



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FCFM

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS



**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS**

Tópicos de Mecánica Cuántica

Guía 3

Enrique Valbuena Ordonez

Nombre:
Giovanni Gamaliel López Padilla

Matricula:
1837522

29 de noviembre de 2020

1. Demostrar que la lagrangiana de interacción de Klein-Gordon es invariante de norma, posee simetría U(1) y obtener las corrientes de Noether asociadas a las respectivas transformaciones

- Invariante de norma.

Se tiene que:

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi)^* (\partial^\mu \phi) - m^2 \phi^* \phi$$

aplicando la transformaciones:

$$\partial^\mu \rightarrow \partial^\mu - ig A^\mu$$

se tiene lo siguiente:

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi^* + ig A_\mu \phi^*) (\partial^\mu \phi - ig A^\mu \phi) - m^2 \phi^* \phi.$$

Realizando las operaciones se tiene que:

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi + ig A_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - ig A^\mu \phi \partial_\mu \phi^* + g^2 A^\mu A_\mu \phi^* \phi$$

tomando en cuenta las transformaciones de norma, tales que:

$$\phi \rightarrow e^{i\theta} \phi \quad A_\mu \rightarrow A_\mu + \frac{1}{g} \partial_\mu \theta$$

se tiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' &= (\partial_\mu \phi^*) (\partial^\mu \phi) + ig (A_\mu - \partial_\mu \theta) \phi'^* \partial^\mu \phi' \\ &\quad - ig (A^\mu - \partial^\mu \theta) \phi'^* \partial_\mu \phi' + g^2 \left(A^\mu + \frac{1}{g} \partial^\mu \theta \right) \left(A_\mu + \frac{1}{g} \partial_\mu \theta \right) \phi'^* \phi' \end{aligned}$$

calculando $(\partial_\mu \phi^*) (\partial^\mu \phi)$

$$\begin{aligned} (\partial_\mu \phi^* - ig A_\mu \phi^*) (\partial^\mu \phi - ig A^\mu \phi) &= (e^{-i\theta} \partial_\mu \phi^* - ie^{-i\theta} \phi^* \partial_\mu \theta) (e^{i\theta} \partial^\mu \phi + ie^{i\theta} \phi \partial^\mu \theta) \\ &\quad (\partial_\mu \phi^* - i\phi^* \partial_\mu \theta) (\partial^\mu \phi + i\phi \partial^\mu \theta) \end{aligned}$$

teniendo así

$$(\partial_\mu \phi^* + ig A_\mu \phi^*) (\partial^\mu \phi - ig A^\mu \phi) = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - i\phi^* \partial_\mu \theta \partial^\mu \phi + i\phi \partial^\mu \partial_\mu \phi^* + \phi^* \phi \partial_\mu \theta \partial^\mu \theta$$

calculando $ig \left(A_\mu + \frac{1}{g} \partial_\mu \theta \right) \phi'^* \partial^\mu \phi'$

$$\begin{aligned} ig (A_\mu + g^{-1} \partial_\mu \theta) \phi'^* \partial^\mu \phi' &= (-ig A_\mu + i\partial_\mu \theta) (\phi'^* \partial^\mu \phi') \\ &= (ig A_\mu + i\partial_\mu \theta) e^{-i\theta} \phi^* (e^{i\theta} \partial^\mu \phi + i\phi e^{i\theta} \partial^\mu \theta) \\ &= (ig A_\mu + i\partial_\mu \theta) \phi^* (\partial^\mu \phi + i\phi \partial^\mu \theta) \end{aligned}$$

teniendo así:

$$ig (A_\mu + g^{-1} \partial_\mu \theta) \phi' \partial^\mu \phi'^* = ig A_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - g \phi^* A_\mu \partial^\mu \theta + i\phi^* \partial^\mu \phi \partial_\mu \theta - \phi \phi^* \partial^\mu \theta \partial_\mu \theta$$

calculando $ig \left(A^\mu + \frac{1}{g} \partial^\mu \theta \right) \phi' \partial_\mu \phi'^*$

$$\begin{aligned} ig \left(A^\mu + \frac{1}{g} \partial^\mu \theta \right) \phi' \partial_\mu \phi'^* &= ig \left(A^\mu + \frac{1}{g} \partial^\mu \theta \right) e^{i\theta} \phi (e^{-i\theta} \partial_\mu \phi^* - i\phi^* e^{-i\theta} \partial_\mu \theta) \\ &= ig \left(A^\mu + \frac{1}{g} \partial^\mu \theta \right) \phi (\partial_\mu \phi^* - i\phi^* \partial_\mu \theta) \\ &= (ig A^\mu + i\partial^\mu \theta) \phi (\partial_\mu \phi^* - i\phi^* \partial_\mu \theta) \end{aligned}$$

teniendo asi:

$$ig \left(A^\mu + \frac{1}{g} \partial^\mu \theta \right) \phi'^* \partial_\mu \phi' = ig A^\mu \phi \partial_\mu \phi^* + g \phi^* \phi A^\mu \partial_\mu \theta + i\phi \partial^\mu \theta \partial_\mu \phi^* + \phi^* \phi \partial^\mu \theta \partial_\mu \theta$$

calculando $g^2 \left(A^\mu + \frac{1}{g} \partial^\mu \theta \right) \left(A_\mu + \frac{1}{g} \partial_\mu \theta \right) \phi'^* \phi'$

$$\begin{aligned} g^2 \left(A^\mu + \frac{1}{g} \partial^\mu \theta \right) \left(A_\mu + \frac{1}{g} \partial_\mu \theta \right) \phi'^* \phi' &= g^2 \left(A^\mu A_\mu + \frac{1}{g} A^\mu \partial_\mu \theta + \frac{1}{g} A_\mu \partial^\mu \theta + \frac{1}{g^2} \partial^\mu \theta \partial_\mu \theta \right) \phi^* \phi \\ &= (g^2 A^\mu A_\mu + g A^\mu \partial_\mu \theta + g A_\mu \partial^\mu \theta + \partial^\mu \theta \partial_\mu \theta) \phi^* \phi \end{aligned}$$

teniendo asi

$$g^2 \left(A^\mu + \frac{1}{g} \partial^\mu \theta \right) \left(A_\mu + \frac{1}{g} \partial_\mu \theta \right) \phi'^* \phi' = g^2 A^\mu A_\mu \phi^* \phi + g A^\mu \partial_\mu \theta \phi^* \phi + g A_\mu \partial^\mu \theta \phi^* \phi + \partial^\mu \theta \partial_\mu \theta \phi^* \phi$$

Realizando la suma de cada parte se tiene que

$$\begin{array}{cccc} \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi & \cancel{-i\phi^* \partial_\mu \theta \partial^\mu \phi} & \cancel{+i\phi \partial^\mu \theta \partial_\mu \phi^*} & \cancel{+\phi^* \phi \partial_\mu \theta \partial^\mu \theta} \\ +ig A_\mu \phi^* \partial^\mu \phi & \cancel{-g\phi^* A_\mu \partial^\mu \theta} & \cancel{+i\phi^* \partial^\mu \phi \partial_\mu \theta} & \cancel{-\phi\phi^* \partial^\mu \theta \partial_\mu \theta} \\ -ig A^\mu \phi \partial_\mu \phi^* & \cancel{-g\phi^* \phi A^\mu \partial_\mu \theta} & \cancel{-i\phi \partial^\mu \theta \partial_\mu \phi^*} & \cancel{-\phi^* \phi \partial^\mu \theta \partial_\mu \theta} \\ +g^2 A^\mu A_\mu \phi^* \phi & \cancel{+g A^\mu \partial_\mu \theta \phi^* \phi} & \cancel{+g A_\mu \partial^\mu \theta \phi^* \phi} & \cancel{+\partial^\mu \theta \partial_\mu \theta \phi^* \phi} \end{array}$$

teniendo asi la invarianza en la lagrangiana de interacción de Klein-Gordon

■ Corrientes de Noether.

Se tiene que:

$$\delta \mathcal{L} = 0$$

entonces:

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^*} \delta \phi^* + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \phi)} \delta (\partial^\mu \phi) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \phi^*)} \delta (\partial^\mu \phi^*)$$

donde

$$\begin{aligned} \delta \phi &= i\alpha \phi & \delta (\partial^\mu \phi) &= i\alpha \partial_\mu \phi \\ \delta \phi &= -i\alpha \phi & \delta (\partial^\mu \phi) &= -i\alpha \partial_\mu \phi \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{L} &= i\alpha \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\phi - i\alpha \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^*}\phi^* + i\alpha \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi)}\partial_\mu\phi - i\alpha \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi^*)}\partial_\mu\phi^* \\
&= i\alpha \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\phi - i\alpha \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^*}\phi^* - i\alpha \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi)} \right) \phi + i\alpha \partial^\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi)} \phi \right) - i\alpha \partial^\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi^*)} \phi^* \right) \\
&= i\alpha \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi)} \right) \right] \phi - i\alpha \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^*} - \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi^*)} \right) \right] \phi^* + i\alpha \partial^\mu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi)} \phi - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi^*)} \phi^* \right] \\
&= \partial^\mu \left(i\alpha \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi)} \phi - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi^*)} \phi^* \right] \right)
\end{aligned}$$

con lo cual obtenemos que:

$$\partial^\mu \left(i\alpha \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi)} \phi - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi^*)} \phi^* \right] \right) = 0$$

donde

$$j_\mu = i\alpha \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi)} \phi - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi^*)} \phi^* \right]$$

calculando las derivadas parciales se tiene que:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi)} = -igA_\mu\phi^* \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi^*)} = igA^\mu\phi$$

por lo tanto:

$$j_\mu = g\alpha [A_\mu + A^\mu] \phi^* \phi$$

2. Obtener la expresión para los términos de la energía de un sistema descrito por la ecuación de Schrödinger originalmente degenerado al primer orden de la teoría de perturbaciones.

3. Obtener la expresión cuántica para el campo electromagnético a partir de la lagrangiana electromagnética clásica.

Se tiene que el campo eléctrico y magnético pueden obtenerse a partir de las siguientes operaciones:

$$E = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \vec{B} = -(\vec{\nabla} \times \vec{A})$$

donde \vec{A} , es el potencial vector, el cual cumple la ecuación de onda:

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0$$

es por ello que se propone que el potencial vector \vec{A} , puede escribirse como una serie de Fourier tal que:

$$A(\vec{r}, t) = \sum_k \left[\vec{a}_{\vec{p}} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_k t)} + \vec{a}_{\vec{p}}^* e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_k t)} \right]$$

donde $\vec{a}_{\vec{p}}$ es un operador tal que contiene la información de la polarización y depende únicamente del tiempo, \vec{k} es el número de onda asociado al momento, ω_k , es la

frecuencia que contiene cada onda asociada a la energía de De Broglie. Reescribiendo esta expresión podemos separar la dependencia temporal en la forma

$$A(\vec{r}, t) = \sum_k \left[\vec{\epsilon}_k e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r})} + \vec{\epsilon}_k^* e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r})} \right]$$

donde

$$\vec{\epsilon}_k = \vec{a}_p e^{i\omega_k t} \quad \vec{\epsilon}_k^* = \vec{a}_p^* e^{-i\omega_k t}$$

por lo mismo, las expresiones del campo eléctrico y magnético las podemos escribir de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \sum_k \left(\vec{E}_k(t) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} + \vec{E}_k^*(t) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \right) \\ \vec{B} &= \sum_k \left(\vec{B}_k(t) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} + \vec{B}_k^*(t) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \right) \end{aligned}$$

calculando $\partial \vec{A} / \partial t$, se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} &= \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \sum_k \left[\vec{\epsilon}_k e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r})} + \vec{\epsilon}_k^* e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r})} \right] \\ &= \frac{1}{c} \sum_k \left[e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r})} \frac{\partial \vec{\epsilon}_k}{\partial t} + e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r})} \frac{\partial \vec{\epsilon}_k^*}{\partial t} \right] \\ &= \frac{1}{c} \sum_k \left[e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r})} (i\omega_k) \vec{\epsilon}_k + e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r})} (i\omega_k \vec{\epsilon}_k^*)^* \right] \\ &= \sum_k \left[e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r})} (i|\vec{k}|) \vec{\epsilon}_k + e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r})} (i|\vec{k}| \vec{\epsilon}_k^*)^* \right] \end{aligned}$$

por lo tanto:

$$\sum_k \left(\vec{E}_k(t) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} + \vec{E}_k^*(t) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \right) = \sum_k \left[e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r})} (ik) \vec{\epsilon}_k + e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r})} (ik \vec{\epsilon}_k^*)^* \right]$$

donde se aprecia que:

$$\vec{E}_k = i|\vec{k}| \vec{\epsilon}_k$$

calculando $\vec{\nabla} \times \vec{A}$ se tiene que:

$$\begin{aligned} \left(\vec{\nabla} \times \vec{A} \right)_k &= \epsilon_{xyz} \partial_y A_z \\ &= i\epsilon_{xyz} k_y A_z \\ &= i\vec{k} \times \vec{A}_k \end{aligned}$$

por lo tanto:

$$\vec{B}_k = i\vec{k} \times \vec{A}_k$$

por lo tanto, el campo electromagnético es

$$EM = \sum_k i \left(|\vec{k}| \vec{\epsilon}_k + \vec{k} \times \vec{A}_k \right) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} - i \left(|\vec{k}| \vec{\epsilon}_k^*(t) + \vec{k} \times \vec{A}_k^* \right) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}}$$