UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

Relatividad General
Proyecto final:
Modelo de evolución de un Pulsar Binario

Dr. Carlos Luna Criado

Nombre:	Matricula:
Giovanni Gamaliel López Padilla	1837522
Ivan Arturo Pla Guzman	1837515

26 de octubre de 2020

Índice

1. Resumen

2. Introducción

La mecánica newtoniana o mecánica vectorial es un conjunto de formulaciones de la mecánica clásica que estudia el movimiento de partículas y sólidos en un espacio euclideo tridimensional. Cada cuerpo contiene una velocidad inicial referenciada desde un sistema de referencia inercial donde las ecuaciones del movimiento se ven reducidas a las leyes de Newton. La mecánica newtoniana es un modelo físico que funciona para describir la dinámica de los cuerpos en el espacio por medio de las fuerzas que contiene cada objeto. Historicamente, la mecánica newtoniana fue el primer modelo físico en poder representar de buena manera la dinámica de los objetos al punto de predecir acciones importantes sobre el movimiento de los cuerpos, en donde se incluyen las trayectorias de ciertos planetas. La mecánica newtoniana es suficientemente válida para la casos en los cuales sus aproximaciones compatan con los resultados experimentales, ya sea como el movimiento de cohetes, trayectorias de planetas, moléculas orgánicas, trayectorias de moviles, etc. Sin embargo, existen problemas en donde el modelo newtoniano se complica matemáticamente en comparación a otras teorías como la mecánica lagrangiana o hamiltoniana, es por ello que debemos observar con deteminiendo el sistema de estudio para decidir que teoría utilizar y resolver el problema de una manera sencilla.

3. Objetivo

4. Marco teórico

4.1. Problema de Kepler Newtoniano

Si $\vec{x}_1$ y $\vec{x}_2$ son las coordenadas de m_1 y m_2 respecto a un sistema de referencia inercial, entonces las ecuaciones de movimiento correspondientes son:

$$\ddot{\vec{x}}_1 = -Gm_2 \frac{(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^3}, \tag{1}$$

$$\ddot{\vec{x}}_2 = -Gm_1 \frac{(\vec{x}_2 - \vec{x}_1)}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^3}. \tag{2}$$

Es conveniente definir una coordenada para el centro de masa $\vec{x}_{cm}$, la cual esta dada por:

$$\vec{x}_{\text{cm}} := \frac{m_1\vec{x}_1 + m_2\vec{x}_2}{M}, \qquad M := m_1 + m_2. \tag{3}$$

Con estas ecuaciones definidas se puede comprobar que a partir de 1 y 2 el centro de masa $\vec{x}_{cm}$ es igual a cero.

$$\ddot{\vec{x}}_{\text{cm}} = \vec{0}.$$

Por lo tanto, la coordenada del centro de masa se mueve a velocidad constante. Esto permite simplificar el problmea describiendo el movimiento desde el sistema de referencia inercial en el que el centro de masa del sistema está en reposo y ubicado en el origen, es decir:

$$\vec{x}_{\text{cm}} \overset{!}{=} \vec{0}. \tag{4}$$

Por la condición 4 implica que, en el sistema de referencia inercial del centro de masa, las coordenadas de m_1 y m_2 están relacionadas por:

$$\vec{x}_2 = -\frac{m_1}{m_2}\vec{x}_1. \tag{5}$$

Definiendo así una coordenada relativa dada por:

$$\vec{r} := \vec{x}_2 - \vec{x}_1. \tag{6}$$

Con esto definido, podemos escribir a la ecuación 5 comprobar

$$\vec{x}_1 = -\frac{m_2}{M}\vec{r}, \qquad \vec{x}_2 = \frac{m_1}{M}\vec{r}. \tag{7}$$

Usando estas relaciones podemos transformar las ecuaciones de movimiento 1 y 2 en ecuaciones para la coordenada relativa:

$$\ddot{\vec{r}} = -GM\frac{\hat{r}}{r^2}. \tag{8}$$

Por otro lado, la energía total del sistema

$$E = \frac{1}{2}m_1\vec{v}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\vec{v}_2^2 - \frac{Gm_1m_2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|}, \tag{9}$$

y el momentum angular total respecto al origen,

$$\vec{L} = m_1\vec{x}_1 \times \vec{v}_1 + m_2\vec{x}_2 \times \vec{v}_2, \tag{10}$$

pueden reescribirse en términos de la coordenada relativa, resultando

$$E = \frac{1}{2}\mu\vec{v}^2 - \frac{G\mu M}{r}, \tag{11}$$

$$\vec{L} = \mu\,\vec{r} \times \vec{v}, \tag{12}$$

donde $\vec{v} := \dot{\vec{r}}$ y $\mu := m_1m_2/M$ es llamada la *masa reducida* del sistema.
Los resultados de las ecuaciones 8, 11 y 12 muestran que el movimiento relativo es equivalente al de un cuerpo de masa μ moviendose en el potencial central fijo generado por una masa M situada en el origen $\phi = -GM/r$. Como este potencial es central, el momentum angular total del sistema es constante a lo largo de la trayectoria. Como consecuencia, el movimiento está confinado al plano perpendicular $\vec{L}$. Podemos elegir el eje z normal a este plano, de modo que la trayectoria del cuerpo satisface $\theta = \pi/2$, y entonces realizando la transformación de coordenadas rectangulares a coordenadas polares y usando $\vec{r} = r\hat{r}$ podemos escribir la velocidad y la acelaración como:

$$\vec{v} = \dot{r}\,\hat{r} + r\dot{\varphi}\,\hat{\varphi}, \tag{13}$$

$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right)\hat{r} + \left(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}\right)\hat{\varphi}. \tag{14}$$

Reemplazando la ecuación 14 en 8 obtenemos

$$\left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right)\hat{r} + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\,\hat{\varphi} = -\frac{GM}{r^2}\hat{r}. \tag{15}$$

De aqui, encontramos

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -\frac{GM}{r^2}, \tag{16}$$

$$r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = 0. \tag{17}$$

Multiplicando la ecuación 17 por r, se ecuentra que el término $r^2\phi$ es constante sobre la trayectoria

$$\begin{aligned} 0 &= r^2\ddot{\varphi} + 2r\dot{r}\dot{\varphi} \\ &= \frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\varphi}\right), \end{aligned}$$

que expresa la conservación del momento angular, ya que

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \mu\,\vec{r} \times \vec{v} \\ &= \mu\, r\,\hat{r} \times (\dot{r}\hat{r} + r\dot{\varphi}\hat{\varphi}) \\ &= \mu\, r^2\dot{\varphi}\,(\hat{r} \times \hat{\varphi}) \\ &= \mu\, r^2\dot{\varphi}\,\hat{z}. \end{aligned}$$

$$\vec{L} == \mu\, r^2\dot{\varphi}\,\hat{z}. \tag{18}$$

Otra cantidad conservada sobre la órbita es la energía mecánica

$$E = \frac{1}{2}\mu v^2 - \frac{GM\mu}{r} \tag{19}$$

$$= \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\mu r^2\dot{\varphi}^2 - \frac{GM\mu}{r}. \tag{20}$$

Despejando $\dot{\varphi}$ de la ecuación 18 podemos escribir la energía mecánica sólo en términos de la variable r y constantes del movimiento:

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{GM\mu}{r}. \tag{21}$$

Definiendo un potencial efectivo

$$V_{\text{ef}}(r) := \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{GM\mu}{r}, \tag{22}$$

De modo que la ecuación 21 pueda ser escrita como la ecuación de conservación de la energía de un movimiento unidimensional:

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + V_{\text{ef}}(r). \tag{23}$$

El potencial efectivo $V_{\text{ef}}(r)$ posee un cero en

$$r_{\text{c}} = \frac{L^2}{2GM\mu^2}, \tag{24}$$

y además posee un mínimo en

$$r_{\text{min}} = \frac{L^2}{GM\mu^2} = 2r_{\text{c}}, \tag{25}$$

tal que

$$V_{\text{ef,min}} = -\frac{G^2M^2\mu^3}{2L^2} < 0.$$

Además, el comportamiento asintótico del potencial efectivo es

$$\begin{aligned} \lim_{r\to\infty} V_{\text{ef}}(r) &\approx -\frac{GMm}{r} \to 0, \\ \lim_{r\to 0} V_{\text{ef}}(r) &\approx \frac{L^2}{2mr^2} \to +\infty. \end{aligned}$$

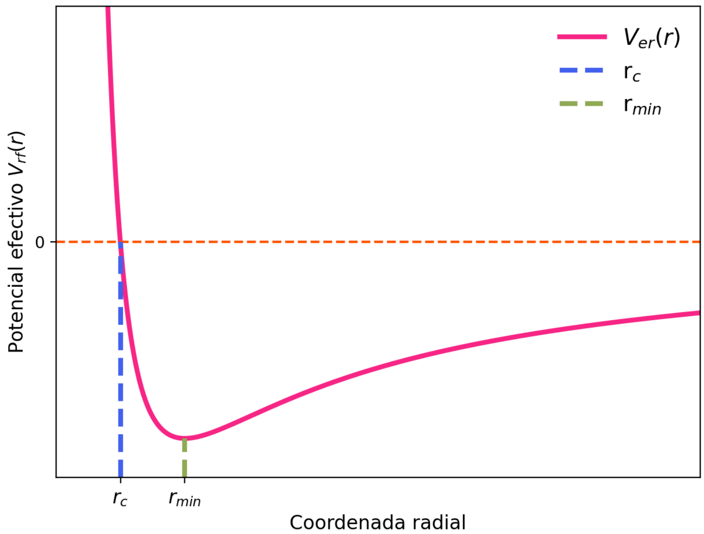

Figura 1: Potencial newtoniano efectivo, las constantes L, G, M, μ igualadas a 1

Así para un valor de L dado, tenemos que:

1. Si $E_1 > 0$, una part'icula proveniente del infinito alcanza un radio mínimo r_1, donde $\dot{r}^2 = 0$, y luego vuelve a infinito.

2. Si $V_{\text{ef,min}} < E_2 < 0$ la trayectoria es ligada, variando la distancia entre dos puntos de retorno r_2 y r_3, de modo que $r_2 < r < r_3$.

3. Si $E_3 = V_{\text{ef,min}}$ la partícula describe un movimiento circular de radio dado por la ecuación 25. Este caso corresponde al mínimo del potencial, por lo que es un movimiento estable.

4. Finalmente, no existen trayectorias con $E < V_{\text{ef,min}}$ ya que la ecuación 23 requiere que $E \geq V_{\text{ef}}$.

Determinando la forma de la trayectoria, descrita por la dependencia de la coordenada radial r en términos de la coordenada angular φ. Asumiendo $r = r(\varphi)$ podemos escribir

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\varphi}\dot{\varphi} = \frac{L}{\mu r^2}\frac{dr}{d\varphi}. \tag{26}$$

Reemplazando en la ecuación 21 la ecuación 26 obtenemos

$$\frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \frac{2\mu E}{L^2} + \frac{2GM\mu^2}{L^2 r} - \frac{1}{r^2}. \tag{27}$$

Con un cambio de variable $u := 1/r$, entonces la ecuación 27

$$(u')^2 = \frac{2\mu E}{L^2} + \frac{2GM\mu^2}{L^2}u - u^2, \tag{28}$$

derivandi la ecuación 28 se encuentra la ecuación de movimiento para u en funcion de φ

$$u'' + u = \frac{GM\mu^2}{L^2}. \tag{29}$$

La integración de la ecuación 29 es directa ya que corresponde a un oscilador armónico con un término forzante constante

$$u(\varphi) = \frac{GM\mu^2}{L^2}\left(1 + e\cos(\varphi - \varphi_0)\right) \tag{30}$$

donde reemplazando la solución 30 en 28

$$e = \sqrt{1 + \frac{2L^2 E}{G^2 M^2 \mu^3}}, \tag{31}$$

es la excentricidad dela orbita y ϕ_0 es una constante de integración correspondiente a la orientación inicial relativa al eje x. Si $-G^2M^2\mu^2/2L^2 < E < 0$ entonces $0 < e < 1$, y la cónica es una elipse.
El semieje mayor de la órbita es El semieje mayor de la 'orbita,

$$a = \frac{1}{2}\left(r_{\text{max}} + r_{\text{min}}\right),$$

puede ser escrito en términos de las constantes de movimiento a partir de las ecuaciones 30 y 31

$$\begin{aligned}
a &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u_{\text{min}}} + \frac{1}{u_{\text{max}}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{L^2}{GM\mu^2}\frac{1}{(1+e)} + \frac{L^2}{GM\mu^2}\frac{1}{(1-e)}\right) \\
&= \frac{L^2}{GM\mu^2}\frac{1}{(1-e^2)} \\
&= -\frac{GM\mu}{2E}.
\end{aligned}$$

$$a = -\frac{GM\mu}{2E}. \tag{32}$$

Con esto, podemos escribir la solución de la ecuación 30 como

$$u(\varphi) = \frac{1}{a(1-e^2)}\left[1 + e\cos(\varphi - \varphi_0)\right], \tag{33}$$

o, en términos de la coordenada radial relativa,

$$r(\varphi) = \frac{a(1-e^2)}{1 + e\cos(\varphi - \varphi_0)}. \tag{34}$$

La evolución temporal de la órbita puede ser determinada implícitamente de la forma siguiente. Definamos la variable auxiliar s por

$$r =: a(1 - e\cos s). \tag{35}$$

A partir de esto podemos usar la ecuación 34 para encontrar una relación entre φ y s sobre la órbita. De esta forma, obtenemos

$$\cos(\varphi - \varphi_0) = \frac{\cos s - e}{1 - e\cos s}, \tag{36}$$

y a partir de aqui

$$\operatorname{sen}(\varphi - \varphi_0) = \sqrt{1-e^2}\,\frac{\operatorname{sen} s}{1 - e\cos s}. \tag{37}$$

Derivando la ecuación 36 respecto a s y usando la ecuación 37 obtenemos

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{1 - e\cos s}.$$

Con esto, podemos expresar el momento angular de la ecuación 18 en términos de s;

$$\begin{aligned}
L &= \mu r^2 \frac{d\varphi}{dt} \\
&= \mu r^2 \frac{d\varphi}{ds}\frac{ds}{dt} \\
&= \mu a^2 (1 - e\cos s)^2 \frac{d\varphi}{ds}\frac{ds}{dt} \\
&= \mu a^2 \sqrt{1-e^2}\,(1 - e\cos s)\,\frac{ds}{dt}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
1 - e\cos s &= \frac{L}{\mu a^2\sqrt{1-e^2}}\frac{dt}{ds} \\
&=: \omega_0 \frac{dt}{ds},
\end{aligned}$$

$$1 - e\cos s =: \omega_0 \frac{dt}{ds}, \tag{38}$$

donde hemos introducido el término ω_0, con unidades de frecuencia, que usando la ecuación 31 satisface

$$\omega_0^2 = \frac{GM}{a^3}. \tag{39}$$

La relación de la ecuación 38 puede integrarse directamente respecto a s. Eligiendo la condición inicial $s = 0$ para $t = 0$ obtenemos

$$\omega_0(t - t_0) = s - e \operatorname{sen} s. \tag{40}$$

Las expresiones de las ecuaciones 40, 35, 36 y 37 suministra una *solución paramétrica* para la órbita. A partir de la ecuación 34 vemos que $r(\varphi)$ es periodica con periodo $\Delta\varphi = 2\pi$. Además, de las ecuaciones 35 y **??** vemos que este periodo corresponde a un cambio en 2π en la variable auxiliar s. Finalmente, la relación 35 implica que esta periodicidad corresponde a un intervalo de tiempo

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}, \tag{41}$$

que es entonces el *periodo orbital*. Con esto la ecuación **??** implica la *tercera ley de Kepler*.

4.2. Potencia radiada por un sistema binario

Considerando el casi en que un sistema binario está conformado por masas compactas, que modelaremos como puntuales, orbitando una respecto a la otra por efecto de su atracción gravitacional mutua. Para esto, realizaremos los cálculos en el sistema de referencia del centro de masa, es por ello que requeriremos del tensor momento de inercia del sistema, el cual puede mostrarse que el momento de inercia total del sistema binario se reduce al de una partícula con masa reducida μ, realizando un movimiento descrito por la coordenada relativa $\vec{r}$.

$$M_{ij} = m_1 x_i^{(1)} x_j^{(1)} + m_2 x_i^{(2)} x_j^{(2)} = \mu r_i r_j$$

Si las coordenadas son elegidas de modo que el movimiento del sistema est'a confinado al plano xy, tendremos que s'olo M_{11}, M_{12} y M_{22} ser'an distintos de cero. De este modo, encontramos que

$$\begin{aligned} M_{11} &= \mu\, x^2 \\ &= \mu r^2 \cos^2\varphi \\ &= \mu a^2(1-e^2)^2 \frac{\cos^2\varphi}{[1 + e\cos(\varphi - \varphi_0)]^2}, \end{aligned}$$

y, similarmente,

$$\begin{aligned} M_{12} &= \mu\, xy \\ &= \mu r^2 \cos\varphi \operatorname{sen}\varphi \\ &= \mu a^2(1-e^2)^2 \frac{\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi}{[1 + e\cos(\varphi - \varphi_0)]^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{22} &= \mu\, y^2 \\
&= \mu r^2 \operatorname{sen}^2 \varphi \\
&= \mu a^2 (1-e^2)^2 \frac{\operatorname{sen}^2 \varphi}{[1+e\cos(\varphi-\varphi_0)]^2}.
\end{aligned}$$

A continuación requerimos determinar las terceras derivadas $\dddot{I}_{ij}$. Para esto, introducimos la coordenada angular φ y usamos las ecuaciones 18 y 34, de modo que podamos escribir

$$\begin{aligned}
\dot{M}_{ij} &= \frac{dM_{ij}}{d\varphi}\dot{\varphi} \\
&= \frac{dM_{ij}}{d\varphi}\frac{L}{\mu r^2} \\
&= \frac{L}{\mu a^2 (1-e^2)^2}\,[1+e\cos(\varphi-\varphi_0)]^2\,\frac{dI_{ij}}{d\varphi} \\
&= \frac{\omega_0}{(1-e^2)^{3/2}}\,[1+e\cos(\varphi-\varphi_0)]^2\,\frac{dI_{ij}}{d\varphi}.
\end{aligned}$$

Con lo que encontrariamos que

$$\begin{aligned}
\dot{M}_{11} &= (-2)\mu a^2 \omega_0 \left(1-e^2\right)^{1/2} \frac{\cos\varphi(\operatorname{sen}\varphi + e\operatorname{sen}\varphi_0)}{1+e\cos(\varphi-\varphi_0)}, \\
\dot{M}_{22} &= (+2)\mu a^2 \omega_0 \left(1-e^2\right)^{1/2} \frac{\operatorname{sen}\varphi(\cos\varphi + e\cos\varphi_0)}{1+e\cos(\varphi-\varphi_0)}, \\
\dot{M}_{12} &= \mu a^2 \omega_0 \left(1-e^2\right)^{1/2} \frac{(\cos 2\varphi + e\cos(\varphi+\varphi_0))}{1+e\cos(\varphi-\varphi_0)}.
\end{aligned}$$

Análogamente, encontramos que

$$\dddot{M}_{11} = \alpha\,[1+e\cos(\varphi-\varphi_0)]^2\,[4\operatorname{sen}(2\varphi) + 3e\operatorname{sen}(2\varphi)\cos(\varphi-\varphi_0) + 2e\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi_0]\,, \tag{42}$$

$$\dddot{M}_{22} = \alpha\,[1+e\cos(\varphi-\varphi_0)]^2\,[-4\operatorname{sen}(2\varphi) - 3e\operatorname{sen}(2\varphi)\cos(\varphi-\varphi_0) - 2e\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi_0]\,, \tag{43}$$

$$\dddot{M}_{12} = \alpha\,[1+e\cos(\varphi-\varphi_0)]^2\,[-4\cos(2\varphi) - 3e\cos(2\varphi)\cos(\varphi-\varphi_0) - e\cos(\varphi+\varphi_0)]\,, \tag{44}$$

con

$$\alpha := \frac{\mu a^2 \omega_0^3}{(1-e^2)^{5/2}}.$$

En términos del tensor momento de inercia con traza, la potencia promedio radiada es dada por **??**, y se reduce en este caso a

$$\begin{aligned}
\langle P\rangle &= \frac{G}{5c^5}\left\langle \dddot{M}^{ij}\dddot{M}^{ij} - \frac{1}{3}\left(\dddot{M}^{ii}\right)^2 \right\rangle \\
&= \frac{G}{5c^5}\left\langle \left(\dddot{M}_{11}\right)^2 + \left(\dddot{M}_{22}\right)^2 + 2\left(\dddot{M}_{12}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\dddot{M}_{11}+\dddot{M}_{22}\right)^2 \right\rangle \\
&= \frac{2G}{15c^5}\left\langle \left(\dddot{M}_{11}\right)^2 + \left(\dddot{M}_{22}\right)^2 + 3\left(\dddot{M}_{12}\right)^2 - \dddot{M}_{11}\dddot{M}_{22} \right\rangle.
\end{aligned}$$

Luego de reemplazar las ecuaciones 42 y 44, y usando la ecuación **??**, obtenemos

$$\langle P\rangle = \frac{2G^4\mu^2M^3}{15c^5a^5\left(1-e^2\right)^5}\left\langle g(\varphi)\right\rangle,$$

donde hemos introducido la función angular

$$g(\varphi) := 2\left[1+e\cos(\varphi-\varphi_0)\right]^4\left[24+13e^2+48e\cos(\varphi-\varphi_0)+11e^2\cos(2\varphi-2\varphi_0)\right]. \tag{45}$$

Para calcular el promedio $\langle g(\varphi)\rangle$, transformamos la integral temporal en una integral sobre el 'angulo φ:

$$\begin{aligned}
\langle g(\varphi)\rangle &= \frac{1}{T}\int_0^T g(t)\,dt \\
&= \frac{1}{T}\int_0^{2\pi} g(\varphi)\frac{dt}{d\varphi}\,d\varphi \\
&= \frac{1}{T}\int_0^{2\pi} g(\varphi)\frac{1}{\dot\varphi}\,d\varphi \\
&= \frac{1}{T}\frac{\mu}{L}\int_0^{2\pi} r^2(\varphi)g(\varphi)\,d\varphi \\
&= \frac{\mu a^2(1-e^2)^2}{TL}\int_0^{2\pi}\frac{g(\varphi)}{\left[1+e\cos(\varphi-\varphi_0)\right]^2}\,d\varphi \\
&= \frac{(1-e^2)^{3/2}}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{g(\varphi)}{\left[1+e\cos(\varphi-\varphi_0)\right]^2}\,d\varphi.
\end{aligned}$$

Luego de reemplazar 45 en la expresión anterior, se obtiene una integral de simples funciones trigonométricas, que al ser evaluada se reduce a

$$\langle g(\varphi)\rangle = 48(1-e^2)^{3/2}\left(1+\frac{73}{24}e^2+\frac{37}{96}e^4\right).$$

Con esto, encontramos la expresión de la potencia total promedio radiada por un sistema binario, de masa total M, masa reducida μ, describiendo una órbita (relativa) con semieje mayor a, y excentricidad e [4].

$$\langle P\rangle = \frac{32}{5}\frac{G^4\mu^2M^3}{c^5a^5}f(e), \tag{46}$$

$$f(e) := \frac{1}{\left(1-e^2\right)^{7/2}}\left(1+\frac{73}{24}e^2+\frac{37}{96}e^4\right).$$

Análogamente, el momentum angular promedio radiado es

$$\langle\dot L\rangle = \frac{32}{5}\frac{G^{7/2}\mu^2M^{5/2}}{c^5a^{7/2}}\frac{1}{(1-e^2)^2}\left[1+\frac{7}{8}e^2\right].$$

A partir de 46 podemos encontrar una predicción de cómo irá “colapsando” el sistema binario, es decir, cómo irá disminuyendo el tamaño de las órbitas (a) y el periodo orbital correspondiente (T). Para esto, usamoos las ecuaciones 32 y **??** que permiten relacionar el cambio $\dot{E} = -\langle P \rangle$ de la energía del sistema binario con los correspondientes cambios del semieje mayor ($\dot{a}$) y del periodo orbital ($\dot{T}$), obteniendo

$$\frac{\dot{E}}{E} = -\frac{\dot{a}}{a} = -\frac{2}{3}\frac{\dot{T}}{T}.$$

De aquí encontramos la predicción de la *Teoría de Relatividad General para la disminución del periodo orbital de un sistema binario debido a la emisión de radiación gravitacional*:

$$\begin{aligned}\frac{\dot{T}}{T} &= -\frac{3}{2}\frac{\dot{E}}{E}\\ &= -\frac{96}{5}\frac{G^3\mu M^2}{c^5 a^4} f(e)\\ &= -\frac{96}{5}\frac{G^{5/3}\mu M^{2/3}}{c^5}\left(\frac{T}{2\pi}\right)^{-8/3} f(e).\end{aligned}$$

$$\frac{da}{dt} = -\frac{64}{5}\frac{G^3\mu M^2}{c^5 a^3}\frac{1}{(1-e^2)^{7/2}}\left(1+\frac{73}{24}e^2+\frac{37}{96}e^4\right), \tag{47}$$

$$\frac{de}{dt} = -\frac{304}{15}\frac{G^3\mu M^2}{c^5 a^4}\frac{e}{(1-e^2)^{5/2}}\left(1+\frac{121}{304}e^2\right). \tag{48}$$

En el caso de una órbita circular, $e = 0$, la ecuación se reduce a

$$\frac{da}{dt} = -\frac{64}{5}\frac{G^3\mu M^2}{c^5 a^3}, \tag{49}$$

cuya solución es

$$a(t) = \left[a_0^4 - \frac{256}{5}\frac{G^3\mu M^2}{c^5}(t-t_0)\right]^{1/4}. \tag{50}$$

Dividiendo las ecuaciones 47 y 48 para $\dot{a}$ y $\dot{e}$ podemos eliminar el tiempo de estas expresiones y encontrar una ecuación que relaciona directamente a con e:

$$\frac{da}{de} = \frac{12}{19}a\frac{1+(73/24)e^2+(37/96)e^4}{e(1-e^2)[1+(121/304)e^2]}. \tag{51}$$

La solución de esta ecuación es de la forma

$$a(e) = a_0\frac{g(e)}{g(e_0)},$$

con

$$g(e) := \frac{e^{12/19}}{1-e^2}\left(1+\frac{121}{304}\right)^{870/2299}.$$

5. Resultados

5.1. Solución exacta de la ecuación a(e)

Integrano la ecuación 51, encontramos que:

$$\int_{a_0}^{a} \frac{d\bar{a}}{\bar{a}} = \int_{e_0}^{e} \frac{12}{19} \frac{1 + (73/24)\bar{e}^2 + (37/96)\bar{e}^4}{\bar{e}(1-\bar{e}^2)[1 + (121/304)\bar{e}^2]} \, d\bar{e},$$

$$\ln\left(\frac{a}{a_0}\right) = \int_{e_0}^{e} \frac{12}{19} \frac{1 + (73/24)\bar{e}^2 + (37/96)\bar{e}^4}{\bar{e}(1-\bar{e}^2)[1 + (121/304)\bar{e}^2]} \, d\bar{e}.$$

Despejando a, obtenemos la expresión

$$\bar{a} = a_0 \exp\left[\int_{e_0}^{e} \frac{12}{19} \frac{1 + (73/24)\bar{e}^2 + (37/96)\bar{e}^4}{\bar{e}(1-\bar{e}^2)[1 + (121/304)\bar{e}^2]} \, d\bar{e}\right]. \tag{52}$$

Calculando la integral en la expresión anterior con la libreria *sympy* de *python*, se obtiene

$$\bar{a} = a_0 exp\left[\frac{12}{19} log(e) - \frac{12}{19} log(e_0) - log(e^2 - 1) + \frac{870}{2299} log\left(e^2 + \frac{304}{121}\right) + log\left(e_0^2 - 1\right) - \frac{870}{2299} log\left(e_0^2 + \frac{304}{121}\right)\right]$$

$$\bar{a} = \frac{a_0 e^{\frac{12}{19}} \left(e^2 + \frac{304}{121}\right)^{\frac{870}{2299}} \left(e_0^2 - 1\right)}{e_0^{\frac{12}{19}} \left(e^2 - 1\right) \left(e_0^2 + \frac{304}{121}\right)^{\frac{870}{2299}}} \tag{53}$$

Si definimos a

$$g(e) := \frac{e^{\frac{12}{19}}}{1 - e^2} \left(1 + \frac{121}{304}\right)^{\frac{870}{2299}} \tag{54}$$

entonces, la solución puede escribirse como

$$a(e) = a_0 \frac{g(e)}{g(e_0)} \tag{55}$$

5.2. Solución numérica de la función a(e)

Usando la siguiente adimencionalizació de las variables

$$\tilde{a} := \frac{a}{R_*}, \qquad \tilde{t} := \frac{ct}{R_*}.$$

donde

$$R_*^3 := \frac{4G^3 \mu M^2}{c^6}.$$

Por lo tanto, las ecuaciones 47 y 48 son:

$$\frac{d\tilde{a}}{d\tilde{t}} = -\frac{16}{5}\frac{1}{\tilde{a}^3}\frac{1}{(1-e^2)^{7/2}}\left(1+\frac{73}{24}e^2+\frac{37}{96}e^4\right), \tag{56}$$

$$\frac{de}{d\tilde{t}} = -\frac{76}{15}\frac{1}{\tilde{a}^4}\frac{e}{(1-e^2)^{5/2}}\left(1+\frac{121}{304}e^2\right). \tag{57}$$

Como el sistema de ecuaciones es de primer orden, basta con definir el vector solución x por medio de $x[0] := \tilde{a}, x[1] = e$. Por lo tanto, la ecuación 56 es dada por la función dotx.

[*]:
```
    def dotx(x,t):
        a = x[0]
        e = x[1]
        return [-(16/(5*a**3))*(1+(73/24)*e**2+(37/96)*e**4)/
↪((1-e**2)**(7/2)),
                -(76/(15*a**4))*e*(1+(121/304)*e**2)/((1-e**2)**(5/
↪2))]
```

Usando los datos del Pulsar de Hulse y Taulor, de acuerdo a [9].

[*]:
```
        T0_d = 0.322997448911 # periodo inicial, en días
        e0 = 0.6171334 # excentricidad inicial
        M_c = 1.3886 # masa de la compañera, en masas solares
        M_p = 1.4398 # masa del pulsar, en masas solares
        c = 299792458 # rapidez de la luz, en metros por segundo
        MGcm3 = 4.925490947E-6 # MG/c^3, en segundos
```

Calculando los parámetros astrofisicos se tiene lo siguiente:

[*]:
```
    m_sol = MGcm3*c # parametro de masa del Sol m=GM/c^2, en metros
    M = M_c+M_p # masa total, en masas solares
    mu = (M_c*M_p)/M # masa reducida, en masas solares
    R_ast = m_sol*(4*mu*M**2)**(1/3) # R_\ast en metros
    T0_s = T0_d*86400 # periodo inicial, en segundos
```

Definiendo las funciones que relacionan el perioto orbital T (en segundos) con el semieje mayor a, y viceversa.

[*]:
```
    def a(T_s):
        return (m_sol*M*(c*T_s/(2*np.pi))**2)**(1/3)

    def T(a_m):
        return (2*np.pi/c)*(a_m**3/(M*m_sol))**(1/2)
        a0_m = a(T0_s) # a inicial, en metros
        at0 = a0_m/R_ast # a tilde inicial
```

Dado que resolveremos el sistema de ecuaciones con distintias condicionesiniciales, definiremos una funcion que nos entrega estas soluciones:

[*]:
```
    def solucion(x0,tt_int):
```

```
        print 'Se resuelve con at0 = %2.f y e0 = %2.
↪f'%(x0[0],x0[1])
        sol = odeint(dotx,x0,tt_int)
        at_todos = sol[:,0]
        # verifica si at llega a 2. En caso positivo corta el␣
↪arreglo de soluciones
        restriccion = np.where(at_todos<2)[0]
        if len(restriccion) is not 0:
            pos_ttmax = restriccion[0] # determina el tiempo en el␣
↪que at=2
            print('Acortando intervalo a tt_max =␣
↪'+str(tt_int[pos_ttmax]))
        else:
            pos_ttmax = len(tt_int)
        tt = tt_int[:pos_ttmax]
        t_a = tt*R_ast/c/31557600 # el tiempo, en años
        at = sol[:pos_ttmax,0]
        e = sol[:pos_ttmax,1]
        a_m = at*R_ast # solución de a, en metros
        T_s = T(a_m) # solución de T, en segundos
        return tt,t_a,at,e,a_m,T_s
```

Al realizar tener la solución de a ecuación adimensionada, los valores son del orden de 10^{21} para que el sistema colapse, se transformo para que cada solución tenga dimensiones, por lo que al graficar el semieje mayor a y la excentricidad con respecto el tiempo obtememos la figura 2.

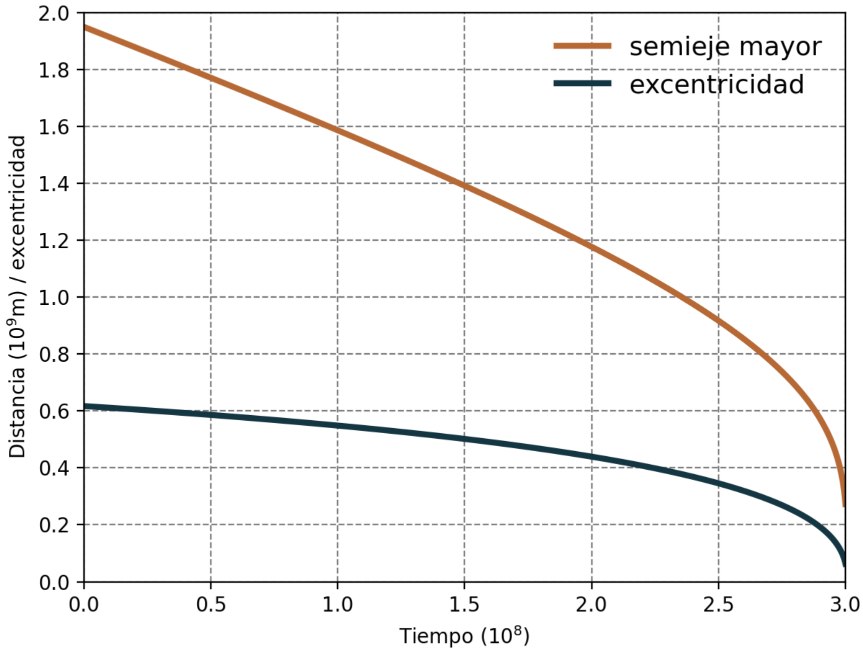

Figura 2: Semieje mayor y la excentricidad de la dinámica del pulsar binario a lo largo del tiempo.

Obteniendo el periodo orbital en horas del sistema obtenemos la figura 3.

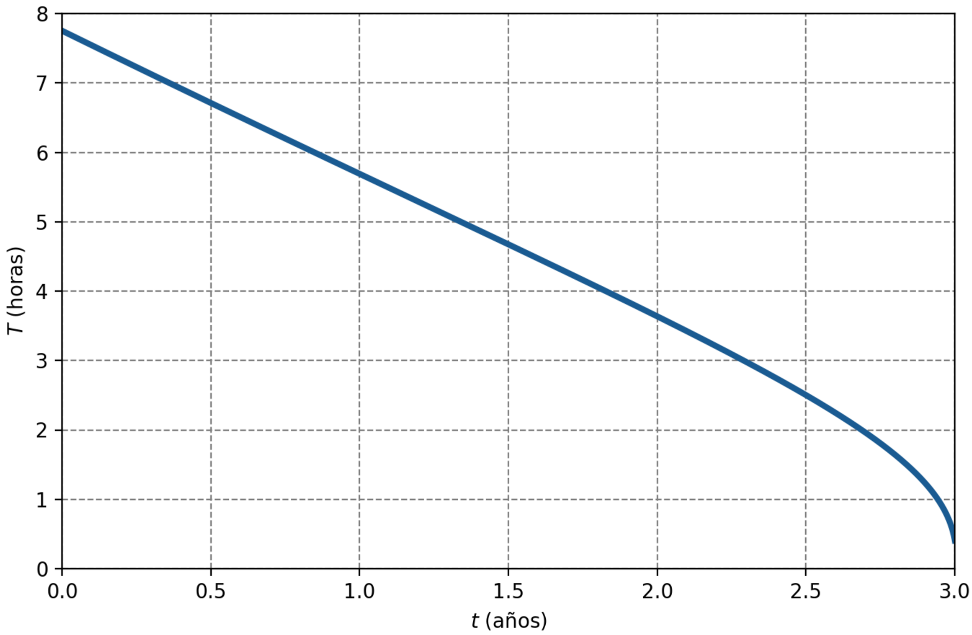

Figura 3: Periodo orbital en horas del sistema binario con respecto el tiempo en años.

Al tener los valores que contiene la excentricidad de la órbita del sistema, entonces podemos visualizar la forma de la funcion 54, esta función propuesta es la que se visualiza en la figura 4.

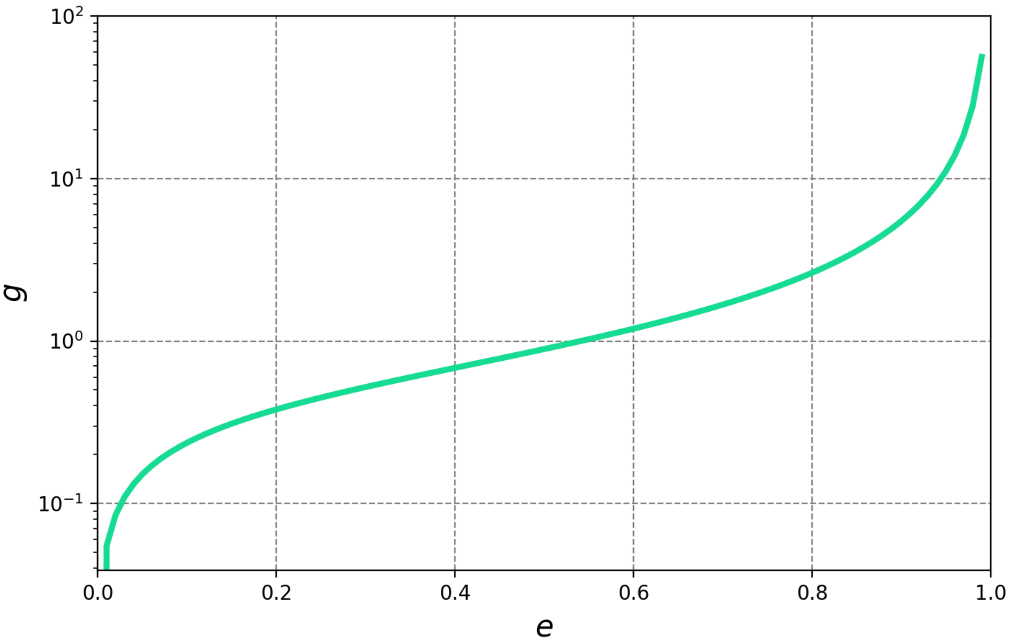

Figura 4: Función g(e) con respecto los valores de la excentricidad calculados.

Ahora graficando los valores del semieje mayor a con respecto a los valores de la excentricidad e, tanto para la solución análitica y númerica se obtiene la figura 5

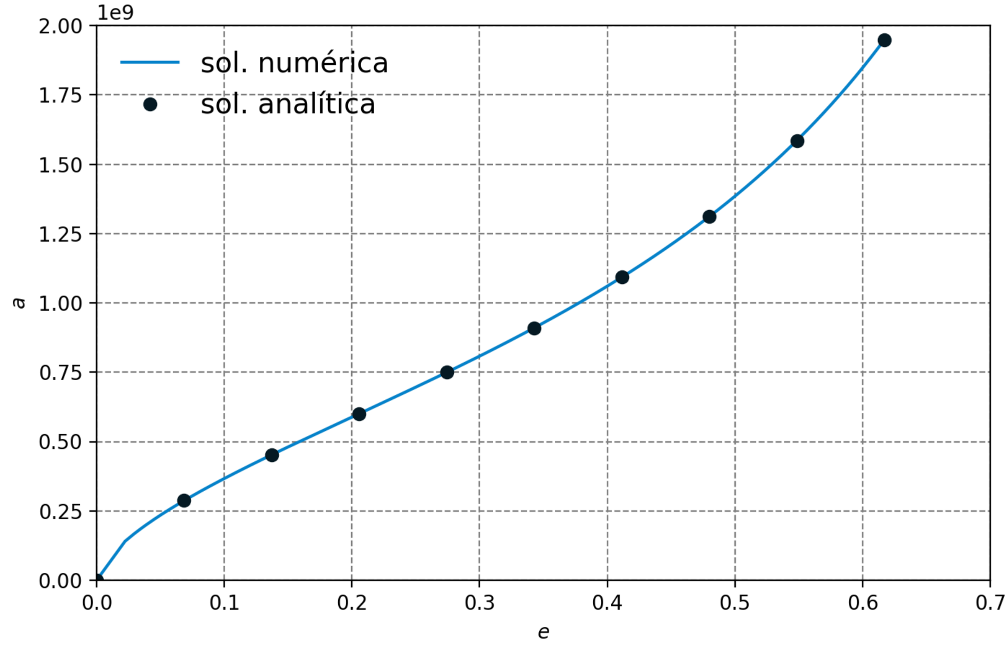

Figura 5: Valores del semieje mayor a con respecto a los valores de excentricidad e para la solución análitica u numérica.

Este comportamiento implica que en este intervalo de tiempo de aproximadamente 30 años los valores de $\dot{T}$, $\dot{a}$ y $\dot{e}$ pueden considerarse constantes. Con el valor de $\dot{T}$ podemos modelar el retardo acumulado en el movimiento orbital del sistema. Si $\dot{T} = \text{cte.}$ entonces el tiempo transcurrido hasta completar la n-ésima revolución es determinado por las relaciones

$$\begin{aligned} T(t) &\approx T_0 + \dot{T}(t - t_0), \\ t_{n+1} &\approx t_n + T(t_n). \end{aligned}$$

que al ser iteradas implican que

$$t_n \approx t_0 + nT_0 + \dot{T}T_0 \frac{n(n-1)}{2} + O(\dot{T}^2).$$

Por lo tanto, el retardo respecto al valor newtoniano ($t_n^{\text{Newton}} = t_0 + nT_0$), luego de n revoluciones es dado por

$$(\Delta t)_n \approx \dot{T}T_0 \frac{n(n-1)}{2} + O(\dot{T}^2).$$

El valor de $\dot{T}$ puede ser evaluado usando la función dotx que definimos previamente, y con la relación

$$\dot{T} = \frac{3}{2} \frac{c}{R_*} \frac{T}{\tilde{a}} \frac{d\tilde{a}}{d\tilde{t}}$$

Obteniendo un valor de

$$\frac{dT}{dt} = -2{,}402560x10^{-12}$$

Este valor concuerda con el reportado en [9]. Por lo que comparando los datos observacionales con los teóricos obtenemos la figura 6

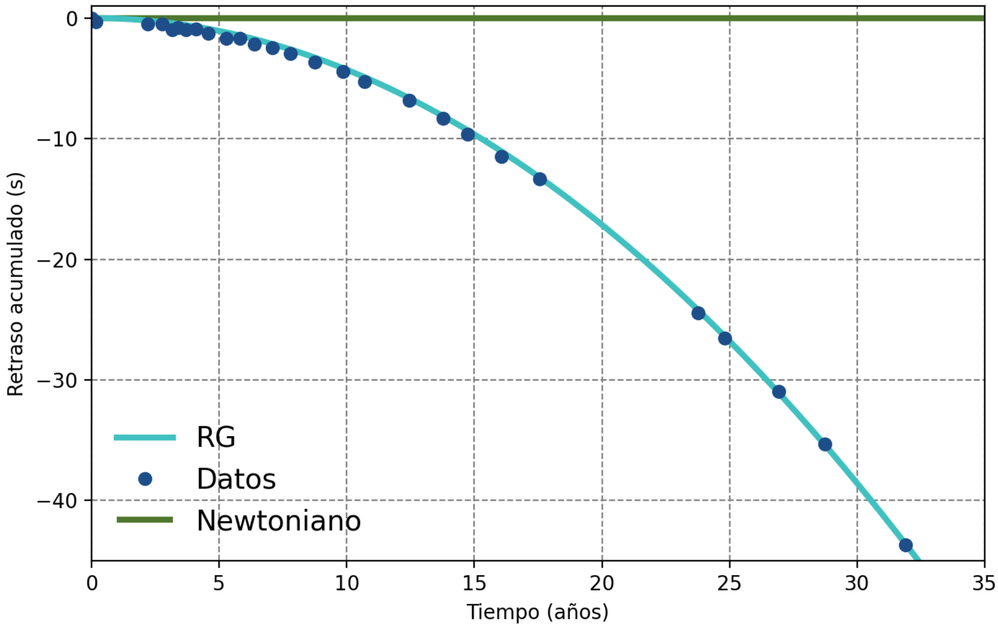

Figura 6: Datos observacionales reportados en [9] comparados con la solución teórica aportada por la relatividad general y la teoría newtoniana.

6. Conclusiones y discusión

7. Código

Referencias

[1] Omar Gustavo Benvenuto and Alejandra De Vito. El estado evolutivo de la enana blanca en el pulsar binario PSR J1713 + 0747 Tabla 1. 48:146–151, 2005.

[2] J Gonz. Estudio del estado evolutivo del sistema binario que contiene al pulsar de milisegundos PSR J1227 - 4853. 61(1988), 2019.

[3] Julián R González, Directora María, and Alejandra De Vito. Tesis para obtener el grado académico de Licenciado en Astronomía Estudio del estado evolutivo del sistema binario PSR J1227-4853. 2018.

[4] P. C. Peters and J. Mathews. Gravitational radiation from point masses in a keplerian orbit. *Phys. Rev.*, 131:435–440, Jul 1963.

[5] Francisco M Rica. De Estrellas Dobles. *Star*, 2009.

[6] P L Torres. *Elementos de mecánica newtoniana*.

[7] M A De Vito and O G Benvenuto. PRESENTACI ON PSR J0751 + 1807 : un ajuste a los parámetros característicos del sistema binario. 51, 2008.

[8] Cristina Wainmaier, Cristina Speltini, and Julia Salinas de Sandoval. Conceptos y relaciones entre conceptos de la mecánica newtoniana en estudiantes que ingresan a la universidad. *REEC: Revista electrónica de enseñanza de las ciencias*, 10(1):133–152, 2011.

[9] J. M. Weisberg, D. J. Nice, and J. H. Taylor. Timing measurements of the relativistic binary pulsar PSR B1913+16. *Astrophysical Journal*, 722(2):1030–1034, 2010.