Università Degli Studi Di Genova
Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Dipartimento di Matematica

Anno accademico 2008/2009

Tesi di Laurea

La precessione di Thomas

Candidato:
Giovanni Alberti

Relatore:
Prof. Enrico Massa

Correlatore:
Prof. Giacomo Caviglia

Certe volte mi domando perché sia stato proprio io a elaborare la teoria della relatività. La ragione, a parer mio, è che normalmente un adulto non si ferma mai a riflettere sui problemi dello spazio e del tempo. Queste sono cose a cui si pensa da bambini. Io invece cominciai a riflettere sullo spazio e sul tempo solo dopo essere diventato adulto. Con la differenza che studiai il problema più a fondo di quanto possa fare un bambino.

(A. Einstein)

Ringraziamenti

In primo luogo vorrei ringraziare il mio relatore Prof. Enrico Massa per la sua completa disponibilità e il tempo dedicatomi durante questi mesi di preparazione della tesi. La sua costante presenza, i numerosi aiuti, le correzioni ai tanti errori e, soprattutto, la sua grande attenzione al mio apprendimento e al mio interesse hanno reso questo lavoro assai piacevole, utile e gratificante.

Ringrazio il mio correlatore Prof. Giacomo Caviglia per l'interessamento e l'attenzione che ha posto al mio lavoro.

Un ringraziamento sentito va alla Professoressa Ada Aruffo la quale, nonostante non abbia partecipato direttamente alla stesura della tesi, ha sempre contribuito alla mia preparazione durante questi tre anni di studi.

Grazie ai miei genitori e a mia sorella per il loro sostegno in questi anni e per i primi fondamentali insegnamenti di matematica che non dimenticherò. Grazie a tutti i miei amici, troppi per essere nominati, sempre disponibili per un bagno o una partita a calcetto durante i momenti di pausa e, sorprendentemente, talvolta interessati a sentirmi parlare di spazio e di tempo. In particolare non posso non ricordare i miei coinquilini Filippo, Mauro e Pietro che hanno sempre sopportato i miei studi talvolta intensi.

Impossibile elencare tutti i miei amici matematici di ogni anno a cui penso per i consigli sulla tesi e, soprattutto, per le varie chiacchierate al quinto piano, il tempo passato insieme durante la stesura e in questo triennio: grazie veramente per aver reso così belli questi anni. Grazie ad Alessio, Paolo (la mia guida ufficiale di LaTeX) e Tommaso che hanno preparato la tesi insieme a me e coi quali mi sono confrontato infinite volte su qualsiasi problema.

In particolare, ringrazio Gessica per essermi stata sempre vicino, per avermi supportato durante lo svolgimento del lavoro, confortato nei diversi momenti in cui mi sono demoralizzato e distratto nei periodi di svago.

Indice

1 Introduzione **1**

2 Preliminari **3**
2.1 Spazi affini 3
2.2 Il gruppo di Lorentz 4

3 Spazio–tempo di Minkowski **7**
3.1 Generalità: struttura affine 7
3.1.1 Struttura pseudo-euclidea 7
3.2 Sistemi di riferimento 9
3.2.1 Riferimenti inerziali 10
3.2.2 Coordinate 12
3.3 Operatori di proiezione 13
3.3.1 Ritardo degli orologi in movimento 13
3.3.2 Concetti metrici spaziali 14
3.3.3 Contrazione delle lunghezze 15
3.3.4 L'operatore j 17
3.3.5 Trasformazioni di Lorentz 20
3.3.6 Trasformazioni di Lorentz pure: espressione in coordinate 23
3.3.7 Concetto di non rotazione e trasformazioni pure 24
3.4 Quadrivelocità e quadriaccelerazione 26

4 Moto senza rotazione **29**
4.1 Trasporto senza rotazione 29
4.2 Trasporto di Fermi–Walker 31
4.3 Il moto iperbolico 34
4.4 La precessione di Thomas 36
4.5 La precessione dello spin 39

Bibliografia **45**

Capitolo 1

Introduzione

L. H. Thomas, fisico inglese del XX secolo, nel 1926 pubblicò sulla rivista *Nature* un articolo dal titolo "The motion of the spinning electron" in cui metteva in luce un effetto di precessione relativo allo spin dell'elettrone in orbita intorno al nucleo.

Scrive Thomas:

> I found that if you look at the change in the direction of the axis of a rotating electron, there should be a very considerable relativistic effect, in fact, a factor of two.

La ragione di questo fenomeno ha in effetti natura relativistica: cerchiamo di capire quale differenza sostanziale sussiste rispetto alla meccanica classica.

Il concetto di non rotazione, e conseguentemente quello di rotazione, si fonda sull'idea di parallelismo. Infatti la rotazione di un corpo è legata al comportamento dei vettori ad esso solidali e, per definizione, un vettore $\underline{v}(t)$ "non ruota" se $\underline{v}(t + \Delta\, t)$ è parallelo a $\underline{v}(t)$. In Fisica classica, grazie agli Assiomi di spazio e tempo assoluti, tale definizione appare del tutto naturale e non presenta alcuna difficoltà.

La situazione muta profondamente in Relatività Speciale, in quanto la decomposizione dello spazio–tempo in spazio + tempo dipende espressamente dal riferimento inerziale in cui si opera. Pertanto, in presenza di moti accelerati, e quindi di riferimenti di quiete istantanea variabili nel tempo, occorre introdurre un nuovo criterio atto a caratterizzare la non rotazione. Come vedremo, tale criterio è fondato su una speciale legge di trasporto dei vettori lungo linee di universo, nota come legge di trasporto di Fermi–Walker.

Come conseguenza di tutto ciò, Thomas e altri fisici dell'epoca si trovarono davanti a una sorpresa sperimentale. Secondo il criterio di Fermi–Walker, infatti, un corpo in moto accelerato e intrinsecamente *non ruotante* appare in generale dotato di una velocità angolare non nulla nel giudizio di un generico osservatore inerziale. Questo aspetto paradossale, che si aggiunge ai numerosi altri presenti nella teoria di Einstein, prende il nome di *precessione di Thomas*. L'esposizione di tale fenomeno sarà l'argomento principale di questo lavoro.

Nel corso della discussione verranno considerati noti gli argomenti di base della teoria della Relatività Speciale. Alcuni aspetti, particolarmente utili ai fini della discussione successiva saranno ripresi e ampliati nei primi due capitoli. In particolare sarà presentata un'analisi dettagliata della struttura pseudo-euclidea dello spazio–tempo di Minkowski.

Per giungere ad una comprensione dell'effetto descritto da Thomas, sarà poi presentata una formulazione geometrica delle trasformazioni di Lorentz, basata sull'utilizzo di operatori di proiezione e di riflessione spazio–temporale. A illustrazione dell'efficacia del metodo sarà presentata una rilettura dei classici fenomeni di ritardo degli orologi e di contrazione delle lunghezze.

Infine, nella terza e ultima parte del lavoro, affronteremo il problema di come caratterizzare intrinsecamente la rotazione dei corpi. Come già detto, lo strumento principale di indagine sarà un particolare algoritmo di trasporto di campi vettoriali lungo linee di universo, noto come il trasporto di Fermi–Walker.

Come prima applicazione del metodo illustreremo il concetto di moto iperbolico. Dopodiché, passeremo allo studio della precessione di Thomas, evidenziandone le caratteristiche cinematiche. Discuteremo infine l'accoppiamento "spin–orbita" per un elettrone mobile in un campo elettrostatico assegnato. L'argomento presenta interesse nello studio del comportamento degli elettroni orbitali sotto l'effetto del campo coulombiano prodotto dal nucleo atomico.

Capitolo 2

Preliminari

2.1 Spazi affini

Stabiliamo in primo luogo un risultato che permette di introdurre, in opportune ipotesi, una struttura di spazio affine su una varietà differenziabile.

Teorema 2.1.1. *Sia M uno spazio topologico omeomorfo a $\mathbb{R}^k$. Sia $\mathcal{H} = \left\{ \varphi \colon M \overset{\cong}{\to} R^k \right\}$ una famiglia di omeomorfismi.*

Si supponga che per ogni coppia $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{H}$ la trasformazione $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ sia lineare (eventualmente disomogenea), ossia

$$\exists\, A \in \mathcal{G}l(\mathbb{R}, k)\,,\ b \in \mathbb{R}^k \ :\ \forall\, x \in \mathbb{R}^k\ (\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1})(x) = Ax + b. \tag{2.1}$$

Allora M possiede una struttura canonica di spazio affine, rispetto alla quale ciascun sistema di coordinate nella classe $\mathcal{H}$ è un sistema di coordinate affini.

Dimostrazione. Scelto ad arbitrio un sistema di coordinate $\varphi \in \mathcal{H}$, diciamo che una funzione $f \colon M \to \mathbb{R}$ è polinomiale di grado 1 se e solo se $f \circ \varphi^{-1} \colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ è un polinomio di grado ≤ 1. In virtù della legge di trasformazione (2.1), la definizione non dipende dalla scelta di φ, ed è quindi ben posta.

L'insieme V delle funzioni polinomiali di grado 1 su M è chiaramente uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, in quanto per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R},\ f, g \in V$ risulta

$$(\alpha f + \beta g) \circ \varphi^{-1} = \alpha(f \circ \varphi^{-1}) + \beta(g \circ \varphi^{-1}).$$

Fissata $\varphi \in \mathcal{H}$, per $i = 1, \dots, k$ indichiamo con $e_{(i)} \in V$ i polinomi dati dalle funzioni coordinate stesse, ossia soddisfacenti $e_{(i)}(p) = \varphi^i(p)\ \forall p \in M$, e con $e_{(0)} \in V$ il polinomio costante $e_{(0)}(p) \equiv 1$.

Da quanto detto segue elementarmente che $\left\{ e_{(i)} \;\middle|\; i = 0, \dots, k \right\}$ è una base per lo spazio V. Quest'ultimo è pertanto uno spazio vettoriale di dimensione $k+1$.

Sia $V^\star$ il corrispondente spazio duale. Proviamo che M può essere identificato con un iperpiano affine in $V^\star$. A tal fine, ad ogni $p \in M$ associamo l'applicazione di valutazione $v_p : V \to \mathbb{R}$ definita da $v_p(f) := f(p)\ \forall\ f \in V$. Si verifica facilmente che v_p è un funzionale lineare su V.

La corrispondenza $p \mapsto v_p$ determina pertanto un'applicazione $\vartheta \colon M \to V^\star$. Sia $e^{(0)}, \dots, e^{(k)}$ la base di $V^\star$ duale della $e_{(0)}, \dots, e_{(n)}$ precedentemente definita, ossia soddisfacente $\left\langle e^{(i)}, e_{(j)} \right\rangle = \delta^i_j$.

Per ogni $p \in M$, esprimiamo v_p in componenti nella forma $v_p = v_{p_i} e^{(i)}$. A tale proposito osserviamo che, per definizione, risulta

$$v_{p_i} = \left\langle v_p, e_{(i)} \right\rangle = \begin{cases} 1 & \text{se } i = 0 \\ e_{(i)}(p) & \text{se } i = 1, \dots, k \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad v_p = e^{(0)} + \sum_{i=1}^{k} e_{(i)}(p)\, e^{(i)}$$

Al variare di p otteniamo in tal modo l'identificazione

$$\operatorname{Im} \vartheta = \left\{ e^{(0)} + \sum_{i=1}^{k} e_{(i)}(p) e^{(i)} \;\middle|\; p \in M \right\} = \left\{ e^{(0)} + \sum_{i=1}^{k} \gamma_i\, e^{(i)} \;\middle|\; \gamma_i \in \mathbb{R} \right\}$$

Ciò prova che Im ϑ costituisce un piano in $V^\star$ non passante per l'origine, ossia uno spazio affine, modellato sullo spazio vettoriale generato da $e^{(1)}, \dots, e^{(k)}$.
Verifichiamo infine che ϑ è iniettiva; ricordando la definizione delle $e_{(i)}$ risulta infatti:

$$\begin{aligned} p, q \in M,\ p \neq q \implies \exists\, i = 1, \dots, k :\ e_{(i)}(p) \neq e_{(i)}(q) \implies \\ \implies v_p(e_{(i)}) \neq v_q(e_{(i)}) \implies v_p \neq v_q \end{aligned}$$

Raccogliendo i risultati concludiamo che c'è biiezione tra M e Im ϑ, e che le $e_{(i)} = \varphi^i$ assumono il ruolo di coordinate affini di Im ϑ, come si voleva. □

2.2 Il gruppo di Lorentz

La descrizione delle trasformazioni di Lorentz ha la propria controparte algebrica nella seguente

Definizione 2.2.1. *Si dice* gruppo di Lorentz L *il gruppo definito da:*

$$L = \left\{ \Lambda \in GL(4) \,\middle|\, {}^t\Lambda\eta\Lambda = \eta \right\}, \quad \textit{ove } \eta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

In particolare, si dice gruppo di Lorentz ortocrono $L^{\uparrow}$ *il sottogruppo di* L *definito da:*

$$L^{\uparrow} = \left\{ \Lambda \in L \,\middle|\, \Lambda^4_4 > 0 \right\}$$

Il sottogruppo $L^{\uparrow}$ *contiene la totalità delle matrici che descrivono il cambiamento di coordinate fra sistemi di riferimento inerziali* senza inversione del verso di scorrimento del tempo*. In ambito macroscopico, esso costituisce la base per lo studio della Relatività Speciale.*

Ricordiamo infine un importante risultato riguardante il gruppo di Lorentz ortocrono, detto il *teorema di decomposizione polare*:

Teorema 2.2.1. *Per ogni* $\Lambda \in L^{\uparrow}$ *esistono un'unica matrice ortogonale* $R \in O(3)$ *ed un unico vettore colonna* $C \in \mathbb{R}^3$ *soddisfacenti la relazione* $\Lambda = \Omega(R) \cdot \Lambda_C$ *, con*

$$\Omega(R) = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_C = \begin{pmatrix} I + \dfrac{{}^tC\,C}{1+\gamma} & {}^tC \\ C & \gamma \end{pmatrix}, \quad \gamma = \sqrt{1 + C\,{}^tC}\,.$$

Come si può verificare, la matrice Ω descrive una rotazione spaziale. La matrice Λ_C rappresenta invece la cosiddetta trasformazione di Lorentz pura, che come vedremo, sarà strettamente legata al concetto di "non rotazione".

Capitolo 3

Spazio–tempo di Minkowski

3.1 Generalità: struttura affine

Sia $\mathcal{V}_4$ lo spazio-tempo inteso come la totalità degli eventi. Ogni osservatore inerziale, riferendo il proprio tri-spazio a coordinate cartesiane ortogonali e scegliendo ad arbitrio l'origine dell'ascissa temporale, instaura una corrispondenza biunivoca senza eccezioni tra eventi e quaterne ordinate di numeri reali. Lo spazio-tempo $\mathcal{V}_4$ è quindi una varietà differenziabile, topologicamente omeomorfa a $\mathbb{R}^4$, su cui esiste una classe privilegiata di sistemi di coordinate globali, associati ad osservatori inerziali e legati l'un l'altro da trasformazioni lineari disomogenee del tipo

$$\bar{x}^i = \Lambda^i{}_j \, x^j + a^i \, , \qquad \Lambda \in L \, , \, a \in \mathbb{R}^4 \tag{3.1}$$

Ricordiamo che, dette $x^1, \ldots, x^4$ le coordinate associate ad un riferimento inerziale I, le prime tre rappresentano le coordinate cartesiane nel tri-spazio di I, mentre la quarta è legata alla variabile temporale in I dalla relazione $x^4 = ct$.

Stante la linearità delle trasformazioni, possiamo applicare il Teorema 2.1.1: ciò consente di assegnare a $\mathcal{V}_4$ una struttura di spazio affine, modellato su uno spazio vettoriale quadridimensionale V_4. Rispetto a tale struttura le coordinate associate ai riferimenti inerziali nel modo sopra descritto risultano automaticamente coordinate affini.

3.1.1 Struttura pseudo-euclidea

Introduciamo adesso una struttura pseudo-euclidea nello spazio modellatore di $\mathcal{V}_4$. A tal fine, scelto un riferimento inerziale I, e indicate con $x^1, \ldots, x^4$ le corrispondenti coordinate spazio–temporali, consideriamo una base $e_{(1)}, \ldots, e_{(4)}$ in V_4 e un'origine $o \in \mathcal{V}_4$ in modo che sussista la relazione

$$(x - o) = x^i(x)\, e_{(i)} \quad \forall\, x \in \mathcal{V}_4 \tag{3.2}$$

In tale ipotesi, $\left\{o, e_{(i)}\right\}$ sarà detto un *riferimento affine* associato al riferimento I.

Per ogni coppia di vettori $a = a^i e_{(i)},\ b = b^i e_{(i)} \in V_4$ definiamo poi il prodotto scalare

$$g(a, b) := \eta_{ij} a^i b^j \tag{3.3}$$

Nota 3.1.1. *Siano I, I' due sistemi di riferimento inerziali e $\left\{o, e_{(i)}\right\}$, $\left\{o', e'_{(i)}\right\}$ due riferimenti affini associati rispettivamente ad I e I', e x^i, x'^i i corrispondenti sistemi di coordinate in $\mathcal{V}_4$. In formule, ciò si traduce nelle relazioni:*

$$(x - o) = x^i(x)\, e_{(i)}\,, \qquad (x - o') = x'^i(x) e'_{(i)}$$

Supposto che il legame fra le basi sia espresso dalla relazione $e_{(j)} = e'_{(i)}\, B^i{}_j$, cerchiamo di stabilire la legge di trasformazione fra le coordinate x^i, x'^i. A tale proposito, indicato con x un generico elemento in $\mathcal{V}_4$ e posto $a = (o - o')$, osserviamo che sussistono le relazioni:

$$(x - o) = (x - o') + (o' - o) = x'^i(x)\, e'_{(i)} - a$$
$$(x - o) = x^j(x)\, e_{(j)} = B^i{}_j\, x^j(x)\, e'_{(i)}$$

Omettendo l'argomento x e passando in componenti, deduciamo

$$x'^i \;=\; B^i{}_j\, x^j + a^i \tag{3.4}$$

Abbiamo così stabilito il legame fra legge di trasformazione dei riferimenti affini e legge di trasformazione delle coordinate. In particolare, affinché l'eq. (3.4) rappresenti una trasformazione di Lorentz occorre e basta richiedere $B = \Lambda \in L^{\uparrow}$.

Verifichiamo adesso che la definizione (3.3) non dipende dalla scelta del riferimento inerziale: detto I' un secondo riferimento inerziale, e indicata con g' la corrispondente metrica per ogni coppia di vettori $a, b \in V_4$ sono infatti simultaneamente vere le relazioni

$$a = a^i e_{(i)} = a'^i e'_{(i)}\,, \qquad b = b^i e_{(i)} = b'^i e'_{(i)}$$

con $e_{(i)} = e'_{(j)}\Lambda^j{}_i$, $\Lambda \in L^{\uparrow}$. Pertanto, con riferimento alla definizione (3.3), ricaviamo

$$g'(a,b) = \eta_{ij}a'^i b'^j = \eta_{ij}\,\Lambda^i{}_p\,\Lambda^j{}_q\,a^p b^q = \eta_{pq}a^p b^q = g(a,b)$$

Abbiamo così ottenuto l'indipendenza cercata.

Nel seguito, il prodotto scalare (3.3) sarà indicato più brevemente con (a, b). La varietà $\mathcal{V}_4$, dotata di tale prodotto scalare, sarà detta lo *spazio-tempo di Minkowski.*

3.2 Sistemi di riferimento

Finora abbiamo tacitamente confuso l'idea di sistema di riferimento con quella di sistema di coordinate in $\mathcal{V}_4$. In realtà, questa identificazione è inutilmente riduttiva, in quanto un dato osservatore può scegliere le coordinate cartesiane nel proprio tri-spazio e l'origine dei tempi in infiniti modi diversi: in quest'ordine di idee, due sistemi di coordinate $x^1, \ldots, x^4$, $\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^4$ legati da una trasformazione del tipo

$$\begin{cases} \bar{x}^\alpha = R^\alpha_\beta\, x^\beta + a^\alpha \\ \bar{x}^4 = x^4 + a^4 \end{cases} \tag{3.5}$$

$(R \in O(3))$ corrispondono a tutti gli effetti allo stesso osservatore.

Cerchiamo di mettere a fuoco questo punto. In linea di principio, nel concetto di sistema di riferimento vorremmo codificare l'idea di una triplice infinità di "osservatori puntiformi", costituenti lo "spazio di riferimento" $\mathcal{V}_3$, ciascuno munito di un proprio orologio ideale. L'evoluzione di ciascun punto $\xi \in \mathcal{V}_3$ è descritta in $\mathcal{V}_4$ da una corrispondente linea di universo. L'evoluzione dell'intero spazio $\mathcal{V}_3$ — ossia, in senso figurato, l'evoluzione del sistema di riferimento — è quindi descritta da una famiglia Γ di linee di universo, detta una *congruenza*, in modo che $\forall\, p \in \mathcal{V}_4\ \exists\,!\ \gamma \in \Gamma : p \in \gamma$.

Reciprocamente, se riguardiamo la congruenza Γ come oggetto primitivo, possiamo ricostruire lo spazio di riferimento $\mathcal{V}_3$ come l'insieme delle curve di Γ. Formalmente, ciò si realizza introducendo in $\mathcal{V}_4$ la relazione di equivalenza

$$a \sim b \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists\, \gamma \in \Gamma :\ a, b \in \Gamma \tag{3.6}$$

In tal modo, lo spazio $\mathcal{V}_3$ viene ad essere identificato con lo spazio quoziente $\mathcal{V}_4/\sim$, i cui punti sono infatti, per definizione, le classi di equivalenza rispetto alla relazione (3.6), ossia le linee di Γ.

3.2.1 Riferimenti inerziali

Vediamo adesso come caratterizzare i riferimenti inerziali in ambito spazio–temporale. A tale proposito, riprendendo quanto visto nel Capitolo 2, indichiamo con x^i un sistema di coordinate affini in $\mathcal{V}_4$ associate ad un riferimento inerziale I. Ogni punto in quiete rispetto a I avrà una linea di universo descritta da $x^\alpha = \text{cost}$, $x^4 = \text{var}$. Quest'ultima rappresenta evidentemente una *retta* nello spazio (affine) $\mathcal{V}_4$. Per la definizione stessa di riferimento, la congruenza associata a I è pertanto una famiglia di rette parallele, univocamente determinata da un singolo versore tangente costante, ossia da un versore di tipo tempo, indicato con $e_{(4)}$, nello spazio modellatore V_4.

Per astrazione, d'ora innanzi identificheremo il riferimento col corrispondente versore temporale. In tal modo, subordinatamente alla scelta di una base in V_4, ogni riferimento inerziale risulta individuato da tre parametri reali.

A prima vista ciò può sembrare strano: la più generale trasformazione di Lorentz è infatti del tipo

$$\bar{x}^i = \Lambda^i{}_j\, x^j + a^i\,, \qquad a \in \mathbb{R}^4\,,\ \Lambda \in L^\uparrow. \tag{3.7}$$

Essendo $L^\uparrow$ un gruppo a sei parametri, la trasformazione in oggetto dipende da dieci variabili reali e non da tre soli parametri, come sopra suggerito.

D'altronde, in virtù del Teorema 2.2.1 si vede facilmente che le informazioni contenute in R e in a corrispondono a operazioni puramente geometriche (rotazioni degli assi, traslazione dell'origine degli assi e/o dei tempi), ossia, in ultima analisi, alla scelta delle coordinate spazio-temporali all'interno dello *stesso* sistema di riferimento.

Il solo contenuto cinematico della trasformazione è quello espresso dalla matrice Λ_C, la quale dipende appunto da tre parametri, in pieno accordo con quanto detto. In altri termini, l'identificazione di un generico riferimento inerziale con un versore di tipo tempo in V_4 realizza lo scopo di "depurare" il concetto di sistema di riferimento da ogni sovrastruttura geometrica non necessaria.

Vediamo come descrivere lo spazio di riferimento $\mathcal{V}_3$ associato ad un riferimento inerziale. A tal proposito, riprendiamo la definizione di $\mathcal{V}_3$ come quoziente di $\mathcal{V}_4$ rispetto alla relazione di equivalenza (3.6) e osserviamo che, nel caso di riferimento inerziale, essendo la congruenza di riferimento Γ una famiglia di rette di versore $e_{(4)}$, per ogni coppia di eventi $P, Q \in \mathcal{V}_4$ risulta:

$$P \sim Q \qquad \Longleftrightarrow \qquad (P - Q) \parallel e_{(4)}$$

Lo spazio $\mathcal{V}_3$ è quindi uno spazio affine, modellato sullo spazio quoziente $V_3 := V_4/e_{(4)}$, chiaramente isomorfo al sottospazio di $e_{(4)}^\perp \subset V_4$ perpendicolare ad

$e_{(4)}$. Abbiamo pertanto la decomposizione in somma diretta ortogonale

$$V_4 = V_3 \oplus L(e_{(4)})$$

Di conseguenza

$$\forall X \in V_4 \ \exists! \ \mathcal{P}_\Sigma(X) \in V_3 \,, \ \mathcal{P}_\Theta(X) \in \mathbb{R} \ : \ X = \mathcal{P}_\Sigma(X) + \mathcal{P}_\Theta(X)\, e_{(4)} \tag{3.8}$$

L'eq. (3.8) definisce due applicazioni lineari $\mathcal{P}_\Sigma$ e $\mathcal{P}_\Theta$, dette *operatori di proiezione* associati al riferimento I, il cui scopo è quello di determinare le componenti spaziale e temporale di un generico vettore libero in V_4.

Dalla (3.8), ricordando la definizione del prodotto scalare in V_4, otteniamo

$$(X, e_{(4)}) = (\mathcal{P}_\Sigma(X), e_{(4)}) + \mathcal{P}_\Theta(X)(e_{(4)}, e_{(4)}) = -\mathcal{P}_\Theta(X)$$

da cui anche

$$\mathcal{P}_\Theta(X) = -(X, e_{(4)}) \tag{3.9a}$$

$$\mathcal{P}_\Sigma(X) = X - \mathcal{P}_\Theta(X) e_{(4)} = X + (X, e_{(4)})\, e_{(4)} \tag{3.9b}$$

Nota 3.2.1. *Utilizzando le notazioni precedenti, consideriamo due eventi a, $b \in \mathcal{V}_4$ e indichiamo con x^4 la coordinata temporale associata al riferimento I. Essendo per definizione $x^4 = ct$, la separazione temporale Δt tra i due eventi nel giudizio di I è espressa dalla relazione*

$$c\Delta t = ct(b) - ct(a) = x^4(b) - x^4(a) = -((b-a), e_{(4)})$$

Per confronto con la (3.9a)*, quest'ultima può essere posta nella forma*

$$c\Delta t = \mathcal{P}_\Theta(b-a) \tag{3.10}$$

Analogamente, il vettore $\mathcal{P}_\Sigma(b-a)$ si identifica col segmento orientato congiungente le posizioni spaziali occupate da a e b nel tri-spazio associato a I, mentre la norma $\|\mathcal{P}_\Sigma(b-a)\|$ rappresenta la distanza fra tali posizioni. A tale proposito, cfr. anche la discussione successiva.

Sia ora $\eta : p = p(\xi)$ la linea di universo rappresentativa dell'evoluzione di un punto materiale in $\mathcal{V}_4$. Vogliamo determinare la velocità $\mathbf{v}$ del punto nel riferimento I e, tramite questa, la rappresentazione in termini cinematici del versore tangente a η.

Innanzi tutto, detto $X = dp/d\xi$ il vettore tangente a η nel punto $p(\xi)$, ricordiamo che, a meno di infinitesimi di ordine superiore, risulta $P(\xi + \Delta\xi) - P(\xi) = X\Delta\xi + \ldots$

Utilizzando quanto sopra detto circa il significato delle proiezioni spaziale e temporale di un segmento orientato in $\mathcal{V}_4$, dalla definizione stessa di velocità si ha quindi

$$\frac{\mathbf{v}}{c} = \lim_{\Delta\xi\to 0} \frac{\mathcal{P}_\Sigma(X\Delta\xi)}{\mathcal{P}_\Theta(X\Delta\xi)} = \frac{\mathcal{P}_\Sigma(X)}{\mathcal{P}_\Theta(X)} = \frac{X + (X, e_{(4)})e_{(4)}}{-(X, e_{(4)})} = -\frac{X}{(X, e_{(4)})} - e_{(4)}$$

o, equivalentemente

$$X = -(X, e_{(4)})\Big(\frac{\mathbf{v}}{c} + e_{(4)}\Big)$$

Infine, imponendo che X sia un versore, otteniamo:

$$(X, e_{(4)})^2\Big(\frac{v^2}{c^2} - 1\Big) = -1 \qquad \Longrightarrow \qquad (X, e_{(4)})^2 = \frac{1}{1 - v^2/c^2}$$

e quindi, essendo X diretto verso il futuro:

$$X = \gamma\left(e_{(4)} + \frac{\mathbf{v}}{c}\right) \quad \text{con} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{3.11}$$

Nota 3.2.2. *Siano I e I' due riferimenti inerziali, ed $e_{(4)}$, $e'_{(4)}$ i corrispondenti versori temporali. Detta $\mathbf{v}$ la velocità di I' rispetto a I, poniamo $\gamma = \gamma(\mathbf{v})$. Ricordando che, per definizione, $e'_{(4)}$ rappresenta il versore tangente alle linee di universo dei punti in quiete rispetto a I', per confronto con l'eq.* (3.11) *abbiamo l'espressione*

$$e'_{(4)} = \gamma\left(e_{(4)} + \frac{\mathbf{v}}{c}\right)$$

3.2.2 Coordinate

Ad ogni riferimento inerziale I può essere associato, in infiniti modi, un sistema di coordinate pseudo-cartesiane in $\mathcal{V}_4$. La cosa, ben nota, è stata posta a fondamento della presente geometrizzazione. Per completezza, rifacciamo il punto della situazione, alla luce dell'identificazione tra riferimenti inerziali e versori di tipo tempo in $\mathcal{V}_4$.

A tal fine, detto $e_{(4)} \in V_4$ il versore temporale di un riferimento inerziale I, cominciamo col completare a base ortonormale scegliendo ad arbitrio tre versori mutuamente ortogonali $e_{(1)}, e_{(2)}, e_{(3)}$ in $e_{(4)}^\perp$. Fissata poi ad arbitrio un'origine $o \in \mathcal{V}_4$, utilizziamo $\{o, e_{(1)}, \ldots, e_{(4)}\}$ come riferimento affine in $\mathcal{V}_4$. Tale riferimento, *adattato* al riferimento I, determina in $\mathcal{V}_4$ un corrispondente sistema di coordinate affini x^i, univocamente definito dalla costruzione (3.2).

Ancora una volta, vediamo quindi che l'associazione tra sistemi di riferimento e sistemi di coordinate presenta un ampio margine di discrezionalità, sia nel completamento di $e_{(4)}$ a base pseudo-ortonormale (tre parametri, corrispondenti alla scelta di una base ortonormale in $e_{(4)}^{\perp}$) sia nella scelta dell'origine $o \in \mathcal{V}_4$ (quattro parametri).

3.3 Operatori di proiezione

Ricordiamo che gli operatori $\mathcal{P}_\Theta$ e $\mathcal{P}_\Sigma$ relativi ad un riferimento inerziale I associano ad ogni $X \in V_4$ una componente temporale e una proiezione spaziale nel giudizio di I. Per costruzione tale decomposizione dipende strettamente da I. Viceversa, la conoscenza di $\mathcal{P}_\Theta$, $\mathcal{P}_\Sigma$ determina univocamente il versore $e_{(4)}$, e quindi il riferimento I.

Ciò significa, in sostanza, che un riferimento inerziale è completamente caratterizzato dal modo in cui esso scompone la realtà spazio-temporale in una parte spaziale e una temporale. Pertanto, in analogia con quanto già visto in precedenza, il legame tra riferimenti inerziali diversi può essere efficacemente descritto mettendo in relazione i relativi operatori di proiezione.

3.3.1 Ritardo degli orologi in movimento

Consideriamo un orologio ideale O in moto rettilineo uniforme con velocità $\mathbf{v}$ in un riferimento inerziale I di versore temporale $e_{(4)}$. Indichiamo con $e'_{(4)}$ il versore temporale associato al riferimento di quiete istantanea J di O.

Detti a e b due eventi appartenenti alla linea di universo di O, vogliamo stabilire il legame tra la separazione temporale Δt tra gli eventi stessi nel giudizio di I, e la separazione $\Delta\tau$ nel giudizio di J. Per la (3.10) si ha che

$$c\Delta t = \mathcal{P}_\Theta(b-a) \tag{3.12}$$

Analogamente, indicando con $\mathcal{P}'_\Theta$ la proiezione temporale nel riferimento J:

$$c\Delta\tau = \mathcal{P}'_\Theta(b-a) = -\left((b-a), e'_{(4)}\right)$$

Essendo J il riferimento di quiete istantanea di O, l'espressione precedente comporta

$$c\Delta\tau\, e'_{(4)} = -\left((b-a)\,, e'_{(4)}\right)\, e'_{(4)} = (b-a) \tag{3.13}$$

D'altronde, dalla Nota 3.2.2 otteniamo:

$$e'_{(4)} = \gamma\left(e_{(4)} + \frac{\mathbf{v}}{c}\right) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{P}_\Theta(e'_{(4)}) = \gamma \tag{3.14}$$

Dalle (3.12), (3.13) e (3.14) risulta infine:

$$c\Delta t = \mathcal{P}_\Theta(b-a) = c\Delta\tau\mathcal{P}_\Theta(e'_{(4)}) = \gamma\, c\, \Delta\tau$$
$$\Longrightarrow \ \Delta t = \gamma\Delta\tau \ \Longrightarrow \ \Delta\tau = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,\Delta t$$

Il fenomeno sopra descritto prende il nome di *ritardo degli orologi in movimento*.

3.3.2 Concetti metrici spaziali

Sia I un riferimento inerziale, $e_{(4)}$ il corrispondente versore temporale e $x^1, \ldots, x^4$ un sistema di coordinate in $\mathcal{V}_4$ adattate a I; indichiamo con $t = x^4/c$ la variabile temporale.

Definizione 3.3.1. *Per ogni $t_0 \in \mathbb{R}$, definiamo iperpiano di simultaneità relativo ad I all'istante t_0 il luogo di punti*

$$I_{t_0} = \left\{\, x \in \mathcal{V}_4 \;\middle|\; x^4(x) = ct_0 \,\right\} \subset \mathcal{V}_4$$

Tramite la Definizione 3.3.1, al variare di t, I determina una partizione di $\mathcal{V}_4$ in una famiglia a un parametro di iperpiani paralleli, ossia

$$\mathcal{V}_4 = \bigcup_{t\in\mathbb{R}} I_t$$

Indicata con $i_t \colon I_t \to \mathcal{V}_4$ l'inclusione canonica, possiamo dotare ogni iperpiano di simultaneità I_t di una metrica $\varphi_t := i_t^*(g)$, definita come pull-back rispetto a i_t della metrica spazio–temporale.

In tal modo, ciascun I_t acquista una struttura di spazio euclideo tridimensionale modellato sul sottospazio $e_{(4)}^\perp \subseteq V_4$. In particolare, per ogni coppia di eventi $a, b \in I_t$, la distanza spaziale tra a e b nel giudizio di I coincide per definizione con la distanza spazio–temporale tra gli eventi stessi.

Posto $x^\alpha(a) = a^\alpha, x^\alpha(b) = b^\alpha$, $x^4(a) = x^4(b) = ct$, quest'ultima è data da

$$\|b-a\|^2 = \eta_{ij}(b^i - a^i)(b^j - a^j) = \delta_{\alpha\beta}(b^\alpha - a^\alpha)(b^\beta - a^\beta) = \sum_{\alpha=1}^{3}(b^\alpha - a^\alpha)^2$$

Quanto detto consente di associare una struttura metrica allo spazio di riferimento $\mathcal{V}_3$ relativo a I. Detta $\pi\colon \mathcal{V}_4 \to \mathcal{V}_3$ la proiezione canonica associata alla relazione d'equivalenza (3.6), sappiamo che, per ogni $\xi \in \mathcal{V}_3$, l'immagina inversa $\pi^{-1}(\xi)$ coincide con la linea di universo in $\mathcal{V}_4$ rappresentativa dell'evoluzione di ξ.

L'applicazione $\pi_t := \pi_{|_{I_t}}\colon I_t \to \mathcal{V}_3$ è quindi un diffeomorfismo tra $\mathcal{V}_3$ e I_t, il cui inverso π_t^{-1} associa ad ogni punto in $\mathcal{V}_3$ la corrispondente posizione in I_t. Di conseguenza, sfruttando la metrica φ_t, possiamo definire la distanza tra due punti $\xi, \eta \in \mathcal{V}_3$ come la distanza tra le rispettive posizioni $\pi_t^{-1}(\xi)$, $\pi_t^{-1}(\eta)$ in I_t. Per ogni $t \in \mathbb{R}$, ciò induce su $\mathcal{V}_3$ una metrica

$$\widetilde{\varphi}_0 := \left(\pi_t^{-1}\right)^* \varphi_t \tag{3.15}$$

Verifichiamo che quest'ultima non dipende dal particolare iperpiano di simultaneità utilizzato. A tal fine osserviamo che dall'eq. (3.15) seguono le identificazioni

$$\widetilde{\varphi}_0 = \left(\pi_t^{-1}\right)^* \varphi_t = \left(\pi_t^{-1}\right)^* \big(i_t^*(g)\big) = \left(i_t \circ \pi_t^{-1}\right)^* (g)$$

In virtù di queste, il tensore $\widetilde{\varphi}_0$ coincide col pull-back della metrica di $\mathcal{V}_4$ tramite l'applicazione $i_t \circ \pi_t^{-1}\colon \mathcal{V}_3 \to \mathcal{V}_4$. D'altronde, utilizzando le variabili x^1, x^2, x^3 come coordinate in $\mathcal{V}_3$, l'applicazione $i_t \circ \pi_t^{-1}$ è rappresentata da

$$\xi \in \mathcal{V}_3 \implies \left(i_t \circ \pi_t^{-1}\right)(\xi) = \left(i_t \circ \pi_t^{-1}\right)\left(x^1(\xi), x^2(\xi), x^3(\xi)\right) = \left(x^\alpha(\xi), ct\right)$$

Raccogliendo i risultati otteniamo la relazione

$$\widetilde{\varphi}_0 = \left(i_t \circ \pi_t^{-1}\right)^* (g) = \delta_{\alpha\beta}\, dx^\alpha \otimes dx^\beta \tag{3.16}$$

dalla quale si deduce, in particolare, l'indipendenza di $\widetilde{\varphi}_0$ dalla scelta di t.

Definizione 3.3.2. *L'espressione (3.15) è detta la* metrica propria *(o metrica di riposo) dello spazio $\mathcal{V}_3$.*

3.3.3 Contrazione delle lunghezze

Con le notazioni precedenti, sia I' un secondo riferimento inerziale, e $I'_{t'}$ la corrispondente famiglia di iperpiani di simultaneità. Detti $\xi, \eta \in \mathcal{V}_3$ due punti in quiete nel riferimento I, la loro distanza nel giudizio di I' ad un generico istante t' si identifica con la distanza fra le intersezioni delle rispettive linee di universo con l'iperpiano $I'_{t'}$.

In tal modo, anche il riferimento I' induce una metrica $\widetilde{\varphi}'$ sullo spazio $\mathcal{V}_3$, *diversa* dalla metrica propria $\widetilde{\varphi}_0$. Per stabilire il legame tra $\widetilde{\varphi}'$ e $\widetilde{\varphi}_0$, scelto l'iperpiano $I'_{t'}$, sia $i_{t'}\colon I'_{t'} \to \mathcal{V}_4$ l'inclusione canonica, e $\varphi_{t'} = i^*_{t'}(g)$ il pull-back su $I'_{t'}$ della metrica spazio–temporale.

Nuovamente, la restrizione a $I'_{t'}$ della proiezione $\pi : \mathcal{V}_4 \to \mathcal{V}_3$ determina un diffeomorfismo $\chi_{t'} : I'_{t'} \to \mathcal{V}_3$, il cui inverso soddisfa la relazione

$$\chi^{-1}_{t'}(\xi) = \pi^{-1}(\xi) \cap I'_{t'} \quad \forall\, \xi \in \mathcal{V}_3 \tag{3.17}$$

Tramite $\chi^{-1}_{t'}$ possiamo valutare la distanza fra due punti $\xi, \eta \in \mathcal{V}_3$ all'istante t' nel giudizio di I': introdotto l'embedding $\psi_{t'} := i_{t'} \circ \chi^{-1}_{t'}\colon \mathcal{V}_3 \to \mathcal{V}_4$, consideriamo infatti il pull-back

$$\widetilde{\varphi}' \;:=\; \left(\chi^{-1}_{t'}\right)^* (\varphi_{t'}) \;=\; \left(\chi^{-1}_{t'}\right)^* \bigl(i^*_{t'}(g)\bigr) \;=\; \psi^*_{t'}(g) \tag{3.18}$$

Ricordiamo poi che, detti $e'_{(4)}$ il versore rappresentativo di I' e $\mathbf{v}$ la velocità di I' rispetto a I, dalla Nota 3.2.2 segue l'identificazione $e'_{(4)} = \gamma\left(e_{(4)} + \mathbf{v}/c\right)$.

Osserviamo infine che, nelle coordinate $x^1, \ldots, x^4$, gli iperpiani di simultaneità di I', in quanto perpendicolari a $e'_{(4)}$, hanno equazione cartesiana

$$\frac{v_\alpha x^\alpha}{c} - x^4 = \text{cost} \qquad \text{con } v_\alpha = \left(v, e_{(\alpha)}\right)$$

Ciò premesso, per procedere al calcolo del tensore (3.18), determiniamo in primo luogo la rappresentazione analitica dell'applicazione $\psi_{t'}$. In virtù dell'eq. (3.17), per ogni $\xi \in \mathcal{V}_3$ di coordinate $x^\alpha(\xi)$, l'immagine $\psi_{t'}(\xi) \in \mathcal{V}_4$ avrà coordinate $x^1, \ldots, x^4$ con

$$\begin{aligned} x^\alpha &= x^\alpha(\xi) \\ x^4 &= k + \frac{v_\alpha\, x^\alpha(\xi)}{c} \end{aligned}$$

Omettendo l'argomento ξ, ciò conduce alla relazione simbolica

$$\psi_{t'}\left(x^1, x^2, x^3\right) = \left(x^1, x^2, x^3, \frac{v_\alpha x^\alpha}{c} - k\right)$$

Unitamente all'eq. (3.18), questa dà luogo all'identificazione:

$$\widetilde{\varphi}' = \psi^*_{t'}(g) = \delta_{\alpha\beta}\, dx^\alpha \otimes dx^\beta - \frac{v_\alpha}{c} dx^\alpha \otimes \frac{v_\beta}{c} dx^\beta = \left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{v_\alpha v_\beta}{c^2}\right) dx^\alpha \otimes dx^\beta$$

Per confronto con l'eq. (3.16) ricaviamo infine la relazione

$$\widetilde{\varphi}' = \widetilde{\varphi}_0 - \frac{v_\alpha v_\beta}{c^2} dx^\alpha \otimes dx^\beta \tag{3.19}$$

L'eq. (3.19) mostra che il legame tra la valutazione delle distanze nei riferimenti I e in I' dipende espressamente dalla velocità relativa tra i riferimenti stessi. Ad esempio, data una sbarra in quiete rispetto ad I, e quindi in moto con velocità $\mathbf{v}$ rispetto a I', siano x^α e $x^\alpha + \Delta x^\alpha$ le coordinate degli estremi della sbarra nel tri-spazio di I, riferito a coordinate adattate.

Dette allora l_0 la lunghezza della sbarra "a riposo", ossia valutata nel riferimento I, e l la lunghezza nel giudizio di I', sussiste la relazione

$$l_0 = \sqrt{\sum_\alpha (\Delta x^\alpha)^2}, \qquad l = \sqrt{l_0^2 - \left(\frac{v_\alpha \Delta x^\alpha}{c^2}\right)^2} \leq l_0$$

Quest'ultima esprime il cosiddetto effetto di *contrazione delle lunghezze dei corpi in movimento*.

3.3.4 L'operatore j

Al fine di esprimere la legge di trasformazione degli operatori di proiezione al variare del riferimento inerziale introduciamo alcuni utili strumenti.

Definizione 3.3.3. *Detto $Z \in V_4$ un versore di tipo tempo, sia $j_Z \colon V_4 \to V_4$ l'applicazione lineare definita da*

$$j_Z\,(X) := X + 2\,(X, Z)\,Z \qquad \forall\, Z \in V_4$$

Sia inoltre $X = X_\parallel + X_\perp$ la scomposizione di un generico vettore $X \in V_4$ nelle sue componenti parallela e perpendicolare a Z.

Teorema 3.3.1. *L'operatore j_Z soddisfa le seguenti proprietà:*

a) $j_Z(X) = X_\perp - X_\parallel$ *(in particolare, $j_Z\,(X_\perp) = X_\perp$, $j_Z\left(X_\parallel\right) = -X_\parallel$)* (3.20a)

b) $j_Z^2 = id$ *(involutorio)* (3.20b)

c) $(j_Z(X), Y) = (X, j_Z(Y)) \quad \forall\, X, Y \in V_4$ *(simmetrico)* (3.20c)

d) $(j_Z(X), X) > 0 \quad \forall\, X \in V_4 \setminus \{0\}$ *(definito positivo)* (3.20d)

e) $(j_Z(X), j_Z(Y)) = (X, Y) \quad \forall\, X, Y \in V_4$ *(isometrico)* (3.20e)

Dimostrazione. ***a***) dalla Definizione 3.3.3 si deducono le relazioni

$$\begin{aligned} j_Z(X_\perp) &= X_\perp + 2(X_\perp, Z)Z = X_\perp \\ j_Z(X_\parallel) &= X_\parallel + 2(X_\parallel, Z)Z = X_\parallel - 2X_\parallel = -X_\parallel \\ j_Z(X) &= j_Z(X_\perp + X_\parallel) = X_\perp - X_\parallel \end{aligned}$$

b) dalla (3.20a) si ottiene

$$j_Z^2(X) = j_Z(X_\perp - X_\parallel) = X_\perp - (-X_\parallel) = X_\perp + X_\parallel = X$$

c) sempre in virtù della Definizione 3.3.3:

$$\begin{aligned} (j_Z(X), Y) &= (X, Y) + 2(X, Z)(Z, Y) = (X, Y) + (X, 2(Z, Y)Z) \\ &= (X, j_Z(Y)) \end{aligned}$$

d) essendo $X_\parallel$ di tipo tempo risulta $(X_\parallel, X_\parallel) \le 0$. Inoltre, se completiamo Z a base pseudo-ortonormale di V_4, ragionando per componenti otteniamo $(X_\perp, X_\perp) \ge 0$. Nell'ipotesi $X \neq 0$, almeno una delle due disuguaglianze è stretta e quindi

$$(j_Z(X), X) = \big(X_\perp - X_\parallel, X_\perp + X_\parallel\big) = (X_\perp, X_\perp) - (X_\parallel, X_\parallel) > 0$$

e) per la (3.20b) e la (3.20c) possiamo scrivere:

$$(j_Z(X), j_Z(Y)) = (j_Z^2, Y) = (X, Y) \qquad \square$$

Consideriamo ora due riferimenti inerziali I, I' e indichiamo con $e_{(4)}$, $e'_{(4)}$ i rispettivi versori temporali. Sia $\mathbf{v}$ la velocità di I' relativa ad I.

Nota 3.3.1. *Il vettore $e_{(4)} + e'_{(4)}$ è automaticamente di tipo tempo: essendo $\mathbf{v} \in e_{(4)}^\perp$, dalla Nota 3.2.2 ricaviamo infatti:*

$$\begin{aligned} \big(e_{(4)} + e'_{(4)}\,,\, e_{(4)} + e'_{(4)}\big) &= \Big((1+\gamma)\, e_{(4)} + \gamma\, \frac{\mathbf{v}}{c}\,,\, (1+\gamma)\, e_{(4)} + \gamma\, \frac{\mathbf{v}}{c}\Big) = \\ &= \frac{\gamma^2}{c^2}\, v^2 - (\gamma+1)^2 = \gamma^2 \left(\frac{v^2}{c^2} - 1\right) - 2\gamma - 1 = -2 - 2\gamma < 0 \end{aligned} \tag{3.21}$$

Con queste premesse, detto $Z := \frac{e_{(4)} + e'_{(4)}}{\|e_{(4)} + e'_{(4)}\|}$ il versore di $e_{(4)} + e'_{(4)}$, introduciamo la seguente

Definizione 3.3.4. *L'applicazione $j := j_Z$ è detta l'operatore di riflessione associato ai riferimenti I e I'.*

Si osservi che, per costruzione, j non dipende dall'ordine in cui vengono scelti i riferimenti.

Proposizione 3.3.1. *Con le notazioni adottate, si ha:*

a) $j\big(e_{(4)}\big) \ = -e'_{(4)}$ (3.22a)

b) $j\big(e'_{(4)}\big) \ = -e_{(4)}$ (3.22b)

c) $j\big(e^{\perp}_{(4)}\big) \ = \ \ e'^{\perp}_{(4)}$ (3.22c)

Dimostrazione. ***a***) dall'eq. (3.21) si ricavano le espressioni:

$$Z = \frac{e_{(4)} + e'_{(4)}}{\|e_{(4)} + e'_{(4)}\|} = \frac{e_{(4)} + e'_{(4)}}{\sqrt{2\,(1+\gamma)}} = \frac{(1+\gamma)\,e_{(4)} + \gamma\,\mathbf{v}/c}{\sqrt{2\,(1+\gamma)}} \tag{3.23}$$

$$\big(e_{(4)}\,,\, e_{(4)} + e'_{(4)}\big) = \big(e_{(4)}\,,\,(1+\gamma)\,e_{(4)} + \gamma\,\mathbf{v}/c\big) = -(\gamma+1)$$

in quanto $\big(\mathbf{v}, e_{(4)}\big) = 0$ ed $\big(e_{(4)}, e_{(4)}\big) = -1$. Dalla Definizione 3.3.3 otteniamo pertanto:

$$\begin{aligned}
j\big(e_{(4)}\big) &= e_{(4)} + 2\,\big(e_{(4)}, Z\big)\,Z = \\
&= e_{(4)} + \frac{2}{\|e_{(4)} + e'_{(4)}\|^2}\,\big(e_{(4)}\,,\,e_{(4)} + e'_{(4)}\big)\,\big(e_{(4)} + e'_{(4)}\big) = \\
&= e_{(4)} - \frac{2}{2\,(1+\gamma)}\,(1+\gamma)\,\big(e_{(4)} + e'_{(4)}\big) = e_{(4)} - \big(e_{(4)} + e'_{(4)}\big) = \\
&= -e'_{(4)}
\end{aligned}$$

b) grazie alla (3.20b) del Teorema 3.3.1 e a quanto appena visto possiamo scrivere

$$j\big(e'_{(4)}\big) = j\big(-j(e_{(4)})\big) = -j^2\big(e_{(4)}\big) = -e_{(4)}$$

c) essendo j un isomorfismo di spazi vettoriali, è sufficiente verificare $j\big(e^{\perp}_{(4)}\big) \subseteq e'^{\perp}_{(4)}$. Ed infatti, per ogni $X \in e^{\perp}_{(4)}$, utilizzando la (3.20e) otteniamo

$$\big(j(X), e'_{(4)}\big) = -\,\big(j\,(X)\,, j\big(e_{(4)}\big)\big) = -\,\big(X, e_{(4)}\big) = 0$$

e quindi $j\,(X) \in e'^{\perp}_{(4)}$ come si voleva. □

Nota 3.3.2. *Dal punto di vista geometrico l'applicazione* $j : V_4 \to V_4$ *rappresenta una riflessione rispetto all'iperpiano passante per l'origine e ortogonale a* $e_{(4)} + e'_{(4)}$. *D'altronde, detti* V_3 *e* V'_3 *gli spazi modellatori degli spazi di riferimento associati a* I *e* I', *sappiamo già che sussiste l'identificazione* $V_3 = e^{\perp}_{(4)}, V'_3 = e'^{\perp}_{(4)}$. *In questo senso, l'affermazione c) del Teorema 3.3.1 indica che l'operatore* j *pone in corrispondenza biunivoca i vettori spaziali relativi all'uno e all'altro riferimento, dando luogo ad un isomorfismo*

$$V_3 \longleftrightarrow V'_3 \tag{3.24}$$

3.3.5 Trasformazioni di Lorentz

Detti $\mathcal{P}_\Sigma\,, \mathcal{P}_\Theta$ gli operatori di proiezione associati al riferimento I e $\mathcal{P}'_\Sigma\,, \mathcal{P}'_\Theta$ quelli associati ad I', siamo adesso in grado di determinare la legge di trasformazione tra gli operatori stessi.

Teorema 3.3.2 (Trasformazioni di Lorentz: contenuto geometrico)**.** *Con le notazioni precedenti, sussistono le identificazioni:*

$$\textbf{\textit{a}})\quad \mathcal{P}'_\Sigma = j \circ \mathcal{P}_\Sigma \circ j = j\left(\mathcal{P}_\Sigma + \mathbf{v}\left((\gamma-1)\,\frac{\mathbf{v}\cdot\mathcal{P}_\Sigma}{v^2} - \frac{\gamma}{c}\,\mathcal{P}_\Theta\right)\right) \tag{3.25a}$$

$$\textbf{\textit{b}})\quad \mathcal{P}'_\Theta = -\mathcal{P}_\Theta \circ j = \gamma\left(\mathcal{P}_\Theta - \frac{\mathbf{v}\cdot\mathcal{P}_\Sigma}{c}\right) \tag{3.25b}$$

Per quanto riguarda la trasformazione inversa, risulta similmente:

$$\textbf{\textit{c}})\quad \mathcal{P}_\Sigma = j \circ \mathcal{P}'_\Sigma + \mathbf{v}\left((\gamma-1)\,\frac{\mathbf{v}\cdot j\circ\mathcal{P}'_\Sigma}{v^2} + \frac{\gamma}{c}\,\mathcal{P}'_\Theta\right) \tag{3.25c}$$

$$\textbf{\textit{d}})\quad \mathcal{P}_\Theta = \gamma\left(\mathcal{P}'_\Theta + \frac{\mathbf{v}\cdot j\circ\mathcal{P}'_\Sigma}{c}\right) \tag{3.25d}$$

Dimostrazione. ***a***) dalla relazione $\mathcal{P}_\Sigma + e_{(4)}\,\mathcal{P}_\Theta = \mathcal{P}'_\Sigma + e'_{(4)}\,\mathcal{P}'_\Theta = \mathrm{id}$ e dalla (3.20b) segue l'identità

$$j \circ \big(\mathcal{P}_\Sigma + e_{(4)}\,\mathcal{P}_\Theta\big) \circ j = \mathcal{P}'_\Sigma + e'_{(4)}\,\mathcal{P}'_\Theta$$

Poiché l'operatore $\mathcal{P}_\Theta$ assume valori in $\mathbb{R}$, per la linearità di j si ha

$$j \circ \big(e_{(4)}\,\mathcal{P}_\Theta\big) \circ j = j\big(e_{(4)}\big)\mathcal{P}_\Theta \circ j$$

da cui, ricordando l'eq. (3.22a) della Proposizione 3.3.1:

$$j \circ \mathcal{P}_\Sigma \circ j - e'_{(4)}\, \mathcal{P}_\Theta \circ j = \mathcal{P}'_\Sigma + e'_{(4)}\, \mathcal{P}'_\Theta \tag{3.26}$$

Essendo j un isomorfismo e $\mathcal{P}_\Sigma$ la proiezione spaziale risulta inoltre $\mathcal{P}_\Sigma \circ j\,(V_4) = \mathcal{P}_\Sigma\,(V_4) \subseteq e^\perp_{(4)}$, da cui, tenuto conto dell'eq. (3.22c), $j \circ \mathcal{P}_\Sigma \circ j\,(V_4) \subseteq e'^\perp_{(4)}$.
Infine, ricordando la scomposizione in somma diretta $V_4 = L(e'_{(4)}) \oplus e'^\perp_{(4)}$, l'equazione (3.26) si spezza nella coppia di relazioni

$$\mathcal{P}'_\Sigma = j \circ \mathcal{P}_\Sigma \circ j \tag{3.27}$$

$$\mathcal{P}'_\Theta = -\mathcal{P}_\Theta \circ j \tag{3.28}$$

Per completare la dimostrazione occorre solo sviluppare i calcoli: in virtù della (3.27) e della Definizione 3.3.4 di j, per ogni X in V_4 risulta

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_\Sigma \circ j(X) &= \mathcal{P}_\Sigma\left[X + \frac{2}{2(1+\gamma)}\left(X,\,(1+\gamma)\,e_{(4)} + \gamma\frac{\mathbf{v}}{c}\right)\left((1+\gamma)\,e_{(4)} + \gamma\frac{\mathbf{v}}{c}\right)\right] = \\ &= \mathcal{P}_\Sigma(X) + \frac{1}{1+\gamma}\left(X,\,(1+\gamma)\,e_{(4)} + \gamma\frac{\mathbf{v}}{c}\right)\gamma\frac{\mathbf{v}}{c}\end{aligned}$$

in quanto $\mathcal{P}_\Sigma(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ e $\mathcal{P}_\Sigma\big(e_{(4)}\big) = 0$.

Essendo per la (3.9a) $\big(X, e_{(4)}\big) = -\mathcal{P}_\Theta(X)$, ed essendo altresì

$$(X, \mathbf{v}) = \big(\mathcal{P}_\Sigma(X) + \mathcal{P}_\Theta(X)\,e_{(4)}, \mathbf{v}\big) = \big(\mathcal{P}_\Sigma(X), \mathbf{v}\big) = \mathcal{P}_\Sigma(X)\cdot\mathbf{v}$$

otteniamo

$$\mathcal{P}_\Sigma \circ j(X) = \mathcal{P}_\Sigma(X) + \mathbf{v}\left(\frac{\gamma^2\,\mathbf{v}\cdot\mathcal{P}_\Sigma(X)}{(1+\gamma)\,c^2} - \frac{\gamma\,\mathcal{P}_\Theta(X)}{c}\right)$$

Infine, utilizzando l'identità $\frac{\gamma^2}{c^2} = \frac{\gamma^2-1}{v^2} = \frac{(\gamma+1)(\gamma-1)}{v^2}$ e ripristinando la notazione operatoriale l'eq. (3.27) si riscrive

$$\mathcal{P}'_\Sigma = j \circ \mathcal{P}_\Sigma \circ j = j\left[\mathcal{P}_\Sigma + \mathbf{v}\left(\frac{\gamma-1}{v^2}\,\mathbf{v}\cdot\mathcal{P}_\Sigma - \frac{\gamma}{c}\,\mathcal{P}_\Theta\right)\right]$$

b) in modo analogo, elaboriamo la (3.28).

Poiché $\mathcal{P}_\Theta\big(e_{(4)}\big) = -\,\big(e_{(4)}, e_{(4)}\big) = 1$ e $\mathcal{P}_\Theta(\mathbf{v}) = 0$ per ogni $X \in V_4$ risulta:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{P}_\Theta \circ j(X) = \mathcal{P}_\Theta(X) + \Big(X\,,\,(1+\gamma)\,e_{(4)} + \frac{\gamma}{c}\,\mathbf{v}\Big) = \\
&= \mathcal{P}_\Theta(X) - (1+\gamma)\,\mathcal{P}_\Theta(X) + \frac{\gamma}{c}\,\mathbf{v}\cdot\mathcal{P}_\Sigma(X) = -\gamma\Big(\mathcal{P}_\Theta(X) - \frac{\mathbf{v}\cdot\mathcal{P}_\Sigma(X)}{c}\Big) \\
&\Longrightarrow \quad \mathcal{P}'_\Theta = -\mathcal{P}_\Theta \circ j = \gamma\Big(\mathcal{P}_\Theta - \frac{v\cdot\mathcal{P}_\Sigma}{c}\Big)
\end{aligned}$$

c) per evidenti ragioni di simmetria, per ottenere la trasformazione inversa è sufficiente determinare la velocità $\mathbf{w}$ di I rispetto a I', effettuare nella (3.25a) gli scambi $\mathcal{P}_\Sigma \leftrightarrow \mathcal{P}'_\Sigma$, $\mathcal{P}_\Theta \leftrightarrow \mathcal{P}'_\Theta$ e sostituire ovunque $\mathbf{v}$ con $\mathbf{w}$. Sviluppiamo quanto detto:

$$\begin{aligned}
&e'_{(4)} = \gamma\Big(e_{(4)} + \frac{\mathbf{v}}{c}\Big) \quad\Longrightarrow\quad j\big(e'_{(4)}\big) = \gamma\Big(j\big(e_{(4)}\big) + \frac{j(\mathbf{v})}{c}\Big) \quad\Longrightarrow \\
&\Longrightarrow\quad e_{(4)} = -\,j\big(e'_{(4)}\big) = \gamma\Big(e'_{(4)} - \frac{j(\mathbf{v})}{c}\Big) \quad\Longrightarrow\quad \mathbf{w} = -j(\mathbf{v})
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Effettuando gli scambi e le sostituzioni indicate ed utilizzando, ove necessario, le identità $j(\mathbf{v})\cdot\mathcal{P}'_\Sigma = \mathbf{v}\cdot j\,\mathcal{P}'_\Sigma$, $j(\mathbf{v})^2 = v^2$, e quindi anche $\gamma(\mathbf{v}) = \gamma(j(\mathbf{v}))$, dovute alle proprietà dell'operatore j elencate nelle equazioni (3.20), otteniamo

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_\Sigma &= j\Big[\mathcal{P}'_\Sigma - j(\mathbf{v})\Big((\gamma-1)\,\frac{-j(\mathbf{v})\cdot\mathcal{P}'_\Sigma}{j(\mathbf{v})^2} - \frac{\gamma}{c}\,\mathcal{P}'_\Theta\Big)\Big] = \\
&= j\circ\mathcal{P}'_\Sigma + \mathbf{v}\Big[(\gamma-1)\,\frac{\mathbf{v}\cdot j\,\mathcal{P}'_\Sigma}{v^2} + \frac{\gamma}{c}\,\mathcal{P}'_\Theta\Big]
\end{aligned}$$

d) in completa analogia con quanto appena visto, partendo dalla (3.25b) e operando nel modo descritto al punto **c**) otteniamo

$$\mathcal{P}_\Theta = \gamma\Big(\mathcal{P}'_\Theta + \frac{j(\mathbf{v})\cdot\mathcal{P}'_\Sigma}{c}\Big) = \gamma\Big(\mathcal{P}'_\Theta + \frac{\mathbf{v}\cdot j\,\mathcal{P}'_\Sigma}{c}\Big) \qquad \square$$

Nota 3.3.3. *Sotto il profilo fisico, il contenuto dell'eq.* (3.29) *è facilmente interpretato osservando che, in virtù dell'identificazione* $j\big(e^{\perp}_{(4)}\big) = e'^{\perp}_{(4)}$, *la velocità* $\boldsymbol{w} = -j(\boldsymbol{v})$ *altro non è che l'opposta della velocità* $\boldsymbol{v}$, *convertita in vettore spaziale rispetto a* I' *mediante l'azione di* j *(cfr. Nota 3.3.2). Ciò costituisce un'evidente estensione di quanto avviene in Fisica classica in cui, in virtù degli assiomi di spazio e tempo assoluti, risulta più semplicemente* $\boldsymbol{w} = -\boldsymbol{v}$.

Il Teorema 3.3.2 esprime il contenuto geometrico delle trasformazioni di Lorentz: esso stabilisce infatti la relazione fra i diversi modi di disaccoppiare i concetti di spazio e di tempo nel giudizio di osservatori inerziali diversi. Le equazioni (3.25) possono quindi essere assunte come punto di partenza per lo studio del legame tra riferimenti inerziali diversi.

3.3.6 Trasformazioni di Lorentz pure: espressione in coordinate

Scopo di questo paragrafo è esprimere in coordinate le equazioni (3.25a) e (3.25b) del Teorema 3.3.2 e porle a confronto coi risultati tradizionali relativi alle trasformazioni di Lorentz. A tal fine, mediante il procedimento descritto nel § 3.2.2, completiamo $e_{(4)}$ ad un riferimento affine $\{o, e_{(1)}, \dots, e_{(4)}\}$ in $\mathcal{V}_4$ e indichiamo con x^i le corrispondenti coordinate.

Dalle equazioni (3.24), (3.20e) segue facilmente che i vettori $e'_{(\alpha)} := j\big(e_{(\alpha)}\big)$ costituiscono a loro volta base ortonormale in V'_3, per ciò stesso completando $e'_{(4)}$ a base pseudo-ortonormale di V_4. Preservando l'origine o, otteniamo così un riferimento affine $\{o, e'_{(1)}, \dots, e'_{(4)}\}$, e quindi un sistema di coordinate $\bar{x}^i$ adattate a I'.

In virtù di quanto detto, per ogni evento $x \in \mathcal{V}_4$ coesistono le due rappresentazioni

$$(x - o) = x^i(x)\, e_{(i)} = \bar{x}^i(x)\, e'_{(i)}$$

Tenuto conto dell'eq. (3.25a) e delle evidenti identificazioni

$$\mathcal{P}_\Theta(x - o) = -\big(x^i(x)\, e_{(i)}\,,\, e_{(4)}\big) = x^4(x)\,, \qquad \mathcal{P}_\Sigma(x - o) = x^\alpha(x)\, e_{(\alpha)}$$

possiamo scrivere

$$\begin{aligned}
\bar{x}^\alpha(x)\, e'_{(\alpha)} &= \mathcal{P}'_\Sigma(x - o) = \\
&= j\left\{\mathcal{P}_\Sigma(x - o) + \mathbf{v}\left[(\gamma - 1)\frac{\mathbf{v}\cdot\mathcal{P}_\Sigma(x - o)}{v^2} - \frac{\gamma}{c}\,\mathcal{P}_\Theta(x - o)\right]\right\} = \\
&= j\left\{x^\alpha(x)\, e_{(\alpha)} + \mathbf{v}\left[(\gamma - 1)\frac{v\cdot\mathcal{P}_\Sigma(x - o)}{v^2} - \frac{\gamma}{c}\, x^4(x)\right]\right\}
\end{aligned}$$

da cui, posto $\mathbf{v} = v^\alpha e_{(\alpha)}$ e $x^4 = ct$

$$\bar{x}^\alpha(x)\, e'_{(\alpha)} = x^\alpha(x)\, j\big(e_{(\alpha)}\big) + v^\alpha j\left(e_{(\alpha)}\right)\left[(\gamma - 1)\frac{v_\alpha\, x^\alpha(x)}{v^2} - \frac{\gamma}{c}\, ct(x)\right]$$

Ricordando la definizione $e'_{(\alpha)} = j\big(e_{(\alpha)}\big)$, omettendo l'argomento x ed esplicitando le componenti dei vari vettori coinvolti otteniamo in tal modo:

$$\bar{x}^\alpha = x^\alpha + v^\alpha \left[(\gamma - 1) \frac{v_\alpha \, x^\alpha}{v^2} - \gamma t \right] \tag{3.30}$$

Analogamente, utilizzando l'eq. (3.25b) del Teorema 3.3.2:

$$\bar{x}^4(x) = \mathcal{P}'_\Theta(x - o) = \gamma \left[\mathcal{P}_\Theta(x - o) - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathcal{P}_\Sigma(x - o)}{c} \right] = \gamma \left[x^4(x) - \frac{v_\alpha \, x^\alpha(x)}{c} \right]$$

da cui, ponendo $\bar{x}^4 = c\bar{t}$ e procedendo come sopra:

$$\bar{t} = \gamma \left(t - \frac{v_\alpha x^\alpha}{c^2} \right) \tag{3.31}$$

Le equazioni (3.30), (3.31) esprimono la cosiddetta trasformazione di Lorentz *pura*. Come più volte ricordato, ogni altro sistema di coordinate $\bar{x}'^i$ adattate a I' è legato alle $\bar{x}^i$ da una trasformazione:

$$\begin{cases} \bar{x}'^\alpha = R^{\ \alpha}_{\beta} \, \bar{x}^\beta + a^\alpha \\ \bar{x}'^4 = \bar{x}^4 + a^4 \end{cases} \qquad a \in \mathbb{R}^4, \ R \in O(3) \tag{3.32}$$

corrispondente a una rotazione R della base spaziale $e'_{(\alpha)}$ e ad una traslazione dell'origine di un vettore $\mathbf{a}$. Queste operazioni, ancorché legittime, sono però prive di contenuto cinematico in quanto, come già osservato, un sistema di riferimento sceglie ad arbitrio il proprio sistema di coordinate.

Per quanto appena visto, la trasformazione di Lorentz pura caratterizza completamente il legame fra due osservatori inerziali assegnati: la più generale trasformazione è ottenibile da questa mediante composizione col gruppo descritto dalle equazioni (3.32).

3.3.7 Concetto di non rotazione e trasformazioni pure

Esaminiamo ora un aspetto geometrico delle trasformazioni pure destinato a giocare un ruolo essenziale nello studio del moto senza rotazione. Proviamo cioè che tali trasformazioni rappresentano la controparte relativistica delle trasformazioni di Galileo ad assi paralleli, nel senso ordinario (tridimensionale) del termine.

Per procedere in tal senso, occorre introdurre una nuova nozione di non rotazione, in quanto quella classica, legata al parallelismo degli assi, è inapplicable: con le notazioni del Capitolo precedente, posto $V_3 = e^{\perp}_{(4)}$, $V'_3 = e'^{\perp}_{(4)}$ risulta infatti $e_{(\alpha)} \in V_3, e'_{(\alpha)} \in V'_3$.

Pertanto, in generale, i versori $e_{(\alpha)}, e'_{(\alpha)}$ appartengono a sottospazi *diversi* di V_4, seppure resi isomorfi dall'azione dell'operatore j (vedi (3.24).

Indichiamo con $V_2 := V_3 \cap V'_3$ il bi-spazio formato dai vettori aventi carattere spaziale nel giudizio di entrambi gli osservatori I e I' e osserviamo che, per ogni $Y \in V_2$, la validità delle relazioni $\big(Y, e_{(4)}\big) = \big(Y, e'_{(4)}\big) = 0$ comporta automaticamente

$$j(Y) = Y \tag{3.33}$$

Sia ora $k \in V_3$ un versore ortogonale a V_2. Per il Teorema 3.3.1 il vettore $k' := j(k)$ è allora un versore appartenente a V'_3 ed ortogonale a V_2. Infatti, l'eq. (3.20e) comporta la relazione $\|j(k)\|^2 = \|k\|^2 = 1$, mentre per le (3.20c), (3.33), per ogni $Y \in V_2$ risulta $(k', Y) = (j(k), Y) = (k, j(Y)) = (k, Y) = 0$.

Sussistono pertanto le seguenti scomposizioni in somma diretta:

$$V_3 = V_2 \oplus L(k) \qquad \text{e} \qquad V'_3 = V_2 \oplus L(k') \tag{3.34}$$

le quali, essendo k determinato a meno del segno, risultano univocamente stabilite.

Definizione 3.3.5. *Un vettore $X' \in V'_3$ è detto* non ruotato *rispetto a un vettore $X \in V_3$ se ambedue hanno la stessa proiezione ortogonale su V_2 e soddisfano $(X, k) = (X', k')$. Equivalentemente, con riferimento alle scomposizioni* (3.34)*, X' è non ruotato rispetto a X se e solo se esistono un vettore $Y \in V_2$ ed uno scalare $\alpha \in \mathbb{R}$ tali da dar luogo alle rappresentazioni*

$$X = Y + \alpha k\,, \qquad X' = Y + \alpha k'$$

La Definizione 3.3.5 soddisfa il principio di corrispondenza: due vettori appartenenti all'intersezione $V_3 \cap V'_3$ risultano infatti non ruotati l'uno rispetto all'altro se e solo se sono uguali. Nel caso in cui sussista l'identificazione $V_3 = V'_3$ (come accade in Fisica classica), i concetti di non rotazione e parallelismo vengono pertanto a coincidere.

Il Teorema seguente esplicita il legame tra l'operatore j e il concetto di non rotazione, già anticipato (a parole) nella Nota 3.3.2.

Teorema 3.3.3. *Il vettore $X' \in V'_3$ è non ruotato rispetto a $X \in V_3$ se e solo se $X' = j(X)$.*

Dimostrazione. Comunque si scelgano $X \in V_3\,,\ X' \in V'_3\,$, in virtù delle scomposizioni (3.34), esistono due vettori $Y, Y' \in V_2$ e due scalari $\alpha, \alpha' \in \mathbb{R}$ tali da dar luogo alle rappresentazioni

$$X = Y + \alpha k \qquad\qquad X' = Y' + \alpha' k'$$

Ora, per definizione, X' è non ruotato rispetto a X se e solo se $Y = Y'$ e $\alpha = \alpha'$, la qual cosa, unitamente alle relazioni $k' = j(k)$ e $j(Y) = Y$, è chiaramente equivalente a $j(X) = X'$. □

Siamo adesso in grado di esplicitare l'annunciata caratterizzazione geometrica delle trasformazioni pure.

Corollario 3.3.1. *Siano I, I' due osservatori inerziali, $\{o, e_{(i)}\}$, $\{o', e'_{(i)}\}$ due riferimenti affini adattati agli osservatori stessi, e $x^i, \bar{x}^i$ i corrispondenti sistemi di coordinate pseudo-cartesiane in $\mathcal{V}_4$. La trasformazione $\bar{x}^i = \Lambda^i{}_j\, x^j + a^i$ è allora una trasformazione di Lorentz* pura *se e solo se i vettori $e'_{(\alpha)}$ sono* non ruotati *rispetto agli $e_{(\alpha)}$.*

La dimostrazione segue direttamente dal Teorema 3.3.3, essendo una trasformazione pura caratterizzata dalla condizione $e'_{(\alpha)} = j\left(e_{(\alpha)}\right)$. □

3.4 Quadrivelocità e quadriaccelerazione

Per completezza, riprendiamo alcune definizioni già viste nei corsi istituzionali. Consideriamo l'evoluzione di una particella, descritta da una linea di universo di tipo tempo $p : x^i = x^i(\xi)$, con x^i coordinate adattate ad un riferimento inerziale I. Sia τ il tempo proprio lungo p, identico, per definizione, al tempo misurato da un orologio ideale solidale alla particella.

Definizione 3.4.1. *La* quadrivelocità *di p è il vettore $V \in V_4$ definito da*

$$V = \frac{dx^i}{d\tau}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p$$

ossia il vettore tangente alla curva p, parametrizzata mediante il tempo proprio.

Ricordiamo che il riferimento di quiete istantanea di p all'istante τ è il riferimento inerziale identificato dal versore tangente a p all'istante stesso. Al variare di τ viene quindi determinata una famiglia a un parametro di riferimenti inerziali, cui ci si riferisce con l'appellativo generico di "riferimento di quiete". Detta $\mathbf{v}$ la velocità del riferimento di quiete istantanea rispetto ad I, ossia la velocità istantanea della particella nel riferimento I, il postulato degli orologi garantisce l'identificazione $\gamma d\tau = dt$, con $\gamma = \gamma(\mathbf{v})$.

Indicate con $v^\alpha = dx^\alpha/dt$ le componenti di $\mathbf{v}$ nel sistema di coordinate x^i, quanto detto comporta l'identificazione

$$(V,V) = \gamma^2 \left(\frac{dx^i}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p , \frac{dx^i}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p \right) = \gamma^2 \left(\sum_{\alpha=1}^{3} (v^\alpha)^2 - c^2 \right) =$$
$$= \gamma^2 \big(v^2 - c^2\big) = \frac{1}{1 - v^2/c^2} \big(v^2 - c^2\big) = -c^2$$

Come conseguenza otteniamo che:

- il versore tangente a p diretto verso il futuro è
$$\frac{V}{\sqrt{-(V,V)}} = \frac{V}{\sqrt{-(-c^2)}} = \frac{V}{c} \tag{3.35}$$
- l'ascissa curvilinea s lungo p coincide, a meno del fattore c, con il tempo proprio τ: soddisfa cioè $ds = cd\tau$.

In particolare, confrontando l'eq. (3.35) con la (3.11), otteniamo la rappresentazione

$$\frac{V}{c} = \gamma \left(e_{(4)} + \frac{\mathbf{v}}{c} \right) \implies V = \gamma \big(c e_{(4)} + \mathbf{v} \big)$$

La conoscenza di V è quindi equivalente a quella di $\mathbf{v}$ in qualsiasi riferimento inerziale.

Definizione 3.4.2. *La* quadriaccelerazione *di p è la derivata assoluta di V lungo p* [1]*:*

$$A := \frac{DV}{D\tau}$$

Essendo $(V,V) = \text{cost}$, la quadriaccelerazione risulta ortogonale alla quadrivelocità. Per le proprietà della derivata covariante risulta infatti

$$(A,V) = \left(\frac{DV}{D\tau}, V \right) = \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} (V,V) = 0 \implies A \perp V \tag{3.36}$$

[1] Ricordiamo che, per definizione, la derivata $\frac{D}{D\tau}$ coincide con la derivata ordinaria $\frac{d}{d\tau}$ ogniqualvolta si operi in coordinate pseudo-cartesiane.

Detta **a** l'accelerazione di p relativa ad I e ricordando il postulato degli orologi, si hanno inoltre le identificazioni

$$
\begin{aligned}
A = \frac{DV}{D\tau} = \gamma\,\frac{DV}{Dt} = \gamma\,\frac{D}{Dt}\left(\gamma\left(ce_{(4)} + \mathbf{v}\right)\right) = \\
= \gamma\dot{\gamma}\big(ce_{(4)} + \mathbf{v}\big) + \gamma^2\,\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \dot{\gamma}V + \gamma^2\mathbf{a}
\end{aligned}
\tag{3.37}
$$

Tramite la (3.37) valutiamo l'effetto degli operatori di proiezione su A:

$$
\mathcal{P}_\Sigma(A) = \gamma\dot{\gamma}\mathbf{v} + \gamma^2\mathbf{a} \qquad\qquad \mathcal{P}_\Theta(A) = \gamma\dot{\gamma}c \tag{3.38}
$$

In particolare, nel sistema di quiete istantanea di p, l'eq. (3.38) implica l'identificazione

$$
\mathcal{P}_\Sigma(A) = \mathbf{a}\,, \qquad \mathcal{P}_\Theta(A) = 0 \;\;\Rightarrow A = \mathcal{P}_\Sigma(A) = \mathbf{a} \tag{3.39}
$$

La quadriaccelerazione coincide pertanto con l'accelerazione ordinaria, valutata nel riferimento di quiete istantanea.

Capitolo 4

Moto senza rotazione

4.1 Trasporto senza rotazione

Dopo aver stabilito il significato dell'operatore j e introdotto le principali nozioni di cinematica in ambito quadridimensionale, siamo in grado di stabilire sotto quali ipotesi il moto di un corpo risulti intrinsecamente "non rotatorio", e di descrivere come ciò appaia nel giudizio di un generico riferimento inerziale.

Innanzi tutto, riprendiamo la nozione di riferimento di quiete istantanea lungo una linea di universo p. Come già detto, tale riferimento coincide, ad ogni istante τ, col riferimento I_τ identificato dal versore $e_{(4)}(\tau) = V(\tau)/c$ tangente a p nel punto $p(\tau)$.

In determinate circostanze (ad esempio, nel caso attualmente in studio, per dare significato operativo al concetto di "rotazione" di un corpo) può essere utile associare a I_τ un sistema di coordinate pseudo-cartesiane centrate in $p(\tau)$: a tal fine, come più volte indicato, è sufficiente completare $e_{(4)}(\tau)$ a base pseudo-ortonormale di V_4 con tre versori $e_{(\alpha)}(\tau)$. Ciò determina una base ortonormale mobile lungo p, formata dal versore tangente a p e da una terna di assi spaziali centrati nella particella in moto.

Per aiutare l'intuizione, può essere utile materializzare la situazione, pensando ad un corpo in movimento di dimensioni trascurabili, ma in grado di identificare ad ogni istante tre direzioni spaziali mutuamente ortogonali: ad esempio tre sbarrette saldate l'un l'altra ad angolo retto, o un piccolo ellissoide (non di rotazione).

Con queste premesse, cerchiamo adesso un criterio atto a caratterizzare la non rotazione del corpo. Sottolineiamo che l'obiettivo è quello di stabilire un criterio *intrinseco*, da non confondere con quello di "non rotazione nel giudizio di un assegnato riferimento inerziale", concettualmente più semplice, ma privo dei necessari requisiti di invarianza al variare del riferimento adottato.

Definizione 4.1.1. *Indichiamo con*

$$V_3(p) = \bigcup_{\tau\in\mathbb{R}} \left(e_{(4)}\left(\tau\right)\right)^{\perp}$$

il fibrato vettoriale su $\mathbb{R}$ *formato dalla totalità dei vettori ortogonali a* $e_{(4)}(\tau)$ *lungo* p. *Ogni sezione* $X\colon \mathbb{R} \to V_3(p)$, *ossia ogni campo vettoriale soddisfacente* $X(\tau) \in e_{(4)}(\tau)^{\perp}\ \forall\tau\in\mathbb{R}$, *sarà detto un* campo vettoriale spaziale *lungo* p.

Per ogni coppia $\tau, \tau' \in \mathbb{R}$, introduciamo il versore

$$Z\left(\tau,\tau'\right) := \frac{e_{(4)}(\tau)+e_{(4)}(\tau')}{\|e_{(4)}(\tau)+e_{(4)}(\tau')\|} = \frac{V(\tau)+V(\tau')}{\|V(\tau)+V(\tau')\|}$$

e indichiamo con $j_{(\tau,\tau')} := j_{Z(\tau,\tau')}$ il corrispondente operatore di riflessione, chiaramente legato allo studio delle trasformazioni tra i riferimenti I_τ e $I_{\tau'}$.

Definizione 4.1.2. *Un campo vettoriale spaziale* X *è detto* trasportato senza rotazione *lungo* p *se*

$$\lim_{\delta\tau\to 0}\frac{X\left(\tau+\delta\tau\right)-j_{(\tau,\tau+\delta\tau)}\left(X\left(\tau\right)\right)}{\delta\tau} = 0 \qquad \forall\tau\in\mathbb{R} \tag{4.1}$$

ossia se la differenza $X\left(\tau+\delta\tau\right)-j_{(\tau,\tau+\delta\tau)}\left(X\left(\tau\right)\right)$ *è infinitesima di ordine superiore a* $\delta\tau$ *per* $\delta\tau\to 0$ [1].

Proposizione 4.1.1. *Un campo vettoriale spaziale* X *è trasportato senza rotazione lungo* p *se e solo se*

$$\mathcal{P}_\Sigma\left(\frac{DX}{D\tau}\right) = 0$$

dove $\frac{D}{D\tau}$ *è la derivata assoluta lungo* p, *e* $\mathcal{P}_\Sigma$ *l'operatore di proiezione associato a* I_τ.

Dimostrazione. In virtù della definizione 3.3.3 dell'operatore j abbiamo:

$$j_{(\tau,\tau+\delta\tau)}\left(X\left(\tau\right)\right) = X(\tau) + 2\left(X(\tau)\,,\,\frac{e_{(4)}(\tau)+e_{(4)}(\tau+\delta\tau)}{\|e_{(4)}(\tau)+e_{(4)}(\tau+\delta\tau)\|}\right)Z(\tau,\tau+\delta\tau)$$

Essendo per ipotesi $\left(X(\tau),e_{(4)}(\tau)\right) = 0$ nulla vieta di riscrivere l'espressione a secondo membro nella forma più conveniente

$$X(\tau) + 2\left(X(\tau),e_{(4)}(\tau+\delta\tau)-e_{(4)}(\tau)\right)\frac{e_{(4)}(\tau)+e_{(4)}(\tau+\delta\tau)}{\|e_{(4)}(\tau)+e_{(4)}(\tau+\delta\tau)\|^2}$$

[1] Tale differenza è interpretabile intuitivamente come la rotazione infinitesima subita dal vettore X tra gli istanti τ e $\tau+\delta\tau$.

In tal modo, la condizione di trasporto senza rotazione si riscrive

$$\lim_{\delta\tau\to 0} \frac{X(\tau+\delta\tau)-X(\tau)}{\delta\tau} = \\ = \lim_{\delta\tau\to 0} 2\left(X(\tau)\,,\ \frac{e_{(4)}(\tau+\delta\tau)-e_{(4)}(\tau)}{\delta\tau}\right)\frac{e_{(4)}(\tau)+e_{(4)}(\tau+\delta\tau)}{\|e_{(4)}(\tau)+e_{(4)}(\tau+\delta\tau)\|^2}$$

Utilizzando l'identità

$$\lim_{\delta\tau\to 0}\frac{e_{(4)}(\tau)+e_{(4)}(\tau+\delta\tau)}{\|e_{(4)}(\tau)+e_{(4)}(\tau+\delta\tau)\|^2} = \frac{1}{2}\,e_{(4)}(\tau)$$

e passando al limite otteniamo:

$$\frac{DX}{D\tau} = \left(X, \frac{De_{(4)}}{D\tau}\right) e_{(4)} = -\left(\frac{DX}{D\tau}, e_{(4)}\right) e_{(4)} \tag{4.2}$$

l'ultima uguaglianza essendo conseguenza dell'identità $\big(X, e_{(4)}\big) = 0$. Dall'eq. (4.2) segue immediatamente $\frac{DX}{D\tau} \parallel e_{(4)}$, da cui la tesi. □

Per mezzo della Proposizione 4.1.1 abbiamo convertito il contenuto della Definizione 4.1.2 in una più immediata, e probabilmente anche più naturale (vedi la (4.1)), espressione differenziale.

4.2 Trasporto di Fermi–Walker

Generalizziamo quanto visto nel paragrafo precedente mediante la seguente

Definizione 4.2.1. *Detto X un campo vettoriale (non necessariamente spaziale) definito lungo p, definiamo*

$$\frac{D^{FW}X}{D\tau} = \mathcal{P}_\Sigma\left(\frac{D\mathcal{P}_\Sigma(X)}{D\tau}\right) + \frac{D\mathcal{P}_\Theta(X)}{D\tau} e_{(4)}$$

L'operatore $\frac{D^{FW}}{D\tau}$ prende il nome di derivata di Fermi–Walker *lungo p. Un campo vettoriale X soddisfacente $\frac{D^{FW}X}{D\tau} = 0$ è detto* trasportato secondo Fermi–Walker *lungo p.*

Vediamo alcune conseguenze della Definizione 4.2.1. Grazie alla Proposizione 4.1.1, per i campi vettoriali spaziali (che soddisfano l'evidente identità $\mathcal{P}_\Sigma(X) = X$) il trasporto di Fermi–Walker coincide col trasporto senza rotazione. In questo senso, la Definizione 4.2.1 si può considerare un'estensione della 4.1.2.

In generale, per definizione, un campo vettoriale generico soddisfa la condizione $\frac{D^{FW}X}{D\tau} = 0$ se la componente spaziale è trasportata senza rotazione e se la componente temporale (che è in effetti uno scalare nel senso spaziale del termine) è costante. In questo senso, un vettore trasportato secondo Fermi–Walker costituisce la naturale generalizzazione del concetto di vettore avente la parte spaziale e la parte temporale "costanti" nel giudizio del riferimento di quiete istantanea.

Osserviamo che il versore $e_{(4)}$, o equivalentemente, la quadrivelocità di p, soddisfa identicamente $\frac{D^{FW}e_{(4)}}{D\tau} = 0$, ed è quindi trasportato secondo Fermi–Walker lungo p.

Esplicitiamo la condizione di trasporto per un campo vettoriale generico X. Ricordando la scomposizione in somma diretta $V_4 = V_3 \oplus L(e_{(4)})$, l'equazione $\frac{D^{FW}X}{D\tau} = 0$ è equivalente alla coppia di condizioni:

$$\frac{D\mathcal{P}_\Sigma(X)}{D\tau} + \left(\frac{D\mathcal{P}_\Sigma(X)}{D\tau}\,,\, e_{(4)}\right) e_{(4)} = 0$$

$$\frac{D\mathcal{P}_\Theta(X)}{D\tau} = 0$$

Queste possono essere raccolte nella singola relazione:

$$\begin{aligned}
\frac{DX}{D\tau} &= \frac{D\mathcal{P}_\Sigma(X)}{D\tau} + \frac{D}{D\tau}\big(\mathcal{P}_\Theta(X)\, e_{(4)}\big) = \\
&= -\left(\frac{D\mathcal{P}_\Sigma(X)}{D\tau}\,,\, e_{(4)}\right) e_{(4)} - \big(X, e_{(4)}\big)\,\frac{De_{(4)}}{D\tau} = \\
&= \left(\mathcal{P}_\Sigma(X)\,,\, \frac{De_{(4)}}{D\tau}\right) e_{(4)} - \big(X, e_{(4)}\big)\,\frac{De_{(4)}}{D\tau} = \\
&= \left(X\,,\, \frac{De_{(4)}}{D\tau}\right) e_{(4)} - \big(X, e_{(4)}\big)\,\frac{De_{(4)}}{D\tau} = \\
&= \left(X\,,\, \frac{1}{c}\frac{DV}{D\tau}\right)\frac{V}{c} - \left(X, \frac{V}{c}\right)\frac{1}{c}\frac{DV}{D\tau} = \frac{1}{c^2}\Big[(X,A)\,V - (X,V)\,A\Big]
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Proposizione 4.2.1. *La derivata di Fermi–Walker commuta con il prodotto scalare di V_4, ossia per ogni coppia X, Y di campi vettoriali definiti lungo p vale la relazione*

$$\left(\frac{D^{FW}X}{D\tau}\,,\, Y\right) + \left(X\,,\, \frac{D^{FW}Y}{D\tau}\right) = \frac{d}{d\tau}\,(X,Y)$$

Dimostrazione. Per ogni coppia di campi vettoriali X, Y lungo p sussiste la seguente catena di uguaglianze, da cui segue direttamente la tesi:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{D^{FW}X}{D\tau}, Y\right) + \left(X, \frac{D^{FW}Y}{D\tau}\right) = \left(\mathcal{P}_\Sigma\left(\frac{D\mathcal{P}_\Sigma(X)}{D\tau}\right) + \frac{D\mathcal{P}_\Theta(X)}{D\tau}e_{(4)}, Y\right) + \\
&+ \left(X, \mathcal{P}_\Sigma\left(\frac{D\mathcal{P}_\Sigma(Y)}{D\tau}\right) + \frac{D\mathcal{P}_\Theta(Y)}{D\tau}e_{(4)}\right) = \\
&= \left(\frac{D\mathcal{P}_\Sigma(X)}{D\tau} + \left(\frac{D\mathcal{P}_\Sigma(X)}{D\tau}, e_{(4)}\right)e_{(4)} + \frac{D\mathcal{P}_\Theta(X)}{D\tau}e_{(4)}, \mathcal{P}_\Sigma(Y) + \mathcal{P}_\Theta(Y)e_{(4)}\right) + \\
&+ \left(\mathcal{P}_\Sigma(X) + \mathcal{P}_\Theta(X)e_{(4)}, \frac{D\mathcal{P}_\Sigma(Y)}{D\tau} + \left(\frac{D\mathcal{P}_\Sigma(Y)}{D\tau}, e_{(4)}\right)e_{(4)} + \frac{D\mathcal{P}_\Theta(Y)}{D\tau}e_{(4)}\right) = \\
&= \left(\frac{D}{D\tau}\mathcal{P}_\Sigma(X), \mathcal{P}_\Sigma(Y)\right) + \left(\mathcal{P}_\Sigma(X), \frac{D}{D\tau}\mathcal{P}_\Sigma(Y)\right) - \frac{D\mathcal{P}_\Theta(X)}{D\tau}\mathcal{P}_\Theta(Y) + \\
&- \mathcal{P}_\Theta(X)\frac{D\mathcal{P}_\Theta(Y)}{D\tau} = \frac{d}{d\tau}\left(\mathcal{P}_\Sigma(X), \mathcal{P}_\Sigma(Y)\right) - \frac{D\mathcal{P}_\Theta(X)}{D\tau}\mathcal{P}_\Theta(Y) + \\
&- \mathcal{P}_\Theta(X)\frac{D\mathcal{P}_\Theta(Y)}{D\tau} = \frac{d}{d\tau}\left[\left(\mathcal{P}_\Sigma(X), \mathcal{P}_\Sigma(Y)\right) - \mathcal{P}_\Theta(X)\mathcal{P}_\Theta(Y)\right] = \frac{d}{d\tau}(X, Y)
\end{aligned}$$

□

Nota 4.2.1. *Se si preferisce descrivere la curva p in termini di un parametro ξ legato a τ da una trasformazione invertibile $\tau = \tau(\xi)$, la legge di derivazione delle funzioni composte consente di definire la derivata di Fermi–Walker rispetto a ξ nella forma $\frac{D^{FW}}{D\xi} = \frac{d\tau}{d\xi}\frac{D^{FW}}{D\tau}$. In particolare, se t indica la variabile temporale relativa ad un qualsiasi riferimento inerziale, sussiste la relazione:*

$$\frac{D^{FW}}{Dt} = \frac{1}{\gamma}\frac{D^{FW}}{D\tau}$$

Proposizione 4.2.2. *L'operatore $\frac{D^{FW}}{Dt}$ soddisfa l'usuale "regola di Leibniz". In altri termini, per ogni campo vettoriale X lungo p e per ogni funzione $f = f(t)$ di classe $\mathcal{C}^\infty$ sussiste la relazione:*

$$\frac{D^{FW}fX}{Dt} = \frac{df}{dt}X + f\,\frac{D^{FW}X}{Dt}$$

Dimostrazione. Per la Definizione 4.2.1 e le proprietà della derivazione covariante, possiamo scrivere la catena di uguaglianze seguente da cui si deduce la tesi.

$$\begin{aligned}\frac{D^{FW} fX}{Dt} &= \mathcal{P}_\Sigma\left[\frac{D\,\mathcal{P}_\Sigma\,(fX)}{Dt}\right] + \frac{D\,\mathcal{P}_\Theta\,(fX)}{Dt} e_{(4)} = \mathcal{P}_\Sigma\left[\frac{D\,f\mathcal{P}_\Sigma\,(X)}{Dt}\right] + \frac{D\,f\mathcal{P}_\Theta\,(X)}{Dt} e_{(4)} = \\ &= \mathcal{P}_\Sigma\left[\frac{df}{dt}\mathcal{P}_\Sigma\,(X) + f\,\frac{D\,\mathcal{P}_\Sigma\,(X)}{Dt}\right] + \frac{df}{dt}\mathcal{P}_\Theta\,(X)\,e_{(4)} + f\,\frac{D\mathcal{P}_\Theta\,(X)}{Dt} e_{(4)} = \\ &= \frac{df}{dt}\left[\mathcal{P}_\Sigma\,(X) + \mathcal{P}_\Theta\,(X)\,e_{(4)}\right] + f\,\frac{D^{FW} X}{Dt} = \frac{df}{dt} X + f\,\frac{D^{FW} X}{Dt}\end{aligned}$$

□

Tornando al problema originario, concludiamo che una terna ortonormale spaziale $e_{(\alpha)}(\tau)$ identifica un riferimento non ruotante lungo p se ciascun versore $e_{(\alpha)}(\tau)$ è trasportato secondo Fermi–Walker lungo p, ossia se sussistono le relazioni $\mathcal{P}_\Sigma \frac{De_{(\alpha)}}{D\tau} = 0$, $\alpha = 1, 2, 3$.

4.3 Il moto iperbolico

Come primo esempio di utilizzo del trasporto di Fermi–Walker, studiamo il caso in cui la quadriaccelerazione A associata ad una linea di universo p subisca trasporto di Fermi–Walker lungo p. A tale riguardo introduciamo la seguente

Definizione 4.3.1. *Il moto di una particella descritto da una linea di universo p è detto* iperbolico *se la corrispondente quadriaccelerazione A è trasportata secondo Fermi–Walker lungo p, ossia se*

$$\frac{D^{FW} A}{D\tau} = 0 \tag{4.4}$$

Ricordiamo che, grazie alla (3.39), la quadriaccelerazione A è identica all'accelerazione di p nel riferimento di quiete istantanea. Pertanto, per il significato stesso di trasporto di Fermi–Walker, i moti iperbolici rappresentano la controparte relativistica dei moti ad accelerazione costante in Fisica classica.

Esaminiamo in dettaglio la situazione. Essendo $(A\,, V) = 0$, per la (4.3) la richiesta (4.4) porta all'equazione differenziale

$$\frac{DA}{D\tau} = \frac{1}{c^2}\,(A, A)\,V \tag{4.5}$$

Sfruttando ancora le proprietà (3.36) e (3.39), grazie alle note proprietà della derivata assoluta si ricava:

$$\frac{d}{d\tau}(A,A) = 2\left(A\,,\,\frac{DA}{D\tau}\right) = \frac{2}{c^2}(A,A)\,(A,V) = 0 \implies (A,A) = a^2 = \text{cost}$$

Sostituendo nella (4.5), otteniamo così la seguente equazione differenziale del second'ordine nell'incognita V:

$$\frac{D^2V}{D\tau^2} \;=\; \frac{DA}{D\tau} \;=\; \frac{a^2}{c^2}\,V \tag{4.6}$$

Ricordando la condizione di normalizzazione $(V,V) = -c^2$, si verifica facilmente che l'eq. (4.6) ammette l'integrale generale

$$V\,(\tau) \;=\; V_0\,\cosh\frac{a\tau}{c} \;+\; cK_0\sinh\frac{a\tau}{c} \tag{4.7}$$

con $(V_0,V_0) = -c^2$, $K_0 \perp V_0$, $\|K_0\| = 1$. Infatti, dalle proprietà delle funzioni iperboliche, risulta:

$$\frac{D^2V}{D\tau^2} \;=\; \frac{a^2}{c^2}\,V_0\,\cosh\frac{a\tau}{c} \;+\; \frac{a^2}{c^2}\,cK_0\,\sinh\frac{a\tau}{c} \;=\; \frac{a^2}{c^2}\,V$$

e

$$\begin{aligned}(V,V) &= (V_0\,,V_0)\cosh^2\frac{a\tau}{c} + c^2\,(K_0\,,K_0)\sinh^2\frac{a\tau}{c} = \\ &= -c^2\cosh^2\frac{a\tau}{c} + c^2\sinh^2\frac{a\tau}{c} = -c^2\left(\cosh^2\frac{a\tau}{c} - \sinh^2\frac{a\tau}{c}\right) = -c^2\end{aligned}$$

Consideriamo ora un riferimento inerziale I con coordinate adattate $x^1,\ldots,x^4$. Mediante integrazione della (4.7) ricaviamo le equazioni finite di movimento:

$$x^i\,(\tau) - x^i_0 = \frac{c}{a}\,V^i_0\,\sinh\frac{a\tau}{c} \;+\; \frac{c^2}{a}\,K^i_0\,\cosh\frac{a\tau}{c}$$

Senza ledere la generalità, scegliendo opportunamente il sistema I, possiamo sempre ridurci al caso in cui risulti $V_0 = ce_{(4)}$, $K_0 = e_{(1)}$ e $x_0 = (-c^2/a, 0, 0, 0)$. Si ottiene in tal caso:

$$x^1\,(\tau) = \frac{c^2}{a}\cosh\frac{a\tau}{c} - \frac{c^2}{a}, \quad x^2(\tau) = x^3(\tau) = 0, \qquad ct(\tau) = \frac{c^2}{a}\sinh\frac{a\tau}{c}$$

da cui anche

$$\left(x^1 + \frac{c^2}{a}\right)^2 - c^2t^2 = \frac{c^4}{a^2}$$

Il diagramma orario del moto è quindi un'iperbole equilatera nel piano x^1, x^4, la qual cosa giustifica il termine "moto iperbolico".

Esplicitiamo la variabile spaziale nell'espressione precedente

$$x^1 = \sqrt{\frac{c^4}{a^2} + c^2t^2} - \frac{c^2}{a} = \frac{c^2}{a}\left(\sqrt{1 + \left(\frac{at}{c}\right)^2} - 1\right) \tag{4.8}$$

La velocità $\mathbf{v}$ della particella nel giudizio di I assume quindi il valore

$$\mathbf{v} = \frac{dx^1}{dt}\, e_{(1)} = \frac{c^2}{a}\, \frac{\dfrac{a^2t}{c^2}}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{at}{c}\right)^2}}\, e_{(1)} = \frac{at}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{at}{c}\right)^2}}\, e_{(1)} \tag{4.9}$$

da cui si deduce che

$$\lim_{t\to\infty} v = c$$

In altri termini, per $t \to \infty$ la velocità v della particella tende al valore finito c indipendentemente dal valore di a, in contrasto con le previsioni della Meccanica newtoniana, ma in pieno accordo con quelle dello schema relativistico.

Al tempo stesso, constatiamo che l'approssimazione classica è corretta per $at \ll c$, la qual cosa, in virtù della (4.9), equivale a $v \ll c$. Riscriviamo infatti l'espressione (4.8) trascurando i termini della serie di Taylor di ordine ≥ 3

$$x^1 = \frac{c^2}{a}\left[1 + \frac{1}{2}\,\frac{a^2t^2}{c^2} - 1\right] = \frac{1}{2}\,at^2$$

Ciò prova che, a basse velocità, il moto iperbolico è in effetti un moto ad accelerazione costante nel senso classico del termine.

4.4 La precessione di Thomas

Nel contesto del § 4.1, consideriamo una terna spaziale $e_{(\alpha)}$ trasportata senza rotazione lungo una linea di universo p. Vogliamo stabilire con quale velocità angolare ω tale terna sia vista ruotare nel giudizio di un assegnato osservatore inerziale I.

A tal proposito, siano $\hat{e}_{(4)}$ il versore temporale di I, ed $e_{(4)}(\tau) = \frac{V(\tau)}{c}$ quello del sistema di quiete istantanea I_τ. Consideriamo inoltre un sistema di coordinate pseudo-cartesiane adattate ad I, ossia completiamo $\hat{e}_{(4)}$ a base pseudo-ortonormale $\{\hat{e}_{(1)}, \ldots, \hat{e}_{(4)}\}$ in V_4.

Posto $Z = \frac{\hat{e}_{(4)}+e_{(4)}(\tau)}{\|\hat{e}_{(4)}+e_{(4)}(\tau)\|}$, sia $j = j_Z$ l'operatore di riflessione associato, istante per istante, ai riferimenti I e I_τ.

In virtù del Teorema 3.3.3, sappiamo che la terna $e_{(\alpha)}(\tau)$ individua per ogni valore di τ una base ortonormale $j\big(e_{(\alpha)}(\tau)\big)$ in $\hat{e}_{(4)}^{\perp}$, non ruotata rispetto alla $e_{(\alpha)}$.

Al fine di determinare ω occorre studiare la rotazione fra le basi $\hat{e}_{(\alpha)}$ e $e_{(\alpha)}$. Come già osservato, la cosa non si può fare direttamente, in quanto, dal punto di vista spaziale, tali basi non generano il medesimo tri-spazio. Possiamo però utilizzare il fatto che la terna $j\big(e_{(\alpha)}\big)$ è, istante per istante, non ruotata rispetto alla $e_{(\alpha)}$ ed è ubicata nello stesso tri-spazio $e_{(4)}^{\perp}$. Precisamente, $j\big(e_{(\alpha)}\big)$ rappresenta la base nel tri-spazio di quiete di I che "insegue" la rotazione della terna solidale al corpo in movimento.

Indichiamo con R la matrice di rotazione che lega le terne $j\big(e_{(\alpha)}\big)$ e $\hat{e}_{(\alpha)}$, ossia che soddisfa la relazione $j\big(e_{(\alpha)}\big) = R_{\alpha\beta}\hat{e}_{(\beta)}$, e con $\dot{R}$ la derivata di R rispetto al tempo nel riferimento I.

Teorema 4.4.1. *Con le notazioni precedenti, dette* $\mathbf{v} = v_\alpha \hat{e}_{(\alpha)}$ *e* $\mathbf{a} = \dfrac{d\boldsymbol{v}}{dt} = a_\alpha \hat{e}_{(\alpha)}$ *la velocità e l'accelerazione di* p *nel riferimento* I*, sussiste la relazione*

$$\big({}^t R\dot{R}\big)_{\mu\beta} = \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)c^2}\,(a_\mu v_\beta - v_\mu a_\beta)$$

Dimostrazione. La matrice di rotazione R soddisfa per definizione:

$$\begin{aligned} j\big(e_{(\alpha)}\big) = R_{\alpha\beta}\hat{e}_{(\beta)} \implies R_{\alpha\beta} = \big(j\big(e_{(\alpha)}\big), \hat{e}_{(\beta)}\big) = \big(e_{(\alpha)}, j\big(\hat{e}_{(\beta)}\big)\big) \implies \\ \implies e_{(\alpha)} = R_{\alpha\beta} j\big(\hat{e}_{(\beta)}\big) \end{aligned}$$

Tenuto conto dell'eq. (4.2), e indicando con τ il tempo proprio lungo p, calcoliamo

$$\begin{aligned} \frac{dR_{\alpha\beta}}{d\tau} &= \frac{d}{d\tau}\left(e_{(\alpha)}, j\left(\hat{e}_{(\beta)}\right)\right) = \left(\frac{De_{(\alpha)}}{D\tau}, j\left(\hat{e}_{(\beta)}\right)\right) + \left(e_{(\alpha)}, \frac{D}{D\tau} j\left(\hat{e}_{(\beta)}\right)\right) = \\ &= \left(\left(e_{(\alpha)}, \frac{De_{(4)}}{D\tau}\right) e_{(4)}, j\left(\hat{e}_{(\beta)}\right)\right) + \left(e_{(\alpha)}, \frac{D}{D\tau}\left(\hat{e}_{(\beta)} + 2\left(\hat{e}_{(\beta)}, Z\right) Z\right)\right) \end{aligned}$$

Essendo $j\big(\hat{e}_{(\beta)}\big) \in e^{\perp}_{(4)}$ e $\hat{e}_{(\beta)}$ una terna fissa otteniamo:

$$\begin{aligned}
\frac{dR_{\alpha\beta}}{d\tau} &= \left(e_{(\alpha)}, \frac{D}{D\tau}\left(2\left(\hat{e}_{(\beta)}, Z\right) Z\right)\right) = 2\left(R_{\alpha\lambda} j\left(\hat{e}_{(\lambda)}\right), \frac{D}{D\tau}\left(\left(\hat{e}_{(\beta)}, Z\right) Z\right)\right) = \\
&= 2R_{\alpha\lambda}\left(\hat{e}_{(\lambda)}, j\left(\frac{D}{D\tau}\left(\left(\hat{e}_{(\beta)}, Z\right) Z\right)\right)\right) = \\
&= 2R_{\alpha\lambda}\left(\hat{e}_{(\lambda)}, j\left(\left(\hat{e}_{(\beta)}, \frac{DZ}{D\tau}\right) Z + \left(\hat{e}_{(\beta)}, Z\right)\frac{DZ}{D\tau}\right)\right)
\end{aligned}$$

Osserviamo adesso che dalle proprietà dell'operatore j segue l'identità $j(Z) = -Z$. Essendo Z un versore si ha inoltre $\frac{DZ}{D\tau} \perp Z$, e quindi anche $j\left(\frac{DZ}{D\tau}\right) = \frac{DZ}{D\tau}$.

Stante il carattere ortogonale di R possiamo allora scrivere

$$\begin{aligned}
R_{\alpha\mu}\frac{dR_{\alpha\beta}}{d\tau} &= 2R_{\alpha\mu}R_{\alpha\lambda}\left(\hat{e}_{(\lambda)}\,,\, j\left(\left(\hat{e}_{(\beta)}\,,\, \frac{DZ}{D\tau}\right) Z + \left(\hat{e}_{(\beta)}\,,\, Z\right)\frac{DZ}{D\tau}\right)\right) = \\
&= 2\left(\left(\hat{e}_{(\mu)}\,,\, \frac{DZ}{D\tau}\right)\left(\hat{e}_{(\beta)}\,,\, Z\right) - \left(\hat{e}_{(\beta)}\,,\, \frac{DZ}{D\tau}\right)\left(\hat{e}_{(\mu)}\,,\, Z\right)\right) = \\
&= 2\left(\left(\hat{e}_{(\beta)}\,,\, Z\right)\frac{d}{d\tau}\left(\hat{e}_{(\mu)}\,,\, Z\right) - \left(\hat{e}_{(\mu)}\,,\, Z\right)\frac{d}{d\tau}\left(\hat{e}_{(\beta)}\,,\, Z\right)\right)
\end{aligned}$$

Grazie alle identificazioni (cfr. eq. (3.23))

$$Z = \frac{(1+\gamma)\,\hat{e}_{(4)} + \gamma\,\frac{\mathbf{v}}{c}}{\sqrt{2(1+\gamma)}}, \qquad \frac{d}{d\tau} = \gamma\,\frac{d}{dt}$$

otteniamo infine:

$$\begin{aligned}
\left({}^{t}R\dot{R}\right)_{\mu\beta} &= R_{\alpha\beta}\,\frac{dR_{\alpha\beta}}{dt} = \\
&= \frac{2}{\gamma}\left[\frac{\left(\hat{e}_{(\beta)}, \gamma\,\frac{\mathbf{v}}{c}\right)}{\sqrt{2(1+\gamma)}}\,\frac{d}{d\tau}\,\frac{\left(\hat{e}_{(\mu)}, \gamma\,\frac{\mathbf{v}}{c}\right)}{\sqrt{2(1+\gamma)}} - \frac{\left(\hat{e}_{(\mu)}, \gamma\,\frac{\mathbf{v}}{c}\right)}{\sqrt{2(1+\gamma)}}\,\frac{d}{d\tau}\,\frac{\left(\hat{e}_{(\beta)}, \gamma\,\frac{\mathbf{v}}{c}\right)}{\sqrt{2(1+\gamma)}}\right] = \\
&= \frac{2\gamma}{\gamma}\left[\frac{\gamma v_\beta}{c\sqrt{2(1+\gamma)}}\,\frac{d}{dt}\,\frac{\gamma v_\mu}{c\sqrt{2(1+\gamma)}} - \frac{\gamma v_\mu}{c\sqrt{2(1+\gamma)}}\,\frac{d}{dt}\,\frac{\gamma v_\beta}{c\sqrt{2(1+\gamma)}}\right] = \\
&= 2\left[\frac{\gamma^2}{2c^2(1+\gamma)}\left(v_\beta a_\mu - v_\mu a_\beta\right)\right] = \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)c^2}\left(a_\mu v_\beta - v_\mu a_\beta\right)
\end{aligned}$$

$\square$

Abbiamo infine gli strumenti necessari per il calcolo di ω.

Corollario 4.4.1. *La velocità angolare ω con cui l'osservatore I vede ruotare una terna d'assi intrinsecamente non ruotante $e_{(\alpha)}$ è data da*

$$\omega = \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)c^2}\, \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{v}$$

dove il simbolo $\wedge$ rappresenta il prodotto vettoriale nello spazio $V_3 = \hat{e}_{(4)}^{\perp}$

Dimostrazione. Indicando con $j\big(\dot{e}_{(\alpha)}\big)$ la derivata di $j\big(e_{(\alpha)}\big)$ rispetto a t la definizione stessa di velocità angolare comporta l'identificazione

$$\begin{aligned} \omega =& \frac{1}{2}\, j\big(e_{(\alpha)}\big) \wedge j\big(\dot{e}_{(\alpha)}\big) = \frac{1}{2}\, j\big(e_{(\alpha)}\big) \wedge \dot{R}_{\alpha\beta}\hat{e}_{(\beta)} = \\ =& \frac{1}{2}\, R_{\alpha\mu}\dot{R}_{\alpha\beta}\hat{e}_{(\mu)} \wedge \hat{e}_{(\beta)} = \frac{1}{2}\big({}^t R\dot{R}\big)_{\mu\beta}\, \hat{e}_{(\mu)} \wedge \hat{e}_{(\beta)} \end{aligned} \tag{4.10}$$

Grazie al Teorema 4.4.1 giungiamo così all'espressione finale

$$\omega = \frac{1}{2}\frac{\gamma^2}{(1+\gamma)c^2}\,(a_\mu v_\beta - v_\mu a_\beta)\,\hat{e}_{(\mu)} \wedge \hat{e}_{(\beta)} = \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)c^2}\, \mathbf{a} \wedge \mathbf{v}$$

□

4.5 La precessione dello spin

Discutiamo alcuni risultati che interverranno negli sviluppi successivi. Il primo, riguardante un'estensione relativistica della formula di Poisson, è espresso dal seguente

Teorema 4.5.1. *Siano p una linea di universo, X un campo vettoriale spaziale lungo p, e ω la velocità angolare di Thomas di p relativa a un riferimento inerziale I. Indichiamo con t la coordinata temporale di I e con j l'operatore di riflessione associato, istante per istante, a I e al riferimento di quiete istantanea. Allora*

$$\frac{d}{dt}\, j(X) = j\left(\frac{D^{FW}X}{Dt}\right) + \omega \wedge j(X)$$

Dimostrazione. Secondo il procedimento seguito nel § 4.4 indichiamo con $e_{(\alpha)}$ una terna ortonormale non ruotante lungo p e con $\hat{e}_{(\alpha)}$ una terna ortonormale (fissa) nel tri–spazio relativo ad I. Poniamo

$$j\big(e_{(\alpha)}\big) = R_{\alpha\beta}\,\hat{e}_{(\beta)}, \quad X = X_\alpha e_{(\alpha)}, \quad \hat{X}_\beta = X_\lambda R_{\lambda\beta}\,, \quad \text{con } R \in SO(3)$$

Allora:

$$j(X) = X_\alpha\, j\big(e_{(\alpha)}\big) = X_\alpha\, R_{\alpha\beta}\, \hat{e}_{(\beta)} = \hat{X}_\beta\, \hat{e}_{(\beta)}\,, \qquad X_\alpha = R_{\alpha\beta}\, \hat{X}_\beta$$

Come abbiamo visto, l'operatore j trasforma il vettore X nel vettore $j(X)$, avente carattere spaziale nel riferimento I. Ha quindi perfettamente senso l'espressione

$$\frac{d}{dt}\, j(X) = \left(\frac{dX_\alpha}{dt}\, R_{\alpha\beta} + X_\alpha\, \dot{R}_{\alpha\beta}\right) \hat{e}_{(\beta)} = \frac{dX_\alpha}{dt}\, j\big(e_{(\alpha)}\big) + R_{\alpha\lambda} \dot{R}_{\alpha\beta}\, \hat{X}_\lambda\, \hat{e}_{(\beta)} \tag{4.11}$$

In virtù della Proposizione 4.2.2, utilizzando il fatto che $e_{(\alpha)}$ è una terna non ruotante, abbiamo inoltre:

$$j\left(\frac{D^{FW} X}{Dt}\right) = j\left[\frac{D^{FW}}{Dt}\left(X_\alpha e_{(\alpha)}\right)\right] = j\left(\frac{dX_\alpha}{dt} e_{(\alpha)}\right) = \frac{dX_\alpha}{dt}\, j\big(e_{(\alpha)}\big) \tag{4.12}$$

Ricordando l'espressione (4.10) della velocità angolare otteniamo

$$\omega = \frac{1}{2}\left({}^t R \dot{R}\right)_{\lambda\mu} \hat{e}_{(\lambda)} \wedge \hat{e}_{(\mu)} \implies \omega \cdot \hat{e}_{(\lambda)} \wedge \hat{e}_{(\mu)} = \left({}^t R \dot{R}\right)_{\lambda\mu}$$

Da questa deduciamo

$$\begin{aligned} R_{\alpha\lambda} \dot{R}_{\alpha\beta} \hat{X}_\lambda \hat{e}_{(\beta)} = \left(\omega \cdot \hat{e}_{(\lambda)} \wedge \hat{e}_{(\beta)}\right) \hat{X}_\lambda \hat{e}_{(\beta)} = \left(\hat{e}_{(\beta)} \cdot \omega \wedge \hat{X}_\lambda \hat{e}_{(\lambda)}\right) \hat{e}_{(\beta)} = \\ = \omega \wedge \hat{X}_\lambda \hat{e}_{(\lambda)} = \omega \wedge j(X) \end{aligned} \tag{4.13}$$

Infine dalle relazioni (4.11), (4.12) e (4.13) si ottiene immediatamente la tesi. □

Corollario 4.5.1. *Nelle ipotesi precedenti, indicando con* $\frac{\delta}{\delta\tau}$ *la derivata di Fermi Walker lungo p rispetto al tempo proprio, risulta:*

$$\frac{d}{dt}\, j(X) = \frac{1}{\gamma}\, j\left(\frac{\delta X}{\delta\tau}\right) + \omega \wedge j(X)$$

Ricordiamo infine un risultato riguardante le proprietà di trasformazione del campo elettromagnetico.

Teorema 4.5.2. *Siano I, I' due riferimenti inerziali, e $\boldsymbol{v}$ la velocità di I' rispetto a I. Supponiamo che in I sia presente un campo elettrostatico $\boldsymbol{E}$ e campo magnetico nullo.*

Allora nel riferimento I' è presente un campo magnetico $\boldsymbol{B}'$ dato da [2]

$$\boldsymbol{B}' = -\frac{\gamma}{c^2}\, j\,(\mathbf{v} \wedge \boldsymbol{E})$$

Dimostrazione. Siano $e_1, \ldots, e_{(4)}$ e $e'_1, \ldots, e'_{(4)}$ due basi pseudo–ortonormali di V_4 associate rispettivamente a I, I' e soddisfacenti $j\big(e_{(\alpha)}\big) = e'_{(\alpha)}$. Sia $e'_{(i)} = e_{(j)}\Lambda^j_{\ i}$ la trasformazione tra le basi, con $\Lambda \in L^{\uparrow}$. Come già sappiamo, essendo $j\big(e_{(\alpha)}\big) = e'_{(\alpha)}$, Λ descrive una trasformazione di Lorentz pura. Nel riferimento I, utilizzando la base $e_{(i)}$, il tensore elettromagnetico F avrà la forma

$$Fij = \begin{pmatrix} 0 & B^3 & -B^2 & -E^1/c \\ -B^3 & 0 & B^1 & -E^2/c \\ B^2 & -B^1 & 0 & -E^3/c \\ E^1/c & E^2/c & E^3/c & 0 \end{pmatrix}$$

Per definizione, risulta

$$\mathbf{B}' = B'^{\alpha} e'_{(\alpha)} = \frac{1}{2}\, F'^{\alpha\beta} e'_{(\alpha)} \wedge e'_{(\beta)} = \frac{1}{2}\, j\Big(F'^{\alpha\beta} e_{(\alpha)} \wedge e_{(\beta)}\Big)$$

D'altronde, per effetto della trasformazione di Lorentz, sussiste la relazione

$$F'^{\alpha\beta} = \Lambda^{\alpha}_{\ i}\Lambda^{\beta}_{\ j}\, F^{ij} = \Lambda^{\alpha}_{\ 4}\Lambda^{\beta}_{\ \mu}\, F^{4\mu} + \Lambda^{\alpha}_{\ \mu}\Lambda^{\beta}_{\ 4}\, F^{\mu 4} = \Big(\Lambda^{\alpha}_{\ 4}\Lambda^{\beta}_{\ \mu} - \Lambda^{\alpha}_{\ \mu}\Lambda^{\beta}_{\ 4}\Big)\,\frac{E^{\mu}}{c}$$

matematicamente equivalente a

$$\mathbf{B}' = \frac{1}{2}\, j\left[\Big(\Lambda^{\alpha}_{\ 4}\Lambda^{\beta}_{\ \mu} - \Lambda^{\alpha}_{\ \mu}\Lambda^{\beta}_{\ 4}\Big)\,\frac{E^{\mu}}{c}\, e_{(\alpha)} \wedge e_{(\beta)}\right] = j\left(\Lambda^{\alpha}_{\ 4}\, e_{(\alpha)} \wedge \Lambda^{\beta}_{\ \mu}\,\frac{E^{\mu}}{c}\, e_{(\beta)}\right)$$

Ma, essendo Λ una trasformazione pura

$$\left.\begin{aligned} \Lambda^{\alpha}_{\ 4}\, e_{(\alpha)} &= -\gamma\,\frac{v^{\alpha}}{c}\, e_{(\alpha)} = -\gamma\,\frac{\mathbf{v}}{c} \\ \Lambda^{\beta}_{\ \mu}\,\frac{E^{\mu}}{c}\, e_{(\beta)} &= \frac{1}{c}\left[\mathbf{E} + \frac{\gamma^2}{c^2}\,\big(\mathbf{v}\cdot\mathbf{E}\big)\,\mathbf{v}\right] \end{aligned}\right| \;\Rightarrow\; \Lambda^{\alpha}_{\ 4}\, e_{(\alpha)} \wedge \Lambda^{\beta}_{\ \mu}\,\frac{E^{\mu}}{c}\, e_{(\beta)} = -\frac{\gamma}{c^2}\,\mathbf{v} \wedge \mathbf{E}$$

da cui la tesi. □

[2] Si noti il coinvolgimento dell'operatore j, necessaria per convertire il vettore $\mathbf{v} \wedge \mathbf{E}$, appartenente al tri-spazio di quiete di I, in un vettore spaziale nel riferimento I'.

A conclusione dell'argomento presentiamo un esempio concreto di applicazione dei concetti descritti finora. Affinché le correzioni che la precessione di Thomas apporta ai valori della velocità angolare siano fisicamente apprezzabili, è necessario che siano soddisfatte due condizioni: in primo luogo occorre che la particella in studio possa essere portata a velocità molto elevate, in modo che gli effetti relativistici siano sperimentalmente apprezzabili (si veda, in particolare, l'espressione di ω nel Corollario 4.4.1).

Inoltre si deve poter associare al corpo in questione, istante per istante, un vettore spaziale, del quale si dovrà calcolare sia la velocità angolare intrinseca, sia quella percepita da un osservatore inerziale.

Queste condizioni sono soddisfatte, ad esempio, da un elettrone immerso in un campo elettrico, prendendo espressamente in considerazione il momento angolare intrinseco (spin) dell'elettrone stesso. Analizziamo la situazione in dettaglio.

In un riferimento inerziale I si consideri un elettrone mobile in un campo elettrostatico (ad esempio, fra le armatura di un condensatore o in orbita intorno al nucleo atomico). Come conseguenza del Teorema 4.5.2, nel riferimento di quiete istantanea dell'elettrone è presente un campo magnetico $\mathbf{B}' = -\frac{\gamma}{c^2}\, j\big(\mathbf{v} \wedge \mathbf{E}\big)$, essendo $\mathbf{v}$ la velocità dell'elettrone nel riferimento I.

Indichiamo con $\mathbf{s}$ lo spin dell'elettrone, avente carattere spaziale nel riferimento di quiete istantanea, e con μ il corrispondente momento magnetico, legato a $\mathbf{s}$ dalla relazione fenomenologica $\mu = -\frac{e}{m_0}\,\mathbf{s}$, essendo e e m_0 rispettivamente la carica e la massa a riposo dell'elettrone.

Grazie al principio di corrispondenza, nel riferimento di quiete istantanea vale la seconda equazione cardinale

$$\frac{\delta \mathbf{s}}{\delta \tau} = \mu \wedge \mathbf{B}' = \frac{e}{m_0}\,\mathbf{B}' \wedge \mathbf{s} = -\frac{\gamma e}{m_0 c^2}\, j\big(\mathbf{v} \wedge \mathbf{E}\big) \wedge \mathbf{s}$$

Applicando ora il Teorema 4.5.1 e il Corollario 4.4.1 otteniamo:

$$-\frac{\gamma e}{m_0 c^2}\,(\mathbf{v} \wedge \mathbf{E}) \wedge j(\mathbf{s}) = j\left(\frac{\delta \mathbf{s}}{\delta \tau}\right) = \gamma \frac{d}{dt} j(\mathbf{s}) - \gamma \omega \wedge j(\mathbf{s}) \tag{4.14}$$

da cui segue che

$$\frac{d}{dt}\, j(\mathbf{s}) = \left(\omega - \frac{e}{m_0 c^2}\,\mathbf{v} \wedge \mathbf{E}\right) \wedge j(\mathbf{s}) = \frac{1}{c^2}\left(\frac{\gamma^2}{\gamma+1}\,\mathbf{a} \wedge \mathbf{v} + \frac{e\mathbf{E}}{m_0} \wedge \mathbf{v}\right) \wedge j(\mathbf{s}) \tag{4.15}$$

Inoltre, nel riferimento I risulta

$$\frac{d}{dt}\,m\mathbf{v} = \mathbf{F} = -e\mathbf{E} \implies m\mathbf{a} + \frac{dm}{dt}\,\mathbf{v} = -e\mathbf{E} \implies \mathbf{a}\wedge\mathbf{v} = -\frac{e}{m}\,\mathbf{E}\wedge\mathbf{v}$$

Utilizzando il legame $m = \gamma m_0$ tra massa relativistica e massa di riposo riscriviamo la (4.15) tenendo conto di quanto appena visto:

$$\frac{d}{dt}\,j(\mathbf{s}) = \frac{1}{c^2}\left(-\frac{\gamma}{\gamma+1}+1\right)\left(\frac{e\mathbf{E}}{m_0}\wedge\mathbf{v}\right)\wedge j(\mathbf{s}) = \frac{1}{c^2\,(\gamma+1)}\,\frac{e}{m_0}\,(\mathbf{E}\wedge\mathbf{v})\wedge j(\mathbf{s})$$

Confrontando ora con la (4.14) otteniamo la relazione

$$\frac{d}{dt}\,j(\mathbf{s}) = \frac{1}{\gamma\,(\gamma+1)}\,j\left(\frac{\delta\mathbf{s}}{\delta\tau}\right) \simeq \frac{1}{2}\,j\left(\frac{\delta\mathbf{s}}{\delta\tau}\right)$$

Pertanto l'evoluzione di $\mathbf{s}$ nel giudizio del riferimento inerziale risente del fenomeno di precessione, dimezzando l'effetto dell'interazione tra spin e campo elettromagnetico, in pieno accordo coi risultati sperimentali di Thomas descritti nell'Introduzione.

Bibliografia

[1] L.H. Thomas, *The motion of the spinning electron*, Nature, 1926.

[2] C. Møller *The theory of relativity*, Oxford University Press, 1972.

[3] E. Massa, S. Pasquero *Lorentz Transformations and Reflection Operators in Minkowski Space-time*, Università di Genova, 1991.

[4] W. Rindler *Essential relativity: special, general, and cosmological*, Springer Verlag, 1977.

[5] E. Massa *Appunti di Relatività Speciale*, Università di Genova, 2009.

[6] A. O. Barut, *Electrodynamics and Classical Theory of Fields and Particles*, Macmillan, 1964.

[7] L. D. Landau, E. M. Lifšits, *Teoria dei Campi*, Mir, 1981.

[8] C. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler, *Gravitation*, Freeman, 1973.