

UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FCFM

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS



**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS**

**Relatividad General
Proyecto final:
Modelo de evolución de un Pulsar Binario**

Dr. Carlos Luna Criado

Nombre:
Giovanni Gamaliel López Padilla
Ivan Arturo Pla Guzman

Matricula:
1837522
1837515

7 de noviembre de 2020

Índice

1. Resumen	2
2. Introducción	2
2.1. Punto de vista newtoniano	2
2.2. Sistemas de cuerpos	2
2.2.1. Sistemas Binarios	3
2.3. Origen de la Relatividad	4
2.4. Principios de Relatividad General	4
3. Objetivo	5
4. Marco teórico	5
4.1. Problema de Kepler Newtoniano	5
4.2. Potencia radiada por un sistema binario	11
5. Resultados	14
5.1. Solución exacta de la ecuación $a(e)$	14
5.2. Solución numérica de la función $a(e)$	15
6. Conclusiones y discusión	19
7. Código y datos	19

1. Resumen

En el presente trabajo se analizarán las ecuaciones del movimiento rotacional de un sistema binario bajo la perspectiva de un movimiento kepleriano haciendo uso del tensor momento de inercia del sistema, el cual será reducido al problema de una partícula con masa reducida μ bajo un sistema descrito por una coordenada relativa \vec{r} de modo que el sistema se encuentra en el plano xy , para así obtener las ecuaciones diferenciales de la evolución del semieje mayor a y la excentricidad e en el tiempo. Con ayuda del lenguaje python se obtuvo una solución numérica para realizar la comparación entre la solución analítica, la solución numérica y los datos observacionales reportados por J. M. Weisberg [1]. Esto resultó que el uso de la relatividad general compata con los datos observacionales, y con ello, una demostración de que la relatividad general es una teoría que representa en una aproximación a la realidad.

Palabras clave: Sistema binario, Pulsar PSR B1913+16, excentricidad, semieje mayor, potencia radiada, kepler.

2. Introducción

2.1. Punto de vista newtoniano

La mecánica newtoniana o mecánica vectorial es un conjunto de formulaciones de la mecánica clásica que estudia el movimiento de partículas y sólidos en un espacio euclídeo tridimensional. Cada cuerpo contiene una velocidad inicial referenciada desde un sistema inercial donde las ecuaciones del movimiento se ven reducidas a las leyes de Newton. La mecánica newtoniana es un modelo físico que funciona para describir la dinámica de los cuerpos en el espacio por medio de las fuerzas que contiene cada objeto. Históricamente, la mecánica newtoniana fue el primer modelo físico en poder representar de buena manera la dinámica de los objetos al punto de predecir acciones importantes sobre el movimiento de los cuerpos, en donde se incluyen las trayectorias de ciertos planetas. La mecánica newtoniana es suficientemente válida para la casos en los cuales sus aproximaciones compatan con los resultados experimentales, ya sea como el movimiento de cohetes, trayectorias de planetas, moléculas orgánicas, trayectorias de móviles, etc. Sin embargo, existen problemas en donde el modelo newtoniano se complica matemáticamente en comparación a otras teorías como la mecánica lagrangiana o hamiltoniana, es por ello que debemos observar con detenimiento el sistema de estudio para decidir que teoría utilizar y resolver el problema de una manera sencilla.

2.2. Sistemas de cuerpos

En física, la cuestión del problema de los n -cuerpos trata de determinar los movimientos individuales de un grupo de partículas materiales que interactúan mutuamente según las leyes de la gravitación universal de Newton. La resolución de este problema ha sido motivada por el deseo de predecir los movimientos de los cuerpos celestes. En el siglo XX, el entendimiento de la dinámica de los sistemas de cúmulos globulares de estrellas se convirtió en un importante problema de n -cuerpos.

El problema físico clásico puede plantearse de forma simplificada como:

Dadas las propiedades orbitales (masa, posición instantánea y velocidad) de un grupo de cuerpos astronómicos, determinar las fuerzas interactivas actuantes; y consiguientemente, calcular sus movimientos orbitales para cualquier instante futuro.

Inicialmente, el problema de los n-cuerpos no fue planteado correctamente porque no se incluía el efecto de las fuerzas interactivas gravitatorias. Newton no lo expresa explícitamente, pero de sus Principia se deduce que el problema de los n-cuerpos es irresoluble debido precisamente a aquellas fuerzas interactivas gravitacionales. En sus Principia, párrafo 21, se afirma que:

Y de ahí que la fuerza atractiva se encuentre en ambos cuerpos. El Sol atrae a Júpiter y a los otros planetas, Júpiter atrae a sus satélites y de igual modo los satélites actúan unos sobre otros. Y aunque las acciones de cada par de planetas en el otro se pueden distinguir entre sí y pueden considerarse como dos acciones por las cuales cada uno atrae al otro, sin embargo, en tanto que son los mismos dos cuerpos no son dos sino una simple operación entre dos términos. Dos cuerpos pueden ser atraídos entre sí por la contracción de una cuerda entre ellos. La causa de la acción es doble, nominalmente sobre la disposición de cada uno de los dos cuerpos; la acción es igualmente doble, en la medida en que actúa sobre los dos cuerpos; pero en la medida en que está entre los dos cuerpos, es única y una .

Newton concluyó a través de su tercera Ley que "según esta Ley, todos los cuerpos tienen que atraer cada cual a los otros." Esta última declaración, que implica la existencia de fuerzas interactivas gravitatorias.

2.2.1. Sistemas Binarios

En astronomía, el término sistema binario se utiliza para referirse a dos objetos astronómicos que orbitan alrededor de un centro de masa común debido a la fuerza gravitatoria que hay dada su cercanía. Normalmente se utiliza para referirse a dos estrellas, sin embargo, el término puede aplicarse a un sistema formado por un planeta y un satélite natural, siempre y cuando este último sea excepcionalmente grande en comparación con el planeta. Algunos ejemplos de estos son:

- La galaxia de Bode (M81) y la galaxia del Cigarro (M82).
- Dentro del sistema solar, el sistema Plutón-Charón está formado por un planeta y un satélite.

Una estrella binaria es un sistema estelar compuesto de dos estrellas que orbitan mutuamente alrededor de un centro de masas común [2]. Los sistemas múltiples, que pueden ser ternarios, cuaternarios, o inclusive de cinco o más estrellas interactuando entre sí, suelen recibir también el nombre de estrellas binarias, como es el caso de Alfa Centauri A y B y Próxima Centauri.

Dentro de los sistemas binarios en los que se da el fenómeno de acreción, existe una clase que brilla fuertemente en rayos X e involucra la presencia de un objeto compacto. A este tipo de sistemas se les llama Binarias de Rayos X, y se dividen en dos grupos principales:

1. Binarias de rayos X de alta masa (HMXB por High Mass X-Ray Binary) [3], y está formado por una donadora masiva (unas 20 masas solares), en donde la cesión de masa al objeto compacto se da vía un viento estelar.
2. Binarias de rayos X de baja masa (LMXB por Low Mass X-Ray Binary) [4]. En este caso la donadora es de baja masa (del orden de $0.5 M_{\odot}$) y la cesión de masa al objeto compacto se da cuando la separación entre las estrellas es lo suficientemente chica (o la donadora es lo suficientemente grande) como para que el objeto compacto arranque el material de su superficie por fuerzas gravitacionales.

2.3. Origen de la Relatividad

La teoría de la relatividad incluye tanto a la teoría de la relatividad especial como la de relatividad general, formuladas principalmente por Albert Einstein a principios del siglo XX, que pretendían resolver la incompatibilidad existente entre la mecánica newtoniana y el electromagnetismo. La teoría de la relatividad especial, publicada en 1905, trata de la física del movimiento de los cuerpos en ausencia de fuerzas gravitatorias, en el que se hacían compatibles las ecuaciones de Maxwell del electromagnetismo con una reformulación de las leyes del movimiento. En la teoría de la relatividad especial, Einstein, Lorentz y Minkowski, entre otros, unificaron los conceptos de espacio y tiempo, en un ramado tetradimensional al que se le denominó espacio-tiempo.

La teoría de la relatividad general, publicada en 1915, es una teoría de la gravedad que reemplaza a la gravedad newtoniana, aunque coincide numéricamente con ella para campos gravitatorios débiles y "pequeñas" velocidades. La teoría general se reduce a la teoría especial en presencia de campos gravitatorios. La relatividad general estudia la interacción gravitatoria como una deformación en la geometría del espacio-tiempo. En esta teoría se introducen los conceptos de la curvatura del espacio-tiempo como la causa de la interacción gravitatoria, el principio de equivalencia que dice que para todos los observadores locales inerciales las leyes de la relatividad especial son invariantes y la introducción del movimiento de una partícula por líneas geodésicas.

2.4. Principios de Relatividad General

Las características esenciales de la teoría de la relatividad general son las siguientes:

- El principio general de covariancia: las leyes de la Física deben tomar la misma forma matemática en todos los sistemas de coordenadas.
- El principio de equivalencia o de invariancia local de Lorentz: las leyes de la relatividad especial (espacio plano de Minkowski) se aplican localmente para todos los observadores inerciales.
- La curvatura del espacio-tiempo es lo que observamos como un campo gravitatorio, en presencia de materia la geometría del espacio-tiempo no es plana sino curva, una partícula en movimiento libre inercial en el seno de un campo gravitatorio sigue una trayectoria geodésica.

3. Objetivo

- Obtener la solución analítica que describa la evolución del semieje mayor a y la excentricidad e de un sistema pulsar binario.
- Obtener la solución numérica que describa la evolución del semieje mayor a y la excentricidad e de un sistema pulsar binario.
- Realizar una comparación de la solución analítica y la solución numérica con los valores observaciones reportados en [1].

4. Marco teórico

4.1. Problema de Kepler Newtoniano

Si \vec{x}_1 y \vec{x}_2 son las coordenadas de m_1 y m_2 respecto a un sistema de referencia inercial [5], entonces las ecuaciones de movimiento correspondientes son:

$$\ddot{\vec{x}}_1 = -Gm_2 \frac{(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^3}, \quad (1)$$

$$\ddot{\vec{x}}_2 = -Gm_1 \frac{(\vec{x}_2 - \vec{x}_1)}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^3}. \quad (2)$$

Es conveniente definir una coordenada para el centro de masa \vec{x}_{cm} , la cual esta dada por:

$$\vec{x}_{cm} = \frac{m_1 \vec{x}_1 + m_2 \vec{x}_2}{M}, \quad M = m_1 + m_2. \quad (3)$$

Con estas ecuaciones definidas se puede comprobar que a partir de 1 y 2 el centro de masa \vec{x}_{cm} es igual a cero.

$$\ddot{\vec{x}}_{cm} = \vec{0}.$$

Por lo tanto, la coordenada del centro de masa se mueve a velocidad constante. Esto permite simplificar el problema describiendo el movimiento desde el sistema de referencia inercial en el que el centro de masa del sistema está en reposo y ubicado en el origen, es decir:

$$\vec{x}_{cm} \stackrel{!}{=} \vec{0}. \quad (4)$$

Por la condición 4 implica que, en el sistema de referencia inercial del centro de masa, las coordenadas de m_1 y m_2 están relacionadas por:

$$\vec{x}_2 = -\frac{m_1}{m_2} \vec{x}_1. \quad (5)$$

Definiendo así una coordenada relativa dada por:

$$\vec{r} = \vec{x}_2 - \vec{x}_1. \quad (6)$$

Con esto definido, podemos escribir a la ecuación 5 comprobar

$$\vec{x}_1 = -\frac{m_2}{M} \vec{r}, \quad \vec{x}_2 = \frac{m_1}{M} \vec{r}. \quad (7)$$

Usando estas relaciones podemos transformar las ecuaciones de movimiento 1 y 2 en ecuaciones para la coordenada relativa:

$$\ddot{\vec{r}} = -GM \frac{\hat{r}}{r^2}. \quad (8)$$

Por otro lado, la energía total del sistema

$$E = \frac{1}{2}m_1\vec{v}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\vec{v}_2^2 - \frac{Gm_1m_2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|}, \quad (9)$$

y el momentum angular total respecto al origen,

$$\vec{L} = m_1\vec{x}_1 \times \vec{v}_1 + m_2\vec{x}_2 \times \vec{v}_2, \quad (10)$$

pueden reescribirse en términos de la coordenada relativa, resultando

$$E = \frac{1}{2}\mu\vec{v}^2 - \frac{G\mu M}{r}, \quad (11)$$

$$\vec{L} = \mu \vec{r} \times \vec{v}, \quad (12)$$

donde $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ y $\mu = m_1m_2/M$ es llamada la *masa reducida* del sistema.

Los resultados de las ecuaciones 8, 11 y 12 muestran que el movimiento relativo es equivalente al de un cuerpo de masa μ moviéndose en el potencial central fijo generado por una masa M situada en el origen $\phi = -GM/r$. Como este potencial es central, el momentum angular total del sistema es constante a lo largo de la trayectoria. Como consecuencia, el movimiento está confinado al plano perpendicular \vec{L} . Podemos elegir el eje z normal a este plano, de modo que la trayectoria del cuerpo satisface $\theta = \pi/2$, y entonces realizando la transformación de coordenadas rectangulares a coordenadas polares y usando $\vec{r} = r\hat{r}$ podemos escribir la velocidad y la aceleración como:

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\phi}\hat{\phi}, \quad (13)$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)\hat{r} + (r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi})\hat{\phi}. \quad (14)$$

Reemplazando la ecuación 14 en 8 obtenemos

$$(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)\hat{r} + (r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi})\hat{\phi} = -\frac{GM}{r^2}\hat{r}. \quad (15)$$

De aquí, encontramos

$$\ddot{r} - r\dot{\phi}^2 = -\frac{GM}{r^2}, \quad (16)$$

$$r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi} = 0. \quad (17)$$

Multiplicando la ecuación 17 por r , se encuentra que el término $r^2\dot{\phi}$ es constante sobre la trayectoria

$$\begin{aligned} 0 &= r^2\ddot{\phi} + 2r\dot{r}\dot{\phi} \\ &= \frac{d}{dt}(r^2\dot{\phi}), \end{aligned}$$

que expresa la conservación del momento angular, ya que

$$\begin{aligned}
 \vec{L} &= \mu \vec{r} \times \vec{v} \\
 &= \mu r \hat{r} \times (\dot{r} \hat{r} + r \dot{\phi} \hat{\phi}) \\
 &= \mu r^2 \dot{\phi} (\hat{r} \times \hat{\phi}) \\
 &= \mu r^2 \dot{\phi} \hat{z}.
 \end{aligned}$$

$$\vec{L} = \mu r^2 \dot{\phi} \hat{z}. \quad (18)$$

Otra cantidad conservada sobre la órbita es la energía mecánica

$$E = \frac{1}{2} \mu v^2 - \frac{GM\mu}{r} \quad (19)$$

$$= \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{1}{2} \mu r^2 \dot{\phi}^2 - \frac{GM\mu}{r}. \quad (20)$$

Despejando $\dot{\phi}$ de la ecuación 18 podemos escribir la energía mecánica sólo en términos de la variable r y constantes del movimiento:

$$E = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{GM\mu}{r}. \quad (21)$$

Definiendo un potencial efectivo

$$V_{\text{ef}}(r) = \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{GM\mu}{r}, \quad (22)$$

De modo que la ecuación 21 pueda ser escrita como la ecuación de conservación de la energía de un movimiento unidimensional:

$$E = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + V_{\text{ef}}(r). \quad (23)$$

El potencial efectivo $V_{\text{ef}}(r)$ posee un cero en

$$r_c = \frac{L^2}{2GM\mu^2}, \quad (24)$$

y además posee un mínimo en

$$r_{\text{min}} = \frac{L^2}{GM\mu^2} = 2r_c, \quad (25)$$

tal que

$$V_{\text{ef,min}} = -\frac{G^2 M^2 \mu^3}{2L^2} < 0.$$

Además, el comportamiento asintótico del potencial efectivo es

$$\begin{aligned}
 \lim_{r \rightarrow \infty} V_{\text{ef}}(r) &\approx -\frac{GM\mu}{r} \rightarrow 0, \\
 \lim_{r \rightarrow 0} V_{\text{ef}}(r) &\approx \frac{L^2}{2\mu r^2} \rightarrow +\infty.
 \end{aligned}$$

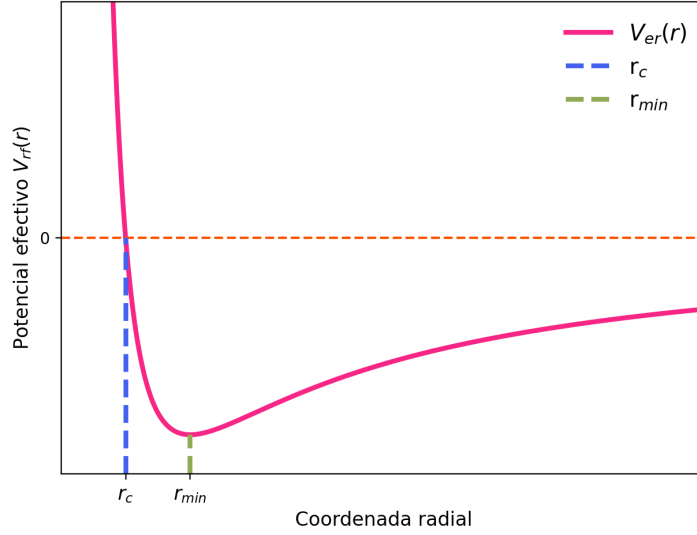


Figura 1: Potencial newtoniano efectivo, las constantes L, G, M, μ igualadas a 1

Así para un valor de L dado, tenemos que:

1. Si $E_1 > 0$, una partícula proveniente del infinito alcanza un radio mínimo r_1 , donde $\dot{r}^2 = 0$, y luego vuelve a infinito.
2. Si $V_{\text{ef},\text{min}} < E_2 < 0$ la trayectoria es ligada, variando la distancia entre dos puntos de retorno r_2 y r_3 , de modo que $r_2 < r < r_3$.
3. Si $E_3 = V_{\text{ef},\text{min}}$ la partícula describe un movimiento circular de radio dado por la ecuación 25. Este caso corresponde al mínimo del potencial, por lo que es un movimiento estable.
4. Finalmente, no existen trayectorias con $E < V_{\text{ef},\text{min}}$ ya que la ecuación 23 requiere que $E \geq V_{\text{ef}}$.

Determinando la forma de la trayectoria, descrita por la dependencia de la coordenada radial r en términos de la coordenada angular φ . Asumiendo $r = r(\varphi)$ podemos escribir

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\varphi} \dot{\varphi} = \frac{L}{\mu r^2} \frac{dr}{d\varphi}. \quad (26)$$

Reemplazando en la ecuación 21 la ecuación 26 obtenemos

$$\frac{1}{r^4} \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 = \frac{2\mu E}{L^2} + \frac{2GM\mu^2}{L^2 r} - \frac{1}{r^2}. \quad (27)$$

Con un cambio de variable $u = 1/r$, entonces la ecuación 27

$$(u')^2 = \frac{2\mu E}{L^2} + \frac{2GM\mu^2}{L^2} u - u^2, \quad (28)$$

derivando la ecuación 28 se encuentra la ecuación de movimiento para u en función de φ

$$u'' + u = \frac{GM\mu^2}{L^2}. \quad (29)$$

La integración de la ecuación 29 es directa ya que corresponde a un oscilador armónico con un término forzante constante

$$u(\varphi) = \frac{GM\mu^2}{L^2} (1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)) \quad (30)$$

donde reemplazando la solución 30 en 28

$$e = \sqrt{1 + \frac{2L^2 E}{G^2 M^2 \mu^3}}, \quad (31)$$

es la excentricidad de la órbita y φ_0 es una constante de integración correspondiente a la orientación inicial relativa al eje x. Si $-G^2 M^2 \mu^2 / 2L^2 < E < 0$ entonces $0 < e < 1$, y la cónica es una elipse.

El semieje mayor de la órbita, puede ser escrito en términos de las constantes de movimiento a partir de las ecuaciones 30 y 31

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{u_{\min}} + \frac{1}{u_{\max}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{L^2}{GM\mu^2} \frac{1}{(1+e)} + \frac{L^2}{GM\mu^2} \frac{1}{(1-e)} \right) \\ &= \frac{L^2}{GM\mu^2} \frac{1}{(1-e^2)} \\ &= -\frac{GM\mu}{2E}. \end{aligned} \quad (32)$$

Con esto, podemos escribir la solución de la ecuación 30 como

$$u(\varphi) = \frac{1}{a(1-e^2)} [1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)], \quad (33)$$

o, en términos de la coordenada radial relativa,

$$r(\varphi) = \frac{a(1-e^2)}{1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)}. \quad (34)$$

La evolución temporal de la órbita puede ser determinada implícitamente de la forma siguiente. Definamos la variable auxiliar s por

$$r = a(1 - e \cos s). \quad (35)$$

A partir de esto podemos usar la ecuación 34 para encontrar una relación entre φ y s sobre la órbita. De esta forma, obtenemos

$$\cos(\varphi - \varphi_0) = \frac{\cos s - e}{1 - e \cos s}, \quad (36)$$

y a partir de aquí

$$\sin(\varphi - \varphi_0) = \sqrt{1 - e^2} \frac{\sin s}{1 - e \cos s}. \quad (37)$$

Derivando la ecuación 36 respecto a s y usando la ecuación 37 obtenemos

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{1-e\cos s}.$$

Con esto, podemos expresar el momento angular de la ecuación 18 en términos de s ;

$$\begin{aligned} L &= \mu r^2 \frac{d\varphi}{dt} \\ &= \mu r^2 \frac{d\varphi}{ds} \frac{ds}{dt} \\ &= \mu a^2 (1-e\cos s)^2 \frac{d\varphi}{ds} \frac{ds}{dt} \\ &= \mu a^2 \sqrt{1-e^2} (1-e\cos s) \frac{ds}{dt}. \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} 1-e\cos s &= \frac{L}{\mu a^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{dt}{ds} \\ &=: \omega_0 \frac{dt}{ds}, \\ 1-e\cos s &=: \omega_0 \frac{dt}{ds}, \end{aligned} \tag{38}$$

donde hemos introducido el término ω_0 , con unidades de frecuencia, que usando la ecuación 31 satisface

$$\omega_0^2 = \frac{GM}{a^3}. \tag{39}$$

La relación de la ecuación 38 puede integrarse directamente respecto a s . Eligiendo la condición inicial $s = 0$ para $t = 0$ obtenemos

$$\omega_0(t - t_0) = s - e \sin s. \tag{40}$$

Las expresiones de las ecuaciones 40, 35, 36 y 37 suministra una *solución paramétrica* para la órbita. A partir de la ecuación 34 vemos que $r(\varphi)$ es periodica con periodo $\Delta\varphi = 2\pi$. Además, de las ecuaciones 35 y 36 vemos que este periodo corresponde a un cambio en 2π en la variable auxiliar s . Finalmente, la relación 35 implica que esta periodicidad corresponde a un intervalo de tiempo

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}, \tag{41}$$

que es entonces el *periodo orbital*. Con esto la ecuación 39 implica la *tercera ley de Kepler*.

4.2. Potencia radiada por un sistema binario

Considerando el caso en que un sistema binario está conformado por masas compactas, que modelaremos como puntuales, orbitando una respecto a la otra por efecto de su atracción gravitacional mutua. Para esto, realizaremos los cálculos en el sistema de referencia del centro de masa, es por ello que requeriremos del tensor momento de inercia del sistema, el cual puede mostrarse que el momento de inercia total del sistema binario se reduce al de una partícula con masa reducida μ , realizando un movimiento descrito por la coordenada relativa \vec{r} .

$$M_{ij} = m_1 x_i^{(1)} x_j^{(1)} + m_2 x_i^{(2)} x_j^{(2)} = \mu r_i r_j$$

Si las coordenadas son elegidas de modo que el movimiento del sistema está confinado al plano xy , tendremos que sólo M_{11} , M_{12} y M_{22} serán distintos de cero. De este modo, encontramos que

$$\begin{aligned} M_{11} &= \mu x^2 \\ &= \mu r^2 \cos^2 \varphi \\ &= \mu a^2 (1 - e^2)^2 \frac{\cos^2 \varphi}{[1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)]^2}, \end{aligned}$$

y, similarmente,

$$\begin{aligned} M_{12} &= \mu xy \\ &= \mu r^2 \cos \varphi \sin \varphi \\ &= \mu a^2 (1 - e^2)^2 \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{[1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)]^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{22} &= \mu y^2 \\ &= \mu r^2 \sin^2 \varphi \\ &= \mu a^2 (1 - e^2)^2 \frac{\sin^2 \varphi}{[1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)]^2}. \end{aligned}$$

A continuación requerimos determinar las terceras derivadas \ddot{I}_{ij} . Para esto, introducimos la coordenada angular φ y usamos las ecuaciones 18 y 34, de modo que podamos escribir

$$\begin{aligned} \dot{M}_{ij} &= \frac{dM_{ij}}{d\varphi} \dot{\varphi} \\ &= \frac{dM_{ij}}{d\varphi} \frac{L}{\mu r^2} \\ &= \frac{L}{\mu a^2 (1 - e^2)^2} [1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)]^2 \frac{dI_{ij}}{d\varphi} \\ &= \frac{\omega_0}{(1 - e^2)^{3/2}} [1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)]^2 \frac{dI_{ij}}{d\varphi}. \end{aligned}$$

Con lo que encontraríamos que

$$\dot{M}_{11} = (-2)\mu a^2 \omega_0 \left(1 - e^2\right)^{1/2} \frac{\cos \varphi (\sin \varphi + e \sin \varphi_0)}{1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)},$$

$$\dot{M}_{22} = (+2)\mu a^2 \omega_0 \left(1 - e^2\right)^{1/2} \frac{\sin \varphi (\cos \varphi + e \cos \varphi_0)}{1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)},$$

$$\dot{M}_{12} = \mu a^2 \omega_0 \left(1 - e^2\right)^{1/2} \frac{(\cos 2\varphi + e \cos(\varphi + \varphi_0))}{1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)}.$$

Análogamente, encontramos que

$$\ddot{M}_{11} = \alpha [1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)]^2 [4 \sin(2\varphi) + 3e \sin(2\varphi) \cos(\varphi - \varphi_0) + 2e \cos \varphi \sin \varphi_0], \quad (42)$$

$$\ddot{M}_{22} = \alpha [1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)]^2 [-4 \sin(2\varphi) - 3e \sin(2\varphi) \cos(\varphi - \varphi_0) - 2e \sin \varphi \cos \varphi_0], \quad (43)$$

$$\ddot{M}_{12} = \alpha [1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)]^2 [-4 \cos(2\varphi) - 3e \cos(2\varphi) \cos(\varphi - \varphi_0) - e \cos(\varphi + \varphi_0)], \quad (44)$$

con

$$\alpha = \frac{\mu a^2 \omega_0^3}{(1 - e^2)^{5/2}}.$$

En términos del tensor momento de inercia con traza, la potencia promedio radiada se reduce en este caso a

$$\begin{aligned} \langle P \rangle &= \frac{G}{5c^5} \left\langle \ddot{M}^{ij} \ddot{M}^{ij} - \frac{1}{3} \left(\ddot{M}^{ii} \right)^2 \right\rangle \\ &= \frac{G}{5c^5} \left\langle \left(\ddot{M}_{11} \right)^2 + \left(\ddot{M}_{22} \right)^2 + 2 \left(\ddot{M}_{12} \right)^2 - \frac{1}{3} \left(\ddot{M}_{11} + \ddot{M}_{22} \right)^2 \right\rangle \\ &= \frac{2G}{15c^5} \left\langle \left(\ddot{M}_{11} \right)^2 + \left(\ddot{M}_{22} \right)^2 + 3 \left(\ddot{M}_{12} \right)^2 - \ddot{M}_{11} \ddot{M}_{22} \right\rangle. \end{aligned}$$

Luego de reemplazar las ecuaciones 42 y 44, y usando la ecuación 39, obtenemos

$$\langle P \rangle = \frac{2G^4 \mu^2 M^3}{15c^5 a^5 (1 - e^2)^5} \langle g(\varphi) \rangle,$$

donde hemos introducido la función angular

$$g(\varphi) = 2 [1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)]^4 \left[24 + 13e^2 + 48e \cos(\varphi - \varphi_0) + 11e^2 \cos(2\varphi - 2\varphi_0) \right]. \quad (45)$$

Para calcular el promedio $\langle g(\varphi) \rangle$, transformamos la integral temporal en una integral sobre el ángulo φ :

$$\begin{aligned}
\langle g(\varphi) \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T g(t) dt \\
&= \frac{1}{T} \int_0^{2\pi} g(\varphi) \frac{dt}{d\varphi} d\varphi \\
&= \frac{1}{T} \int_0^{2\pi} g(\varphi) \frac{1}{\dot{\varphi}} d\varphi \\
&= \frac{1}{T} \frac{\mu}{L} \int_0^{2\pi} r^2(\varphi) g(\varphi) d\varphi \\
&= \frac{\mu a^2 (1 - e^2)^2}{TL} \int_0^{2\pi} \frac{g(\varphi)}{[1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)]^2} d\varphi \\
&= \frac{(1 - e^2)^{3/2}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{g(\varphi)}{[1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)]^2} d\varphi.
\end{aligned}$$

Luego de reemplazar 45 en la expresión anterior, se obtiene una integral de simples funciones trigonométricas, que al ser evaluada se reduce a

$$\langle g(\varphi) \rangle = 48(1 - e^2)^{3/2} \left(1 + \frac{73}{24}e^2 + \frac{37}{96}e^4 \right).$$

Con esto, encontramos la expresión de la potencia total promedio radiada por un sistema binario, de masa total M , masa reducida μ , describiendo una órbita (relativa) con semieje mayor a , y excentricidad e [6].

$$\langle P \rangle = \frac{32}{5} \frac{G^4 \mu^2 M^3}{c^5 a^5} f(e), \quad (46)$$

$$f(e) = \frac{1}{(1 - e^2)^{7/2}} \left(1 + \frac{73}{24}e^2 + \frac{37}{96}e^4 \right).$$

Análogamente, el momentum angular promedio radiado es

$$\langle \dot{L} \rangle = \frac{32}{5} \frac{G^{7/2} \mu^2 M^{5/2}}{c^5 a^{7/2}} \frac{1}{(1 - e^2)^2} \left[1 + \frac{7}{8}e^2 \right].$$

A partir de 46 podemos encontrar una predicción de cómo irá “colapsando” el sistema binario, es decir, cómo irá disminuyendo el tamaño de las órbitas (a) y el periodo orbital correspondiente (T). Para esto, usamos las ecuaciones 32 y 39 que permiten relacionar el cambio $\dot{E} = -\langle P \rangle$ de la energía del sistema binario con los correspondientes cambios del semieje mayor (\dot{a}) y del periodo orbital (\dot{T}), obteniendo

$$\frac{\dot{E}}{E} = -\frac{\dot{a}}{a} = -\frac{2}{3} \frac{\dot{T}}{T}.$$

De aquí encontramos la predicción de la *Teoría de Relatividad General* para la disminución del periodo orbital de un sistema binario debido a la emisión de radiación gravita-

cional:

$$\begin{aligned}\frac{\dot{T}}{T} &= -\frac{3}{2} \frac{\dot{E}}{E} \\ &= -\frac{96}{5} \frac{G^3 \mu M^2}{c^5 a^4} f(e) \\ &= -\frac{96}{5} \frac{G^{5/3} \mu M^{2/3}}{c^5} \left(\frac{T}{2\pi} \right)^{-8/3} f(e).\end{aligned}$$

$$\frac{da}{dt} = -\frac{64}{5} \frac{G^3 \mu M^2}{c^5 a^3} \frac{1}{(1-e^2)^{7/2}} \left(1 + \frac{73}{24} e^2 + \frac{37}{96} e^4 \right), \quad (47)$$

$$\frac{de}{dt} = -\frac{304}{15} \frac{G^3 \mu M^2}{c^5 a^4} \frac{e}{(1-e^2)^{5/2}} \left(1 + \frac{121}{304} e^2 \right). \quad (48)$$

En el caso de una órbita circular, $e = 0$, la ecuación se reduce a

$$\frac{da}{dt} = -\frac{64}{5} \frac{G^3 \mu M^2}{c^5 a^3}, \quad (49)$$

cuya solución es

$$a(t) = \left[a_0^4 - \frac{256}{5} \frac{G^3 \mu M^2}{c^5} (t - t_0) \right]^{1/4}. \quad (50)$$

Dividiendo las ecuaciones 47 y 48 para \dot{a} y \dot{e} podemos eliminar el tiempo de estas expresiones y encontrar una ecuación que relaciona directamente a con e :

$$\frac{da}{de} = \frac{12}{19} a \frac{1 + (73/24)e^2 + (37/96)e^4}{e(1-e^2)[1 + (121/304)e^2]}. \quad (51)$$

La solución de esta ecuación es de la forma

$$a(e) = a_0 \frac{g(e)}{g(e_0)},$$

con

$$g(e) = \frac{e^{12/19}}{1-e^2} \left(1 + \frac{121}{304} e^2 \right)^{870/2299}.$$

5. Resultados

5.1. Solución exacta de la ecuación a(e)

Integrando la ecuación 51, encontramos que:

$$\begin{aligned}\int_{a_0}^a \frac{d\bar{a}}{\bar{a}} &= \int_{e_0}^e \frac{12}{19} \frac{1 + (73/24)\bar{e}^2 + (37/96)\bar{e}^4}{\bar{e}(1-\bar{e}^2)[1 + (121/304)\bar{e}^2]} d\bar{e}, \\ \ln \left(\frac{a}{a_0} \right) &= \int_{e_0}^e \frac{12}{19} \frac{1 + (73/24)\bar{e}^2 + (37/96)\bar{e}^4}{\bar{e}(1-\bar{e}^2)[1 + (121/304)\bar{e}^2]} d\bar{e}.\end{aligned}$$

Despejando a , obtenemos la expresión

$$\bar{a} = a_0 \exp \left[\int_{e_0}^e \frac{12}{19} \frac{1 + (73/24)\bar{e}^2 + (37/96)\bar{e}^4}{\bar{e}(1 - \bar{e}^2)[1 + (121/304)\bar{e}^2]} d\bar{e} \right]. \quad (52)$$

Calculando la integral en la expresión anterior con la librería *sympy* de *python*, se obtiene

$$\begin{aligned} \bar{a} = a_0 \exp & \left[\frac{12}{19} \log(e) - \frac{12}{19} \log(e_0) - \log(e^2 - 1) + \frac{870}{2299} \log \left(e^2 + \frac{304}{121} \right) \right. \\ & \left. + \log(e_0^2 - 1) - \frac{870}{2299} \log \left(e_0^2 + \frac{304}{121} \right) \right] \\ \bar{a} = & \frac{a_0 e^{\frac{12}{19}} \left(e^2 + \frac{304}{121} \right)^{\frac{870}{2299}} (e_0^2 - 1)}{e_0^{\frac{12}{19}} (e^2 - 1) \left(e_0^2 + \frac{304}{121} \right)^{\frac{870}{2299}}} \end{aligned} \quad (53)$$

Si definimos a

$$g(e) = \frac{e^{\frac{12}{19}}}{1 - e^2} \left(1 + \frac{121}{304} \right)^{\frac{870}{2299}} \quad (54)$$

entonces, la solución puede escribirse como

$$a(e) = a_0 \frac{g(e)}{g(e_0)} \quad (55)$$

5.2. Solución numérica de la función $a(e)$

Usando la siguiente adimensionalización [7–9] de las variables

$$\tilde{a} = \frac{a}{R_*}, \quad \tilde{t} = \frac{ct}{R_*}.$$

donde

$$R_*^3 = \frac{4G^3 \mu M^2}{c^6}.$$

Por lo tanto, las ecuaciones 47 y 48 son:

$$\frac{d\tilde{a}}{d\tilde{t}} = -\frac{16}{5} \frac{1}{\tilde{a}^3} \frac{1}{(1 - e^2)^{7/2}} \left(1 + \frac{73}{24} e^2 + \frac{37}{96} e^4 \right), \quad (56)$$

$$\frac{de}{d\tilde{t}} = -\frac{76}{15} \frac{1}{\tilde{a}^4} \frac{e}{(1 - e^2)^{5/2}} \left(1 + \frac{121}{304} e^2 \right). \quad (57)$$

Como el sistema de ecuaciones es de primer orden, basta con definir el vector solución x por medio de $x[0] = \tilde{a}$, $x[1] = e$. Por lo tanto, la ecuación 56 es dada por la función `dotx`.


```
[*]: def dotx(x,t):
      a = x[0]
      e = x[1]
      return [-(16/(5*a**3))*(1+(73/24)*e**2+(37/96)*e**4)/
→((1-e**2)**(7/2)),
      -(76/(15*a**4))*e*(1+(121/304)*e**2)/((1-e**2)**(5/
→2))]
```

Usando los datos del Pulsar de Hulse y Taulor, de acuerdo a [1].

```
[*]: T0_d = 0.322997448911 # periodo inicial, en días
      e0 = 0.6171334 # excentricidad inicial
      M_c = 1.3886 # masa de la compañera, en masas solares
      M_p = 1.4398 # masa del pulsar, en masas solares
      c = 299792458 # rapidez de la luz, en metros por segundo
      MGcm3 = 4.925490947E-6 # MG/c^3, en segundos
```

Calculando los parámetros astrofísicos se tiene lo siguiente:

```
[*]: m_sol = MGcm3*c # parametro de masa del Sol m=GM/c^2, en metros
      M = M_c+M_p # masa total, en masas solares
      mu = (M_c*M_p)/M # masa reducida, en masas solares
      R_ast = m_sol*(4*mu*M**2)**(1/3) # R_ast en metros
      T0_s = T0_d*86400 # periodo inicial, en segundos
```

Definiendo las funciones que relacionan el periodo orbital T (en segundos) con el semieje mayor a , y viceversa.

```
[*]: def a(T_s):
      return (m_sol*M*(c*T_s/(2*np.pi))**2)**(1/3)

      def T(a_m):
          return (2*np.pi/c)*(a_m**3/(M*m_sol))**(1/2)
          a0_m = a(T0_s) # a inicial, en metros
          at0 = a0_m/R_ast # a tilde inicial
```

Dado que resolveremos el sistema de ecuaciones con distintas condiciones iniciales, definiremos una función que nos entrega estas soluciones:

```
[*]: def solucion(x0,tt_int):
      print 'Se resuelve con at0 = %.2f y e0 = %.2f'
→f'%(x0[0],x0[1])
      sol = odeint(dotx,x0,tt_int)
      at_todos = sol[:,0]
      # verifica si at llega a 2. En caso positivo corta el
→arreglo de soluciones
      restriccion = np.where(at_todos<2)[0]
      if len(restriccion) is not 0:
          pos_ttmax = restriccion[0] # determina el tiempo en el
→que at=2
          print('Acortando intervalo a tt_max =
→'+str(tt_int[pos_ttmax]))
```

```

else:
    pos_ttmax = len(tt_int)
    tt = tt_int[:pos_ttmax]
    t_a = tt*R_ast/c/31557600 # el tiempo, en años
    at = sol[:pos_ttmax,0]
    e = sol[:pos_ttmax,1]
    a_m = at*R_ast # solución de a, en metros
    T_s = T(a_m) # solución de T, en segundos
    return tt,t_a,at,e,a_m,T_s

```

Al realizar tener la solución de a ecuación adimensionada, los valores son del orden de 10^{21} para que el sistema colapse, se transformo para que cada solución tenga dimensiones, por lo que al graficar el semieje mayor a y la excentricidad con respecto el tiempo obtememos la figura 3. Obteniendo el periodo orbital en horas del sistema obtenemos la figura 2.

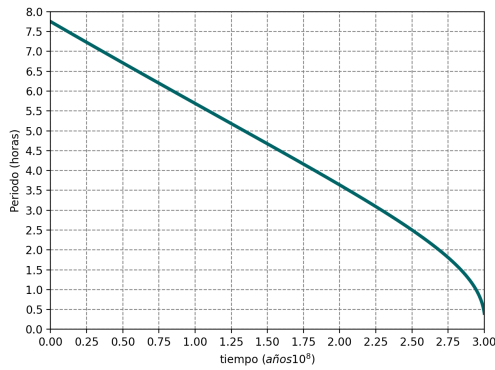


Figura 2: Periodo orbital en horas del sistema binario con respecto el tiempo en años.

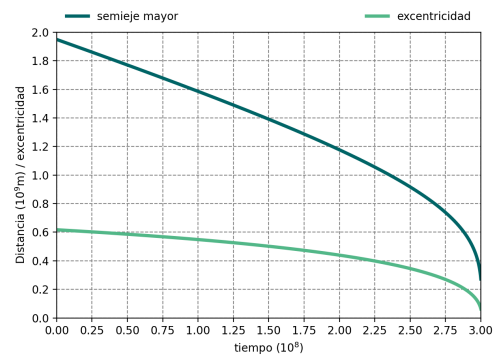


Figura 3: Semieje mayor y la excentricidad de la dinámica del pulsar binario a lo largo del tiempo.

Al tener los valores que contiene la excentricidad de la órbita del sistema, entonces podemos visualizar la forma de la función 54, esta función propuesta es la que se visualiza en la figura 4.

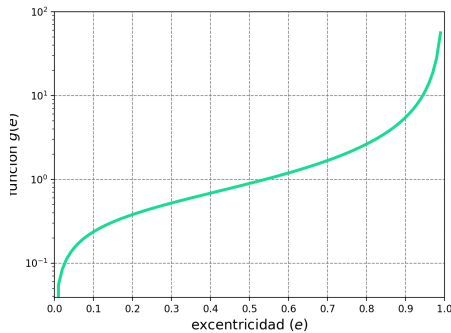


Figura 4: Función $g(e)$ con respecto los valores de la excentricidad calculados.

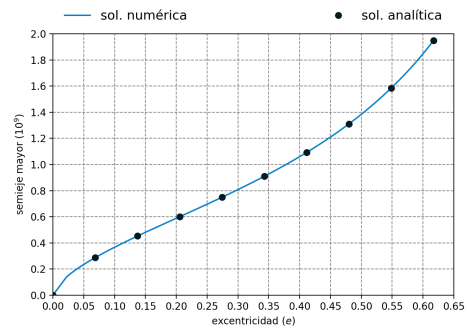


Figura 5: Valores del semieje mayor a con respecto a los valores de excentricidad e para la solución analítica u numérica.

Ahora graficando los valores del semieje mayor a con respecto a los valores de la excentricidad e , tanto para la solución analítica y numérica se obtiene la figura 5. Este comportamiento implica que en este intervalo de tiempo de aproximadamente 30 años los valores de \dot{T} , \dot{a} y \dot{e} pueden considerarse constantes. Con el valor de \dot{T} podemos modelar el retardo acumulado en el movimiento orbital del sistema. Si el valor de \dot{T} es constante entonces el tiempo transcurrido hasta completar la n -ésima revolución es determinado por las relaciones

$$T(t) \approx T_0 + \dot{T}(t - t_0),$$

$$t_{n+1} \approx t_n + T(t_n).$$

que al ser iteradas implican que

$$t_n \approx t_0 + nT_0 + \dot{T}T_0 \frac{n(n-1)}{2} + O(\dot{T}^2).$$

Por lo tanto, el retardo respecto al valor newtoniano ($t_n^{\text{Newton}} = t_0 + nT_0$), luego de n revoluciones es dado por

$$(\Delta t)_n \approx \dot{T}T_0 \frac{n(n-1)}{2} + O(\dot{T}^2).$$

El valor de \dot{T} puede ser evaluado usando la función `dotx` que definimos previamente, y con la relación

$$\dot{T} = \frac{3}{2} \frac{c}{R_*} \frac{T}{\tilde{a}} \frac{d\tilde{a}}{d\tilde{t}}$$

Obteniendo un valor de

$$\frac{dT}{dt} = -2,402560 \times 10^{-12}$$

Este valor concuerda con el reportado en [1]. Por lo que comparando los datos observacionales con los teóricos obtenemos la figura 6.

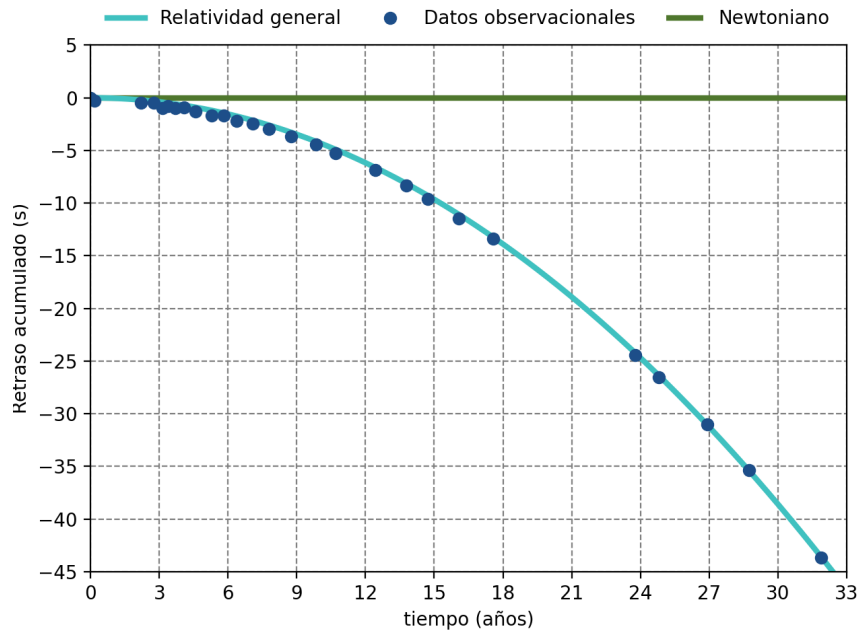


Figura 6: Datos observacionales reportados en [1] comparados con la solución teórica aportada por la relatividad general y la teoría newtoniana.

6. Conclusiones y discusión

Con estos resultados, podemos llegar a las siguientes conclusiones:

- A partir de las figuras 2 y 3 se aprecia que la tasa de cambio con respecto al tiempo de la excentricidad (e), periodo (T) y el semieje mayor (a) es constante una gran parte del tiempo en el cual el sistema binario se encuentra orbitando y es por ello que podemos calcular un tiempo de retardo durante ese periodo de años.
- La solución numérica de las ecuaciones de evolución del sistema binario compata con la solución analítica, esto puede verse representado en la figura 5.
- Con la figura 6 se comprueba que la teoría de la relatividad general modela con cierta exactitud a la realidad en casos donde la teoría newtoniana llega a ser inválida, ya que, con los datos observacionales reportados por [1] del pulsar PSR B1913+16, las ecuaciones resultantes de principios de la teoría de la relatividad general compatan con estos datos.

7. Código y datos

1. [Pot_efec_Graphics.py](#)
Este código genera la figura 1 a partir de los parámetros G, M, μ, L .
2. [data-HW.csv](#)
Datos observacionales reportados por [1].
3. [Sistema_Binario-Evolucion_Temporal_y_observaciones_HyT.py](#)
Este código es el encargado de realizar la simulación del pulsar binario calculando la evolución del semieje mayor a y excentricidad e generando las figuras 3, 2, 4, 5 y comparando los resultados numéricos, analíticos a los datos observaciones 2 en la figura 6.

Referencias

- [1] J. M. Weisberg, D. J. Nice, and J. H. Taylor, "Timing measurements of the relativistic binary pulsar PSR B1913+16," *Astrophysical Journal*, vol. 722, no. 2, pp. 1030–1034, 2010.
- [2] A. Canazas Garay, "Teoría efectiva para estrellas binarias y su aplicación a ondas gravitacionales," *TECNIA*, vol. 25, p. 75, dic. 2015.
- [3] S. Mineo, M. Gilfanov, and R. Sunyaev, "X-ray emission from star-forming galaxies – I. High-mass X-ray binaries," *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 419, pp. 2095–2115, 01 2012.
- [4] J. Patterson, "The evolution of cataclysmic and low-mass X-ray binaries.," *apjs*, vol. 54, pp. 443–493, apr 1984.

- [5] C. Wainmaier, C. Speltini, and J. Salinas de Sandoval, "Conceptos y relaciones entre conceptos de la mecánica newtoniana en estudiantes que ingresan a la universidad," *REEC: Revista electrónica de enseñanza de las ciencias*, vol. 10, no. 1, pp. 133–152, 2011.
- [6] P. C. Peters and J. Mathews, "Gravitational radiation from point masses in a keplerian orbit," *Phys. Rev.*, vol. 131, pp. 435–440, Jul 1963.
- [7] M. A. D. Vito and O. G. Benvenuto, "PSR J0751 + 1807 : un ajuste a los parámetros característicos del sistema binario," vol. 51, 2008.
- [8] J. R. González, D. María, and A. D. Vito, "Estudio del estado evolutivo del sistema binario PSR J1227-4853," 2018.
- [9] J. Gonz, "Estudio del estado evolutivo del sistema binario que contiene al pulsar de milisegundos PSR J1227 - 4853," vol. 61, no. 1988, 2019.