Propiedades Matemáticas del espacio tiempo.

Transformaciones en 3D

Rotaciones



$$\boxed{\vec{X}' = A\vec{X}}$$ A: información de la rotación

$\vec{X}'\cdot\vec{X}' = \vec{X}\cdot\vec{X}$ norma es invariante

En teoría especial de la relatividad

$S^2 = x_0^2 - \vec{x}\cdot\vec{x}$ es invariante ante las transf. de Lorentz

Grupo de transformaciones que dejan invariante $S^2$.

Grupo homogeneo de Lorentz: contiene rotaciones en 3D y transformaciones de Lorentz

Grupo inhomogeneo de Lorentz: contiene traslaciones, reflexiones en el espacio y en tiempo y las transf. de Lorentz.

1er postulado de Einstein.

⇒ las ecuaciones son invariantes en forma, bajo las transformaciones de Lorentz: covariantes

Las leyes deben de escribir en términos de escalares de Lorentz, 4-vectores, tensor, etc., que se definen a partir de sus propiedades ante las T. L.

$$\begin{matrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{matrix} \Big\} \longrightarrow \begin{bmatrix} x^{0\prime} \\ x^{1\prime} \\ x^{2\prime} \\ x^{3\prime} \end{bmatrix}$$

$x'^{\alpha} = x'^{\alpha}(x^0, x^1, x^2, x^3)$

$\alpha$ = índice de Lorentz = 0, 1, 2, 3

$x'^0, x'^1, x'^2, x'^3$

$x^{\alpha}$ = tensor de rango 1.

Tensor: $\begin{cases} \text{covariante} \\ \text{contravariante} \end{cases}$

Contravariante se define por sus propiedades ante T. L.;

$A^{\mu} = \{A^0, A^1, A^2, A^3\}$

$$\boxed{A^{\mu\prime} = \left[\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\beta}}\right] A^{\beta}} \qquad x'^{\alpha} = x'^{\alpha}(x^0, x^1, x^2, x^3)$$

$\beta$ es un índice repetido = suma

$$A^{\mu\prime} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^0}A^0 + \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^1}A^1 + \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^2}A^2 + \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^3}A^3$$

$A^{1\prime} = \underline{\quad\mu=1\quad}$

$A^{0\prime} = \underline{\quad\mu=0\quad}$

El tensor covariante o tensor de rango 1

$$\boxed{B_{\alpha'} = \left[\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\alpha}}\right] B_{\beta}} \qquad \boxed{x^{\alpha} = x^{\alpha}(x'_0, x'_1, x'_2, x'_3)}$$

$$B_{\alpha'} = \frac{\partial x^0}{\partial x'^{\alpha}}B_0 + \frac{\partial x^1}{\partial x'^{\alpha}}B_1 + \frac{\partial x^2}{\partial x'^{\alpha}}B_2 + \frac{\partial x^3}{\partial x'^{\alpha}}B_3$$

$A_{\alpha} \longrightarrow$ covariante

$A^{\alpha} \longrightarrow$ contravariante

Un tensor contravariante de rango 2

$$\boxed{F'^{\alpha\beta} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\gamma}}\frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\delta}}F^{\gamma\delta}}$$

Un tensor covariante de rango 2

$$\boxed{G'_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\alpha}}\frac{\partial x^{\delta}}{\partial x'^{\beta}}G_{\gamma\delta}}$$

Un tensor mixto de segundo rango

$$H'^{\alpha}{}_{\beta} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\gamma}}\frac{\partial x^{\delta}}{\partial x'^{\beta}}H^{\gamma}{}_{\delta}$$

Se define el producto escalar o interior entre 2 tensores de rango 1

$B\cdot A = B_{\alpha}A^{\alpha}$ = escalar de Lorentz

¿Es $B\cdot A$ un invariante?

$$B'\cdot A' = B'_{\alpha}A'^{\alpha} = \left[\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\alpha}}B_{\beta}\right]\left[\frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\delta}}A^{\delta}\right]$$

$$= \left[\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\alpha}}\frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\delta}}\right]B_{\beta}A^{\delta}$$

$$= \left(\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\delta}}\right)B_{\beta}A^{\delta}$$

$$= \delta^{\beta}_{\delta}B_{\beta}A^{\delta}$$

$$= B_{\beta}A^{\beta} = B\cdot A$$

$$\boxed{B'\cdot A' = B\cdot A}$$

La geometría del espacio tiempo está descrita en

$S^2 = x_0^2 - \vec{x}\cdot\vec{x}$

En forma diferencial

$ds^2 = (dx_0)^2 - (dx_1)^2 - (dx_2)^2 - (dx_3)^2$

El elemento diferencial de longitud

$$\boxed{(ds)^2 = g_{\alpha\beta}\,dx^{\alpha}dx^{\beta}}$$

$g_{\alpha\beta}$ = tensor métrico covariante

Espacio tiempo plano

$g_{00} = 1 \quad g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1$

Se define el tensor métrico contravariante tal que

$$\boxed{g^{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}} \qquad \begin{matrix} g^{00} = 1 \\ g^{11} = g^{22} = g^{33} = -1 \end{matrix}$$

$$g_{\alpha\gamma}\,g^{\gamma\beta} = \delta^{\beta}_{\alpha} = \begin{cases} 0 & \alpha \neq \beta \\ 1 & \alpha = \beta = 0, 1, 2, 3 \end{cases}$$

$g_{0\gamma}\,g^{\gamma 1} = 0$

$g_{2\gamma}\,g^{\gamma 2} = 1$

Se identifica lo siguiente

$x_{\alpha} = g_{\alpha\beta}\,x^{\beta}$

$x^{\alpha} = g^{\alpha\beta}\,x_{\beta}$

Sea un tensor contravariante de rango 1

$$\boxed{A^{\alpha} = (A^0, \vec{A})}$$

Entonces $A_{\alpha} = g_{\alpha\beta}A^{\beta}$

$$A_{\alpha} = g_{\alpha 0}A^0 + g_{\alpha 1}A^1 + g_{\alpha 2}A^2 + g_{\alpha 3}A^3$$

$A_{\alpha} = [A^0, -A^1, -A^2, -A^3]$

$$\boxed{A_{\alpha} = (A^0, -\vec{A})}$$

Si $A^{\alpha} = (A^0, \vec{A})$, $B^{\alpha} = (B^0, \vec{B})$

$A_{\alpha} = (A^0, -\vec{A})$, $B_{\alpha} = (B^0, -\vec{B})$

Entonces $\boxed{A\cdot B = A_{\alpha}B^{\alpha}}$

$= A_0B^0 + A_iB^i$

$= A_0B^0 + (-A_iB^i)$

$$\boxed{A\cdot B = A_0B^0 - \vec{A}\cdot\vec{B}}$$

Consideremos el operador derivada parcial con respecto a $x^{\alpha}$, $x_{\alpha}$

$$\frac{\partial}{\partial x'^{\alpha}} = \left(\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\alpha}}\right)\frac{\partial}{\partial x^{\beta}} \qquad x'^{\alpha} = x'^{\alpha}(x^{\alpha})$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x'^{\alpha}} = \left[\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\alpha}}\right]\frac{\partial}{\partial x^{\beta}}}$$

Recordemos $B'_{\alpha} = \dfrac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\alpha}}B_{\beta}$

Tensor covariante

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} = \partial_{\alpha}}$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x_{\beta}} = \partial^{\beta}} \qquad \begin{matrix} \beta = 0 \\ \beta = 1 \\ \beta = 2 \\ \beta = 3 \end{matrix}$$

En términos de sus componentes

$$\partial^{\alpha} = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, -\vec{\nabla}\right) \longrightarrow \boxed{\text{Ej propuesto Verificar}}$$

$$\partial_{\alpha} = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \vec{\nabla}\right)$$

¿Cómo aplicar este operador?

$$\boxed{\partial^{\alpha}A_{\alpha} = \partial_0A_0 + \vec{\nabla}\cdot\vec{A}}$$

Ejercicio propuesto

Verificar la expresión

$$\boxed{\partial_{\alpha}A^{\alpha} = \partial_0A_0 + \vec{\nabla}\cdot\vec{A}}$$

$\partial_{\alpha}[A^{\alpha}] = \partial^{\alpha}A_{\alpha}$

$= \partial_{\alpha}(g^{\alpha\beta}A_{\beta})$

$= (g_{\alpha\mu}\partial^{\mu})\,g^{\alpha\beta}A_{\beta}$

$= g_{\alpha\mu}\,g^{\alpha\beta}\,\partial^{\mu}A_{\beta}$

$= (\delta^{\beta}_{\mu})\,\partial^{\mu}A_{\beta}$

$= \partial^{\beta}A_{\beta} = \partial^{\alpha}A_{\alpha}$

$$\boxed{\partial_{\alpha}\partial^{\alpha} = \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} - \nabla^2}$$

Representación Matricial

$$x^{\mu} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Se define el producto escalar

$$x_A\cdot x_B = x_{\mu}x^{\mu} = (x_A, x_B) = \tilde{x}_A\cdot x_B$$

$$= (x_{0A}, -x_{1A}, -x_{2A}, -x_{3A})\begin{pmatrix} x_{0B} \\ x_{1B} \\ x_{2B} \\ x_{3B} \end{pmatrix}$$

$$= x_{0A}x_{0B} - \vec{x}_A\cdot\vec{x}_B$$

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$g^2 = g_{\alpha\beta}\,g^{\alpha\beta} = \mathbb{1}$

$g_{\alpha\mu}x^{\mu} = x_{\alpha}$

$$= gx = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ -x_1 \\ -x_2 \\ -x_3 \end{bmatrix} = x_{\alpha}$$

Entonces $(a\cdot b) = a\cdot b = (a, gb) = (ga, b) = \tilde{a}gb$

$$a = \begin{pmatrix} x^0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad \tilde{a} = (x^0, x^1, x^2, x^3)$$

Ahora buscamos un grupo de transformaciones lineales en las coordenadas tal que

$X' = AX$

$$\begin{bmatrix} x_0' \\ x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix}}_{4\times 4}\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

¿Qué es A?

Necesitamos que $\boxed{\tilde{x}'gx' = \tilde{x}gx}$

es decir la norma sea invariante