

ÍNDICES  
DE  
MILLER

Lucio Vázquez Briseño  
y  
Antonio de Ita de la Torre



AM  
0911  
3.9

Materiales

UNIVERSIDAD  
AUTÓNOMA  
METROPOLITANA  
**AUA**  
Casa abierta al tiempo  
Azcapotzalco



# ÍNDICES DE MILLER



# 217409

C.B 2892734

# ÍNDICES DE MILLER

Lucio Vázquez Briseño  
Antonio de Ita de la Torre



2892734



División de Ciencias Básicas e Ingeniería  
Departamento de Materiales

**UAM-AZCAPOTZALCO**

**RECTOR**

Mtro. Víctor Manuel Sosa Godínez

**SECRETARIO**

Mtro. Cristian Eduardo Leriche Guzmán

**COORDINADORA GENERAL DE DESARROLLO ACACÉMICO**

Mtra. María Aguirre Tamez

**COORDINADORA DE EXTENSIÓN UNIVERSITARIA**

DCG Ma. Teresa Olalde Ramos

**JEFAS DE LA SECCIÓN DE PRODUCCIÓN Y DISTRIBUCIÓN EDITORIALES**

DCG Silvia Guzmán Bofill

*V Azco*

*PD 911*

*V3.9*

ISBN: 970-31-0029-5

**© UAM-Azcapotzalco**

Lucio Vázquez Briseño  
Antonio de Ita de la Torre

**Corrección:**

Mariela Juárez Capistrán

**Ilustración de portada:**

Consuelo Quiroz Reyes

**Ilustración:**

VII grabado de Honnecourt, tomado  
de Curso de Dibujo, 1983,  
fasc. 11, Barcelona, 1984

**Sección de producción  
y distribución editoriales**

Tel. 5318-9222 / 9223

Fax 5318-9222

Universidad Autónoma Metropolitana

Unidad Azcapotzalco

Av. San Pablo 180

Cel. Reynosa Tamaulipas

Delegación Azcapotzalco

C.P. 02290

México, D.F.

*Índices de Miller*

1a. edición, 2002

4a. reimpresión, 2005

Impreso en México

## CONTENIDO

Presentación de la segunda edición	7
Presentación de la primera edición	9
1 Índices de Miller	11
1.1 Puntos	15
1.2 Direcciones	17
1.3 Planos	26
2 Índices de Miller - Bravais	34
2.1 Puntos	35
2.2 Direcciones	37
2.3 Planos	42
3 Transformación de índices de Miller a Miller - Bravais y viceversa	50
3.1 Puntos	50
3.2 Direcciones	55
3.3 Planos	56
4 Bibliografía	59
5 Hojas de Trabajo	61



## PRESENTACIÓN DE LA SEGUNDA EDICIÓN

Después de varios años de haber salido la primera edición, una primera y una segunda reimpresión decidimos realizar algunas mejoras en el material original ya que se ganado mucha experiencia utilizando estas notas.

Así, decidimos mejorar la presentación general de la obra, modificando muchas cosas, haciendo uso de la facilidad actual de la tecnología computacional, ya que la primera edición fue el resultado de un trabajo realizado a partir de una máquina de escribir. De esta forma modificamos; el tipo de letra, para hacerla más legible y agradable al lector, resaltamos ciertas partes importantes de los textos, donde era muy necesario; dimos más espacios en las fórmulas, para hacerlas más claras; mejoramos las figuras y aumentamos el tamaño de muchos de los detalles en la figuras.

Por otro lado aumentamos el número de los ejemplos y los problemas, corregimos algunos errores tipográficos y rectificamos algunas de las imprecisiones. Le dimos un nuevo orden a los temas para hacerlos más claros y sistemáticos. Por ello, dividimos el capítulo 2 en dos partes.

Se anexan cinco hojas de trabajo: una que contiene 6 cubos, con los ejes ortogonales, una segunda con 6 dibujos de la base del prisma hexagonal esto es, un plano hexagonal, una tercera con 6 prismas hexagonales con los cuatro ejes, una más con tres bases hexagonales pero además con un sistema de ejes "x y" y finalmente una hoja con dos prismas hexagonales con cuatro ejes y también con un sistema de tres ejes ortogonales, para que el lector las pueda reproducir en photocopias y hacer en ellas los ejercicios y problemas mencionados en el texto.

Por supuesto que se revisó la bibliografía y se añadieron los textos más recientes. Finalmente, para remarcar, los ejercicios se han escrito en letra itálica. Los problemas y las figuras tienen numeración continua a travez de los capítulos.

Sólo nos queda agradecer a nuestros lectores su buena voluntad y sin duda, sus futuras valiosas sugerencias.

L. Vázquez y A. de Ita

Abrial 2002



## PRESENTACIÓN DE LA PRIMERA EDICIÓN

Los índices de Miller y Miller - Bravais se estudian en muchos libros. Sin embargo, quizás por suponerse que es un tema sencillo, su tratamiento es casi siempre muy breve, sin entrar en todos los detalles necesarios.

La experiencia de los profesores el curso de Introducción de los Materiales o de Cristales Perfectos e Imperfectos es que este tema no recibe un apoyo amplio de los textos existentes para reafirmar las explicaciones del profesor en la clase.

La intención de este trabajo es satisfacer esta necesidad y el plan de las mismas es:

- (a) Describir un método sistemático para determinar los índices de los puntos, direcciones y planos.
- (b) Ilustrar el método con varios ejemplos seleccionados.
- (c) Sugerir al alumno numerosos ejercicios.

Se espera que estas notas constituyan una continuación adecuada al estudio del tema presentado en clases por el profesor y que sirva de apoyo para el curso de Introducción a los Materiales y de antecedente para otros cursos de la carrera de Ingeniería Metalúrgica como: Cristales Perfectos e Imperfectos, Difusión, Nucleación y Crecimiento, Teoría de las Dislocaciones y Recristalización Dinámica, entre otros.

L. Vázquez

Octubre, 1988



## CAPÍTULO 1

### ÍNDICES DE MILLER

#### INTRODUCCIÓN

Los metales normales son policristalinos y sólo se demuestra la presencia de los granos que lo forman si se utiliza un microscopio óptico y si la muestra metálica se pule y se ataca con un reactivo químico adecuado. Estos granos son pequeños monocrystalles tridimensionales. Si se quiere saber de que están hechos estos granos, es claro que sólo con un gran microscopio electrónico se pueden identificar los átomos que forman los granos. En la mayoría de los materiales los átomos se encuentran ordenados formando estructuras compactas, en el caso de los metales y menos compactas en los otros dos grupos del universo de los materiales, esto es: en los cerámicos y polímeros.

En la naturaleza existen materiales que no son cristalinos. A estos últimos se les denomina amorfos. Actualmente se acepta que estos materiales, no son tan amorfos como en algún tiempo se pensaba, de acuerdo al significado de la palabra "sin forma" o en este caso "sin estructura u orden". Se ha encontrado que los materiales amorfos presentan un cierto ordenamiento, pero que sólo es en los vecinos más próximos de una cierta posición atómica. Mientras que los materiales **cristalinos** presentan una **estructura ordenada y periódica a corto y largo alcance y que llena completamente el espacio**. Por cierto, también existen materiales que son parcialmente cristalinos y parcialmente amorfos.

Es claro, que la cristalinidad de los metales se puede asociar a la existencia de arreglos de los átomos que forman pequeñas celdas, esto es, formas geométricas regulares y donde se asocia un átomo para cada uno de sus vértices. Sin embargo, para algunas sustancias es posible que a cada punto de la celda se puedan asociar dos o tres átomos, pero existen materiales como las moléculas orgánicas donde cientos o miles de átomos forman un punto de una celda dada. En este trabajo, se supondrá, por sencillez, que un átomo ocupa una posición en los vértices de la celda.

**Existen siete tipos de celdas, llamadas primitivas**, que cumplen las condiciones para definir que un material es cristalino. Algunas de estas celdas tienen subtipos: como son las centradas en el cuerpo, en las caras o en las bases. En estos casos se agregan uno o varios átomos a la celda simple o primitiva en ciertas posiciones especiales, como su nombre lo indica. **Todos estos subtipos de celdas forman lo que se conocen como las Redes de Bravais**. Son en total 14 subtipos de celdas posibles y todos los materiales cristalinos se pueden clasificar en algún tipo de estos. El francés August Bravais (1811 - 1863) publicó en 1850 su trabajo donde demostró que sólo estas 14 redes son posibles.

En la tabla 1 se muestran los nombres de las estructuras, los subtipos y las abreviaturas más utilizadas para identificar cada tipo de red. En la tabla 2, aparecen las características de cada estructura en cuanto a la longitud de sus aristas, así como el tamaño de los ángulos entre ellas. En la figura 1 se muestra una celda típica en general y en la figura 2, las 14 redes de Bravais. Por cierto, a la estructura trigonal a veces se le conoce como romboédrica.

TABLA 1. REDES DE BRAVAIS

ESTRUCTURA	SUBTIPOS	ABREVIATURA
Cúbica	Simple	cs
	Centrada en el cuerpo	ccu
	Centrada en las caras	cca
Tetragonal	Simple	ts
	Centrada en el cuerpo	tccu
Hexagonal	- - - - -	h
Trigonal	- - - - -	tri
Ortortrómbica	Simple	os
	Centrada en el cuerpo	occu
	Centrada en las bases	occb
	Centrada en las caras	occa
Monoclínica	Simple	ms
	Centrada en las bases	mcb
Triclinica	- - - - -	tricli

En general, los índices de Miller se utilizan para identificar, ya sea, la posición de los puntos de la red, donde generalmente se encuentran átomos, las direcciones dentro y fuera de las celdas, así como para definir los planos formados por los átomos de una estructura dada.

Es claro, que las posiciones de los puntos, las direcciones o los planos en una red cristalina, se describen en relación a una celda en especial, pero básicamente, también se

hacen con respecto a un sistema de referencia que comprende a los tres ejes principales x, y, z. El sistema más común que se utiliza es un sistema de coordenadas ortogonales, esto es, aquel en el que existen ángulos de 90° entre los tres ejes.

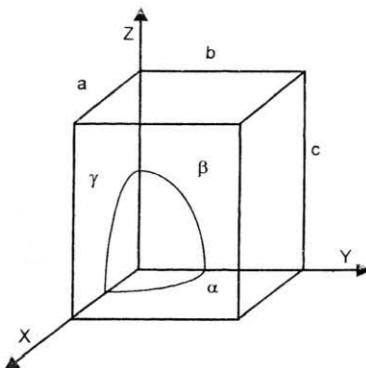


Figura 1. Celda típica en general

TABLA 2. CARACTERÍSTICAS DE LAS CELDAS

Estructura	Aristas	Ángulos entre las aristas
Cúbica	$a = b = c$	Todos los ángulos son de 90°
Tetragonal	$a = b \neq c$	Todos los ángulos son de 90°
Hexagonal	$a = b \neq c$	Dos ángulos de 90° y un ángulo de 120°
Trigonal	$a = b = c$	Todos los ángulos son iguales y diferentes de 90°
Ortorrombica	$a \neq b \neq c$	Todos los ángulos son de 90°
Monoclínica	$a \neq b \neq c$	Dos ángulos de 90° y un ángulo diferente de 90°
Triclinica	$a \neq b \neq c$	Todos los ángulos distintos y diferentes de 90°

Se puede descubrir que, por las características típicas de las celdas mostradas en las tablas 1 y 2, sólo quedan en cierta forma, fuera de este trabajo, las celdas trigonales y las triclinicas y parcialmente las monoclinicas. Simplemente, porque es un poco más difícil representar estas características en un sistema ortogonal. Por simplicidad se decidió explicar en este primer capítulo, todos los conceptos en función de una red cúbica, esto es, celdas con las tres longitudes de sus aristas iguales entre sí. Para las otras

celdas, es claro que no se cumple esta condición, pero basta con tomar los valores diferentes en cada eje, según la celda correspondiente: dos valores diferentes para la celda tetragonal y los tres valores de las longitudes de las aristas diferentes para las celdas ortorómicas y monoclinicas. La celda hexagonal se tratará especialmente en el capítulo 2.

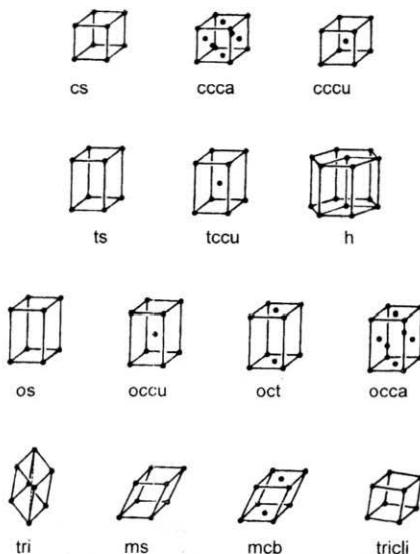


Figura 2. Los siete tipos de celdas y las 14 redes de Bravais

La mayoría de los metales y las aleaciones comunes cristalizan en las celdas más simples como son las cúbicas: la centrada en el cuerpo o en las caras y sólo algunos metales son tetragonales o hexagonales y muy pocos son de algún otro tipo.

A continuación se estudiará la forma de identificar: los puntos, las direcciones y los planos y sus respectivas familias en las celdas cristalinas.

## 1.1 PUNTOS

Cualquier lugar en un cristal o en una red se puede describir por las coordenadas del punto correspondiente con respecto a los tres ejes ortogonales y en relación con las dimensiones de la celda unitaria. Para identificar que se trata de índices de Miller de puntos se utiliza una barra vertical a cada lado de las coordenadas correspondientes. Por cierto, H. Miller fue el científico inglés ( 1801 - 1880 ) quien propuso el método para identificar los puntos, direcciones y planos en 1839. Además construyó un goniómetro de reflexión de dos círculos para medir mejor las caras de los cristales.

**Notación.** Para este trabajo se ha tomado un sistema ortogonal como el mostrado en la figura 1, es obvio que se obtienen otros índices, si se escoge como referencia otro sistema orientado de manera diferente, así que, al comparar algún resultado con los de otros textos, hay que tomar en cuenta este aspecto tan importante.

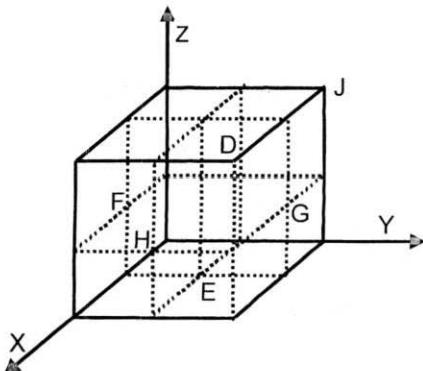


Figura 3. Puntos de los ejemplos 1 y 2

**EJEMPLO 1.** El punto que se encuentra en la posición D en la celda de la figura tiene los índices:  $|2, 2, 2|$  ya que son las coordenadas de ese punto.

**EJEMPLO 2.** De la misma forma los puntos F, E, H, G y J de la figura 3, tienen los índices  $|1, 0, 1|$ ,  $|1, 1, 0|$ ,  $|2, 1, 1|$ ,  $|1, 2, 1|$ ,  $|0, 2, 2|$  respectivamente porque esas son sus coordenadas.

**Notación.** En el uso cotidiano se tiende a **eliminar las comas entre los índices**. En este trabajo, se han mantenido las comas entre los índices, a lo largo de todo el texto, para mejorar la claridad.

Si se desea identificar los vértices de un cubo como el de la figura 4, se puede notar que algunos de ellos tienen los mismos números, pero en orden diferente, por ejemplo: los vértices  $L | 1, 0, 0 |$ ,  $M | 0, 1, 0 |$  y  $N | 0, 0, 1 |$  son combinaciones de dos ceros y un uno. En este caso se puede decir que los tres vértices forman una familia y para representarla se utiliza una doble raya vertical para designar esta familia de puntos con un sólo conjunto de números como:  $\| 1, 0, 0 \|$ .

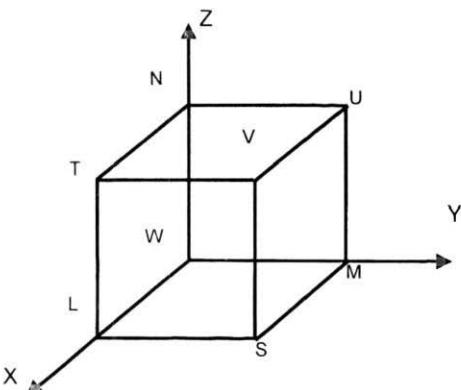


Figura 4. Vértices del cubo

En otra familia se pueden incluir también a los vértices de un cubo negativo. Es posible encontrar otros vértices del cubo, que tienen una notación diferente, por ejemplo, los vértices de la familia  $\| 1, 1, 0 \|$  a la cual pertenecen sin duda los vértices  $S | 1, 1, 0 |$ ,  $T | 1, 0, 1 |$ ,  $U | 0, 1, 1 |$ . Finalmente existe otra familia de puntos, que representa dos vértices más el  $V | 1, 1, 1 |$  y el  $W | 0, 0, 0 |$  y por supuesto los correspondientes negativos, que se pueden identificar en la familia  $\| 1, 1, 1 \|$ . En realidad todas estas familias de puntos se pueden nombrar mejor como la familia  $\| 1, 0, 0 \|$  ya que en todos los casos, los puntos son vértices de un cubo, esta familia representa a los 8 vértices de un cubo positivo, como se muestra en la figura 4.

**Notación.** En muchos textos los negativos se muestran con un signo menos sobre o bajo los números que denotan los índices, en este trabajo, se ponen delante de los índices. Por otro lado, las letras subrayadas aquí, significan vectores unitarios.

## PROBLEMAS

1. Identificar los índices de Miller del átomo que se encuentra en el centro de una celda cúbica.
2. Determinar las coordenadas de la familia de átomos colocados en el centro de las caras de una celda cúbica.
3. Encontrar los índices de Miller del átomo que se encuentra en el centro de una celda tetragonal.

## 1.2 DIRECCIONES

Cualquier dirección dentro de una red espacial o sistema ortogonal, se puede describir utilizando un sistema en el cual los índices  $u, v, w$  determinan un punto de la red, el cual, al ser unido con el origen del sistema ortogonal o rectangular, definen la dirección [  $u, v, w$  ]; los paréntesis rectangulares denotan que se trata de índices de Miller para una dirección.

Por otro lado, la dirección se puede definir como un vector  $R$  si:

$$R = u \underline{a} + v \underline{b} + w \underline{c}$$

en donde  $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ , son los vectores unitarios componentes del vector  $R$  a lo largo de los ejes de la red y  $u, v, w$  son los módulos o componentes de ese vector. Es claro que, en el caso del sistema cúbico los vectores  $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$  son iguales entre sí en su magnitud.

En general, una dirección se representa como una flecha que parte del origen hacia el punto  $u, v, w$ . Si en alguna celda se encuentra alguna dirección o flecha y se quiere saber los índices correspondientes, basta con colocar en el inicio de la dirección o flecha el origen del sistema de coordenadas y determinar los valores de  $u, v, w$ . Es muy común simplificar estos números, si se pueden reducir, con un factor común. El procedimiento paso a paso para un ejemplo mostrado en la figura 5 es:

- a. Identificar el punto donde se inicia el vector, es decir el punto  $G$ , como el punto inicial.

- b. Identificar el punto donde termina el vector, o sea el punto H, como el punto final.
- c. Hacer coincidir el punto inicial con el origen de los ejes coordenados, por lo que las coordenadas de G son: [ 0, 0, 0 ]
- d. Determinar las coordenadas del punto final respecto del origen (G). Las coordenadas de H en este caso son: [ 1 / 2, 1 / 2, 1 ]

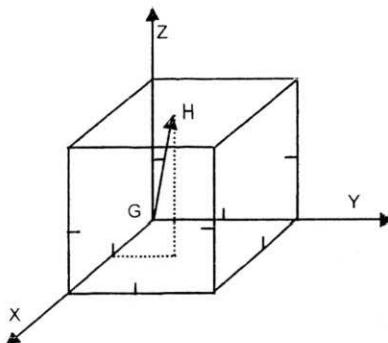


Figura 5. Determinación de los índices de Miller de una dirección

- e. Obtener los enteros más pequeños, que estén en la misma relación, en este caso es multiplicar los números anteriores por dos y se tiene entonces: [ 1, 1, 2 ]
- f. Los índices de Miller son: [ 1, 1, 2 ]

Pero si se quiere identificar la dirección de un vector que no pase por el origen, el procedimiento se puede sintetizar como sigue:

- a. Se traza una linea paralela a la dirección cuyos índices se desea determinar, pero que si pase por el origen del sistema de coordenadas.
- b. Se descompone la dirección asi trazada (la paralela a la dirección original) en sus componentes a lo largo de los ejes coordinados.

- c. Se determina la relación de los tamaños de los vectores componentes,  $u$ ,  $v$ ,  $w$  al de los tamaños de los vectores unitarios  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . En el caso particular de las celdas cúbicas se cumple que la magnitud de estos vectores son iguales entre si y se toma como:  $a$ .
- d. Se determinan los números enteros más pequeños que estén en la misma relación.
- e. Se encierran las relaciones anteriores en paréntesis rectangulares.

El procedimiento se ilustra en la figura 6.

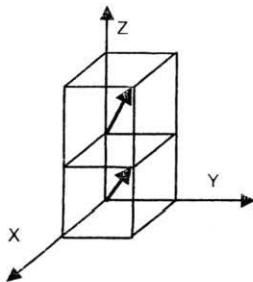


Figura 6. Procedimiento para identificar una dirección cuando el vector no pasa por el origen

Como en el caso de los puntos, se pueden encontrar direcciones que son equivalentes, por ejemplo: las direcciones que representan las aristas del cubo son del tipo  $[1, 0, 0]$  esto es, que representa a la dirección  $[1, 0, 0]$ , la  $[0, 1, 0]$  y finalmente la dirección  $[0, 0, 1]$  y también las direcciones negativas correspondientes. Todas ellas forman una familia de direcciones.

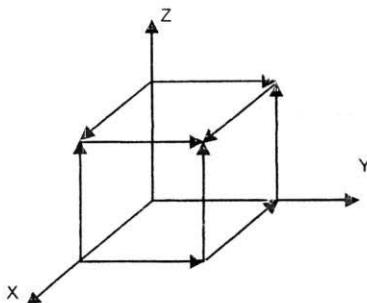


Figura 7. Direcciones en las aristas de un cubo

En el caso de las direcciones, en cada vértice del cubo se puede localizar el origen de un nuevo sistema de coordenadas y todos los índices resultantes de las aristas, obtenidos de este modo, son del mismo tipo.

**Los índices representativos de una familia de direcciones se muestra escribiendo los números en medio de paréntesis angulares:  $\langle u, v, w \rangle$ .** La familia que representa a las aristas del cubo de la figura 7, es la  $\langle 1, 0, 0 \rangle$ .

*EJEMPLO 3. Determinar los índices de Miller de la dirección LM, en la figura 8.*

- Se traza la dirección OE paralela a LM.*
- Se descompone OE en sus componentes:  $OA = a$      $OB = a$      $OC = a$*
- La relación de tamaños es unitaria, esto es:*
- $$a/a, \quad a/a, \quad a/a = 1, 1, 1$$
- Obviamente los enteros más pequeños son: 1, 1, 1*
- Los Índices de Miller de LM son: [1, 1, 1]*

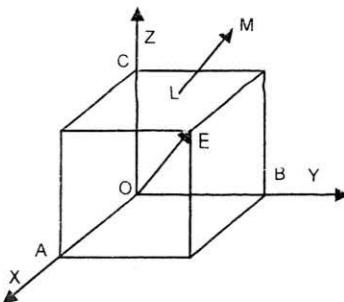


Figura 8. El ejemplo 3

**EJEMPLO 4.** Determinar los indices de Miller de la dirección CG, en la figura 9.

- La dirección OH es paralela a CG.
- Las componentes son:  $OA = a$      $OB = a$      $OF = -a$
- La relación de tamaños es:  $a/a, a/a, -a/a = 1, 1, -1$

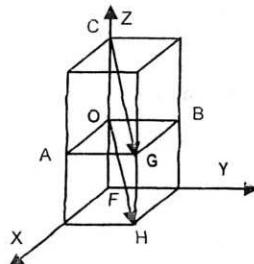


Figura 9. El ejemplo 4

d. Los enteros más pequeños son: 1, 1, -1

e. Los indices de Miller de CG son: [1, 1, -1]

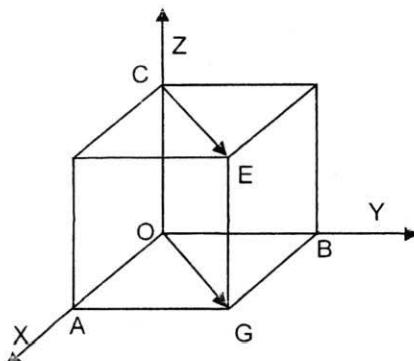


Figura 10 El ejemplo 5

EJEMPLO 5. Encontrar los indices de Miller de la dirección  $CE$ , en la figura 10.

a.  $OG$  es paralela a  $CE$  y se inicia en el origen.

b. Los componentes de  $OG$ :  $OA = a$  en  $x$ ;  $OB = a$  en  $y$ ; y  $0$  en  $z$

c. La relación de tamaños:  $a/a, a/a, 0/a = 1, 1, 0$

d. Los enteros más pequeños: 1, 1, 0

e. Los indices de Miller finalmente son: [1, 1, 0]

EJEMPLO 6. Encontrar los indices de Miller de la dirección  $GH$ , figura 11.

a. Se observa que  $OJ$  es paralela a  $GH$ .

b. Las componentes de  $OJ$  son:  $OA = -1/2 a$      $OB = -1/2 a$      $OC = a$

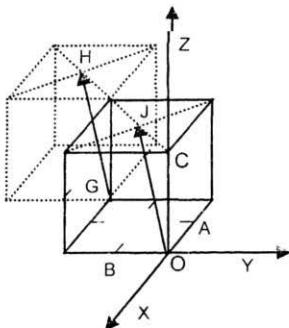


Figura 11. La dirección del ejemplo 6

c. La relación de tamaños son unitarios, así que:

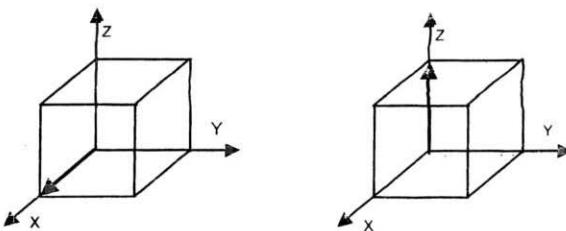
$$-(1/2 \text{ } a)/a, \quad -(1/2 \text{ } a)/a, \quad a/a$$

d. Los enteros más pequeños se obtienen multiplicando todos los números por 2, así se obtiene: -1, -1, 2

e. Por lo tanto los índices de Miller son: [-1, -1, 2]

#### PROBLEMAS

4. Determinar los índices de Miller de las direcciones de la figura 12.



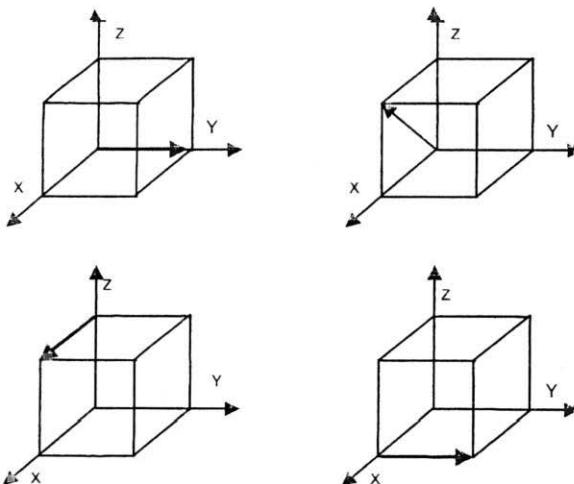
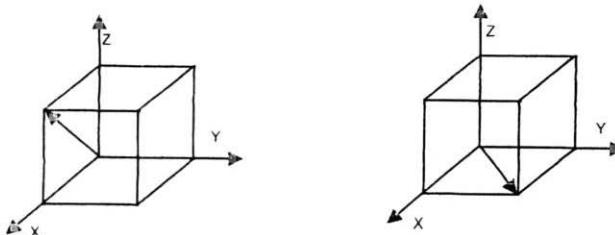


Figura 12. Direcciones del problema 4

5. Determinar los índices de Miller de las direcciones de la figura 13.



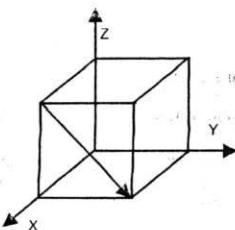
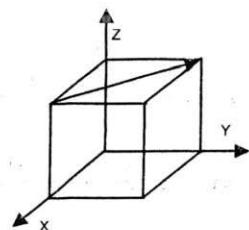
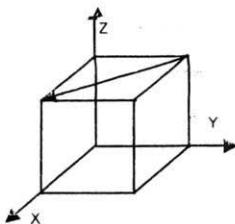
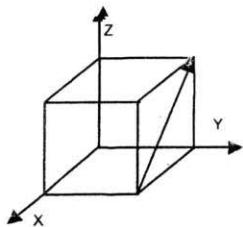
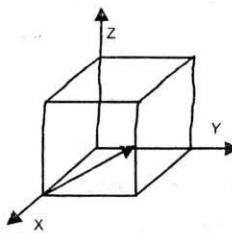
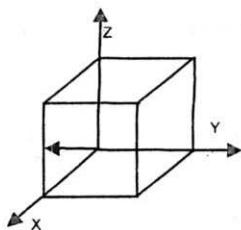


Figura 13. Direcciones para el problema 5

6. Determinar los índices de Miller de las direcciones de la figuras 14.



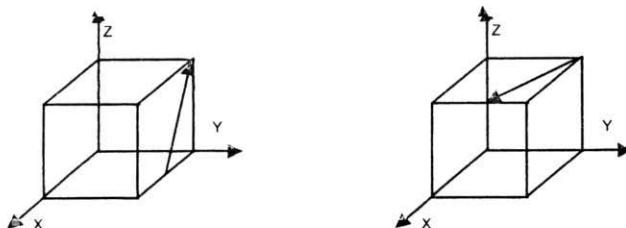


Figura 14. Direcciones para el problema 6

7. Dibujar en celdas unitarias cúbicas las siguientes direcciones:  $[1, -1, -1]$ ,  $[-1, -1, -1]$ ,  $[-1, 2, 1]$ ,  $[3, 1, 1]$ ,  $[1, -3, 1]$ ,  $[4, -1, 0]$ ,  $[0, -2, -3]$ . Se recomienda utilizar un sistema ortogonal de referencia del tipo de la figura 12.

8. Dibujar en celdas unitarias cúbicas las siguientes direcciones:  $[1, 0, 0]$ ,  $[0, -1, 0]$ ,  $[0, 1, 1]$ ,  $[1, 1, 0]$ ,  $[1, 0, 1]$ ,  $[1, 1, 1]$ ,  $[1, -1, 1]$ , es recomendable utilizar un sistema ortogonal de referencia semejante al de la figura 12.

### 1.3 PLANOS

Miller sugirió una técnica de identificación que define un plano particular en una estructura cristalina en relación a los ejes del cristal y en términos de los parámetros de la celda unitaria, o del sistema ortogonal escogido, el procedimiento es así:

- A. Encontrar las intersecciones del plano particular con los ejes de la celda.
- B. Determinar las relaciones de las intersecciones a los parámetros respectivos, de la celda unitaria.
- C. Determinar los reciprocos de estas intersecciones.
- D. Encontrar los números enteros más pequeños que estén en la misma relación que los reciprocos. Para lograrlo, en el caso de fracciones se multiplican los números por su mínimo común denominador.
- E. Encerrar entre paréntesis redondos los índices así encontrados.

EJEMPLO 7. Considerar el plano marcado en la figura 15.

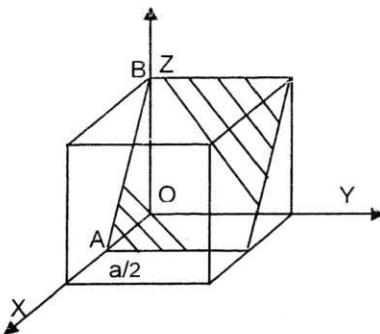


Figura 15. Plano del ejemplo 7

El plano de interés corta el eje X en  $a/2$  y corta al eje Z en  $a$ . Pero el plano es paralelo al eje "Y" y por eso no lo corta o como dicen los matemáticos, lo corta en el infinito. Entonces se tiene como intercepciones:  $a/2, \infty, 1$

Ahora, dividiendo estos valores entre el valor del parámetro de red "a" quedan:  $1/2, \infty, 1$ . Los reciprocos de estos números son entonces:  $2, 0, 1$

Los números enteros más pequeños que están en la misma relación que los reciprocos son:  $2, 0, 1$

Los índices de Miller del plano de la figura 15 son por eso:  $(2, 0, 1)$

Se debe observar que el plano con índices de Miller  $(4, 0, 2)$  es paralelo al plano del último ejemplo, pero que intercepta al eje "x" en  $1/4$ , es paralelo al eje "y" y corta al eje "z" en  $1/2$ . Así debe quedar claro que los índices de Miller dan la orientación exacta del plano en relación con los ejes cristalinos, pero por la simplificación de los números obtenidos, ambos planos son equivalentes y paralelos. Si no se hace esa simplificación se tienen dos planos diferentes, con índices diferentes.

**Notación.** Salvo que se indique otra cosa, siempre se hace la simplificación de los números de los índices, por lo tanto esta forma de representación identifica varios planos paralelos.

**EJEMPLO 8.** Considerar el plano A B C de la figura 16.

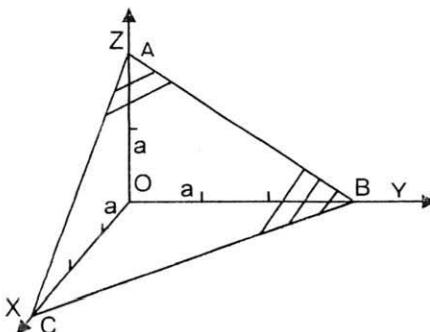


Figura 16. Plano del ejemplo 8

- A. Las intersecciones con los ejes x, y, z son  $OC = 3a$ ,  $OB = 3a$ ,  $OA = 2a$ .
- B. Las relaciones de las intersecciones a los parámetros de la celda unitaria son:
- $3a/a$ ,  $3a/a$ , y  $2a/a$ .
- C. Los reciprocos son:  $1/3$ ,  $1/3$ ,  $1/2$
- D. Multiplicando por 6 cada número se obtienen los enteros más sencillos en la misma relación y así se tienen los valores:  $2$ ,  $2$ ,  $3$
- E. Por lo tanto, los índices de Miller del plano ABC son:  $(2, 2, 3)$

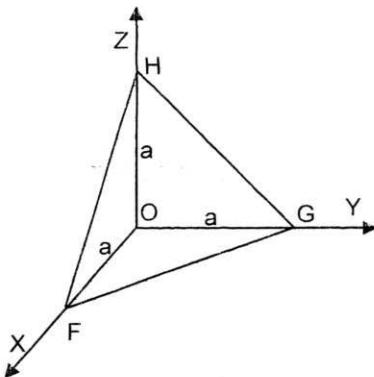


Figura 17. Plano del ejemplo 9

*EJEMPLO 9. El plano FGH de la figura 16 tiene los siguientes índices de Miller.*

A. *Intersecciones:*  $OF = a$     $OG = a$     $OH = a$

B. *Relaciones de las intersecciones con respecto al cubo unitario:*

$$a/a, \quad a/a, \quad a/a$$

C. *Los reciprocos son:*    $1, 1, 1$

D. *Los enteros más sencillos:*    $1, 1, 1$

E. *Los índices de Miller del plano FGH son:*    $(1, 1, 1)$

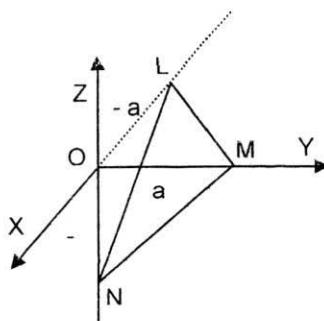


Figura 18. Plano del ejemplo 10

*EJEMPLO 10. El plano LMN de la figura 18.*

A. El plano LMN corta a los ejes x, y, z en:  $OL = -a$      $OM = a$      $ON = -a$

B. Las relaciones de las intersecciones son unitarias entonces:

$$-a/a, \quad a/a, \quad -a/a$$

C. Los reciprocos son:     $-1, \quad 1, \quad -1$

D. Los enteros más sencillos que guardan la misma relación son:  $-1, \quad 1, \quad -1$

E. Los índices de Miller del plano LMN son:  $(-1, 1, -1)$

#### PROBLEMAS

9. Dibujar en celdas unitarias cúbicas los siguientes planos:  $(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0), (3, 1, 1), (1, -1, 1), (1, 2, 3), (-1, 1, 0), (2, 1, 0)$ .

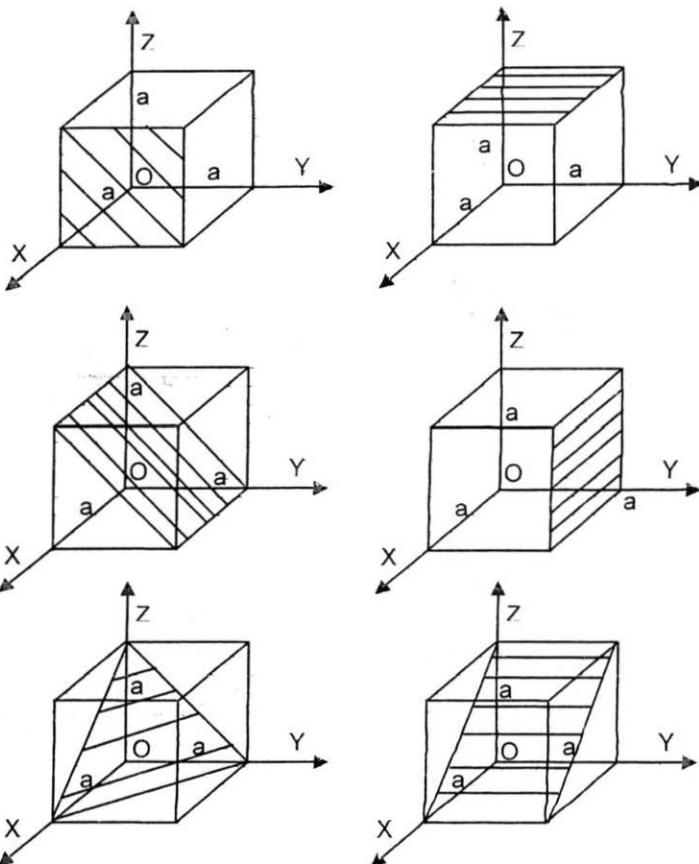


Figura 19. Planos para el problema 11

10. Dibujar en celdas unitarias cúbicas los siguientes planos:  $(3, 2, 0)$ ,  $(3, 0, 1)$ ,  $(-3, 0, -2)$ ,  $(0, 0, 1)$ ,  $(-1, 0, 0)$ ,  $(0, -1, 0)$ ,  $(1, -1, 0)$ .

11. Determinar los índices de Miller de los planos de la figura 19.

12. De los planos de la figura 20 determinar los índices de Miller.

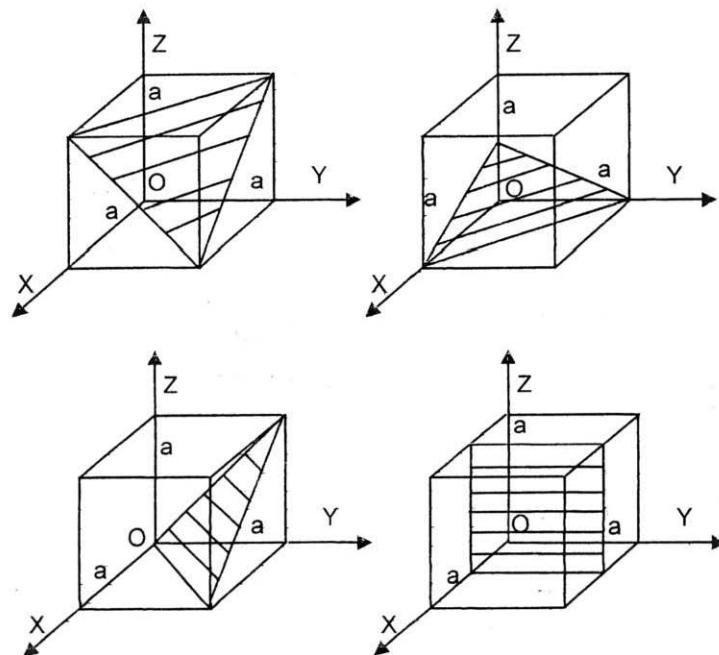


Figura 20. Planos del problema 12

13. Determinar los índices de Miller de los planos de la figura 21.

Nota. En estos dos problemas de la figura 21, es muy difícil obtener los índices de Miller, porque no se puede identificar fácilmente, que ejes cortan estos planos, pero la dificultad se resuelve si los ejes de referencia se alejan una unidad hacia adelante o hacia atrás en el problema de la izquierda y hacia abajo o hacia arriba el caso del de la derecha.

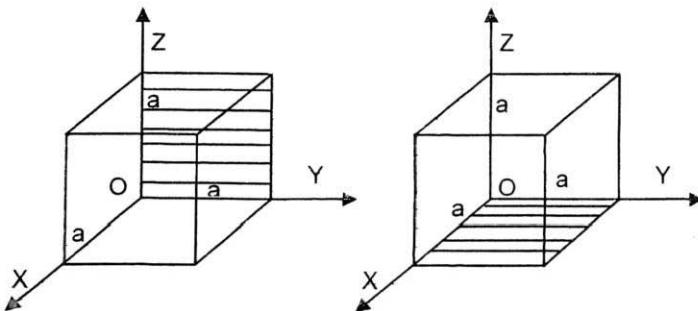


Figura 21. Planos del problema 13

Notación. De la misma forma que en los punto y las direcciones, se puede encontrar una familia de planos semejantes. Los índices de una familia de planos se representan colocándolos entre llaves, de la siguiente forma: { h, k, l }.

2892734



## CAPÍTULO 2

### ÍNDICES DE MILLER - BRAVAIS DE CELDAS HEXAGONALES

#### INTRODUCCIÓN

Mientras que los índices de Miller pueden describir adecuadamente todas las familias de puntos, direcciones y planos en los sistemas cúbico, tetragonal, ortorrombico y parcialmente en el sistema monoclinico, no describen satisfactoriamente al sistema hexagonal debido a que los ángulos entre las aristas de la base del prisma hexagonal no son de 90° si no de 120°, por ello se desarrolló un nuevo tipo de índices llamados de Miller - Bravais en honor a estos dos importantes investigadores. Fundamentalmente se utilizan para describir los cristales hexagonales y en muchos casos también se pueden describir a los trigonales.

La diferencia entre los dos sistemas de índices es que en lugar de manejar tres índices o números, se utilizan cuatro. El sistema de tres números está referido al sistema ortogonal, es decir, de tres ejes mutuamente perpendiculares. Mientras que el sistema de cuatro números representa un plano con tres ejes colocados a 120 grados entre ellos:  $a_1$ ,  $a_2$  y  $a_3$  y un eje "c" perpendicular al plano. Así, se asocian tres números al plano, uno para cada eje y uno a la altura sobre ese plano. En la figura 22 se muestra este sistema de cuatro ejes.

**Notación.** En el resto del texto se utilizará siempre el mismo sistema de referencia como el mostrado en la figura 22. Nuevamente se recuerda, que si se cambia el sistema de referencia se tienen otros valores para los índices. Así que hay que tener mucho cuidado al comparar los valores aquí obtenidos con otros resultados.

Es claro que, geométricamente sólo se necesitan dos valores para identificar un punto sobre un plano y no tres. Así que el tercer número en el sistema de tres ejes para el plano es necesariamente una combinación de los otros dos. La regla que se aplica en el caso de que los ejes estén a 120 grados entre sí, es muy simple: el tercer número siempre es la suma de los otros dos pero con signo contrario. En general, se acostumbra que para determinar una cierta posición, se miden los dos primeros:  $a_1$  y  $a_2$  y el tercero  $a_3$  se calcula con esta regla. Esto en adelante se nombrará como la regla de los índices.

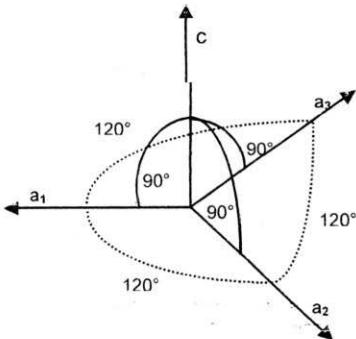


Figura 22. Sistema de cuatro ejes

## 2.1 PUNTOS

De acuerdo con lo mencionado hasta aqui con el sistema de cuatro ejes, para determinar la posición de un punto dado, sólo hay que colocar sobre los ejes los valores indicados por los cuatro números. Si quedó claro lo anterior, basta con poner en el plano los dos primeros valores y el cuarto valor sobre el eje  $c$ . Los índices de Miller - Bravais de los puntos se ponen entre rectas verticales y la familia de puntos se identifica por tener los índices entre dos dobles rayas.

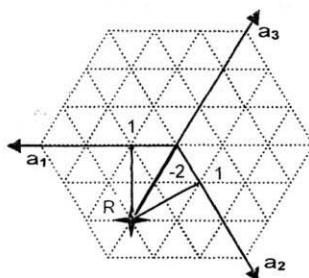


Figura 23. Plano hexagonal del ejemplo 11

**EJEMPLO 11.** Colocar el punto  $R | 1, 1, -2, 0 |$ . Sobre la figura 23, se coloca una unidad sobre el eje  $a_1$  y una unidad sobre el eje  $a_2$  y perpendicularmente a los ejes se trazan rectas y donde se cruzan, se encuentra el punto que se busca, ya que el cuarto número es cero y el punto del problema está sobre el plano horizontal. Se puede verificar en la figura 11, que el punto  $R$  se encuentra a menos dos unidades sobre el tercer eje, que es la suma de los dos primeros índices con signo negativo.

**EJEMPLO 12.** Encontrar el punto  $P | 0, -2, 2, 0 |$ . En la figura 24 se coloca cero unidades sobre el eje  $a_1$ , se traza una perpendicular al eje, se colocan menos dos unidades sobre el eje  $a_2$ , se traza una perpendicular y donde se cruzan las dos rectas ese es el punto que se busca, ya que el cuarto índice es cero. Se puede verificar que trazando una recta perpendicular al eje  $a_3$  desde el punto  $P$ , la distancia al eje es 2, por lo tanto se cumple que el valor es la suma de los dos primeros índices pero con signo negativo.

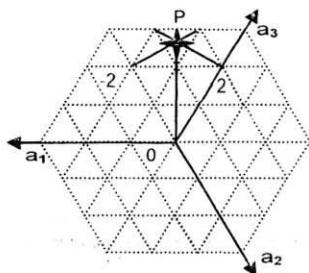


Figura 24. Punto del ejemplo 12

**EJEMPLO 13.** Localizar el punto  $F | 0, -2, 2, 3 |$ . Se toma el resultado del ejemplo 12 y se suben tres unidades sobre el eje  $c$ , como se muestra en la figura 25.

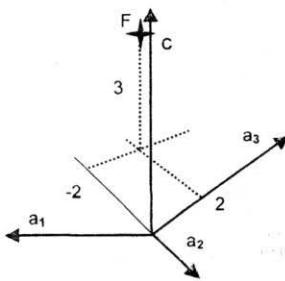


Figura 25. Punto del ejemplo 13

## PROBLEMAS

14. Encontrar los puntos: | 1, 0, -1, 0 |, | -1, -1, 2, 0 |, | -3, 0, 3, 0 |, | 3, -3, 0, 0 |.  
 15. Localizar los puntos: | 1, -1, 0, 2 |, | -2, -2, 4, -2 |, | 0, -1, 1, -1 |, | 3, -2, -1, 3 |.

**Notación.** Se debe recordar que, de la misma manera que en los índices de Miller, una familia de puntos normalmente se especifica con dos líneas verticales, así la familia || 1, 2, -3, 1 || representa a todos los puntos con los mismos tipos de índices.

## 2.2 DIRECCIONES

El procedimiento para determinar las direcciones en el sistema hexagonal con los cuatro índices, es similar al de los tres ejes. Si una dirección se puede representar como una flecha, entonces el procedimiento es colocar el origen del sistema de cuatro índices en el inicio de la flecha y encontrar las componentes del punto final de la flecha. En el sistema Miller - Bravais de cuatro ejes, la dirección está dada por [ u, v, t, w ] donde estos valores son las coordenadas del punto final de la flecha.

Se debe recordar que la regla:

debe cumplirse siempre.

$$u + v + t = 0$$

El vector que representa la dirección en este caso se puede escribir como:

$$R = u \underline{a}_1 + v \underline{a}_2 + t \underline{a}_3 + w \underline{c}$$

en donde  $\underline{a}_1$ ,  $\underline{a}_2$ ,  $\underline{a}_3$ ,  $\underline{c}$  son los vectores unitarios a lo largo de los cuatro ejes y los valores de  $u$ ,  $v$ ,  $t$ ,  $w$  son los módulos de esos vectores.

Este procedimiento de colocar el origen en el inicio de la dirección o flecha para determinar las coordenadas no es necesariamente un problema simple. La dificultad que se presenta es que siempre se debe cumplir que la suma de los dos primeros términos con el signo contrario debe ser igual al tercer índice. Esto es, se debe cumplir la regla de los índices.

**EJEMPLO 14.** De la figura 26, encontrar los índices de la dirección del vector RT. Este caso es muy simple porque el vector está localizado en el plano hexagonal. También la dirección inicia en el origen. Así que, se buscan las componentes en el orden adecuado que terminen en la punta de la flecha. Una opción simple es -1 en  $a_1$ , cero en  $a_2$  y 1 en  $a_3$ , que por cierto corresponde a las coordenadas del punto final y que por supuesto cumple con la ley de los índices ya que  $-1 + 0 = -1$  y con signo contrario es igual a 1 que claramente corresponde al tercer índice. Así quedan finalmente los índices de Miller - Bravais de la dirección RT como [-1, 0, 1, 0].

Sin embargo se puede hacer notar que se obtiene en principio la misma dirección, si se utilizan otros índices como W [-2, 0, 2, 0], donde se ve que T y W están sobre la misma línea y por lo tanto en la misma dirección, es claro que ambos resultados son equivalentes. Pero, normalmente se prefieren los valores más simples.

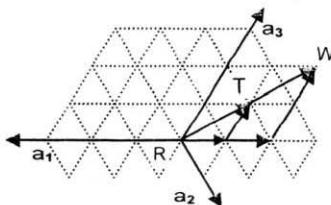


Figura 26. Dirección del ejemplo 14

**EJEMPLO 15.** Determinar los índices de Miller - Bravais del eje  $a_1$ . El problema es simple porque no hay componente en el eje  $c$  y la dirección debe partir del origen. Una

posibilidad es: 2 unidades en  $a_1$ , -1 unidad en  $a_2$  y con -1 unidad en  $a_3$ . Se puede verificar que en este caso también se cumple la regla de los índices. Así los índices del eje  $a_1$  son [2, -1, -1, 0]. Como se puede verificar en la figura 27.

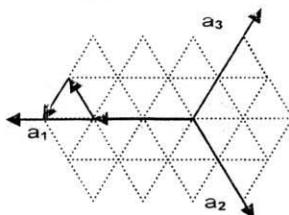


Figura 27. Dirección del eje  $a_1$  del ejemplo 15

Es muy claro, que si se dan como datos los índices de Miller - Bravais es muy fácil trazar la dirección correspondiente. Simplemente se construye el vector de la dirección, añadiendo cada componente de la dirección, en el orden indicado y para terminar, se une el origen con el punto final obtenido. Mientras que, encontrar cuales vectores cumplen la regla de los índices y dan una cierta dirección que se busca, puede ser un problema, no necesariamente, simple.

**EJEMPLO 16.** Dibujar la dirección [2, 1, -3, 0]. En la figura 28 se muestra el procedimiento: se coloca 2 unidades en el eje  $a_1$ , a continuación, al final de ese vector se coloca un pequeño vector de una unidad paralelo a la dirección  $a_2$  y en la punta de ese vector se colocan -3 unidades paralelas a la dirección del vector  $a_3$ . Finalmente se une el origen con el punto final y esa es la dirección buscada.

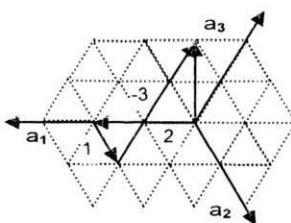


Figura 28. Dirección correspondiente al ejemplo 16

**EJEMPLO 17.** Determinar los índices de Miller - Bravais de la dirección OP de la figura 29.

La dirección OP pasa por el origen. Las componentes de OP son: QP es la componente a lo largo del eje  $c$  y sobre el plano basal la componente es OQ. El problema radica especialmente en determinar las componentes de OQ como una suma de tres o dos elementos a lo largo de los ejes  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  y que cumplan la regla de los índices. Una opción posible es -1 sobre  $a_1$ , 2 sobre  $a_2$  y -1 sobre  $a_3$ . La componente sobre el eje  $c$  es 1. Así, los índices de Miller - Bravais de la dirección OP determinados son: [-1, 2, -1, 1]. Que claramente cumple la regla de los índices. Por cierto, hay que hacer notar que los índices de la dirección del eje  $a_2$  son los de la dirección OQ, esto es: [-1, 2, -1, 0].

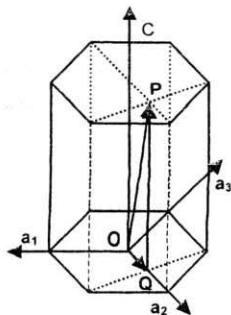


Figura 29. Dirección del ejemplo 17

**EJEMPLO 18.** Determinar los índices de Miller - Bravais de la dirección S de la figura 30. La dirección S pasa por el origen.

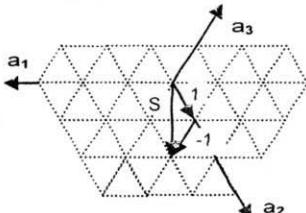


Figura 30. Dirección del ejercicio 18

Las componentes de  $S$  que cumplen la regla de los índices son:  $0, 1, -1, 0$

Es obvio que también son los números más sencillos. Por lo tanto los índices de Miller - Bravais de  $S$  son:  $[0, 1, -1, 0]$

#### PROBLEMAS

16. Determinar los índices de Miller - Bravais de las direcciones de la figura 31.

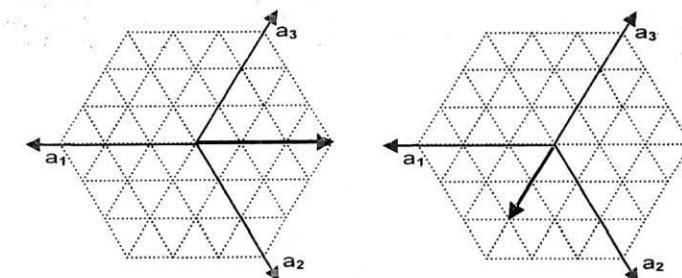


Figura 31. Algunas direcciones en el plano hexagonal

17. ¿ Cuales son los índices de Miller - Bravais de las direcciones de la figura 32 ?

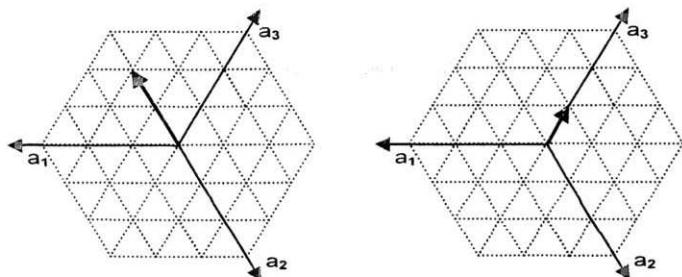


Figura 32. Direcciones en el plano hexagonal del problema 17

18. Determinar los índices de Miller - Bravais de las direcciones de la figura 33.

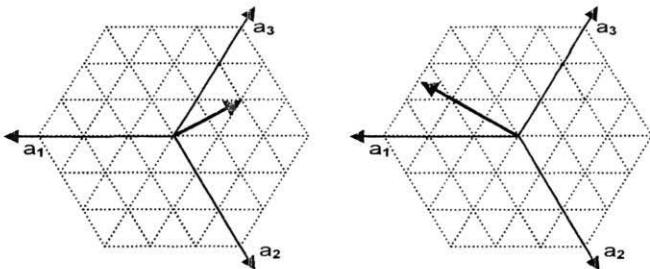


Figura 33. Direcciones en el plano hexagonal del problema 18

19. Dibujar en celdas unitarias hexagonales las siguientes direcciones:  $[1, -2, 1, 0]$ ,  $[1, -1, 0, 0]$ ,  $[1, 0, -1, 0]$ ,  $[-1, 0, 1, 0]$ ,  $[-1, 2, -1, 1]$ ,  $[1, -2, 1, 1]$ .
20. Encontrar la localización de las siguientes direcciones:  $[-2, 1, 1, 1]$ ,  $[-2, 1, 1, 1]$ ,  $[0, 2, -2, 1]$ ,  $[-3, 3, 0, 1]$ ,  $[4, 0, -4, 1]$ .

**Notación.** Se recuerda que una familia de direcciones, de la misma forma que en los índices de Miller se muestra entre parentesis angulares  $<1, 2, -3, 1>$ .

## 2.7 PLANOS

Mientras que los índices de Miller pueden describir adecuadamente todas las familias de planos en los sistemas cúbico, tetragonal, ortorrómico y monoclinico no describen satisfactoriamente al sistema hexagonal debido a que planos equivalentes por simetría en el sistema hexagonal no exhiben índices de forma similar. Por ejemplo, los planos prismáticos, esto es las caras laterales del prisma hexagonal de acuerdo a un sistema ortogonal donde el eje  $x$  coincide con el eje  $a_1$  tienen los índices de Miller: para el plano A ( $2, 1, 0$ ), el B es ( $0, 1, 0$ ), para el C ( $-2, 1, 0$ ), para el D ( $-2, -1, 0$ ), para E ( $0, -1, 0$ ) y finalmente para F ( $2, -1, 0$ ) estos planos son simétricos y son los lados del prisma hexagonal, por lo tanto forman claramente una familia, pero los índices son diferentes por los números que los representan, estos planos se muestran en la figura 34.

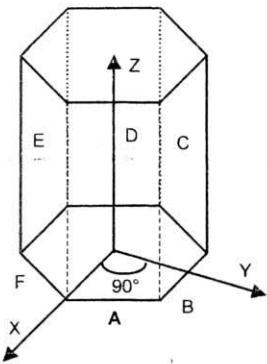


Figura 34. Caras laterales o planos prismáticos en el sistema de tres ejes

Al utilizar la alternativa del sistema de Miller - Bravais de cuatro índices, este problema desaparece. El procedimiento normal para determinar los índices de Miller - Bravais es similar al utilizado para obtener los índices de Miller, los pasos son:

- Encontrar las intersecciones del plano particular con los ejes del sistema de cuatro ejes.
- Determinar las relaciones de las intersecciones a los parámetros respectivos, de la celda unitaria. En general casi siempre se utiliza una relación unitaria.
- Determinar los reciprocos de estas intersecciones.
- Encontrar los números enteros más pequeños que estén en la misma relación que los reciprocos. Para lograrlo, en el caso de fracciones se multiplican los números por su mínimo común denominador.

En este caso, el tercer índice puede o no utilizarse porque la información que representa es redundante. En muchos casos es útil hacerlo, porque confirma la posición del plano y siempre debe confirmar la regla de los índices.

**EJEMPLO 19.** Determinar los índices del plano A de la figura 35, este es uno de los **planos laterales o prismáticos** del prisma hexagonal. De acuerdo a los pasos indicados arriba: es paralelo con  $a_1$ , es así que su intercepción es en infinito, corta a  $a_2$  en 1, a  $a_3$  en -1 y también es paralelo al eje c o sea su intercepción es en el infinito.

Las relaciones de longitud son unitarias. Los inversos son: 0, 1, -1, 0, y como son los números más simples entonces los índices de Miller - Bravais para este plano son: ( 0, 1, -1, 0 ). Se puede verificar que se cumple la regla de los índices.

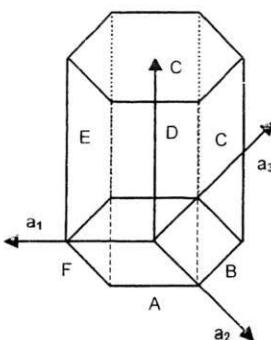


Figura 35. Planos prismáticos en el sistema de cuatro ejes

**EJEMPLO 20.** Encontrar los índices de Miller - Bravais del plano F de la figura 35, este es otro de los planos prismáticos. De la misma forma que en el caso anterior se tiene que las intercepciones son: con  $a_1$  en 1, con  $a_2$  es paralelo y corta al  $a_3$  en -1 y es paralelo al eje c. La relación es unitaria y los inversos son: 1, 0, -1, 0 y como son los números más simples son los índices buscados, esto es: ( 1, 0, -1, 0 ) y finalmente se cumple la regla de los índices.

#### PROBLEMAS

21. Encontrar los índices de los otros planos prismáticos el B y C de la figura 35.
22. Determinar los índices de los planos prismáticos faltantes D y E, de la figura 35.

Si se realiza correctamente el problema anterior y con los resultados de los dos ejercicios anteriores se puede encontrar que los índices de los planos prismáticos son: ( 1, 0, -1, 0 ), ( 1, 0, -1, 0 ), ( 1, -1, 0, 0 ), ( -1, 0, 1, 0 ), ( 0, -1, 1, 0 ) y ( 1, -1, 0, 0 ) y como se puede observar tienen los mismos números: ceros y unos, así que se pueden agrupar todos en la familia llamada { 1, -1, 0, 0 }. Como se indicó arriba, el uso de la notación de índices de Miller - Bravais permite representar mejor ciertos planos y con ello mostrar que sin duda son de la misma familia.

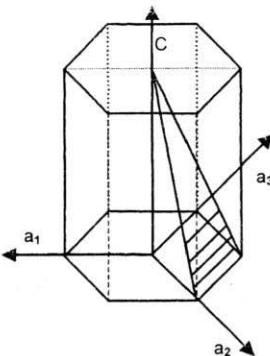


Figura 36. Plano del ejemplo 21

**EJEMPLO 21.** Determinar los índices de Miller - Bravais del plano sombreado de la figura 36. Las intersecciones del plano con los ejes:  $a_1$ ,  $a_2$  y  $c$  son: - 1, 1, 1. Los reciprocos son: - 1, 1, 1 los números más sencillos son los mismos así que los índices de Miller - Bravais son: (- 1, 1, 0, 1). Aquí no se determinó la intercepción del plano con el eje  $a_3$ , se calcula de acuerdo a la regla de los índices, pero se puede comprobar que el valor obtenido es correcto ya que en este caso es paralelo al eje  $a_3$ . Como se sabe la intercepción es en infinito, pero su inverso es cero. Este tipo de plano se conoce como **plano piramidal tipo I**.

**EJEMPLO 22.** Encontrar los índices de Miller - Bravais del plano sombreado de la figura 37. Las intersecciones del plano con los ejes  $a_1$ ,  $a_2$  y  $c$  son: - 1, - 1,  $\frac{1}{2}$ . Los reciprocos son: - 1, - 1, 2 y los enteros más sencillos son los mismos, por lo tanto los índices de Miller - Bravais son: (- 1, - 1, 2, 2). Aquí nuevamente no se determinó la intercepción con el eje  $a_3$  y el valor se calculó con la regla de los índices. Pero se puede comprobar que el valor es correcto.

**EJEMPLO 23.** Determinar los índices de Miller - Bravais del plano sombreado de la figura 38. Las intersecciones del plano con los ejes  $a_1$ ,  $a_2$ , y  $c$  son: 1, infinito y 2. Los reciprocos son: 1, 0,  $\frac{1}{2}$ . Los enteros más sencillos son los mismos y los índices de Miller - Bravais son: (2, 0, - 2, 1). Nuevamente no se determinó la intercepción con el eje  $a_3$  y el valor se calculó con la regla de los índices. Se puede comprobar que este último valor es correcto. Este plano se conoce como un **plano prismático del tipo II**

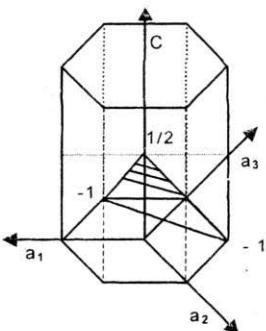


Figura 37. Plano del ejemplo 22

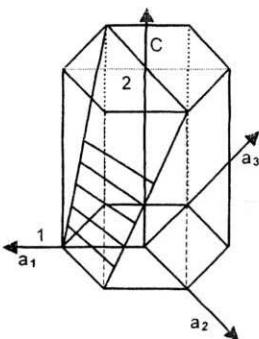


Figura 38. Plano del ejemplo 23

## PROBLEMAS

23. Determinar los indices de Miller - Bravais de los planos sombreados en la figura 38. El plano de la izquierda se llama **plano basal** y el de la derecha **plano piramidal del tipo II**.

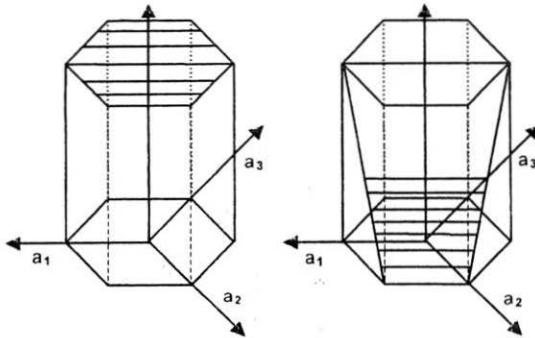


Figura 39. Planos para el problema 23

24. Dibujar en celdas unitarias hexagonales los siguientes planos:  $(-1, -1, 2, 0)$ ,  $(1, -2, 1, 0)$ ,  $(2, -1, -1, 0)$ ,  $(-1, 0, 1, 1)$ ,  $(0, -1, 1, 1)$ ,  $(1, -1, 0, 1)$ .

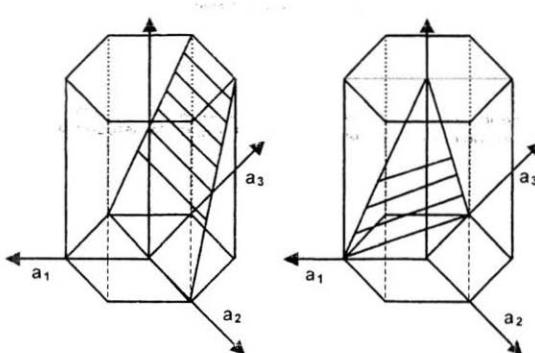


Figura 40. Planos para el problema 25

25. Determinar los índices de Miller - Bravais de los planos de la figura 409. El plano de la izquierda es un **plano piramidal del tipo II** y el de la derecha **piramidal del tipo I**.
26. Encontrar en las celdas unitarias hexagonales los planos siguientes:  $(-1, -1, 2, 1)$ ,  $(1, -2, 1, 1)$ ,  $(2, -1, -1, 0)$ ,  $(2, 1, -3, 1)$ ,  $(3, -2, -1, 0)$ ,  $(-1, 0, 1, 2)$ .
27. Identificar los índices de Miller - Bravais de los planos de la figura 41.

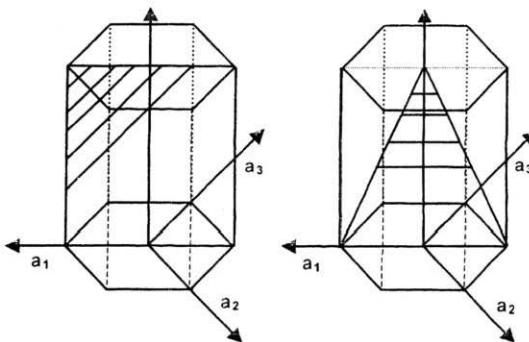


Figura 41. Planos para el problema 27



2892734



## CAPÍTULO 3

### TRANSFORMACIÓN DE ÍNDICES PARA LA ESTRUCTURA HEXAGONAL

#### INTRODUCCIÓN

Para poder transformar los índices de Miller de un sistema de tres ejes a uno de cuatro lo más importante es definir la posición relativa de los dos sistemas. En el caso más general, se esperaría que no existiera ninguna coincidencia entre los dos sistemas de ejes, en cuyo caso se necesitan dos relaciones matemáticas: una para la translación y otra para la rotación, para hacer coincidir en un punto los dos orígenes de los dos sistemas: el de los índices de Miller y de Miller - Bravais. Esto es, en el caso que se quiera hacer una transformación entre los dos sistemas.

Un caso más simple es cuando el origen de los dos sistemas coincide y además, el eje z, que define el índice k, para los tres índices, y el eje c que determina el índice w, en el sistema de cuatro índices, sean semejantes o en el caso más sencillo, cuando sean idénticos. Para esto, se necesita en este último caso, que las unidades en que se miden las distancias sobre los dos sistemas de ejes, sean las mismas, y se puedan hacer transformaciones simples entre ellos.

Si se acepta el punto anterior, sólo falta definir la posición de los otros ejes. Una posibilidad, es que el eje x del sistema de tres ejes coincida con el eje  $a_1$ . Si se toma este caso, se pueden encontrar unas relaciones que se aplican para la transformación de puntos, direcciones y planos, en los dos sistemas.

#### 3.1 PUNTOS

La transformación de las coordenadas de un punto, definida su posición para dos tipos de sistemas de referencia, donde se considera que las coordenadas del punto en el sistema de índices de Miller son  $| u_m, v_m, w_m |$  y que  $| u_b, v_b, t_b, w_b |$  son las coordenadas del punto en el sistema de los índices de Miller - Bravais, como se muestra en la figura 42, se puede suponer que los sistemas tienen en común el mismo eje como z y c y además que el eje x sea el mismo que el eje  $a_1$ , como se observa en la figura 43, está dada por las siguientes relaciones matemáticas:

$$u_m = u_b + t_b$$

$$v_m = v_b + t_b$$

$$w_m = w_b$$

y la transformación en sentido contrario se obtiene con las relaciones siguientes:

$$u_b = 1/3 (2u_m - v_m)$$

$$v_b = 1/3 (2v_m - u_m)$$

$$t_b = -1/3 (u_m + v_m)$$

$$w_b = w_m$$

Estas ecuaciones son muy cómodas para transformar entre estos dos sistemas, claro, siempre y cuando las posiciones relativas de los ejes sean las mencionadas anteriormente.

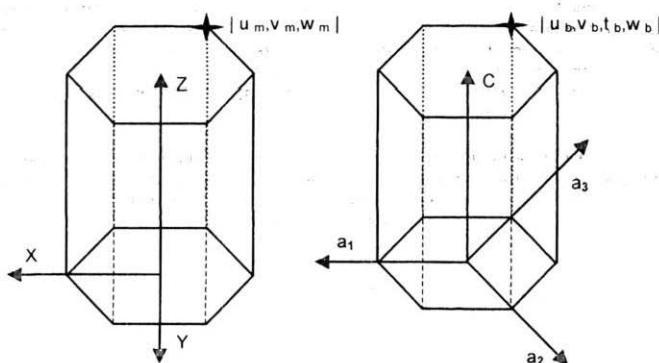


Figura 42. Un punto con sus coordenadas en dos sistemas diferentes

EJEMPLO 24. Se desean calcular los índices de Miller - Bravais del punto  $|1, 2, 2|$ . Si se aplican las ecuaciones directamente, sabiendo que:  $u_m = 1$ ,  $v_m = 2$  y  $w_m = 2$  entonces se obtiene que:

$$u_b = 1/3 (2u_m - v_m) = 1/3 (2(1) - 2) = 0$$

$$v_b = 1/3 (2v_m - u_m) = 1/3(2(2)-1) = 3/3 = 1$$

$$t_b = -1/3 (u_m + v_m) = -1/3(1+2) = -3/3 = -1$$

$$w_b = w_m = 2$$

estos son, por lo tanto los índices de Miller - Bravais, sólo falta que sean expresados con los números enteros más sencillos y estos finalmente son:

$$|0, 1, -1, 2|$$

**Notación.** Es muy importante notar que  $u_b$ ,  $v_b$  y  $t_b$ , se reducen a los números enteros más sencillos, pero sin afectar el índice  $w_b$ , el cual se incorpora al final sin cambio.

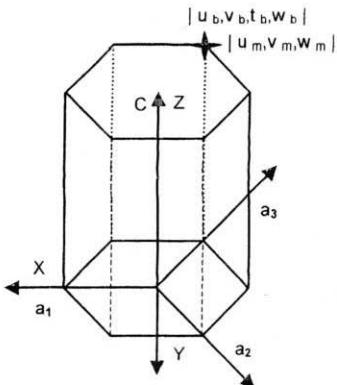


Figura 43. Un punto con sus coordenadas en los dos sistemas diferentes cuando tienen coincidencia en el origen y en dos ejes

**EJEMPLO 25.** Encontrar los índices de Miller del ejemplo anterior. Se quiere transformar el punto  $|0, 1, -1, 2|$ , por lo tanto se tiene que:  $u_b = 0$ ,  $v_b = 1$ ,  $t_b = -1$  y que  $w_b = 2$ . Aplicando las ecuaciones se tiene que:

$$u_m = u_b - t_b = 0 - (-1) = 1$$

$$v_m = v_b - t_b = 1 - (-1) = 2$$

$$w_m = w_b = 2$$

La regla es que, se deben tener los números más sencillos posibles, pero en este caso, estos son los números más sencillos, así que los índices de Miller para el punto del ejercicio  $|1, 0, 1, -1, 2|$  son  $|1, 2, 2|$ , como se supuso en el ejercicio anterior.

EJEMPLO 26. El punto  $|1, 1, 1|$ . ¿ A qué punto equivale en el sistema de Miller - Bravais ?

Se tiene que  $u_m = 1$ ,  $v_m = 1$  y  $w_m = 1$  y sustituyendo se obtiene:

$$u_b = 1/3 (2u_m - v_m) = 1/3(2(1) - 1) = 1/3$$

$$v_b = 1/3 (2v_m - u_m) = 1/3(2(1) - 1) = 1/3$$

$$t_b = -1/3 (u_m + v_m) = -1/3(1+1) = -2/3$$

$$w_b = w_m = 1$$

En este caso se deben simplificar los primeros tres números, multiplicando por tres, así que se tiene que el punto es  $|1, 1, -2, 1|$ .

EJEMPLO 27. Realizar la transformación inversa de los índices de Miller - Bravais del ejemplo anterior a índices de Miller. Así que se tiene  $|1, 1, -2, 2|$  como el punto a transformar, por lo tanto se sabe que:  $u_b = 1$ ,  $v_b = 1$ ,  $t_b = -2$  y que  $w_b = 2$ . Aplicando las ecuaciones se obtiene:

$$u_m = u_b - t_b = 1 - (-2) = 3$$

$$v_m = v_b - t_b = 1 - (-2) = 3$$

$$w_m = w_b = 1$$

La regla es que los dos primeros número deben ser los números más sencillos posibles, así que, se dividen entre tres y se agrega el último índice, obteniéndose el punto  $|1, 1, 1|$  como se esperaba.

EJEMPLO 28. Encontrar las coordenadas del átomo que ocupa una posición centrada en una cara de un cubo en índices de Miller - Bravais. Una de las posibles coordenadas pueden ser  $|1, 1/2, 1/2|$ . Así que  $u_m = 1$ ,  $v_m = 1/2$  y  $w_m = 1/2$ , sustituyendo se tiene:

$$u_b = 1/3 (2u_m - v_m) = 1/3 (2(1) - 1/2) = 3/6 = 1/2$$

$$v_b = 1/3 (2v_m - u_m) = 1/3 (2(1/2) - 1) = 0$$

$$t_b = -1/3 (u_m + v_m) = -1/3 (1 + 1/2) = -3/6 = -1/2$$

$$w_b = w_m = 1/2$$

Simplificando los tres primeros índices y el cuarto se coloca sin modificar, entonces se tiene como resultado:  $|1, 0, -1, 1/2|$

## PROBLEMAS

28. Verificar que el punto A  $|1, 0, -1, 1/2|$  en índices de Miller - Bravais corresponde al punto B  $|4, 2, 1|$  en índices de Miller.
29. Determinar los índices de Miller-Bravais de los puntos R, S, T, U, V de la figura 44.

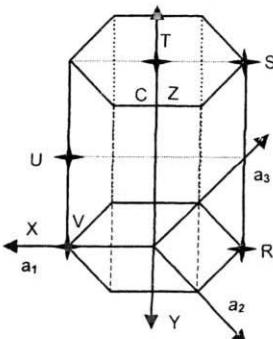


Figura 44. Puntos para el problema 29

### 3.2 DIRECCIONES

El procedimiento, en principio es muy simple, es exactamente el mismo que en el caso de la transformación de los puntos. Se deben utilizar las mismas ecuaciones mencionadas arriba, claro que, suponiendo las mismas condiciones de los ejes de los dos sistemas. Esto es, suponiendo que los sistemas tienen en común el mismo eje z y c y además que el eje x sea el mismo que el eje  $a_1$ , y si se considera que las coordenadas de un punto en el sistema de índice de Miller son  $| u_m, v_m, w_m |$  mientras que las coordenadas en el sistema de los índices de Miller - Bravais son:  $| u_b, v_b, t_b, w_b |$ .

Las ecuaciones son:

$$u_m = u_b + t_b$$

$$v_m = v_b + t_b$$

$$w_m = w_b$$

y la transformación en sentido contrario se obtienen con las siguientes relaciones:

$$u_b = 1/3 (2u_m - v_m)$$

$$v_b = 1/3 (2v_m - u_m)$$

$$t_b = -1/3 (u_m + v_m)$$

$$w_b = w_m$$

**EJEMPLO 29.** La dirección del eje x es  $[1, 0, 0]$  en los índices de Miller. ¿Cuál será esta dirección en el sistema Miller - Bravais? Se tiene que  $u_m = 1$ ,  $v_m = 0$  y  $w_m = 0$ , sustituyendo se obtiene:

$$u_b = 1/3 (2u_m - v_m) = 1/3 (2(1) - 0) = 2/3$$

$$v_b = 1/3 (2v_m - u_m) = 1/3 (2(0) - 1) = -1/3$$

$$t_b = -1/3 (u_m + v_m) = -1/3 (1 + 0) = -1/3$$

$$w_b = w_m = 0$$

Ajustando los tres primeros números a que sean enteros y los más sencillos y colocando el cuarto índice sin cambio, se tiene que los índices serán: [2, -1, -1, 0]. Se puede observar que cumple la regla de los índices y se puede verificar en el ejemplo 15, el mismo resultado.

EJEMPLO 30. Mostrar que se obtiene el resultado inverso del ejercicio 29 al transformar nuevamente a índices de Miller. Los índices son: [2, -1, -1, 0] por lo tanto se tiene que  $u_b = 2$ ,  $v_b = -1$ ,  $t_b = -1$  y que  $w_b = 0$ . Aplicando las ecuaciones se tiene que:

$$u_m = u_b - t_b = 2 - (-1) = 3$$

$$v_m = v_b - t_b = -1 - (-1) = 0$$

$$w_m = w_b = 0$$

Así que la dirección calculada es [3, 0, 0], pero se pueden tener unos números enteros más simples, al dividir entre tres los índices estos resultan: [1, 0, 0]. Esta es la dirección final esperada.

### PROBLEMAS

30. Transformar a índices de Miller - Bravais las direcciones siguientes anotadas con índices de Miller: [1, 0, 0], [1, -1, 0], [-1, 1, 0], [0, -1, 0], [-1, 0, 0], [-2, 1, 0] y [-1, -1, 0].

31. Convertir a índices de Miller las direcciones siguientes dadas con índices de Miller - Bravais [1, -2, 1, 0], [1, -1, 0, 1], [-1, -1, 2, 3], [0, -1, 1, 2], [0, 0, 0, 0], [-2, 1, 1, 1] y [-1, -1, 2, 1].

### 3.3 PLANOS

La transformación de índices entre los dos sistemas es igual a la de los puntos y las direcciones siempre y cuando se cumplan las mismas condiciones. Esto es suponiendo que los sistemas tienen en común los ejes z y c, y por otro lado el eje x y el  $a_1$  coinciden. Por simplicidad se considera que las coordenadas de un punto en el sistema de índice de Miller son  $|u_m, v_m, w_m|$  mientras que las coordenadas en el sistema de los índices de Miller - Bravais las coordenadas del punto se anotan como sigue:  $|u_b, v_b, t_b, w_b|$ .

Las ecuaciones que se aplican para la transformación son:

$$u_m = u_b - t_b$$

$$v_m = v_b - t_b$$

$$w_m = w_b$$

y la transformación en sentido contrario se obtiene con las siguientes relaciones:

$$u_b = 1/3 (2u_m - v_m)$$

$$v_b = 1/3 (2v_m - u_m)$$

$$t_b = -1/3 (u_m + v_m)$$

$$w_b = w_m$$

EJEMPLO 31. Convertir el plano (1, 1, 0) en índices de Miller - Bravais. En este caso se tiene que  $u_m = 1$ ,  $v_m = 1$  y  $w_m = 0$ , sustituyendo se obtiene:

$$u_b = 1/3 (2u_m - v_m) = 1/3 (2(1) - 1) = 1/3$$

$$v_b = 1/3 (2v_m - u_m) = 1/3 (2(1) - 1) = 1/3$$

$$t_b = -1/3 (u_m + v_m) = -1/3 (1 + 1) = -2/3$$

$$w_b = w_m = 0$$

Así, nuevamente, cambiando los tres primeros números a los enteros más simples y añadiendo el cuarto sin cambio, se obtiene: (1, 1, -2, 0). Se observa que se cumple la regla de los índices.

EJEMPLO 32. Demostrar que la transformación inversa del ejemplo 31 repite los datos iniciales. El plano a modificar es el (1, 1, -2, 0). Por lo tanto, se sabe que  $u_b = 1$ ,  $v_b = 1$ ,  $t_b = -2$  y  $w_b = 0$ . Aplicando las ecuaciones se tiene que:

$$u_m = u_b - t_b = 1 - (-2) = 3$$

$$v_m = v_b - t_b = 1 - (-2) = 3$$

$$w_m = w_b = 0$$

simplificando los dos primeros índices, a los números más simples se determina el plano buscado: (1, 1, 0).

## PROBLEMAS

32. Convertir a indices de Miller - Bravais los siguientes indices de Miller de los planos:  
 $(1, 0, 0)$ ,  $(1, -1, 0)$ ,  $(-1, 1, 0)$ ,  $(0, -1, 0)$ ,  $(-1, 0, 0)$ ,  $(-2, 1, 0)$  y  $(-1, -1, 0)$ .
33. Transformar a indices de Miller los indices de Miller - Bravais de los planos  
siguientes:  $(1, -1, 0, 1)$ ,  $(0, 1, -1, 2)$ ,  $(2, 1, -3, 0)$ ,  $(0, 0, 0, 2)$  y  $(-1, -1, 2, 1)$ .



#### 4 BIBLIOGRAFÍA

1. Structure of Metals  
C. S. Barret y T. B. Massalski  
McGraw Hill, 3a. Edición, New York, 1966
2. Ciencia de Materiales para Ingeniería  
P. A. Thornton y V. S. Colangelo  
Prentice Hall Hispanoamericano, New York, 1987
3. La Ciencia e Ingeniería de los Materiales  
D. R. Askeland  
Grupo Editorial Iberoamericana, México, 1987
4. Physical Metallurgy Principles  
R. E. Reed - Hill  
Van Nostrand, 2a. Edición, New York, 1973
5. Introduction to Dislocations  
D. Hull  
Pergamon Press, 2a. Edición, New York, 1975
6. Introduction to Crystal Geometry  
M. J. Buerger  
McGraw Hill, 1a. Edición, New York, 1971
7. Introduction to Crystallography  
F. C. Phillips  
John Wiley and Sons, 1a. Edición, New York, 1971
8. Metallurgical Stereographic Projections  
J. S. Smaill  
John Wiley and Sons, New York, 1972
9. Physical Properties of Crystals  
J. F. Nye  
Oxford University Press, 1a. Edición, New York, 1976

10. Stereographic Projections of the Cubic and Close-Packed Hexagonal Lattices  
A. Booth  
Butterwods, 1a. Edición, New York, 1970
11. Elements of X-Ray Diffraction  
B. D. Cullity  
Addison Wesley Publishing, 1a. Edición, New York, 1967
12. Basic Crystallography  
A. James  
John Wiley & Son Ltd., New York, 1998
13. The basis of Crystallography and Diffraction, IUC No. 5  
A. Hammond  
Oxford University Press, 2a. Edición, London, 2001

## 5 HOJAS DE TRABAJO

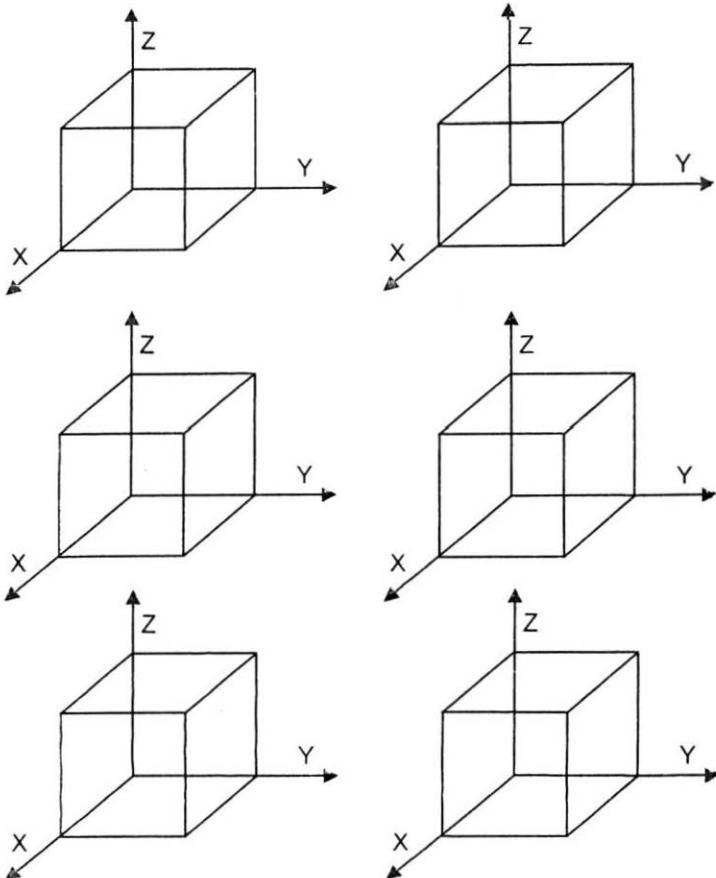
Hoja con 6 cubos

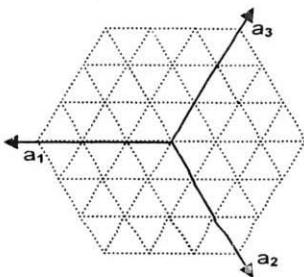
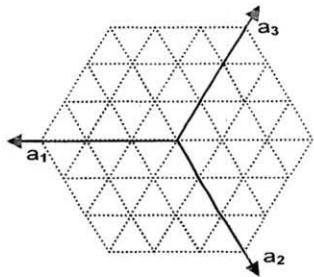
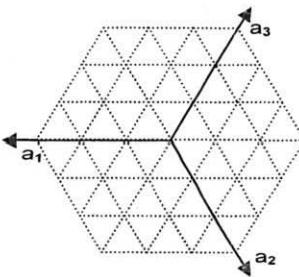
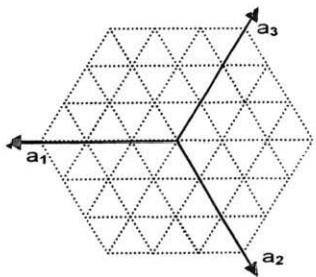
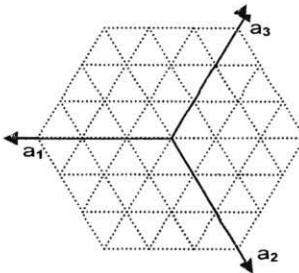
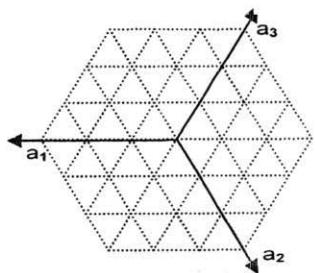
Hoja con 6 bases hexagonales

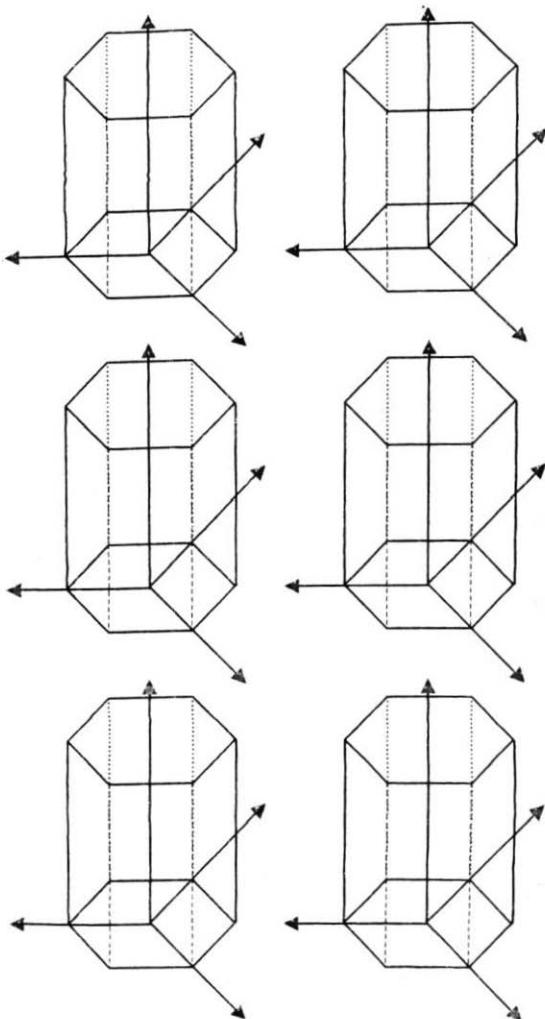
Hoja con 6 prismas hexagonales

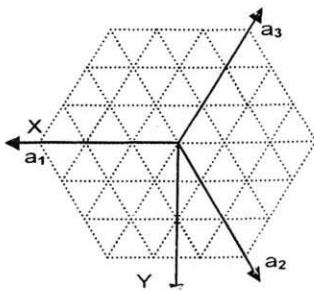
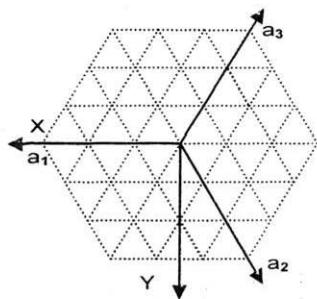
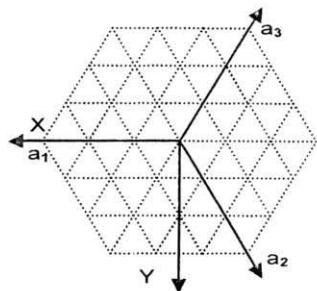
Hoja con 2 bases hexagonales con dos y tres ejes

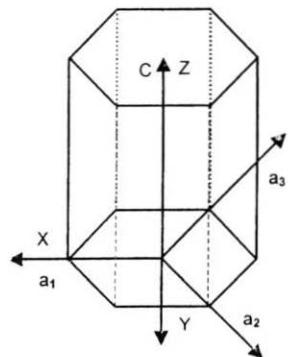
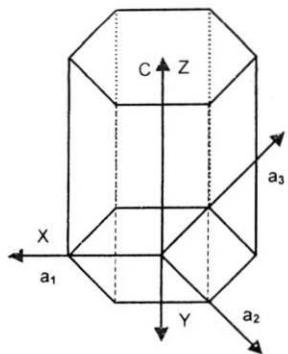
Hoja con 2 prismas hexagonal con tres y cuatro ejes











**INDICES DE MILLER** La edición estuvo  
Se terminó de imprimir a cargo de la  
en el mes de abril del año 2005 Sección de Producción  
en los talleres de la Sección y Distribución Editoriales  
de Impresión y Reproducción de la Se imprimieron  
Universidad Autónoma Metropolitana 300 ejemplares  
*Unidad Azcapotzalco* más sobrantes para reposición.

### **Formato de Papeleta de Vencimiento**

*El usuario se obliga a devolver este libro en la fecha señalada en el sello mas reciente*

Código de barras. 2892734

**FECHA DE DEVOLUCION**

- Ordenar las fechas de vencimiento de manera vertical.
  - Cancelar con el sello de "DEVUELTO" la fecha de vencimiento a la entrega del libro



2892734

**UAM**  
QD911  
V3.9

**2892734**  
**Vázquez Briseño, Lucio**  
**Índices de Miller / Lucio**

INDICES D MILLER  
VASQUEZ I ISERÑO

19902



\$ 10.00

ISBN: 970-31-0029-5



978-97031-00293