METODO DI GAUSS-SEIDEL

al passo $x^{(k+1)}$ si utilizzano i valori $x_i^{(k+1)}$ se disponibili

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right]$$

per $i = 1, \dots, n$

$$x_1^{(k+1)}$$
$$\vdots$$
$$x_i^{(k)}$$
$$\vdots$$
$$x_n^{(k)}$$

$$A = P - N$$

$$P = D - E \qquad N = F$$

$$B_{GS} = (D - E)^{-1} F$$

METODO SOR

$\rightarrow$ successive over relaxation

$\omega \in \mathbb{R}$

$$x_i^{(k+1)} = \frac{\omega}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right) +$$

$$(1 - \omega) x_i^{(k)} \qquad i = 1, \dots, n \qquad k \geq 0$$

$$B(\omega) = \omega B_{GS} + (1 - \omega) I$$

Teorema di convergenza

1) Se A è a dominanza diagonale stretta per righe

$$a_{ii} > \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} |a_{ij}|$$

allora Jacobi che Gauss Seidel sono convergenti

2) Se A è SPD allora GS è convergente

3) Se A è SPD allora JOR converge se $0 < \omega < 2/\rho(D^{-1}A)$

4) Se A è SPD allora SOR converge se $0 < \omega < 2$

Metodi di Richardson

$$r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$$

$$P(x^{(k+1)} - x^{(k)}) = \alpha_k \cdot r^{(k)}$$

metodi stazionari $\alpha_k = \alpha$ = costante

" non stazionari $\alpha_k = f(k)$

$x^{(0)} \in \mathbb{R}^n \qquad r^{(0)} = b - A x^{(0)}$ per $k = 0, \dots, N_{iter}$

$$P z^{(k)} = r^{(k)}$$

stazionario

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha z^{(k)}$$
$$r^{(k+1)} = r^{(k)} - \alpha A z^{(k)}$$

$\alpha \to$ parametro di accellerazione

$$B = I - P^{-1} A$$

$P = D, \quad \alpha = 1 \quad \Rightarrow$ Jacobi

$P = D - E, \quad \alpha = 1 \quad \Rightarrow$ Gauss-Seidel

$z^{(k)} = P^{-1} r^{(k)}$ residuo precondizionato

Risultati di convergenza

Se P è non singolare, Richardson stazionario è convergente $\forall x^{(0)}$ se e solo se

$$\frac{2 \operatorname{Re}(\lambda_i)}{\alpha |\lambda_i|^2} > 1 \qquad \forall \, i = 1, \dots, n$$

λ^i autovalori di $P^{-1} A$

- Se P non singolari e $P^{-1} A$ ha autovalori reali positivi ordinati

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_i > \dots > \lambda_n > 0$$

allora R. Stationario converge se e solo se

$$0 < \alpha < \frac{2}{\lambda_1}$$

$$\alpha_{opt} = \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_n}$$

$\hookrightarrow$ valore di α che minimizza R_α

matrice di iterazione di un metodo di Richardson stazionario

MATRICI DI PRECONDIZIONAMENTO

$$\underbrace{P^{-1} A x = P^{-1} b}_{\text{sistema precondizionato}}$$

$$A P^{-1} y = b \qquad y = P x$$

$$P_L^{-1} A P_R^{-1} y = P_L^{-1} \qquad y = P_R x$$

* P è un buon precondizionatore se $P^{-1} A$ è vicina ad un matrice normale

* P deve essere scelto anche in base a considerazioni computazionali (P^{-1} semplice da calcolare) e di memori (P^{-1} sparso se A è sparsa)

PRECONDIZIONATORI DIAGONALI

- $P = \text{diag}(A)$ se A è SPD
- $P_{ii} = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \right)^{1/2}$

FATTORIZZAZIONI LU incomplete

$$P = L_{in} U_{in}$$

LU con MEG

L ed U hanno lo stesso sparsity pattern di A

senza fill-in

CRITERIO D'ARRESTO

$$x^{(k+1)} = B x^{(k)} + f$$

$x^{(0)}$ $\qquad \lim_{k \to \infty} x^{(k)} \to x^*$

soluzione esatta

$$\varepsilon = \varepsilon^k = \| x^k - x^* \|$$

CONTROLLO SULL'INCREMENTO

$$\| x^{k+1} - x^k \| < \varepsilon_{ass}$$

$$x^{k+1} \neq 0$$

$$\frac{\| x^{k+1} - x^k \|}{\| x^{k+1} \|} < \varepsilon_{rel}$$

CRITERIO D'ARRESTO SUL RESIDUO

$$\|r^k\| = \|Ax^k - b\| < \varepsilon_{ass}$$

$$Ax = b$$

$$Ax - b = 0$$

$$\frac{\|r^k\|}{\|b\|} = \frac{\|Ax^k - b\|}{\|b\|} < \varepsilon_{rel}$$

$$\frac{\|r^k\|}{\|r^{(0)}\|} = \frac{\|Ax^k - b\|}{\|r^0\|} < \varepsilon_{rel}$$

errore

$$\frac{\|e^k\|}{\|x^*\|} \leq \underbrace{\|A\| \cdot \|A^{-1}\|}_{K(A)} \cdot \frac{\|r^k\|}{\|b\|}$$

METODI DEL GRADIENTE

Gradiente $\Rightarrow$ metodo di Richardson non stazionario

- Per matrici simmetriche e SPD

$$\| x^{(k)} - \alpha_k r^{(k)} - x \|_A^2 = \min_{\alpha \in \mathbb{R}} \| x^{(k)} - \alpha r^{(k)} - x \|_A^2$$

$$\Phi(y) = \underbrace{\frac{1}{2} y^T A y - y^T b}_{\text{funzione di energia del sistema}}$$

$$\nabla \phi(y) = \frac{1}{2}(A^T + A) y - b = Ay - b = 0$$

$\nabla \phi(x) = 0 \Rightarrow$ eq. a risolvere il sistema lineare

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k p^{(k)}$$

α_k lunghezza del passo lungo la direzione di discesa

$p^{(k)}$ è la direzione di discesa

$x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ assegnato $r^{(0)} = b - A x^{(0)}$ per $k = 0, \dots, N_{iter}$

precondizionatore

$$P z^{(k)} = r^{(k)}$$

$$\alpha_k = \frac{r^{(k)^T} z^{(k)}}{A z^{(k)^T} z^{(k)}}$$

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_k z^k$$

$$r^{k+1} = r^k - \alpha_k A z^k$$

Th. Convergenza

A è simmetrica e PD il metodo del gradiente converge $\forall x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ e

$$\|e^{k+1}\| \leq \frac{k_2(A) - 1}{k_2(A) + 1} \|e^k\|$$

Metodo del gradiente coniugato

1) Scelgo la direzione di discesa

2) trovare α^k che minimizza Φ

$$p^{(k)} = r^k$$

$$\alpha^k = \frac{p^{k^T} r^k}{p^{k^T} A r^k}$$

$$\underbrace{p^{k^T} r^{k+1}}_{\text{nel gradiente standard}} = 0$$

nel GC

$$(A p^k)^T p^{k+1} = 0$$

p^{k+1} è A-ortogonale (coniugata) rispetto a p^k

$$x^{(0)} \in \mathbb{R}^n \qquad p^{(0)} = r^{(0)} = b - Ax^{(0)}$$

$$\alpha_k = \frac{p^{(k)^T} r^{(k)}}{p^{(k)^T} A p^{(k)}}$$

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_k p^k$$

$$r^{k+1} = r^{(k)} - \alpha_k A p^k$$

$$\beta_k = \frac{r^{k+1^T} A p^k}{p^{k^T} A p^k}$$

$$p^{k+1} = r^{k+1} - \beta_k p^k$$