Modelos y Simulación

Trabajo Especial II

Modelo de Inventario

Giovanni Rescia

FaMAF, UNC

Junio de 2014

Resumen

El presente trabajo se desarrollará en el contexto del modelo de inventario dado en el capítulo 6.5 del libro Simulación de Sheldon M. Ross. El objetivo del mismo es analizar la calidad estadística de una lista de datos mediante la utilización de diversos test, y no la simulación del mencionado modelo.

Se realizarán test de bondad de ajuste para ver cómo se adaptan distintas distribuciones a los datos listados.

Introducción

En particular, trabajaremos con el modelo de inventario bajo las siguiente hipótesis:

- El precio del artículo es \$2.
- Los clientes aparecen en el sistema según un proceso Poisson con razón 20 por hora.
- La cantidad de artículos que cada uno de ellos pide es una variable aleatoria con distribución $\mathcal{G}(0.4)$.
- El stock mínimo es s=5 y el stock máximo es S=50. El stock inicial es 50 y es gratis.
- El costo de comprar y artículos es una función $c(y) = y + \frac{1}{y}$, y se demoran 5 horas en traerlo.
- La tienda paga un costo de mantenimiento del inventario de \$0.10 por cada artículo, por hora cumplida.
- El sistema funciona 8hs diarias, 5 días a la semana, reiniciándose al finalizar la semana.

Bases teóricas para la resolución del problema

Test de Kolmogorov-Smirnov

El test de Kolmogorov-Smirnov, entre otras cosas, puede ser usado para comparar una muestra bajo la hipótesis que esa muestra tiene cierta distribución de probabilidad con ciertos parámetros (la llameremos la hipótesis nula, denotada H_0).

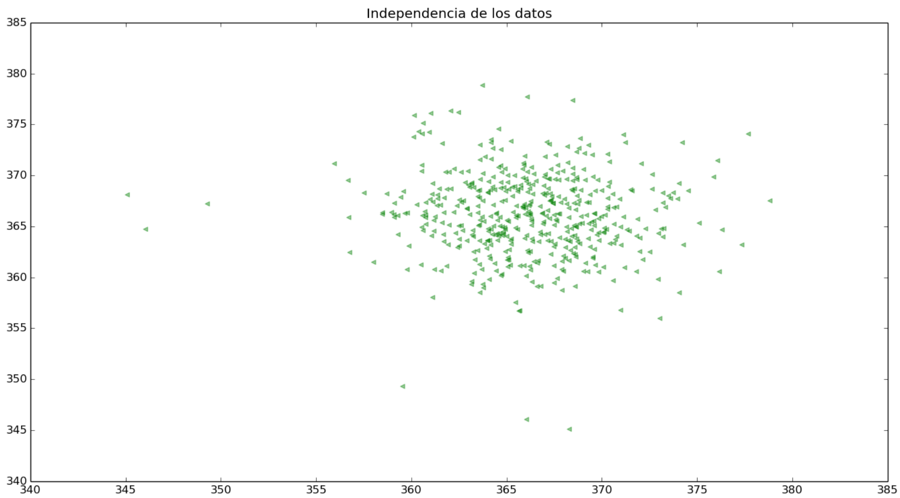
El resultado de tal pruba es un valor (llamado p-valor), que: o bien nos permite refutar H_0, o bien nos dice que no hay evidencia suficiente para rechazarla.

Test χ^2

Va a ser usado con el mismo propósito que el test de Kolmogorov-Smirnov, solo que para distribuciones discretas (en contraste con Kolmogorov-Smirnov que es para distribuciones continuas).

Independencia de los datos

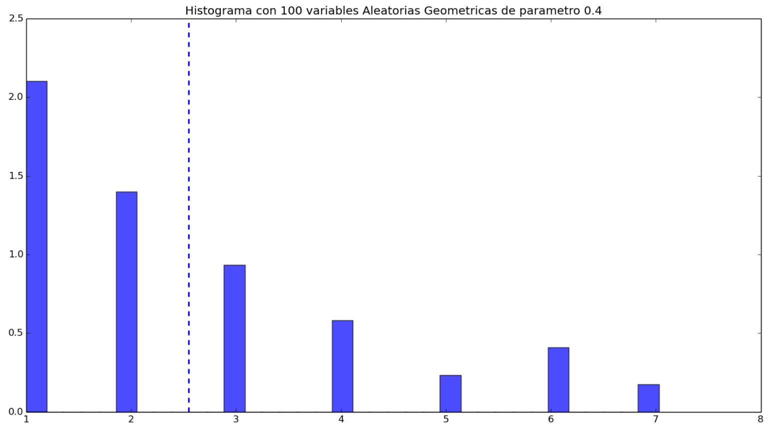
A tal fin de observar cuán independientes son los datos muestreados, nos valeremos de un *scatter diagram*. Mientras más dispersos se observen los datos en el gráfico, más independientes serán unos de otros.

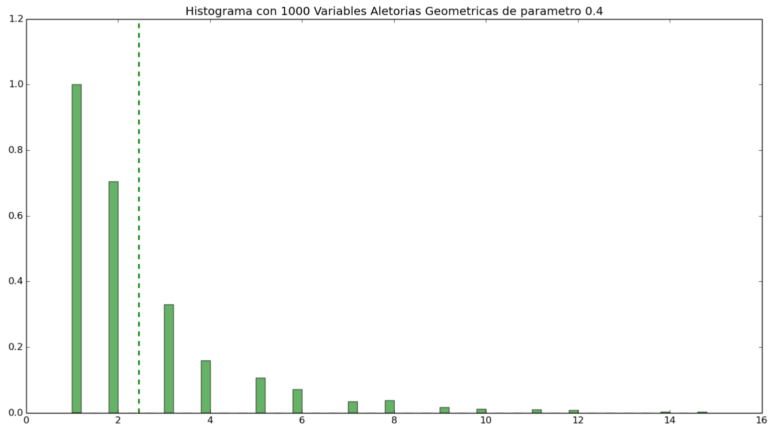


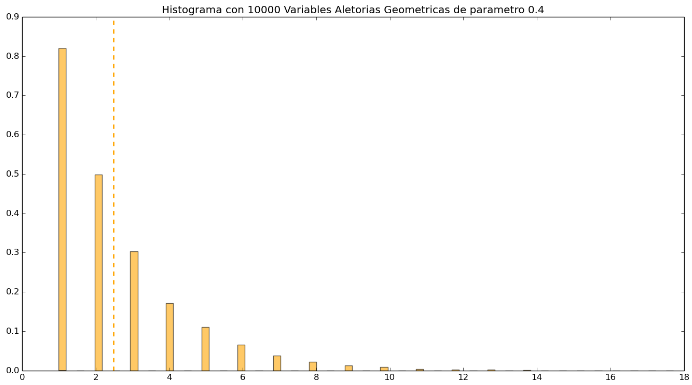
Como se puede apreciar en el gráfico, los puntos están dispersos, lo que indica independencia. Otra observación que se puede hacer que es que hay alta concentración de puntos en 366, por lo que la media se encuentra cerca de 366.

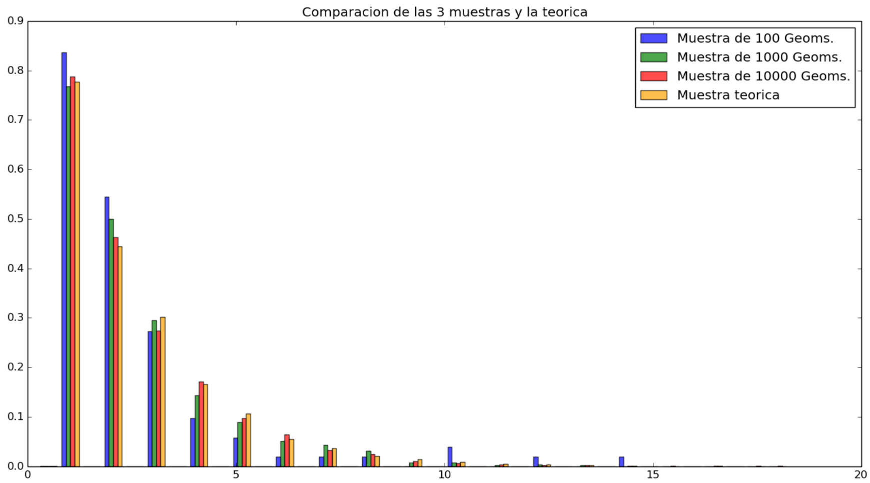
Muestras de Variables Aleatorias Geométricas

A continuación histogramas con 100, 1000 y 10000 variables aleatorias $\sim \mathcal{G}(0.4)$.









En vista al último histograma, podemos observar que a medida que la muestra de variables aleatorias crece, se va acercando al límite teórico de una variable aleatoria $\mathcal{G}(0.4)$. Por lo que podríamos estar casi seguros (si no contáramos con la hipótesis que la muestra proviene efectivamente de variables aleatorias $\mathcal{G}(0.4)$) que las observaciones tienen dicha distribución.

Test χ^2

Realizaremos una estimación del p-valor a partir de la hipótesis de que la muestra está distribuida con variable aleatorias $\mathcal{G}(0.4)$.

Para esto, plantearemos dos hipótesis:

- H_0: la muestra está distribuida con variable aleatorias $\mathcal{G}(0.4)$.
- H_a: la muestra no está distribuida con variables aleatorias $\mathcal{G}(0.4)$.

Definiremos el estadístico T como:

$$T = \sum_{i=1}^{n} \frac{(N_i - np_i)^2}{np_i}$$

donde:

- n es el tamaño de la muestra
- N_i es la frecuencia observada sobre el valor i-ésimo.
- p_i es la probabilidad de un valor que sea igual a i (es decir, $p_i = P(X = i) = 0.4 * (1 - 0.4)^i$

Entonces, tenemos que

$$p - valor \approx P\{\chi^2_{k-1} \geq t\}$$

Por lo tanto, podemos calcular j estadísticos $T_1, ..., T_j$ y aproximar

$$\frac{\#\{i|T_i \geq t\}}{j} \approx P\{T \geq t\}$$

Se han observado los siguientes valores:

- Con $n = 100$ Observaciones

  $t_{obs} = 10.9768$

  $p - valor = 0.435$
- Con $n = 1000$ Observaciones

  $t_{obs} = 12.9523$

  $p - valor = 0.605$
- Con $n = 10000$ Observaciones

  $t_{obs} = 20.4434$

  $p - valor = 0.454$

Como los $p - valores$ son altos (> 0.1) no tenemos suficiente evidencia para rechazar H_0.

Modelos de ajuste de datos

Se proponen las siguientes familias de distribuciones para el ajuste de los datos: Normal, Lognormal y Gamma. A continuación se estimarán los parámetros por el método de máxima verosimilitud:

Distribución Normal

Para los parámetros μ y σ usaremos los siguientes estimadores:

$$\bar{X} = \hat{\mu} = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{n}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \bar{X})^2}{n}$$

Las estimaciones obtenidas con tales estimadores son:

$\bar{X} = 366.127$

$\hat{\sigma}^2 = 16.41$

Distribución Lognormal

Para los parámetros μ y σ usaremos los siguientes estimadores:

$$\bar{X} = \hat{\mu} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\ln(X_i)}{n}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(\ln(X_i) - \bar{X})^2}{n}$$

Las estimaciones obtenidas con tales estimadores son:

$\bar{X} = 5.902$

$\hat{\sigma}^2 = 0.000123$

Distribución Gamma

Para los parámetros α y λ usaremos los siguientes estimadores (aproximación de Thom):

$$A = \ln(\bar{X}) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\ln(X_i)}{n}$$

$$\hat{\alpha} = \frac{1}{4A}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{4A}{3}}\right)$$

$$\hat{\lambda} = \frac{\hat{\alpha}}{\bar{X}}$$

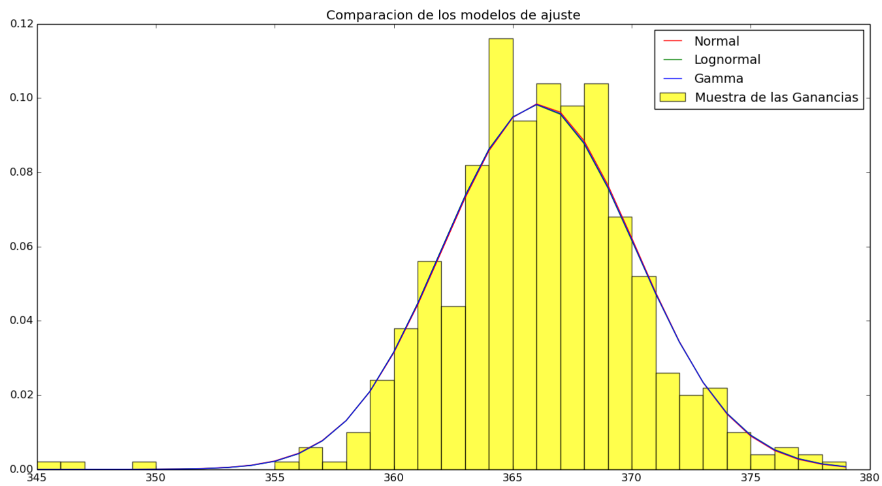
Las estimaciones obtenidas con tales estimadores son:

$\hat{\alpha} = 8139.516$

$\hat{\lambda} = 22.231$

Calidad de los ajustes

Ahora que tenemos valores para los estimadores de todas las distribuciones propuestas podemos ver reflejado en un histograma qué tan bien se adaptan a nuestro modelo.



El histograma refleja que, además que las tres distribuciones se parecen mucho, las tres se adaptan muy bien a nuestra muestra.

Test de Kolmogorov-Smirnov

Para determinar cuál de las distribuciones propuestas se adapta mejor como modelos para nuestros datos, procederemos a obtener los $p-valores$ correspondientes a cada distribución con la muestra, y eligiremos aquella que tenga el más alto.

Definamos F_e como la acumulada empírica de la muestra y a F como la acumulada de la distribución de la muestra bajo la hipótesis H_0. Y sea el estadístico D definido de la siguiente manera:

$$D \equiv \sup_{-\infty<x<\infty} |F_e(x) - F(x)|$$

$$D^+ \equiv \sup_{-\infty<x<\infty} \{F_e(x) - F(x)\}$$

$$D^- \equiv \sup_{-\infty<x<\infty} \{F(x) - F_e(x)\}$$

$$D \equiv máx\{D^+, D^-\}$$

Entonces, sea d el estadístico observado de nuestra muestra, y sean

$D_1, ..., D_j$, j estadísticos, entonces aproximemos el $p - valor$ de la siguiente manera

$$\frac{\#\{i|D_i \geq d\}}{j} \approx P\{D \geq d\} = p - valor$$

Ahora que tenemos los valores de todos los estimadores de los ajustes propuestos, procedemos a calcular sus estadísticos d y sus $p - valores$.

Ajuste Normal

H_0 : Los datos observados provienen de una muestra con distribución $\sim \mathcal{N}(366.127,16.41)$.

H_a : Los datos observados no provienen de una muestra con distribución $\sim \mathcal{N}(366.127,16.41)$.

$\hat{\mu} = 366.127$

$\hat{\sigma^2} = 16.41$

Estadístico $d = 0.0416$

$p - valor = 0.3418$

Por lo tanto, al ser un $p - valor$ más bien alto (con que sea mayor a 0.1 alcanza, o 0.05 en otros casos), no disponemos de evidencia suficiente para refutar H_0 como una hipótesis válida.

Ajuste Lognormal

H_0 : Los datos observados provienen de una muestra con distribución $\sim \mathcal{LN}$(5.902, 0.000123).

H_a : Los datos observados no provienen de una muestra con distribución $\sim$ $\mathcal{LN}$(5.902,0.000123).

$\hat{\mu} = 5.902$

$\hat{\sigma^2} = 0.000123$

Estadístico $d = 0.0433$

$p - valor = 0.2978$

Por lo tanto, al ser un $p - valor$ más bien alto (con que sea mayor a 0.1 alcanza, o 0.05 en otros casos), no disponemos de evidencia suficiente para refutar H_0 como una hipótesis válida.

Ajuste Gamma

H_0 : Los datos observados provienen de una muestra con distribución $\sim \gamma$(8139.516,22.231).

H_a : Los datos observados no provienen de una muestra con distribución $\sim$ $\mathcal{N}$(8139.516,22.231).

$\hat{\alpha} = 8139.516$

$\hat{\lambda} = 22.231$

Estadístico $d = 0.0427$

$p - valor = 0.3122$

Por lo tanto, al ser un $p - valor$ más bien alto (con que sea mayor a 0.1 alcanza, o 0.05 en otros casos), no disponemos de evidencia suficiente para refutar H_0 como una hipótesis válida.

La conclusión que podemos obtener al observar los $p - valores$ obtenidos es que, si no conociéramos con certeza cuál es la distribución de la cual provienen los datos de la muestra (que es $\mathcal{G}(0.4)$), no tendríamos evidencia suficiente para refutar que los datos pueden venir de cualquiera de estas distribuciones.

Normalidad Asintótica de la Media Muestral

Se realizó un análisis sobre 500 muestras de la ganancia semanal media con respecto a 200 semanas a fin de comprobar su normalidad asintótica.

Para los parámetros μ y σ usaremos los estimadores que se utilizaron en secciones previas, éstos son:

$$\bar{X} = \hat{\mu} = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{n}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \bar{X})^2}{n}$$

Las estimaciones obtenidas con tales estimadores son:

$\bar{X} = 365.656$

$\hat{\sigma}^2 = 0.043$

Ahora que disponemos de las estimaciones puntuales, plantearemos una hipótesis nula y probaremos mediante el test de Kolmogorov-Smirnov si podemos rechazar dicha hipótesis o si no contamos con evidencia suficiente para refutar.

Entonces, sean:

H_0 : Los datos observados provienen de una muestra con distribución $\sim \mathcal{N}(365.656{,}0.043)$.

H_a : Los datos observados no provienen de una muestra con distribución $\sim \mathcal{N}(365.656{,}0.043)$.

El test de Kolmogorov-Smirnov nos muestra los siguientes resultados:

Estadístico $d = 0.021087$

$p - valor = 0.9793$

Por lo tanto, al ser un $p - valor$ más bien alto (con que sea mayor a 0.1 alcanza, o 0.05 en otros casos), no disponemos de evidencia suficiente para refutar H_0 como una hipótesis válida.

Conclusión

De mano de la inferencia estadística, la bondad de ajuste y una muestra de datos que fueron generados a partir de una variable $\sim \mathcal{G}(0.4)$, hemos sido capaces de determinar que las ganancias semanales responden de manera correcta a una distribución $\mathcal{N}(366.127, 16.41)$.

También fuimos capaces de realizar tests para demostrar que la ganancia media es asintóticamente $\sim \mathcal{N}$(365.656,0.043).

Son resultados realmente soprendentes, pero no más que la teoría que los respalda.