r} \times (\dot{r}\hat{r} + r\dot{\phi}\hat{\phi}) \\ &= \mu r^2\dot{\phi} (\hat{r} \times \hat{\phi}) \\ &= \mu r^2\dot{\phi} \hat{z}. \\ \vec{L} &= \mu r^2\dot{\phi} \hat{z}. \end{aligned} \quad (18)$$

Otra cantidad conservada sobre la órbita es la energía mecánica

$$E = \frac{1}{2}\mu v^2 - \frac{GM\mu}{r} \quad (19)$$

$$= \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\mu r^2\dot{\phi}^2 - \frac{GM\mu}{r}. \quad (20)$$

Despejando  $\dot{\phi}$  de la ecuación 18 podemos escribir la energía mecánica sólo en términos de la variable r y constantes del movimiento:

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{GM\mu}{r}. \quad (21)$$

Definiendo un potencial efectivo

$$V_{\text{ef}}(r) := \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{GM\mu}{r}, \quad (22)$$

De modo que la ecuación 21 pueda ser escrita como la ecuación de conservación de la energía de un movimiento unidimensional:

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + V_{\text{ef}}(r). \quad (23)$$

El potencial efectivo  $V_{\text{ef}}(r)$  posee un cero en

$$r_c = \frac{L^2}{2GM\mu^2}, \quad (24)$$

y además posee un mínimo en

$$r_{\min} = \frac{L^2}{GM\mu^2} = 2r_c, \quad (25)$$

tal que

$$V_{\text{ef},\min} = -\frac{G^2M^2\mu^3}{2L^2} < 0.$$

Además, el comportamiento asintótico del potencial efectivo es

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} V_{\text{ef}}(r) &\approx -\frac{GMm}{r} \rightarrow 0, \\ \lim_{r \rightarrow 0} V_{\text{ef}}(r) &\approx \frac{L^2}{2mr^2} \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

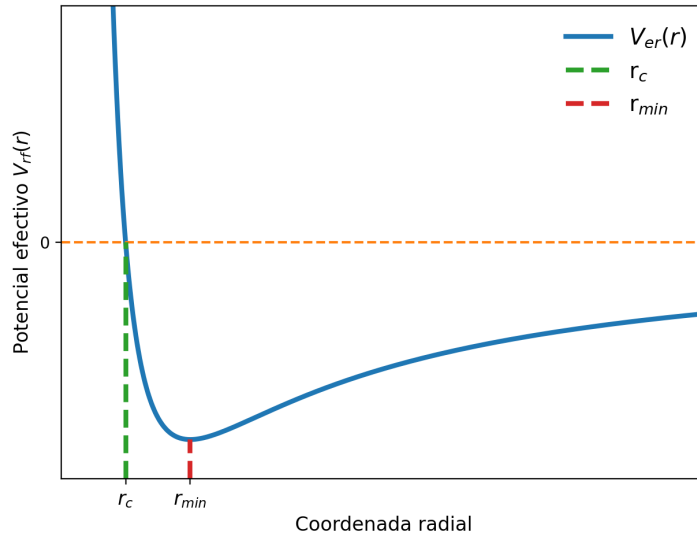


Figura 1: Potencial newtoniano efectivo, las constantes  $L, G, M, \mu$  igualadas a 1

Así para un valor de  $L$  dado, tenemos que:

1. Si  $E_1 > 0$ , una partícula proveniente del infinito alcanza un radio mínimo  $r_1$ , donde  $\dot{r}^2 = 0$ , y luego vuelve a infinito.
2. Si  $V_{\text{ef},\min} < E_2 < 0$  la trayectoria es ligada, variando la distancia entre dos puntos de retorno  $r_2$  y  $r_3$ , de modo que  $r_2 < r < r_3$ .
3. Si  $E_3 = V_{\text{ef},\min}$  la partícula describe un movimiento circular de radio dado por la ecuación 25. Este caso corresponde al mínimo del potencial, por lo que es un movimiento estable.

4. Finalmente, no existen trayectorias con  $E < V_{\text{ef},\min}$  ya que la ecuación 23 requiere que  $E \geq V_{\text{ef}}$ .

Determinando la forma de la trayectoria, descrita por la dependencia de la coordenada radial  $r$  en términos de la coordenada angular  $\varphi$ . Asumiendo  $r = r(\varphi)$  podemos escribir

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\varphi} \dot{\varphi} = \frac{L}{\mu r^2} \frac{dr}{d\varphi}. \quad (26)$$

Reemplazando en la ecuación 21 la ecuación 26 obtenemos

$$\frac{1}{r^4} \left( \frac{dr}{d\varphi} \right)^2 = \frac{2\mu E}{L^2} + \frac{2GM\mu^2}{L^2 r} - \frac{1}{r^2}. \quad (27)$$

Con un cambio de variable  $u := 1/r$ , entonces la ecuación 27

$$(u')^2 = \frac{2\mu E}{L^2} + \frac{2GM\mu^2}{L^2} u - u^2, \quad (28)$$

derivando la ecuación 28 se encuentra la ecuación de movimiento para  $u$  en función de  $\varphi$

$$u'' + u = \frac{GM\mu^2}{L^2}. \quad (29)$$

La integración de la ecuación 29 es directa ya que corresponde a un oscilador armónico con un término forzante constante

$$u(\varphi) = \frac{GM\mu^2}{L^2} (1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)) \quad (30)$$

donde reemplazando la solución 30 en 28

$$e = \sqrt{1 + \frac{2L^2 E}{G^2 M^2 \mu^3}}, \quad (31)$$

es la excentricidad de la órbita y  $\varphi_0$  es una constante de integración correspondiente a la orientación inicial relativa al eje x. Si  $-G^2 M^2 \mu^2 / 2L^2 < E < 0$  entonces  $0 < e < 1$ , y la cónica es una elipse.

El semieje mayor de la órbita es El semieje mayor de la 'órbita,

$$a = \frac{1}{2} (r_{\max} + r_{\min}),$$

puede ser escrito en términos de las constantes de movimiento a partir de las ecuaciones 30 y 31

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{u_{\min}} + \frac{1}{u_{\max}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{L^2}{GM\mu^2} \frac{1}{(1+e)} + \frac{L^2}{GM\mu^2} \frac{1}{(1-e)} \right) \\ &= \frac{L^2}{GM\mu^2} \frac{1}{(1-e^2)} \\ &= -\frac{GM\mu}{2E}. \end{aligned}$$

$$a = -\frac{GM\mu}{2E}. \quad (32)$$

Con esto, podemos escribir la solución de la ecuación 30 como

$$u(\varphi) = \frac{1}{a(1-e^2)} [1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)], \quad (33)$$

o, en términos de la coordenada radial relativa,

$$r(\varphi) = \frac{a(1-e^2)}{1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)}. \quad (34)$$

La evolución temporal de la órbita puede ser determinada implícitamente de la forma siguiente. Definamos la variable auxiliar  $s$  por

$$r =: a(1 - e \cos s). \quad (35)$$

A partir de esto podemos usar la ecuación 34 para encontrar una relación entre  $\varphi$  y  $s$  sobre la órbita. De esta forma, obtenemos

$$\cos(\varphi - \varphi_0) = \frac{\cos s - e}{1 - e \cos s}, \quad (36)$$

y a partir de aquí

$$\sin(\varphi - \varphi_0) = \sqrt{1 - e^2} \frac{\sin s}{1 - e \cos s}. \quad (37)$$

Derivando la ecuación 36 respecto a  $s$  y usando la ecuación 37 obtenemos

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\sqrt{1 - e^2}}{1 - e \cos s}.$$

Con esto, podemos expresar el momento angular de la ecuación 18 en términos de  $s$ ;

$$\begin{aligned} L &= \mu r^2 \frac{d\varphi}{dt} \\ &= \mu r^2 \frac{d\varphi}{ds} \frac{ds}{dt} \\ &= \mu a^2 (1 - e \cos s)^2 \frac{d\varphi}{ds} \frac{ds}{dt} \\ &= \mu a^2 \sqrt{1 - e^2} (1 - e \cos s) \frac{ds}{dt}. \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} 1 - e \cos s &= \frac{L}{\mu a^2 \sqrt{1 - e^2}} \frac{dt}{ds} \\ &=: \omega_0 \frac{dt}{ds}, \\ 1 - e \cos s &=: \omega_0 \frac{dt}{ds}, \end{aligned} \quad (38)$$



donde hemos introducido el término  $\omega_0$ , con unidades de frecuencia, que usando la ecuación 31 satisface

$$\omega_0^2 = \frac{GM}{a^3}. \quad (39)$$

La relación de la ecuación 38 puede integrarse directamente respecto a  $s$ . Eligiendo la condición inicial  $s = 0$  para  $t = 0$  obtenemos

$$\omega_0(t - t_0) = s - e \sin s. \quad (40)$$

Las expresiones de las ecuaciones 40, 35, 36 y 37 suministra una *solución paramétrica* para la órbita. A partir de la ecuación 34 vemos que  $r(\varphi)$  es periódica con periodo  $\Delta\varphi = 2\pi$ . Además, de las ecuaciones 35 y ?? vemos que este periodo corresponde a un cambio en  $2\pi$  en la variable auxiliar  $s$ . Finalmente, la relación 35 implica que esta periodicidad corresponde a un intervalo de tiempo

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}, \quad (41)$$

que es entonces el *periodo orbital*. Con esto la ecuación ?? implica la *tercera ley de Kepler*.

## 4.2. Potencia radiada por un sistema binario

Considerando el caso en que un sistema binario está conformado por masas compactas, que modelaremos como puntuales, orbitando una respecto a la otra por efecto de su atracción gravitacional mutua. Para esto, realizaremos los cálculos en el sistema de referencia del centro de masa, es por ello que requeriremos del tensor momento de inercia del sistema, el cual puede mostrarse que el momento de inercia total del sistema binario se reduce al de una partícula con masa reducida  $\mu$ , realizando un movimiento descrito por la coordenada relativa  $\vec{r}$ .

$$M_{ij} = m_1 x_i^{(1)} x_j^{(1)} + m_2 x_i^{(2)} x_j^{(2)} = \mu r_i r_j$$

Si las coordenadas son elegidas de modo que el movimiento del sistema est'a confinado al plano  $xy$ , tendremos que sólo  $M_{11}$ ,  $M_{12}$  y  $M_{22}$  ser'an distintos de cero. De este modo, encontramos que

$$\begin{aligned} M_{11} &= \mu x^2 \\ &= \mu r^2 \cos^2 \varphi \\ &= \mu a^2 (1 - e^2)^2 \frac{\cos^2 \varphi}{[1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)]^2}, \end{aligned}$$

y, similarmente,

$$\begin{aligned} M_{12} &= \mu xy \\ &= \mu r^2 \cos \varphi \sin \varphi \\ &= \mu a^2 (1 - e^2)^2 \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{[1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)]^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{22} &= \mu y^2 \\
&= \mu r^2 \sin^2 \varphi \\
&= \mu a^2 (1 - e^2)^2 \frac{\sin^2 \varphi}{[1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)]^2}.
\end{aligned}$$

A continuación requerimos determinar las terceras derivadas  $\ddot{I}_{ij}$ . Para esto, introducimos la coordenada angular  $\varphi$  y usamos las ecuaciones 18 y 34, de modo que podamos escribir

$$\begin{aligned}
\dot{M}_{ij} &= \frac{dM_{ij}}{d\varphi} \dot{\varphi} \\
&= \frac{dM_{ij}}{d\varphi} \frac{L}{\mu r^2} \\
&= \frac{L}{\mu a^2 (1 - e^2)^2} [1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)]^2 \frac{dI_{ij}}{d\varphi} \\
&= \frac{\omega_0}{(1 - e^2)^{3/2}} [1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)]^2 \frac{dI_{ij}}{d\varphi}.
\end{aligned}$$

Con lo que encontraríamos que

$$\begin{aligned}
\dot{M}_{11} &= (-2)\mu a^2 \omega_0 (1 - e^2)^{1/2} \frac{\cos \varphi (\sin \varphi + e \sin \varphi_0)}{1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)}, \\
\dot{M}_{22} &= (+2)\mu a^2 \omega_0 (1 - e^2)^{1/2} \frac{\sin \varphi (\cos \varphi + e \cos \varphi_0)}{1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)}, \\
\dot{M}_{12} &= \mu a^2 \omega_0 (1 - e^2)^{1/2} \frac{(\cos 2\varphi + e \cos(\varphi + \varphi_0))}{1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)}.
\end{aligned}$$

Análogamente, encontramos que

$$\ddot{M}_{11} = \alpha [1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)]^2 [4 \sin(2\varphi) + 3e \sin(2\varphi) \cos(\varphi - \varphi_0) + 2e \cos \varphi \sin \varphi_0], \quad (42)$$

$$\ddot{M}_{22} = \alpha [1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)]^2 [-4 \sin(2\varphi) - 3e \sin(2\varphi) \cos(\varphi - \varphi_0) - 2e \sin \varphi \cos \varphi_0], \quad (43)$$

$$\ddot{M}_{12} = \alpha [1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)]^2 [-4 \cos(2\varphi) - 3e \cos(2\varphi) \cos(\varphi - \varphi_0) - e \cos(\varphi + \varphi_0)], \quad (44)$$

con

$$\alpha := \frac{\mu a^2 \omega_0^3}{(1 - e^2)^{5/2}}.$$

En términos del tensor momento de inercia con traza, la potencia promedio radiada es dada por ??, y se reduce en este caso a

$$\begin{aligned}
\langle P \rangle &= \frac{G}{5c^5} \left\langle \ddot{M}^{ij} \ddot{M}^{ij} - \frac{1}{3} (\ddot{M}^{ii})^2 \right\rangle \\
&= \frac{G}{5c^5} \left\langle (\ddot{M}_{11})^2 + (\ddot{M}_{22})^2 + 2 (\ddot{M}_{12})^2 - \frac{1}{3} (\ddot{M}_{11} + \ddot{M}_{22})^2 \right\rangle \\
&= \frac{2G}{15c^5} \left\langle (\ddot{M}_{11})^2 + (\ddot{M}_{22})^2 + 3 (\ddot{M}_{12})^2 - \ddot{M}_{11} \ddot{M}_{22} \right\rangle.
\end{aligned}$$

Luego de reemplazar las ecuaciones 42 y 44, y usando la ecuación ??, obtenemos

$$\langle P \rangle = \frac{2G^4 \mu^2 M^3}{15c^5 a^5 (1 - e^2)^5} \langle g(\varphi) \rangle,$$

donde hemos introducido la función angular

$$g(\varphi) := 2 [1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)]^4 \left[ 24 + 13e^2 + 48e \cos(\varphi - \varphi_0) + 11e^2 \cos(2\varphi - 2\varphi_0) \right]. \quad (45)$$

Para calcular el promedio  $\langle g(\varphi) \rangle$ , transformamos la integral temporal en una integral sobre el ángulo  $\varphi$ :

$$\begin{aligned} \langle g(\varphi) \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T g(t) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^{2\pi} g(\varphi) \frac{dt}{d\varphi} d\varphi \\ &= \frac{1}{T} \int_0^{2\pi} g(\varphi) \frac{1}{\dot{\varphi}} d\varphi \\ &= \frac{1}{T} \frac{\mu}{L} \int_0^{2\pi} r^2(\varphi) g(\varphi) d\varphi \\ &= \frac{\mu a^2 (1 - e^2)^2}{TL} \int_0^{2\pi} \frac{g(\varphi)}{[1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)]^2} d\varphi \\ &= \frac{(1 - e^2)^{3/2}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{g(\varphi)}{[1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)]^2} d\varphi. \end{aligned}$$

Luego de reemplazar 45 en la expresión anterior, se obtiene una integral de simples funciones trigonométricas, que al ser evaluada se reduce a

$$\langle g(\varphi) \rangle = 48(1 - e^2)^{3/2} \left( 1 + \frac{73}{24}e^2 + \frac{37}{96}e^4 \right).$$

Con esto, encontramos la expresión de la potencia total promedio radiada por un sistema binario, de masa total  $M$ , masa reducida  $\mu$ , describiendo una órbita (relativa) con semieje mayor  $a$ , y excentricidad  $e$

PONER CITA

$$\begin{aligned} \langle P \rangle &= \frac{32}{5} \frac{G^4 \mu^2 M^3}{c^5 a^5} f(e), \\ f(e) &:= \frac{1}{(1 - e^2)^{7/2}} \left( 1 + \frac{73}{24}e^2 + \frac{37}{96}e^4 \right). \end{aligned} \quad (46)$$

Análogamente, el momentum angular promedio radiado es

$$\langle \dot{L} \rangle = \frac{32}{5} \frac{G^{7/2} \mu^2 M^{5/2}}{c^5 a^{7/2}} \frac{1}{(1 - e^2)^2} \left[ 1 + \frac{7}{8}e^2 \right].$$

A partir de 46 podemos encontrar una predicción de cómo irá “colapsando” el sistema binario, es decir, cómo irá disminuyendo el tamaño de las órbitas ( $a$ ) y el periodo orbital correspondiente ( $T$ ). Para esto, usamos las ecuaciones 32 y ?? que permiten relacionar el cambio  $\dot{E} = -\langle P \rangle$  de la energía del sistema binario con los correspondientes cambios del semieje mayor ( $\dot{a}$ ) y del periodo orbital ( $\dot{T}$ ), obteniendo

$$\frac{\dot{E}}{E} = -\frac{\dot{a}}{a} = -\frac{2}{3} \frac{\dot{T}}{T}.$$

De aquí encontramos la predicción de la *Teoría de Relatividad General para la disminución del periodo orbital de un sistema binario debido a la emisión de radiación gravitacional*:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{T}}{T} &= -\frac{3}{2} \frac{\dot{E}}{E} \\ &= -\frac{96}{5} \frac{G^3 \mu M^2}{c^5 a^4} f(e) \\ &= -\frac{96}{5} \frac{G^{5/3} \mu M^{2/3}}{c^5} \left( \frac{T}{2\pi} \right)^{-8/3} f(e). \end{aligned}$$

$$\frac{da}{dt} = -\frac{64}{5} \frac{G^3 \mu M^2}{c^5 a^3} \frac{1}{(1-e^2)^{7/2}} \left( 1 + \frac{73}{24} e^2 + \frac{37}{96} e^4 \right), \quad (47)$$

$$\frac{de}{dt} = -\frac{304}{15} \frac{G^3 \mu M^2}{c^5 a^4} \frac{e}{(1-e^2)^{5/2}} \left( 1 + \frac{121}{304} e^2 \right). \quad (48)$$

En el caso de una órbita circular,  $e = 0$ , la ecuación se reduce a

$$\frac{da}{dt} = -\frac{64}{5} \frac{G^3 \mu M^2}{c^5 a^3}, \quad (49)$$

cuya solución es

$$a(t) = \left[ a_0^4 - \frac{256}{5} \frac{G^3 \mu M^2}{c^5} (t - t_0) \right]^{1/4}. \quad (50)$$

Dividiendo las ecuaciones 47 y 48 para  $\dot{a}$  y  $\dot{e}$  podemos eliminar el tiempo de estas expresiones y encontrar una ecuación que relaciona directamente  $a$  con  $e$ :

$$\frac{da}{de} = \frac{12}{19} a \frac{1 + (73/24)e^2 + (37/96)e^4}{e(1-e^2)[1 + (121/304)e^2]}.$$

La solución de esta ecuación es de la forma

$$a(e) = a_0 \frac{g(e)}{g(e_0)},$$

con

$$g(e) := \frac{e^{12/19}}{1-e^2} \left( 1 + \frac{121}{304} e^2 \right)^{870/2299}.$$

## 5. Resultados

## 6. Conclusiones y discusión

## 7. Código

## Referencias

- [1] Omar Gustavo Benvenuto and Alejandra De Vito. El estado evolutivo de la enana blanca en el pulsar binario PSR J1713 + 0747 Tabla 1. 48:146–151, 2005.
- [2] J Gonz. Estudio del estado evolutivo del sistema binario que contiene al pulsar de milisegundos PSR J1227 - 4853. 61(1988), 2019.
- [3] Julián R González, Directora María, and Alejandra De Vito. Tesis para obtener el grado académico de Licenciado en Astronomía Estudio del estado evolutivo del sistema binario PSR J1227-4853. 2018.
- [4] Francisco M Rica. De Estrellas Dobles. *Star*, 2009.
- [5] P L Torres. *Elementos de mecánica newtoniana*.
- [6] M A De Vito and O G Benvenuto. PRESENTACION PSR J0751 + 1807 : un ajuste a los parámetros característicos del sistema binario. 51, 2008.
- [7] Cristina Wainmaier, Cristina Speltini, and Julia Salinas de Sandoval. Conceptos y relaciones entre conceptos de la mecánica newtoniana en estudiantes que ingresan a la universidad. *REEC: Revista electrónica de enseñanza de las ciencias*, 10(1):133–152, 2011.
- [8] J. M. Weisberg, D. J. Nice, and J. H. Taylor. Timing measurements of the relativistic binary pulsar PSR B1913+16. *Astrophysical Journal*, 722(2):1030–1034, 2010.