Buscamos A tal que

① $x' = Ax$ $\qquad$ A = matriz de 4×4

tal que $\bar{x} g x = \tilde{x}' g x'$ ②

la norma es invariante de Lorentz

Sustituimos ① en ②

$$\bar{x} g x = \widetilde{(Ax)}\, g\, (Ax)$$

$$\bar{x} \underbrace{g}\, x = \tilde{x} \underbrace{\tilde{A}\, g\, A}\, x$$

Como debe ser válida $\forall x$

$$\tilde{A} g A = g \quad \ldots ③$$

Aplicamos el determinante a ③

$$\det[\tilde{A} g A] = \det[g] \qquad \det\tilde{A} = \det A$$

$$\det(g)(\det A)^2 = \det(g)$$

$$\Rightarrow (\det A)^2 = 1 \rightarrow \det A = \pm 1$$

✓ $\boxed{\det A = +1}$ = Transformaciones de Lorentz propias, continuas y se incluye la identidad

$\det A = -1$ = transformaciones impropias

Se propone que $\boxed{A = e^{L}}$

✓ $e^{L} = \mathbb{1} + L + \frac{L\cdot L}{2!} + \frac{L\cdot L\cdot L}{3!}$ ✓

$$\det A = \det[e^{L}] = \det[e^{L}\cdot\mathbb{1}]$$

$$= \det[e^{L} S S^{-1}] = \det[S^{-1} e^{L} S]$$

$$= \det\left[S^{-1}\left[\mathbb{1} + L + \frac{L\cdot L}{2!} + \ldots\right]S\right]$$

$$= \det\left[S^{-1}\mathbb{1}S + S^{-1}LS + \frac{S^{-1}L\cdot L\cdot S}{2!} + \ldots\right]$$

$$= \det\left[S^{-1}\mathbb{1}S + S^{-1}LS + \frac{S^{-1}L S S^{-1} L S}{2!} + \ldots\right]$$

$$= \det\left[\mathbb{1} + L_D + \frac{L_D\cdot L_D}{2!} + \ldots\right]$$

$$= \left[\operatorname{Tr}\mathbb{1} + \operatorname{Tr}L + \frac{(\operatorname{Tr}L)(\operatorname{Tr}L)}{2!} + \ldots\right]$$

$$= e^{\operatorname{Tr}L}$$

$$\boxed{\det A = \det e^{L} = e^{\operatorname{Tr}L}} \quad \ldots ④$$

Si L es real, usando Log Ec 4

$$\operatorname{Log}[\det A] = \operatorname{Log}[e^{\operatorname{Tr}L}] = \operatorname{Tr}L \in \mathbb{R}$$

para $\operatorname{Log}(\det A) \in \mathbb{R} \rightarrow$

$\det A = -1$

Si L no tiene traza $\operatorname{Tr}L = 0$

$\Rightarrow$ de ④ $\det A = e^{0} = +1$

L es real y sin traza.

$16 \rightarrow 16 - 4 = 12$ parámetros

Regresamos a la ec. ③

$$[\tilde{A} g A = g]\, A^{-1}$$

$$g[\tilde{A} g = g A^{-1}]$$

$$g\tilde{A}g = g\cdot g A^{-1} = \mathbb{1}A^{-1} = A^{-1}$$

$$g\tilde{A}g = A^{-1} \quad \ldots ⑤$$

Pero $A = e^{L}$, $\tilde{A} = e^{\tilde{L}}$

así entonces $g\tilde{A}g = g e^{\tilde{L}} g = A^{-1}$

$$= g\left[\mathbb{1} + \tilde{L} + \frac{\tilde{L}\cdot\tilde{L}}{2!} + \ldots\right]g$$

$$= \left[g\cdot g + g\tilde{L}g + \frac{g\tilde{L}g\, g\tilde{L}}{2} + \ldots\right]$$

$$= e^{g\tilde{L}g} = A^{-1}$$

Se debe cumplir $AA^{-1} = \mathbb{1}$

$$\Rightarrow e^{L} e^{g\tilde{L}g} = e^{0}$$

$$\Rightarrow L + g\tilde{L}g = 0$$

$$g\tilde{L}g = -L$$

$$g\cdot g\tilde{L}g = -gL$$

$$\boxed{\tilde{L}g = -gL}$$

La matriz $gL = C$

$$C^{T} = -C$$

$$\boxed{(gL)^{T} = -\tilde{L}g}$$

Entonces ✓ gL = es una matriz antisimétrica

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 0 & & — & — \\ — & 0 & — & \\ — & & 0 & — \\ — & & & 0 \end{bmatrix}$$

Ej. propuesto. Mostrar que L

$$L = \begin{bmatrix} 0 & L_{01} & L_{02} & L_{03} \\ L_{01} & 0 & L_{12} & L_{13} \\ L_{02} & -L_{12} & 0 & L_{23} \\ L_{03} & -L_{13} & -L_{23} & 0 \end{bmatrix}$$

parámetros temporales

Elem. temporales

parámetros espaciales

Se genera una base

$$S_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad K_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Propuesto: Mostrar que

S_1^2, S_2^2, S_3^2 son diagonales con -1

K_1^2, K_2^2, K_3^2 son diagonales con $+1$

Si construimos $\vec{S} = S_1\hat{x} + S_2\hat{y} + S_3\hat{z}$

y si los vectores $\hat{\epsilon}$ y $\hat{\epsilon}'$ son unitarios entonces

$$(\hat{\epsilon}\cdot\vec{S})^3 = -\hat{\epsilon}\cdot\vec{S}$$

$$(\hat{\epsilon}'\cdot\vec{K})^3 = \hat{\epsilon}'\cdot K \quad ✓$$

Por ejemplo: $\hat{\epsilon}_1 = \hat{x}$

$$(\hat{\epsilon}_1\cdot\vec{S})^3 = (\hat{x}\cdot[S_1\hat{x} + S_2\hat{y} + S_3\hat{z}])^3$$

$$= (S_1)^3 = S_1^2\cdot S_1$$

$$= -S_1 = -(\hat{\epsilon}_1\cdot\vec{S})$$

Cualquier potencia de una de las matrices puede ser expresada como múltiplo de la matriz o su cuadrado

Entonces $\boxed{L = -\vec{\omega}\cdot\vec{S} - \vec{\xi}\cdot\vec{K}}$

$$\vec{S} = S_1\hat{x} + S_2\hat{y} + S_3\hat{z}$$

$$\vec{K} = K_1\hat{x} + K_2\hat{y} + K_3\hat{z}$$

donde $\vec{\omega}$, y $\vec{\xi}$ son vectores constantes

$$\vec{\omega} = \omega_x\hat{x} + \omega_y\hat{y} + \omega_z\hat{z}$$

$$\vec{\xi} = \xi_x\hat{x} + \xi_y\hat{y} + \xi_z\hat{z}$$

Sea $\vec{\omega} = 0$ $\quad \boxed{\vec{\xi} = \xi_x\hat{x}} + \xi_y\hat{y} + \xi_z\hat{z}$

$$L = -\xi_x K_1 = -\xi K_1$$

Ahora construimos $A = e^{L}$

$$A = e^{-\xi K_1} = \left[1 + (-1)\xi K_1 + (-1)^2\frac{\xi^2 K_1^2}{2!} + (-1)^3\frac{\xi^3 K_1^3}{3!} + \ldots\right]$$

$$= \text{Pero } K_1^3 = K_1^2 K_1 = K_1$$

$$= \left[1 - \xi K_1 + \frac{\xi^2 K_1^2}{2!} - \frac{\xi^3 K_1^3}{3!} + \ldots\right]$$

$$= \left[1 + K_1^2 - K_1^2 - \xi K_1 + \frac{\xi^2 K_1^2}{2!} - \frac{\xi^3 K_1}{3!} + \ldots\right]$$

$$= [1 - K_1^2] + K_1^2\left[1 + \frac{\xi^2}{2!} + \frac{\xi^4}{4!} + \ldots\right]$$

$$+ K_1\left[-\xi - \frac{\xi^3}{3!} - \ldots\right]$$

$$A = (1 - K_1^2) + K_1^2\cosh\xi - K_1\operatorname{Senh}\xi$$

$$A = \begin{bmatrix} \cosh\xi & -\operatorname{Sen}\xi & 0 & 0 \\ -\operatorname{Sen}\xi & \operatorname{Cos}\xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x' = Ax$$

$$\begin{pmatrix} x_0' \\ x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\xi & -\operatorname{Sen}\xi & 0 & 0 \\ -\operatorname{Sen}\xi & \operatorname{Cos}\xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Propuesto: Tomar $\xi = 0$ $\vec{\omega} = \omega\hat{z}$

Mostrar
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \operatorname{Cos}\omega & \operatorname{Sen}\omega & 0 \\ 0 & -\operatorname{Sen}\omega & \operatorname{Cos}\omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X' = AX$$

$t' = t$

$z' = z$

$x' = \operatorname{Cos}\omega\, x + \operatorname{Sen}\omega\, y$

$y' = -\operatorname{Sen}\omega\, x + \operatorname{Cos}\omega\, y$