UANL
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FCFM
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

Tópicos de Mécanica Cuántica
Tarea 9

Enrique Valbuena Ordonez

Nombre:
Giovanni Gamaliel López Padilla

Matricula:
1837522

15 de noviembre de 2020

Encontrar la eecuaciones de Maxwell a partir del lagrangiano con la interacción electromagnética y la ecuación de euler-lagrange para campos.
Sea el lagrangiano:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \qquad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

y las ecuaciones de euler-lagrange para campos:

$$\partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} = 0$$

Calculando $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\mu)}$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} &= \frac{\partial}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} \left(-\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right) \\
&= \frac{1}{4\mu_0} \frac{\partial}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} \left(\partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu \right) F^{\mu\nu} \\
&= \frac{1}{4\mu_0} \frac{\partial}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} \left(\partial_\nu A_\mu F^{\mu\nu} \right) \\
&= \frac{1}{4\mu_0} F^{\mu\nu}
\end{aligned}$$

entonces:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} = \frac{1}{4\mu_0} F^{\mu\nu}$$

como la lagrangiana no depende el término A_μ, entonces

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} = 0$$

por lo que tenemos el siguiente resultado para la ecuación de euler-lagrange

$$\frac{1}{4\mu_0} \partial_\nu F^{\mu\nu} = 0$$

donde

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & B_x & B_y & B_z \\ -B_x & 0 & \frac{E_z}{c} & -\frac{E_y}{c} \\ -B_y & -\frac{E_z}{c} & 0 & \frac{E_x}{c} \\ -B_z & \frac{E_y}{c} & -\frac{E_x}{c} & 0 \end{pmatrix} \qquad * \, F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{E_x}{c} & \frac{E_y}{c} & \frac{E_z}{c} \\ -\frac{E_x}{c} & 0 & B_z & -B_y \\ -\frac{E_y}{c} & -B_z & 0 & B_x \\ -\frac{E_z}{c} & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}$$

tomando a $F^{\mu\nu}$, se tiene que:

$$\partial_\nu F^{0\nu} = 0 \qquad \partial_\nu F^{1\nu} = 0 \qquad \partial_\nu F^{2\nu} = 0 \qquad \partial_\nu F^{3\nu} = 0$$

de $\partial_\nu F^{0\nu} = 0$, se obtiene la siguiente ecuación de Maxwell:

$$\nabla \cdot E = 0$$

realizando la suma de $\partial_\nu F^{1\nu} + \partial_\nu F^{2\nu} + \partial_\nu F^{3\nu} = 0$, se obtiene que:

$$\nabla \times B = \frac{1}{c^2}\partial_t E$$

tomando a $*F^{\mu\nu}$, se tiene que:

$$\partial_\nu F^{0\nu} = 0 \qquad \partial_\nu F^{1\nu} = 0 \qquad \partial_\nu F^{2\nu} = 0 \qquad \partial_\nu F^{3\nu} = 0$$

de $\partial_\nu F^{0\nu} = 0$, se obtiene la siguiente ecuación de Maxwell:

$$\nabla \cdot B = 0$$

realizando la suma de $\partial_\nu F^{1\nu} + \partial_\nu F^{2\nu} + \partial_\nu F^{3\nu} = 0$, se obtiene que:

$$\nabla \times E = -\partial_t B$$

por lo que llegamos a obtener las cuatro ecuaciones de Maxwell

$$\nabla \cdot E = 0 \qquad \nabla \times B = \frac{1}{c^2}\partial_t E \qquad \nabla \cdot B = 0 \qquad \nabla \times E = -\partial_t B$$