UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

Tópicos de Mécanica Cuántica

Segundo parcial

Enrique Valbuena Ordonez

Nombre:
Giovanni Gamaliel López Padilla

Matricula:
1837522

21 de octubre de 2020

2. Demostrar que la ecuación de Schrödinger es invariante ante el grupo de transformaciones globales U(1).

Se tiene que las transformaciones U(1) estan definidas como:

$$\psi' = U\psi \equiv e^{i\theta}\psi \tag{1}$$

$$\psi'^{*} = U\psi^{*} \equiv e^{-i\theta}\psi^{*} \tag{2}$$

tal que $\theta\varepsilon\mathcal{R}$, entonces realizando el calculo con con la ecuación 4, se tiene que:

$$\mathcal{L}\left(\psi', \psi'^{*}, \frac{\partial\psi'}{\partial x}, \frac{\partial\psi'^{*}}{\partial x}, \frac{\partial\psi'}{\partial t}, \frac{\partial\psi'^{*}}{\partial t}, x\right) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial\psi'}{\partial x}\frac{\partial\psi'^{*}}{\partial x} + i\hbar\left[\psi'^{*}\frac{\partial\psi'}{\partial t} - \psi'\frac{\partial\psi'^{*}}{\partial t}\right] - V(x)\psi'\psi'^{*}$$
$$= \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial\left(e^{i\theta}\right)\psi}{\partial x}\frac{\partial\left(e^{-i\theta}\right)\psi^{*}}{\partial x}\right) + i\hbar\left[\left(e^{-i\theta}\right)\psi^{*}\frac{\partial\left(e^{i\theta}\right)\psi}{\partial t} - \left(e^{i\theta}\right)\psi\frac{\partial\left(e^{-i\theta}\right)\psi^{*}}{\partial t}\right] - V(x)e^{i\theta}\psi\left(e^{-i\theta}\right)\psi^{*}$$
$$= \left(e^{i\theta}\right)\left(e^{-i\theta}\right)\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\psi^{*}}{\partial x}\right) + i\hbar\left[\left(e^{i\theta}\right)\left(e^{-i\theta}\right)\psi^{*}\frac{\partial\psi}{\partial t} - \left(e^{i\theta}\right)\left(e^{-i\theta}\right)\psi\frac{\partial\psi^{*}}{\partial t}\right] - V(x)\left(e^{i\theta}\right)\left(e^{-i\theta}\right)\psi\psi^{*}.$$
$$= -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\psi^{*}}{\partial x} + i\hbar\left[\psi^{*}\frac{\partial\psi}{\partial t} - \psi\frac{\partial\psi^{*}}{\partial t}\right] - V(x)\psi\psi^{*}$$
$$= \mathcal{L}\left(\psi, \psi^{*}, \frac{\partial\psi}{\partial x}, \frac{\partial\psi^{*}}{\partial x}, \frac{\partial\psi}{\partial t}, \frac{\partial\psi^{*}}{\partial t}, x\right)$$

Por lo tanto, el grupo de las transformaciones U(1) deja invariante a la ecuación de Schrödinger.

$$\mathcal{L}\left(\psi', \psi'^{*}, \frac{\partial\psi'}{\partial x}, \frac{\partial\psi'^{*}}{\partial x}, \frac{\partial\psi'}{\partial t}, \frac{\partial\psi'^{*}}{\partial t}, x\right) = \mathcal{L}\left(\psi, \psi^{*}, \frac{\partial\psi}{\partial x}, \frac{\partial\psi^{*}}{\partial x}, \frac{\partial\psi}{\partial t}, \frac{\partial\psi^{*}}{\partial t}, x\right) \tag{3}$$

3. Calcular la lagrangiana de interacción de Schrödinger en términos del cuadrivector de potencial.

Se tiene que la lagrangiana de Schroödinger es:

$$\mathcal{L}\left(\psi, \psi^{*}, \frac{\partial\psi}{\partial x}, \frac{\partial\psi^{*}}{\partial x}, \frac{\partial\psi}{\partial t}, \frac{\partial\psi^{*}}{\partial t}, x\right) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\psi^{*}}{\partial x} + i\hbar\left[\psi^{*}\frac{\partial\psi}{\partial t} - \psi\frac{\partial\psi^{*}}{\partial t}\right] - V(x)\psi\psi^{*}. \tag{4}$$

y tomando en consideración que:

$$\begin{aligned}
\partial_t &\to \partial_t - igA_0 \\
\partial_t^{*} &\to \partial_t + igA_0 \\
\nabla' &\to \nabla - ig\vec{A} \\
\nabla'^{*} &\to \nabla + ig\vec{A}
\end{aligned}$$

Esto para obtener los terminos de interacción dentro de la lagrangiana, introduciendo estos terminos en la ecuación 4, se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= -\frac{\hbar^2}{2m}\left[\nabla'\psi\cdot\nabla'\psi^*\right] + i\hbar\left[\psi^*\partial_t'\psi - \psi\partial_t'\psi^*\right] \\
&= -\frac{\hbar^2}{2m}\left[\left(\nabla - ig\vec{A}\right)\psi\cdot\left(\nabla + ig\vec{A}\right)\psi^*\right] + i\hbar\left[\psi^*\left(\partial_t - igA_0\right)\psi - \psi\left(\partial_t + igA_0\right)\psi^*\right] \\
&= -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla\psi\cdot\nabla\psi^* - \frac{\hbar^2}{2m}\left[\nabla\psi\cdot ig\vec{A}\psi^* - ig\vec{A}\psi\cdot\nabla\psi^* + g^2\vec{A}\psi\cdot\vec{A}\psi^*\right] \\
&+ i\hbar\left[\psi^*\partial_t\psi - \psi\partial_t\psi^* - 2igA_0\psi\psi^*\right] \\
&= -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla\psi\cdot\nabla\psi^* + i\hbar\left[\psi^*\partial_t\psi - \psi\partial_t\psi^*\right] \\
&- \frac{\hbar^2}{2m}\left[\nabla\psi\cdot ig\vec{A}\psi^* - ig\vec{A}\psi\cdot\nabla\psi^* + g^2\vec{A}\psi\cdot\vec{A}\psi^*\right] + 2\hbar gA_0\psi\psi^* \\
&= \mathcal{L}_f - \frac{\hbar^2 g}{2m}\left[\nabla\psi\cdot i\vec{A}\psi^* - i\vec{A}\psi\cdot\nabla\psi^* + g\vec{A}\psi\cdot\vec{A}\psi^*\right] + 2\hbar gA_0\psi\psi^* \\
&= \mathcal{L}_f - \frac{\hbar^2}{2m}igA\cdot\left[\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^* + \frac{1}{i}Ag\psi\psi^*\right] + 2g\hbar A_0\psi\psi^* \\
&= \mathcal{L}_f + \hbar A\cdot\left[\frac{\hbar}{2mi}g\left(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*\right) + \frac{\hbar}{2m}g^2A|\psi|^2\right] + \hbar gA_0|\psi|^2 \\
&= \mathcal{L}_f + g\hbar J^\alpha A_\alpha
\end{aligned}$$

por lo tanto la lagrangiana de interacción de Schrödinger en términos del cuadrivector del potencial es:

$$L_A = g\hbar J^\alpha A_\alpha \tag{5}$$

donde:

$$J^\alpha = \frac{\hbar}{2mi}\left[\left(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*\right) - gA^\alpha|\psi|^2\right]$$

Agregando el termino del lagrangiano de interacción con el campo electromagnético, el lagrangiano de interacción se transforma en lo siguiente:

$$\mathcal{L}_i = g\hbar J^\alpha A_\alpha + \Box A^\mu A_\mu - \frac{1}{4\mu_0}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{6}$$

5. Calcular la ecuación de Klein-Gordon (para la partícula libre) a partir de la relación energía- momento de Einstein y las definiciones de los operadores en mecánica cuántica.

A partir de la mecánica cuántica elemental conocemos la ecuación de Schrödinger:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m_0}\nabla^2 + V(x)\right]\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} \tag{7}$$

la relación de la energía no relativista en forma de operdor corresponde a lo siguiente:

$$E = -\frac{\hat{p}^2}{2m_0} + V(x) \tag{8}$$

donde:

$$\hat{p} = i\hbar\nabla$$
$$\hat{E} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$$

por lo que teniendo definidos los operadores de la energía y momento podemos obtener una ecuación para la onda relativista, es por ello que consideramos a las partículas libres de modo que su relación relativista es la siguiente:

$$p^\mu p_\mu = \frac{E^2}{c^2} - p \cdot p = m_0^2 c^2 \tag{9}$$

por lo tanto, la ecuación de Klein-Gordon para las partículas libres es:

$$p^\mu p_\mu \psi = m_0^2 c^2 \psi \tag{10}$$

tomando en cuenta que:

$$p^\mu p_\mu = -\hbar^2 \frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{\partial}{\partial x^\mu} = -\hbar^2 \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \right) \tag{11}$$

y renombrando a:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) = \Box$$

se tiene que:

$$p^\mu p_\mu = -\hbar^2 \Box$$

por lo tanto la ecuación 10 se escribe como:

$$\begin{aligned} p^\mu p_\mu \psi &= m_0^2 c^2 \psi \\ -\hbar^2 \Box \psi &= m_0^2 c^2 \psi \\ \Box \psi &= -\frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2}\psi \\ \left(\Box + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \right) \psi &= 0 \end{aligned}$$

por lo tanto, la ecuación de Klein-Gordon es:

$$\left(\Box + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \right) \psi = 0 \tag{12}$$