

Relatividad General

Modelo de evolución de un pulsar binario

Giovanni Gamaliel López Padilla, Ivan Arturo Pla Gúzman

5 de noviembre de 2020

Introducción - Punto de vista newtoniano

La mecánica newtoniana es un modelo físico que funciona para describir la dinámica de los cuerpos en el espacio por medio de las fuerzas que contiene cada objeto. Históricamente, la mecánica newtoniana fue el primer modelo físico en poder representar de buena manera la dinámica de los objetos al punto de predecir acciones importantes sobre el movimiento de los cuerpos, en donde se incluyen las trayectorias de ciertos planetas.

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = \mathbf{F}, \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{p}_x = \frac{d(m_x)}{dt} = F_x \\ \dot{p}_y = \frac{d(m_y)}{dt} = F_y \\ \dot{p}_z = \frac{d(m_z)}{dt} = F_z \end{array} \right.$$

El problema físico clásico puede plantearse de forma simplificada como:

Dadas las propiedades orbitales (masa, posición instantánea y velocidad) de un grupo de cuerpos astronómicos, determinar las fuerzas interactivas actuantes; y consiguientemente, calcular sus movimientos orbitales para cualquier instante futuro.

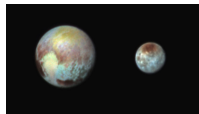
Introducción - Sistemas binarios

En astronomía, el término sistema binario se utiliza para referirse a dos objetos astronómicos que orbitan alrededor de un centro de masa común debido a la fuerza gravitatoria que hay dada su cercanía. Normalmente se utiliza para referirse a dos estrellas, sin embargo, el término puede aplicarse a un sistema formado por un planeta y un satélite natural, siempre y cuando este último sea excepcionalmente grande en comparación con el planeta. Algunos ejemplos de estos son:

- La galaxia de Bode (M81) y la galaxia del Cigarro (M82).
- Dentro del sistema solar, el sistema Plutón-Caronte está formado por un planeta y un satélite.



(a) Galaxia de Bode



(b) Plutón y caronte

Figura 1: Ejemplos de sistemas binarios

Introducción - Origen y principios de la relatividad general

Las características esenciales de la teoría de la relatividad general son las siguientes:

- El principio general de covariancia: las leyes de la Física deben tomar la misma forma matemática en todos los sistemas de coordenadas.
- El principio de equivalencia o de invariancia local de Lorentz: las leyes de la relatividad especial (espacio plano de Minkowski) se aplican localmente para todos los observadores inerciales.
- La curvatura del espacio-tiempo es lo que observamos como un campo gravitatorio, en presencia de materia la geometría del espacio-tiempo no es plana sino curva, una partícula en movimiento libre inercial en el seno de un campo gravitatorio sigue una trayectoria geodésica.

Objetivo

- Obtener la solución analítica que describa la evolución del semieje mayor a y la excentricidad e de un sistema pulsar binario.
- Obtener la solución numérica que describa la evolución del semieje mayor a y la excentricidad e de un sistema pulsar binario. Realizar una comparación de la solución analítica y la solución numérica con los valores observaciones reportados por Weisberg en 2010.

Marco teórico - Problema de Kepler Newtoniano

Si \vec{x}_1 y \vec{x}_2 son las coordenadas de m_1 y m_2 respecto a un sistema de referencia inercial, entonces las ecuaciones de movimiento correspondientes son:

$$\ddot{\vec{x}}_1 = -Gm_2 \frac{(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^3}, \quad (1)$$

$$\ddot{\vec{x}}_2 = -Gm_1 \frac{(\vec{x}_2 - \vec{x}_1)}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^3}. \quad (2)$$

Es conveniente definir una coordenada para el centro de masa \vec{x}_{cm} , la cual esta dada por:

$$\vec{x}_{cm} := \frac{m_1 \vec{x}_1 + m_2 \vec{x}_2}{M}, \quad M := m_1 + m_2. \quad (3)$$

Con estas ecuaciones definidas se puede comprobar que a partir de 1 y 2 el centro de masa \vec{x}_{cm} es igual a cero.

$$\ddot{\vec{x}}_{cm} = \vec{0}. \quad (4)$$

Por la condición 4 implica que, en el sistema de referencia inercial del centro de masa, las coordenadas de m_1 y m_2 están relacionadas por:

$$\vec{x}_2 = -\frac{m_1}{m_2}\vec{x}_1. \quad (5)$$

Definiendo así una coordenada relativa dada por:

$$\vec{r} := \vec{x}_2 - \vec{x}_1. \quad (6)$$

Marco teórico - Problema de Kepler Newtoniano

Con esto definido, podemos escribir a la ecuación 5 comprobar

$$\vec{x}_1 = -\frac{m_2}{M}\vec{r}, \quad \vec{x}_2 = \frac{m_1}{M}\vec{r}. \quad (7)$$

Usando estas relaciones podemos transformar las ecuaciones de movimiento 1 y 2 en ecuaciones para la coordenada relativa:

$$\ddot{\vec{r}} = -GM\frac{\hat{r}}{r^2}. \quad (8)$$

Por otro lado, la energía total del sistema

$$E = \frac{1}{2}m_1\vec{v}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\vec{v}_2^2 - \frac{Gm_1m_2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|}, \quad (9)$$

y el momentum angular total respecto al origen,

$$\vec{L} = m_1 \vec{x}_1 \times \vec{v}_1 + m_2 \vec{x}_2 \times \vec{v}_2, \quad (10)$$

pueden reescribirse en términos de la coordenada relativa, resultando

$$E = \frac{1}{2} \mu \vec{v}^2 - \frac{G \mu M}{r}, \quad (11)$$

$$\vec{L} = \mu \vec{r} \times \vec{v}, \quad (12)$$

$$\vec{v} = \dot{r} \hat{r} + r \dot{\varphi} \hat{\varphi}, \quad (13)$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2) \hat{r} + (r \ddot{\varphi} + 2 \dot{r} \dot{\varphi}) \hat{\varphi}. \quad (14)$$

Reemplazando la ecuación 14 en 8 obtenemos

$$(\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2) \hat{r} + (r \ddot{\varphi} + 2 \dot{r} \dot{\varphi}) \hat{\varphi} = -\frac{GM}{r^2} \hat{r}. \quad (15)$$

De aquí, encontramos

$$\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2 = -\frac{GM}{r^2}, \quad (16)$$

$$r \ddot{\varphi} + 2 \dot{r} \dot{\varphi} = 0. \quad (17)$$

Marco teórico - Problema de Kepler Newtoniano

Multiplicando la ecuación 17 por r , se encuentra que el término $r^2\dot{\phi}$ es constante sobre la trayectoria

$$\begin{aligned} 0 &= r^2\ddot{\phi} + 2r\dot{r}\dot{\phi} \\ &= \frac{d}{dt}(r^2\dot{\phi}), \end{aligned}$$

que expresa la conservación del momento angular, ya que

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \mu \vec{r} \times \vec{v} \\ &= \mu r \hat{r} \times (\dot{r}\hat{r} + r\dot{\phi}\hat{\phi}) \\ &= \mu r^2\dot{\phi}(\hat{r} \times \hat{\phi}) \\ &= \mu r^2\dot{\phi}\hat{z}. \end{aligned}$$

$$\vec{L} = \mu r^2 \dot{\phi} \hat{z}. \quad (18)$$

Otra cantidad conservada sobre la órbita es la energía mecánica

$$E = \frac{1}{2} \mu v^2 - \frac{GM\mu}{r} \quad (19)$$

$$= \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{1}{2} \mu r^2 \dot{\phi}^2 - \frac{GM\mu}{r}. \quad (20)$$

Despejando $\dot{\phi}$ de la ecuación 18 podemos escribir la energía mecánica sólo en términos de la variable r y constantes del movimiento:

$$E = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{GM\mu}{r}. \quad (21)$$

Definiendo un potencial efectivo

$$V_{\text{ef}}(r) := \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{GM\mu}{r}, \quad (22)$$

De modo que la ecuación 21 pueda ser escrita como la ecuación de conservación de la energía de un movimiento unidimensional:

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + V_{\text{ef}}(r). \quad (23)$$

El potencial efectivo $V_{\text{ef}}(r)$ posee un cero en

$$r_c = \frac{L^2}{2GM\mu^2}, \quad (24)$$

y además posee un mínimo en

$$r_{\min} = \frac{L^2}{GM\mu^2} = 2r_c, \quad (25)$$

tal que

$$V_{\text{ef},\min} = -\frac{G^2 M^2 \mu^3}{2L^2} < 0.$$

Además, el comportamiento asintótico del potencial efectivo es

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} V_{\text{ef}}(r) &\approx -\frac{GMm}{r} \rightarrow 0, \\ \lim_{r \rightarrow 0} V_{\text{ef}}(r) &\approx \frac{L^2}{2mr^2} \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Marco teórico - Problema de Kepler Newtoniano

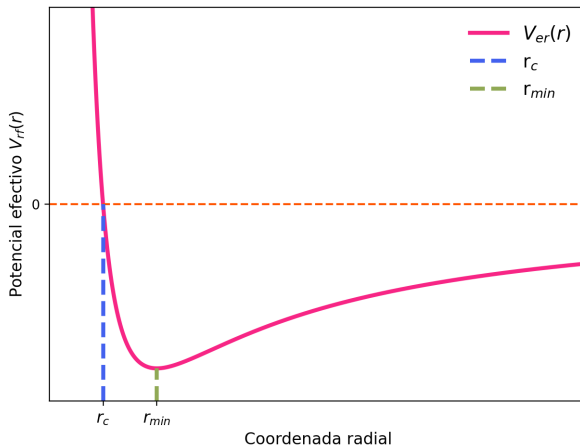


Figura 2: Potencial newtoniano efectivo, las constantes L, G, M, μ igualadas a 1

Así para un valor de L dado, tenemos que:

1. Si $E_1 > 0$, una partícula proveniente del infinito alcanza un radio mínimo r_1 , donde $\dot{r}^2 = 0$, y luego vuelve a infinito.
2. Si $V_{\text{ef},\text{min}} < E_2 < 0$ la trayectoria es ligada, variando la distancia entre dos puntos de retorno r_2 y r_3 , de modo que $r_2 < r < r_3$.
3. Si $E_3 = V_{\text{ef},\text{min}}$ la partícula describe un movimiento circular de radio dado por la ecuación 25. Este caso corresponde al mínimo del potencial, por lo que es un movimiento estable.
4. Finalmente, no existen trayectorias con $E < V_{\text{ef},\text{min}}$ ya que la ecuación 23 requiere que $E \geq V_{\text{ef}}$.

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\varphi} \dot{\varphi} = \frac{L}{\mu r^2} \frac{dr}{d\varphi}. \quad (26)$$

Reemplazando en la ecuación 21 la ecuación 26 obtenemos

$$\frac{1}{r^4} \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 = \frac{2\mu E}{L^2} + \frac{2GM\mu^2}{L^2 r} - \frac{1}{r^2}. \quad (27)$$

Con un cambio de variable $u := 1/r$, entonces la ecuación 27

$$(u')^2 = \frac{2\mu E}{L^2} + \frac{2GM\mu^2}{L^2} u - u^2, \quad (28)$$

derivando la ecuación 28 se encuentra la ecuación de movimiento para u en función de φ

$$u'' + u = \frac{GM\mu^2}{L^2}. \quad (29)$$

La integración de la ecuación 29 es directa ya que corresponde a un oscilador armónico con un término forzante constante

$$u(\varphi) = \frac{GM\mu^2}{L^2} (1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)) \quad (30)$$

donde reemplazando la solución 30 en 28

$$e = \sqrt{1 + \frac{2L^2 E}{G^2 M^2 \mu^3}}, \quad (31)$$

El semieje mayor de la órbita, puede ser escrito en términos de las constantes de movimiento a partir de las ecuaciones 30 y 31

$$\begin{aligned}a &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{u_{\min}} + \frac{1}{u_{\max}} \right) \\&= \frac{1}{2} \left(\frac{L^2}{GM\mu^2} \frac{1}{(1+e)} + \frac{L^2}{GM\mu^2} \frac{1}{(1-e)} \right) \\&= \frac{L^2}{GM\mu^2} \frac{1}{(1-e^2)} \\&= -\frac{GM\mu}{2E}.\end{aligned}$$
$$a = -\frac{GM\mu}{2E}. \quad (32)$$

Con esto, podemos escribir la solución de la ecuación 30 como

$$u(\varphi) = \frac{1}{a(1 - e^2)} [1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)], \quad (33)$$

o, en términos de la coordenada radial relativa,

$$r(\varphi) = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)}. \quad (34)$$

La evolución temporal de la órbita puede ser determinada implícitamente de la forma siguiente. Definamos la variable auxiliar s por

$$r := a(1 - e \cos s). \quad (35)$$

Marco teórico - Problema de Kepler Newtoniano

A partir de esto podemos usar la ecuación 34 para encontrar una relación entre φ y s sobre la órbita. De esta forma, obtenemos

$$\cos(\varphi - \varphi_0) = \frac{\cos s - e}{1 - e \cos s}, \quad (36)$$

y a partir de aquí

$$\sin(\varphi - \varphi_0) = \sqrt{1 - e^2} \frac{\sin s}{1 - e \cos s}. \quad (37)$$

Derivando la ecuación 36 respecto a s y usando la ecuación 37 obtenemos

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\sqrt{1 - e^2}}{1 - e \cos s}.$$

Marco teórico - Problema de Kepler Newtoniano

Con esto, podemos expresar el momento angular de la ecuación 18 en términos de s ;

$$\begin{aligned} L &= \mu r^2 \frac{d\varphi}{dt} \\ &= \mu r^2 \frac{d\varphi}{ds} \frac{ds}{dt} \\ &= \mu a^2 (1 - e \cos s)^2 \frac{d\varphi}{ds} \frac{ds}{dt} \\ &= \mu a^2 \sqrt{1 - e^2} (1 - e \cos s) \frac{ds}{dt}. \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} 1 - e \cos s &= \frac{L}{\mu a^2 \sqrt{1 - e^2}} \frac{dt}{ds} \\ &=: \omega_0 \frac{dt}{ds}, \end{aligned}$$

$$1 - e \cos s =: \omega_0 \frac{dt}{ds}, \quad (38)$$

donde hemos introducido el término ω_0 , con unidades de frecuencia, que usando la ecuación 31 satisface

$$\omega_0^2 = \frac{GM}{a^3}. \quad (39)$$

Marco teórico - Potencia radiada por un sistema binario

$$M_{ij} = m_1 x_i^{(1)} x_j^{(1)} + m_2 x_i^{(2)} x_j^{(2)} = \mu r_i r_j$$

Si las coordenadas son elegidas de modo que el movimiento del sistema está confinado al plano xy , tendremos que sólo M_{11} , M_{12} y M_{22} serán distintos de cero. De este modo, encontramos que

$$\begin{aligned} M_{11} &= \mu x^2 \\ &= \mu r^2 \cos^2 \varphi \\ &= \mu a^2 (1 - e^2)^2 \frac{\cos^2 \varphi}{[1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)]^2}, \end{aligned}$$

Marco teórico - Potencia radiada por un sistema binario

y, similarmente,

$$\begin{aligned}M_{12} &= \mu xy \\&= \mu r^2 \cos \varphi \sin \varphi \\&= \mu a^2 (1 - e^2)^2 \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{[1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)]^2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}M_{22} &= \mu y^2 \\&= \mu r^2 \sin^2 \varphi \\&= \mu a^2 (1 - e^2)^2 \frac{\sin^2 \varphi}{[1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)]^2}.\end{aligned}$$

Marco teórico - Potencia radiada por un sistema binario

A continuación requerimos determinar las terceras derivadas $\ddot{\dot{I}}_{ij}$. Para esto, introducimos la coordenada angular φ y usamos las ecuaciones 18 y 34, de modo que podamos escribir

$$\begin{aligned}\dot{M}_{ij} &= \frac{dM_{ij}}{d\varphi} \dot{\varphi} \\ &= \frac{dM_{ij}}{d\varphi} \frac{L}{\mu r^2} \\ &= \frac{L}{\mu a^2 (1 - e^2)^2} [1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)]^2 \frac{dl_{ij}}{d\varphi} \\ &= \frac{\omega_0}{(1 - e^2)^{3/2}} [1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)]^2 \frac{dl_{ij}}{d\varphi}.\end{aligned}$$

Con lo que encontraríamos que

$$\dot{M}_{11} = (-2)\mu a^2 \omega_0 (1 - e^2)^{1/2} \frac{\cos \varphi (\sin \varphi + e \sin \varphi_0)}{1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)},$$

$$\dot{M}_{22} = (+2)\mu a^2 \omega_0 (1 - e^2)^{1/2} \frac{\sin \varphi (\cos \varphi + e \cos \varphi_0)}{1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)},$$

$$\dot{M}_{12} = \mu a^2 \omega_0 (1 - e^2)^{1/2} \frac{(\cos 2\varphi + e \cos(\varphi + \varphi_0))}{1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)}.$$

Análogamente, encontramos que

$$\ddot{M}_{11} = \alpha [1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)]^2 [4 \sin(2\varphi) + 3e \sin(2\varphi) \cos(\varphi - \varphi_0) + 2e \cos \varphi \sin \varphi_0], \quad (40)$$

$$\ddot{M}_{22} = \alpha [1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)]^2 [-4 \sin(2\varphi) - 3e \sin(2\varphi) \cos(\varphi - \varphi_0) - 2e \sin \varphi \cos \varphi_0], \quad (41)$$

$$\ddot{M}_{12} = \alpha [1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)]^2 [-4 \cos(2\varphi) - 3e \cos(2\varphi) \cos(\varphi - \varphi_0) - e \cos(\varphi + \varphi_0)], \quad (42)$$

con

$$\alpha := \frac{\mu a^2 \omega_0^3}{(1 - e^2)^{5/2}}.$$

Marco teórico - Potencia radiada por un sistema binario

En términos del tensor momento de inercia con traza, la potencia promedio radiada se reduce en este caso a

$$\begin{aligned}\langle P \rangle &= \frac{G}{5c^5} \left\langle \ddot{M}^{ij} \ddot{M}^{ij} - \frac{1}{3} \left(\ddot{M}^{ii} \right)^2 \right\rangle \\ &= \frac{G}{5c^5} \left\langle \left(\ddot{M}_{11} \right)^2 + \left(\ddot{M}_{22} \right)^2 + 2 \left(\ddot{M}_{12} \right)^2 - \frac{1}{3} \left(\ddot{M}_{11} + \ddot{M}_{22} \right)^2 \right\rangle \\ &= \frac{2G}{15c^5} \left\langle \left(\ddot{M}_{11} \right)^2 + \left(\ddot{M}_{22} \right)^2 + 3 \left(\ddot{M}_{12} \right)^2 - \ddot{M}_{11} \ddot{M}_{22} \right\rangle.\end{aligned}$$

Luego de reemplazar las ecuaciones 40 y 42, y usando la ecuación 39, obtenemos

$$\langle P \rangle = \frac{2G^4 \mu^2 M^3}{15c^5 a^5 (1 - e^2)^5} \langle g(\varphi) \rangle ,$$

donde hemos introducido la función angular

$$g(\varphi) := 2 [1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)]^4 [24 + 13e^2 + 48e \cos(\varphi - \varphi_0) + 11e^2 \cos(2\varphi - 2\varphi_0)] . \quad (43)$$

Marco teórico - Potencia radiada por un sistema binario

Para calcular el promedio $\langle g(\varphi) \rangle$, transformamos la integral temporal en una integral sobre el ángulo φ :

$$\begin{aligned}\langle g(\varphi) \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T g(t) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^{2\pi} g(\varphi) \frac{dt}{d\varphi} d\varphi \\ &= \frac{1}{T} \frac{\mu}{L} \int_0^{2\pi} r^2(\varphi) g(\varphi) d\varphi \\ &= \frac{(1 - e^2)^{3/2}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{g(\varphi)}{[1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)]^2} d\varphi.\end{aligned}$$

Marco teórico - Potencia radiada por un sistema binario

Luego de reemplazar 43 en la expresión anterior, se obtiene una integral de simples funciones trigonométricas, que al ser evaluada se reduce a

$$\langle g(\varphi) \rangle = 48(1 - e^2)^{3/2} \left(1 + \frac{73}{24}e^2 + \frac{37}{96}e^4 \right).$$

Con esto, encontramos la expresión de la potencia total promedio radiada por un sistema binario, de masa total M , masa reducida μ , describiendo una órbita (relativa) con semieje mayor a , y excentricidad e [7].

$$\langle P \rangle = \frac{32}{5} \frac{G^4 \mu^2 M^3}{c^5 a^5} f(e), \quad (44)$$

Marco teórico - Potencia radiada por un sistema binario

$$f(e) := \frac{1}{(1 - e^2)^{7/2}} \left(1 + \frac{73}{24}e^2 + \frac{37}{96}e^4 \right).$$

Análogamente, el momentum angular promedio radiado es

$$\langle \dot{L} \rangle = \frac{32}{5} \frac{G^{7/2} \mu^2 M^{5/2}}{c^5 a^{7/2}} \frac{1}{(1 - e^2)^2} \left[1 + \frac{7}{8}e^2 \right].$$

Marco teórico - Potencia radiada por un sistema binario

De aquí encontramos la predicción de la *Teoría de Relatividad General* para la *disminución del periodo orbital de un sistema binario debido a la emisión de radiación gravitacional*:

$$\begin{aligned}\frac{\dot{T}}{T} &= -\frac{3}{2} \frac{\dot{E}}{E} \\ &= -\frac{96}{5} \frac{G^{5/3} \mu M^{2/3}}{c^5} \left(\frac{T}{2\pi} \right)^{-8/3} f(e).\end{aligned}$$

$$\frac{da}{dt} = -\frac{64}{5} \frac{G^3 \mu M^2}{c^5 a^3} \frac{1}{(1-e^2)^{7/2}} \left(1 + \frac{73}{24} e^2 + \frac{37}{96} e^4 \right), \quad (45)$$

$$\frac{de}{dt} = -\frac{304}{15} \frac{G^3 \mu M^2}{c^5 a^4} \frac{e}{(1-e^2)^{5/2}} \left(1 + \frac{121}{304} e^2 \right). \quad (46)$$

En el caso de una órbita circular, $e = 0$, la ecuación se reduce a

$$\frac{da}{dt} = -\frac{64}{5} \frac{G^3 \mu M^2}{c^5 a^3}, \quad (47)$$

cuya solución es

$$a(t) = \left[a_0^4 - \frac{256}{5} \frac{G^3 \mu M^2}{c^5} (t - t_0) \right]^{1/4}. \quad (48)$$

Marco teórico - Potencia radiada por un sistema binario

Dividiendo las ecuaciones 45 y 46 para \dot{a} y \dot{e} podemos eliminar el tiempo de estas expresiones y encontrar una ecuación que relaciona directamente a con e :

$$\frac{da}{de} = \frac{12}{19} a \frac{1 + (73/24)e^2 + (37/96)e^4}{e(1 - e^2)[1 + (121/304)e^2]}. \quad (49)$$

La solución de esta ecuación es de la forma

$$a(e) = a_0 \frac{g(e)}{g(e_0)},$$

con

$$g(e) := \frac{e^{12/19}}{1 - e^2} \left(1 + \frac{121}{304} e^2 \right)^{870/2299}.$$

Resultados - Solución exacta de la ecuación a(e)

Integramos la ecuación 49, encontramos que:

$$\int_{a_0}^a \frac{d\bar{a}}{\bar{a}} = \int_{e_0}^e \frac{12}{19} \frac{1 + (73/24)\bar{e}^2 + (37/96)\bar{e}^4}{\bar{e}(1 - \bar{e}^2)[1 + (121/304)\bar{e}^2]} d\bar{e},$$
$$\ln \left(\frac{a}{a_0} \right) = \int_{e_0}^e \frac{12}{19} \frac{1 + (73/24)\bar{e}^2 + (37/96)\bar{e}^4}{\bar{e}(1 - \bar{e}^2)[1 + (121/304)\bar{e}^2]} d\bar{e}.$$

Despejando a , obtenemos la expresión

$$\bar{a} = a_0 \exp \left[\int_{e_0}^e \frac{12}{19} \frac{1 + (73/24)\bar{e}^2 + (37/96)\bar{e}^4}{\bar{e}(1 - \bar{e}^2)[1 + (121/304)\bar{e}^2]} d\bar{e} \right]. \quad (50)$$

Resultados - Solución exacta de la ecuacion a(e)

Calculando la integral en la expresión anterior con la libreria *sympy* de *python*, se obtiene

$$\begin{aligned}\bar{a} &= a_0 \exp \left[\frac{12}{19} \log(e) - \frac{12}{19} \log(e_0) - \log(e^2 - 1) + \frac{870}{2299} \log \left(e^2 + \frac{304}{121} \right) \right. \\ &\quad \left. + \log(e_0^2 - 1) - \frac{870}{2299} \log \left(e_0^2 + \frac{304}{121} \right) \right] \\ \bar{a} &= \frac{a_0 e^{\frac{12}{19}} \left(e^2 + \frac{304}{121} \right)^{\frac{870}{2299}} (e_0^2 - 1)}{e_0^{\frac{12}{19}} (e^2 - 1) \left(e_0^2 + \frac{304}{121} \right)^{\frac{870}{2299}}} \quad (51)\end{aligned}$$

Resultados - Solución exacta de la ecuacion a(e)

Si definimos a

$$g(e) := \frac{e^{\frac{12}{19}}}{1 - e^2} \left(1 + \frac{121}{304} \right)^{\frac{870}{2299}} \quad (52)$$

entonces, la solución puede escribirse como

$$a(e) = a_0 \frac{g(e)}{g(e_0)} \quad (53)$$

Resultados - Solución numérica de la ecuación a(e)

Usando la siguiente adimensionalización [9, 4, 3] de las variables

$$\tilde{a} := \frac{a}{R_*}, \quad \tilde{t} := \frac{ct}{R_*}.$$

donde

$$R_*^3 := \frac{4G^3 \mu M^2}{c^6}.$$

Por lo tanto, las ecuaciones 45 y 46 son:

$$\frac{d\tilde{a}}{d\tilde{t}} = -\frac{16}{5} \frac{1}{\tilde{a}^3} \frac{1}{(1-e^2)^{7/2}} \left(1 + \frac{73}{24} e^2 + \frac{37}{96} e^4 \right), \quad (54)$$

$$\frac{de}{d\tilde{t}} = -\frac{76}{15} \frac{1}{\tilde{a}^4} \frac{e}{(1-e^2)^{5/2}} \left(1 + \frac{121}{304} e^2 \right). \quad (55)$$

Resultados - Solución numérica de la ecuación a(e)

```
In [12]: def dotx(x,t):  
    a = x[0]  
    e = x[1]  
    return [-(16/(5*a**3))*(1+(73/24)*e**2+(37/96)*e**4)/((1-e**2)**(7/2)),  
            -(76/(15*a**4))*e*(1+(121/304)*e**2)/((1-e**2)**(5/2))]
```

Figura 3: Función escrita en python que define la ecuación 54

Resultados - Solución numérica de la ecuación a(e)

```
In [15]: def a(T_s):  
        return (m_sol*M*(c*T_s/(2*np.pi))**2)**(1/3)  
  
        def T(a_m):  
            return (2*np.pi/c)*(a_m**3/(M*m_sol))**(1/2)
```

Figura 4: Función escrita en python que define la dependencia entre el periodo y el semieje mayor

Resultados - Solución numérica de la ecuación a(e)

```
In [19]: def solucion(x0,tt_int):  
    print ('Se resuelve con at0 = %2.f y e0 = %2.f'%(x0[0],x0[1]))  
    sol = odeint(dotx,x0,tt_int)  
    at_todos = sol[:,0]  
    # verifica si at llega a 2. En caso positivo corta el arreglo de soluciones  
    restriccion = np.where(at_todos<=2)[0]  
    if len(restriccion)!=0:  
        pos_ttmax = restriccion[0] # determina el tiempo en el que at=2  
        print('Acortando intervalo a tt_max = '+str(tt_int[pos_ttmax]))  
    else:  
        pos_ttmax = len(tt_int)  
    tt = tt_int[:pos_ttmax]  
    t_a = tt*R_ast/c/31557600 # el tiempo, en años  
    at = sol[:pos_ttmax,0]  
    e = sol[:pos_ttmax,1]  
    a_m = at*R_ast # solución de a, en metros  
    T_s = T(a_m) # solución de T, en segundos  
    return tt,t_a,at,e,a_m,T_s
```

Figura 5: Función que define la solución numérica del sistema binario

Resultados - Solución numérica de la ecuación a(e)

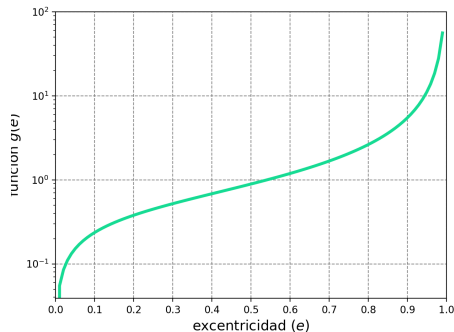


Figura 6: Función $g(e)$ con respecto los valores de la excentricidad calculados.

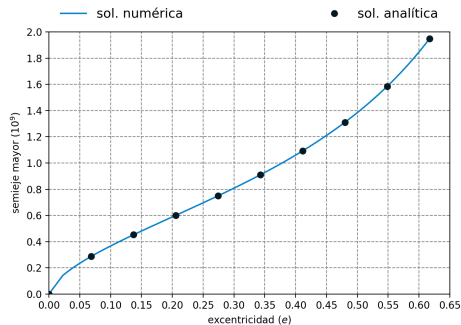


Figura 7: Valores del semieje mayor a con respecto a los valores de excentricidad e para la solución analítica u numérica.

Resultados - Solución numérica de la ecuación a(e)

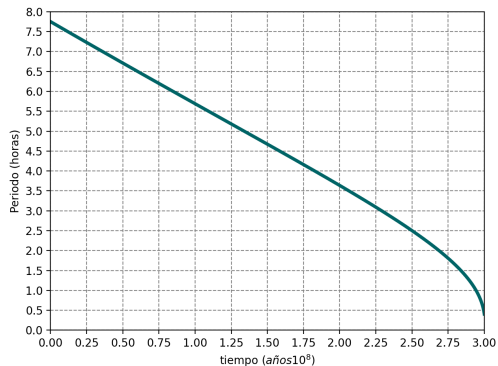


Figura 8: Periodo orbital en horas del sistema binario con respecto al tiempo en años.

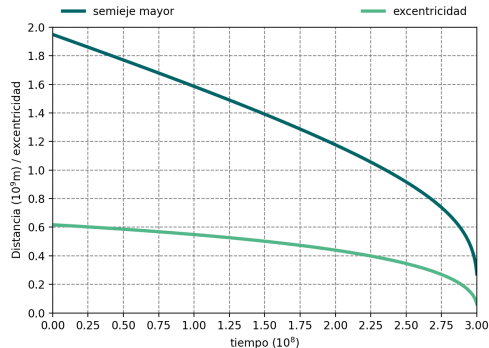


Figura 9: Semieje mayor y la excentricidad de la dinámica del pulsar binario a lo largo del tiempo.

Resultados - Solución numérica de la ecuación a(e)

$$\begin{aligned}T(t) &\approx T_0 + \dot{T}(t - t_0), \\t_{n+1} &\approx t_n + T(t_n).\end{aligned}$$

que al ser iteradas implican que

$$t_n \approx t_0 + nT_0 + \dot{T}T_0 \frac{n(n-1)}{2} + O(\dot{T}^2).$$

Por lo tanto, el retardo respecto al valor newtoniano ($t_n^{\text{Newton}} = t_0 + nT_0$), luego de n revoluciones es dado por

$$(\Delta t)_n \approx \dot{T}T_0 \frac{n(n-1)}{2} + O(\dot{T}^2).$$

Resultados - Solución numérica de la ecuación a(e)

El valor de \dot{T} puede ser evaluado usando la función `dotx` que definimos previamente, y con la relación

$$\dot{T} = \frac{3}{2} \frac{c}{R_*} \frac{T}{\tilde{a}} \frac{d\tilde{a}}{d\tilde{t}}$$

Obteniendo un valor de

$$\frac{dT}{dt} = -2,402560 \times 10^{-12}$$

Este valor concuerda con el reportado en [11]. Por lo que comparando los datos observacionales con los teóricos obtenemos la figura 10.

Resultados - Solución numérica de la ecuación a(e)

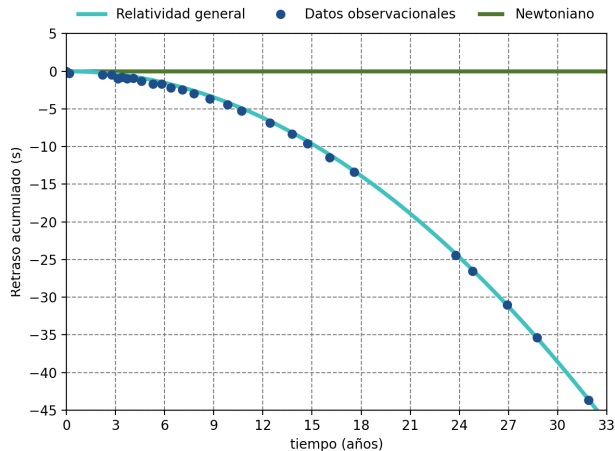


Figura 10: Datos observacionales reportados en [11] comparados con la solución teórica aportada por la relatividad general y la teoría newtoniana.

Con estos resultados, podemos llegar a las siguientes conclusiones:

- A partir de las figuras 8 y 9 se aprecia que la tasa de cambio con respecto al tiempo de la excentricidad (e), periodo (T) y el semieje mayor (a) es constante una gran parte del tiempo en el cual el sistema binario se encuentra orbitando y es por ello que podemos calcular un tiempo de retardo durante ese periodo de años.
- La solución numérica de las ecuaciones de evolución del sistema binario compata con la solución analítica, esto puede verse representado en la figura 7.
- Con la figura 10 se comprueba que la teoría de la relatividad general modela con cierta exactitud a la realidad en casos donde la teoría newtoniana llega a ser inválida , ya que, con los datos observacionales reportados por [11] del pulsar PSR B1913+16, las ecuaciones resultantes de principios de la teoría de la relatividad general compatan con estos datos.

1. `Pot_efec_Graphics.py`

Este código genera la figura 2 a partir de los parámetros G , M , μ , L .

2. `data-HW.csv`

Datos observacionales reportados por [11].

3. `Sistema_Binario-Evolucion_Temporal_y_observaciones_HyT.py`

Este código es el encargado de realizar la simulación del pulsar binario calculando la evolución del semieje mayor a y excentricidad e generando las figuras 9, 8, 6, 7 y comparando los resultados numéricos, analíticos a los datos observaciones 2 en la figura 10.

- [1] Omar Gustavo Benvenuto and Alejandra De Vito. El estado evolutivo de la enana blanca en el pulsar binario PSR J1713 + 0747. 48:146–151, 2005.
- [2] Anthonny Canazas Garay. Teoría efectiva para estrellas binarias y su aplicación a ondas gravitacionales. *TECNIA*, 25(2):75, dic. 2015.
- [3] J Gonz. Estudio del estado evolutivo del sistema binario que contiene al pulsar de milisegundos PSR J1227 - 4853. 61(1988), 2019.
- [4] Julián R González, Directora María, and Alejandra De Vito. Estudio del estado evolutivo del sistema binario PSR J1227-4853. 2018.
- [5] S. Mineo, M. Gilfanov, and R. Sunyaev. X-ray emission from star-forming galaxies – I. High-mass X-ray binaries. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 419(3):2095–2115, 01 2012.
- [6] J. Patterson. The evolution of cataclysmic and low-mass X-ray binaries. *apjs*, 54:443–493, apr 1984.
- [7] P. C. Peters and J. Mathews. Gravitational radiation from point masses in a keplerian orbit. *Phys. Rev.*, 131:435–440, Jul 1963.
- [8] P L Torres. *Elementos de mecánica newtoniana*.
- [9] M A De Vito and O G Benvenuto. PSR J0751 + 1807 : un ajuste a los parámetros característicos del sistema binario. 51, 2008.
- [10] Cristina Wainmaier, Cristina Speltini, and Julia Salinas de Sandoval. Conceptos y relaciones entre conceptos de la mecánica newtoniana en estudiantes que ingresan a la universidad. *REEC: Revista electrónica de enseñanza de las ciencias*, 10(1):133–152, 2011.
- [11] J. M. Weisberg, D. J. Nice, and J. H. Taylor. Timing measurements of the relativistic binary pulsar PSR B1913+16. *Astrophysical Journal*, 722(2):1030–1034, 2010.