UANL
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FCFM
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS


**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN**
**FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS**


# Tópicos de Mécanica Cuántica
## Tarea 6

Enrique Valbuena Ordonez


Nombre:
Giovanni Gamaliel López Padilla

Matricula:
1837522


28 de septiembre de 2020

## Demostrar que: $\oint \vec{J} \cdot d\vec{S} = \mathbf{0}$

Se tiene que la densidad de corriente de probabilidad es lo siguiente:

$$\vec{J} = \frac{\hbar}{2mi} \left( \psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^* \right) \tag{1}$$

Donde $\psi$ y $\psi^*$ forman la densidad de probabilidad de la siguiente manera:

$$\rho = \psi \psi^* \tag{2}$$

derivando esta expresión respecto el tiempo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \psi \psi^* \right) \\ &= \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} + \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} \end{aligned}$$

como $\psi$ y $\psi^*$ son soluciones a la ecuación de Schrödinger, entonces:

$$H\psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} \tag{3}$$

$$H\psi^* = i\hbar \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \tag{4}$$

por lo tanto:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2m} \left( \psi^* \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \psi^* \right) \tag{5}$$

Si calculamos $\nabla \cdot \vec{J}$, encontramos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{j} &= \frac{\hbar}{2mi} (\nabla \cdot (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*)) \\ &= \frac{\hbar}{2mi} (\nabla \cdot (\psi^* \nabla \psi) - \nabla \cdot (\psi \nabla \psi^*)) \\ &= \frac{\hbar}{2mi} (\nabla \psi \nabla \psi^* + \psi \nabla^2 \psi^* - (\nabla \psi \nabla \psi^* + \psi^* \nabla^2 \psi)) \\ &= \frac{\hbar}{2mi} (\psi \nabla^2 \psi^* - \psi^* \nabla^2 \psi) \\ &= -\frac{i\hbar}{2m} (\psi \nabla^2 \psi^* - \psi^* \nabla^2 \psi) \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\nabla \cdot \vec{j} = -\frac{i\hbar}{2m} (\psi \nabla^2 \psi^* - \psi^* \nabla^2 \psi) \tag{6}$$

sumando al ecuación 5 y 6 se tiene que:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0 \tag{7}$$

integrando la ecuación 7 sobre todo el volumen se obtiene lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
\int_V \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} \right) dV &= \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_V \nabla \cdot \vec{j} dV \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \left( \int_V \rho dV \right) + \int_V (\nabla \cdot \vec{j}) dV \\
&= \frac{\partial}{\partial t} (1) + \int_V (\nabla \cdot \vec{j}) dV \\
&= \int_V (\nabla \cdot \vec{j}) dV
\end{aligned}
$$

por lo tanto:

$$\int_V (\nabla \cdot \vec{j}) dV = 0 \tag{8}$$

por ende:

$$\int \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0 \tag{9}$$