Transformaciones de Lorentz impropias

Estas transformaciones no pueden construirse por una secuencia de transformaciones infinitesimales. Además $\det[a] = -1$

Reflexión espacial

$$x' = -x \qquad t' = t$$

La matriz de transformación

$$a^{\nu}{}_{\mu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = g_{\mu}{}^{\nu}$$

La ecuación de Dirac debe ser covariante ya que es un caso especial de las transformaciones de Lorentz.

Llamaremos al operador de la transformación del espinor, por P (parity).

Es claro que la relación que cumple S también la satisface P

$$a^{\nu}{}_{\mu}\gamma^{\mu} = \hat{P}\gamma^{\nu}\hat{P}^{-1}$$

ó también $a^{\sigma}{}_{\nu}\, a^{\nu}{}_{\mu}\gamma^{\mu} = \hat{P}\, a^{\sigma}{}_{\nu}\gamma^{\nu} P^{-1}$

$$= \delta^{\sigma}{}_{\mu}\gamma^{\mu} = \hat{P}\, a^{\sigma}{}_{\nu}\gamma^{\nu}\hat{P}^{-1}$$

$$\delta^{\sigma}{}_{\mu}\gamma^{\mu} = \hat{P}\left[a^{\sigma}{}_{\nu}\gamma^{\nu}\right]\hat{P}^{-1}$$

Como $a^{\sigma}{}_{\nu} = g^{\sigma}{}_{\nu}$

$$\gamma^{\sigma} = \hat{P}\, g^{\sigma}{}_{\nu}\gamma^{\nu}\hat{P}^{-1}$$

$$\gamma^{\sigma}\hat{P} = \hat{P}\, g^{\sigma}{}_{\nu}\gamma^{\nu}$$

$$\hat{P}^{-1}\gamma^{\sigma}P = g^{\sigma}{}_{\nu}\gamma^{\nu}$$

Unicos términos diferentes de cero:

$\sigma = \nu$

$$g^{1}{}_{1}\gamma^{1}, \; g^{2}{}_{2}\gamma^{2}, \; g^{3}{}_{3}\gamma^{3}, \; g^{0}{}_{0}\gamma^{0}$$

para denotar los términos para cada valor de σ, se escribe

$g^{\sigma\sigma}\gamma^{\sigma}$ donde ahora no existe suma en σ

$$\hat{P}^{-1}\gamma^{\sigma}P = g^{\sigma\sigma}\gamma^{\sigma}$$

Para $\sigma = 0$

$$\hat{P}^{-1}\gamma^{0}P = g^{00}\gamma^{0}$$

Para $\sigma = 1$

$$\hat{P}^{-1}\gamma^{1}P = g^{11}\gamma^{1}$$

etc.

¿Cuál es la solución para este conjunto de ecuaciones?

$$\hat{P}^{-1}\gamma^0\hat{P} = \gamma^0 \qquad \hat{P}^{-1}\gamma^i\hat{P} = -\gamma^i$$

$i = 1, 2, 3$

Solución: $\hat{P} = e^{i\varphi}\gamma^0$

Veamos $(e^{-i\varphi}\gamma^0)\gamma^0(e^{i\varphi}\gamma^0) =$

$$\gamma^0\gamma^0\gamma^0 = \gamma^{0\,2}\gamma^0 = \gamma^0$$

$$(e^{-i\varphi}\gamma^0)\gamma^i(e^{i\varphi}\gamma^0) = \gamma^0\gamma^i\gamma^0$$

$$= \gamma^0(-\gamma^0\gamma^i) = -\gamma^{0\,2}\gamma^i$$

$$= -\gamma^i$$

φ es una fase arbitraria. Se selecciona en la forma siguiente.

Se asume que una rotación de 4π, reproduce el espinor original, es decir

$$\hat{P}^4 \psi = \psi = e^{i4\varphi}(\gamma^0)^4 \psi = e^{i4\varphi} \psi$$

$$\Rightarrow (e^{i\varphi})^4 = 1 \longrightarrow e^{i\varphi} = \pm 1, \pm i$$

Por otra parte, el operador $\hat{P}$ es unitario

$$\hat{P}^{-1} = e^{-i\varphi}\gamma^0 = \hat{P}^{+}$$

Además $\hat{P}^{-1} = e^{-i\varphi}\gamma^0 \mathbb{1} = e^{-i\varphi}\gamma^0\gamma^0\gamma^0$

$$= \gamma^0 e^{-i\varphi}\gamma^0 \gamma^0$$

$$\hat{P}^{-1} = \gamma^0 \hat{P}^{+} \gamma^0$$

La transformación explícita es, entonces

$$\psi'(x') = \psi'(x', t') = \psi'(-\vec{x}, t)$$

$$= \hat{P}\,\psi(x) = e^{i\varphi}\gamma^0\psi(\vec{x}, t)$$

Regresemos ahora al operador $\hat{P}$

$$\hat{P} = e^{i\phi}\gamma^0$$

Usando que $\gamma^\mu\gamma^5 + \gamma^5\gamma^\mu = 0$

$$\boxed{\hat{P}\gamma^5 = -\gamma^5\hat{P}}$$

Así entonces, el bilineal $\bar{\psi}\gamma^5\psi$, bajo una inversión espacial, transforma

como:

$$\bar{\Psi}'\gamma^5\Psi' = (P\Psi)^\dagger\gamma^0\gamma^5 P\Psi$$

$$= \Psi^\dagger P^\dagger\gamma^0\gamma^5 P\Psi$$

$$= \Psi^\dagger\gamma^0(\gamma^0 P^\dagger\gamma^0)\gamma^5 P\Psi$$

$$= \bar{\Psi}\,\hat{P}^{-1}\gamma^5\hat{P}\,\Psi$$

$$= \bar{\Psi}\,\hat{P}^{-1}(-\hat{P}\gamma^5)\Psi$$

$$= -\bar{\Psi}\,\hat{P}^{-1}\hat{P}\gamma^5\Psi$$

$$= -\bar{\Psi}\gamma^5\Psi$$

pero $\det(a) = -1$ para la transformación impropia

$$\rightarrow \boxed{\bar{\Psi}'\gamma^5\Psi' = \det(a)\,\bar{\Psi}\gamma^5\Psi}$$