Solución de la ec. de Dirac sin interacción

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H}_f \Psi = \left[\vec{\alpha}\cdot\hat{\vec{p}} + m_0 c^2 \vec{\beta}\right]\Psi \quad (1)$$

Solución: $\Psi(x,t) = \psi(x)\exp\left[-\frac{i}{\hbar}Et\right] \quad (2)$

Usando (2) en (1)

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\left[\psi(x)\, e^{-\frac{iEt}{\hbar}}\right] = \hat{H}_f\, \psi(x)\, e^{-\frac{iEt}{\hbar}}$$

$$E\,\psi(x) = \hat{H}_f\,\psi(x) \quad (3)$$

¿ $\psi(x)$?

$$\psi(x) = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{bmatrix}$$ espinor

Se define $\varphi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$, $\chi = \begin{pmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$

entonces
$$\Psi = \begin{bmatrix} \varphi \\ \chi \end{bmatrix}$$

Usando la forma de $\vec{\alpha}$, $\bar{\beta}$, la ecuación 3 toma la forma

$$\varepsilon \begin{bmatrix} \varphi \\ \chi \end{bmatrix} = c \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{bmatrix} \cdot \hat{\vec{p}}} \begin{bmatrix} \varphi \\ \chi \end{bmatrix} + m_0 c^2 \begin{bmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi \\ \chi \end{bmatrix}$$

donde
$$\begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \cdot \hat{\vec{p}} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ \sigma_1 & 0 \end{pmatrix} \hat{p}_x + \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{pmatrix} \hat{p}_y + \begin{pmatrix} 0 & \sigma_3 \\ \sigma_3 & 0 \end{pmatrix} \hat{p}_z$$

en términos de φ, χ

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon\varphi &= c\vec{\sigma}\cdot\hat{\vec{p}}\,\chi + m_0c^2\varphi \\ \varepsilon\chi &= c\vec{\sigma}\cdot\hat{\vec{p}}\,\varphi - m_0c^2\chi \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

¿φ, χ ?

$$\text{Sea} \quad \begin{bmatrix}\varphi\\ \chi\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\varphi_0\\ \chi_0\end{bmatrix} \exp\left[\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{x}\right] \quad (5)$$

?

?

Usando (5) en (4)

$$\left.\begin{aligned} \xi\varphi_0 &= c\vec{\sigma}\cdot\vec{p}\,\chi_0 + m_0c^2\varphi_0 \\ \xi\chi_0 &= c\vec{\sigma}\cdot\vec{p}\,\varphi_0 - m_0c^2\chi_0 \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

$$\text{donde} \quad \vec{\sigma}\cdot\hat{\vec{p}}\,\chi = \vec{\sigma}\cdot\hat{\vec{p}}\,\chi_0\, e^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{x}}$$

$$= \vec{\sigma}\cdot\left[-i\hbar\vec{\nabla}\right]\chi_0\, e^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{x}}$$

$$\vec{\sigma} \cdot \hat{\vec{p}}\, \chi = \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \left[\chi_0 \, e^{\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{x}} \right]$$

$$\hat{\vec{P}}\, \Psi = \vec{p}\, \Psi$$

operador ↳ eigenvalor

De las ec. 6, determinaremos $\underline{\varphi_0, \chi_0}$

La solución no trivial existe si el determinante de los coeficientes se anula

$$\det \begin{vmatrix} (\epsilon - m_0 c^2)\mathbb{1} & -c\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ -c\vec{\sigma} \cdot \vec{p} & (\epsilon + m_0 c^2)\mathbb{1} \end{vmatrix} = 0$$

$$\underline{(\epsilon - m_0 c^2)(\epsilon + m_0 c^2)\,\mathbb{1}^2 - c^2 (\vec{\sigma} \cdot \vec{p})(\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) = 0}$$

Ejercicio propuesto: Mostrar la identidad

$$(\vec{\sigma}\cdot\vec{A})(\vec{\sigma}\cdot\vec{B}) = \vec{A}\cdot\vec{B}\,\mathbb{1} + i\vec{\sigma}\cdot(\underline{\vec{A}\times\vec{B}})$$

para $(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})(\vec{\sigma}\cdot\vec{p}) = \vec{p}\cdot\vec{p}\,\mathbb{1} + 0$

Entonces

$$(\epsilon^2 - m_0^2c^4)\,\mathbb{1} - c^2\,\vec{p}\cdot\vec{p}\,\mathbb{1} = 0$$

$\Rightarrow \quad \epsilon = \pm E_p \qquad$ donde $E_p = c\sqrt{p^2 + m_0^2c^2}$

$\epsilon = \lambda E_p \qquad \lambda = (+1, -1)$

Aun falta φ_0, χ_0

Tomando un valor de ϵ, se obtiene

$$\chi_0 = \left[\frac{c\,\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{\epsilon + m_0c^2}\right]\varphi_0$$

Sea $\boxed{\varphi_0 = U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}}$

y normalizado tal que

$$\underline{U^\dagger U = 1 = u_1^* u_1 + u_2^* u_2}$$

Regresamos a la solución

$$\Psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$$

$$\Psi_{p,\lambda}(x,t) = N \begin{bmatrix} U \\ \frac{c(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})U}{m_0 c^2 + \lambda E_p} \end{bmatrix} \cdot \frac{\times \exp\left[\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{x} - \frac{i}{\hbar}\lambda E_p t\right]}{(2\pi\hbar)^{3/2}}$$

La condición de normalización requiere

$$\int \underbrace{\psi^{\dagger}_{p\lambda}(x,t)}\,\underbrace{\Psi_{p',\lambda'}(x,t)}\, dx^3 = \delta_{\lambda\lambda'}\,\delta(\vec{p}-\vec{p}')$$

$$\int \frac{N\left[u^*, \frac{u^* c[\vec{\sigma}\cdot\vec{p}]}{m_0c^2+\lambda E_p}\right] \exp\left[\frac{-i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{x}-\lambda E_p t)\right]^*}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \times$$

$$\times\, \hat{N}\begin{bmatrix} v \\ \frac{c(\vec{\sigma}\cdot\vec{p}')\,v}{m_0c^2+\lambda' E_{p'}} \end{bmatrix} \frac{\exp\left[\frac{-i}{\hbar}(\vec{p}'\cdot\vec{x}-\lambda' E_{p'} t)\right]}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\, dx^3$$

$$= \delta_{\lambda\lambda'}\,\delta(\vec{p}-\vec{p}')$$

$$= \int \frac{dx^3}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\, e^{\frac{i}{\hbar}\vec{x}\cdot(\vec{p}-\vec{p}')}\, \frac{e^{\frac{i}{\hbar}t[\lambda E_p-\lambda' E_{p'}]}}{(2\pi\hbar)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow N^2\left[u^\dagger u + c^2 u^\dagger \frac{(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})}{[m_0c^2+\lambda E_p]^2} u\right] = 1$$

$$N^2\left[u^\dagger u + \frac{c^2\vec{p}^{\,2}\,u^\dagger u}{(m_0c^2+\lambda E_p)^2}\right] = 1$$

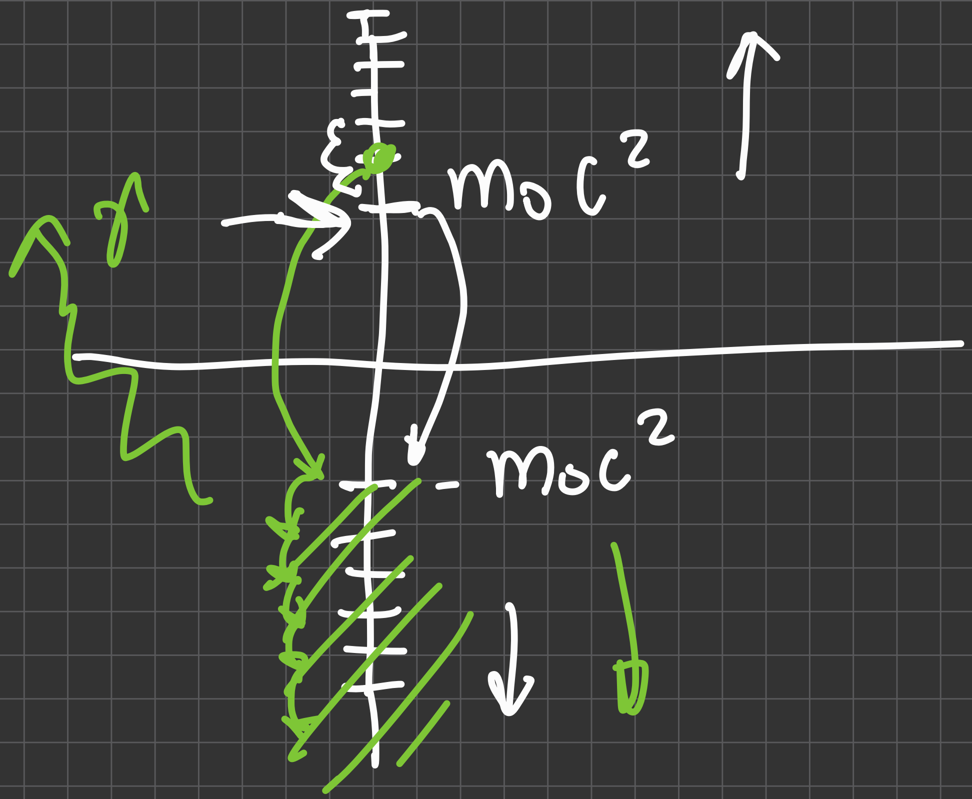
$$N^2\left[1 + \frac{c^2\vec{p}^{\,2}}{(m_0c^2+\lambda E_p)^2}\right] = 1$$

$$\boxed{N = \sqrt{\frac{m_0c^2+\lambda E_p}{2\lambda E_p}}} \checkmark$$

Mostrar la relación $N = \ldots$

Las energías posibles son $E_{p\lambda} = \lambda E_p$

$\lambda = \{+1, -1\}$



Las soluciones $\boxed{\Psi_{p,\lambda}(x,t)}$ son

eigenfunciones del operador $\hat{\vec{P}}$

$$\hat{\vec{P}}\, \Psi_{p,\lambda}(x,t) = \vec{P}\, \Psi_{p,\lambda}(x,t)$$

Operador

eigenvalor

Se definirá una cantidad llamada helicidad.

Sea el operador

$$\hat{\Sigma} \cdot \hat{p} = \begin{bmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{bmatrix} \cdot \hat{\vec{p}}$$

Conmuta con el Hamiltoniano de Dirac $\hat{H}_F = [c\,\vec{\alpha} \cdot \hat{\vec{p}} + m_0 c^2 \vec{\beta}]$

$\equiv$ Mostrar que $\hat{\vec{\Sigma}} \cdot \hat{\vec{p}}$ conmuta con $\hat{H}_F$

$$[\hat{\vec{\Sigma}} \cdot \hat{\vec{p}}, \hat{H}_F]\,\Psi_{p,\lambda} = 0 \quad \equiv$$

Se identifica un operador de spin

$$\hat{\vec{S}} = \frac{\hbar}{2}\hat{\Sigma} = \frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{bmatrix}$$

Puesto que $[\hat{H}_p, \vec{\Sigma}\cdot\vec{p}]=0$

y $[\vec{p}, \vec{\Sigma}\cdot\vec{p}]=0$

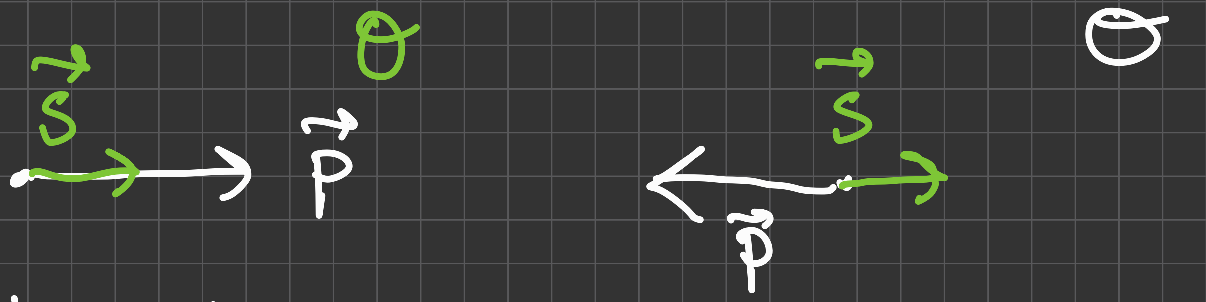
entonces $\boxed{[\hat{H}_p, \Lambda_s]=0}$

donde $\hat{\Lambda}_s = \frac{\hbar}{2}\vec{\Sigma}\cdot\frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} = \hat{\vec{S}}\cdot\frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}$

$\Lambda_s = +1$ $\qquad\qquad$ $\Lambda_s = -1$

No es un invariante de Lorentz

electron, m_e, q_e, $v < c$



$\Lambda_s = +1$

$\Lambda_s = -1$

Neutrinos $v \simeq c$

$\nu_e \to \Lambda_s = -1$ izquierdos

$\bar{\nu}_e \to \Lambda_s = +1$ derechos

Supongamos que el electrón se propaga en el eje $\hat{z}$

$\vec{P} = (0, 0, P_z)$

Luego $\hat{\Lambda}_s = \frac{\vec{S} \cdot \vec{P}}{|\vec{P}|} = S_z = \frac{\hbar}{2} \Sigma_z$

$$\Rightarrow S_z = \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} \sigma_z & 0 \\ 0 & \sigma_z \end{bmatrix}$$

$$S_z = \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Eigenvalores de S_z son $\pm \hbar/2$

$$S_z \underline{\Psi} = \pm \frac{\hbar}{2} \underline{\Psi}$$

$$\Psi = \begin{bmatrix} u_1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \text{eigen Vector de } \hat{S}_z$$

$$S_z \begin{pmatrix} u_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{\hbar}{2} \underline{\begin{bmatrix} u_1 \\ 0 \end{bmatrix}} \checkmark$$

$\underline{u_1}$ es eigen vector de S_z con eingen valor $\frac{\hbar}{2}$

Sea $u_{-1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ✓ /

$$\hat{S}_z \begin{bmatrix} u_{-1} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = -\frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} u_{-1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} u_{-1} \\ 0 \end{bmatrix}$ es eigenvector de $\hat{S}_z$

con eigenvalor $-\hbar/2$

$\begin{bmatrix} 0 \\ u_1 \end{bmatrix} \rightarrow$ eigenvector de $\hat{S}_z$
con eigenvalor $\hbar/2$

$\begin{bmatrix} 0 \\ u_{-1} \end{bmatrix} =$ eigenvector de $\hat{S}_z$
con eigenvalor de $-\hbar/2$

La solución a la ec. de Dirac (partícula libre), para una partícula moviéndose en eje $\vec{z}$.

$$\Psi_{p,\lambda,\underline{+1/2}} = N \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \dfrac{c\sigma_z p}{m_0 c^2 + \lambda E_p} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{bmatrix} e^{\frac{i}{\hbar}\left[p_z z - \lambda E_p t\right)}$$

$$\Psi_{p,\lambda,-1/2} = N \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \dfrac{c\sigma_z p}{m_0 c^2 + \lambda E_p} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \times$$

$$\times\, e\left[\frac{i}{\hbar}\left(p_z z - \underline{\lambda E_p t}\right)\right]$$

La condición de ortonormalización es

$$\int \Psi^{\dagger}_{p_z,\lambda,S_z}\,\Psi_{p_z',\lambda',S_z'}\,d^3x = \delta_{\lambda\lambda'}\,\delta_{S_z S_z'}\,\delta(p_z-p_z')$$