METODI NUMERICI PER EQ. NONLINEARI

data $f: I = (a,b) \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

si cerca $\alpha \in \mathbb{R}$ t.c. $f(\alpha) = 0$

1) determinare gli zeri di un polinomio

2) determinare " " di funzioni esponenziali logaritmiche ....

$x^{(k)}$ t.c. $\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = \alpha$

$\lim_{k\to\infty} f(x^{(k)}) = 0$

Definizione di ordine di convergenza

$\{x^{(k)}\}$ converge ad α con ordine $p \geq 1$ se

$\exists\, c > 0$ t.c. $\dfrac{|x^{(k+1)} - \alpha|}{|x^{(k)} - \alpha|^p} \leq C \quad \forall\, k \geq k_0$

$\downarrow$ fattore di convergenza

se $p = 1$ $\quad C < 1$ per avere convergenza

$|x^{(k+1)} - \alpha| < C|x^{(k)} - \alpha|$

OSS la convergenza dipende dalla scelta $x^{(0)}$

Ho solo risultati di convergenza locale in un intorno di $x^{(0)}$

Se $x^{(k)}$ converge ad α $\forall$ $x^{(0)} \in I$ il metodo si dice globalmente convergenti

Condizionamento per eq non lineari

$f(x) = 0$ $\qquad$ $\varphi(x) = d$ $\qquad$ $f(x) = \varphi(x) - d = 0$

$f \in C^1$

φ è localmente invertibile

$\alpha = \varphi^{-1}(d)$

$G \Rightarrow$ funzione risolvente $\quad G = \varphi^{-1}$

$$K_{rel}(d) \simeq \frac{\|G'(d)\| \cdot \|d\|}{\|G(d)\|}$$

$$K_{abs}(d) \simeq \|G'(d)\|$$

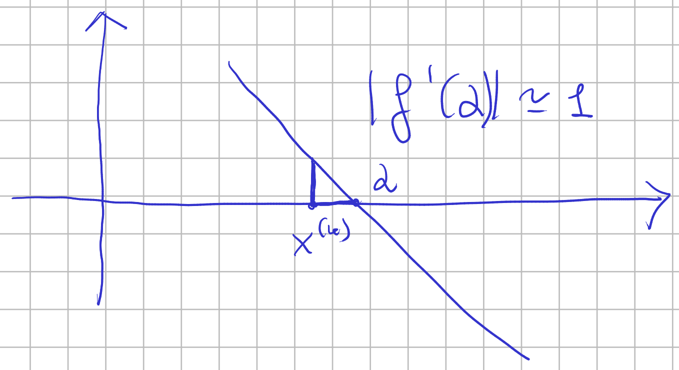
Relazione tra residuo e condizionamento

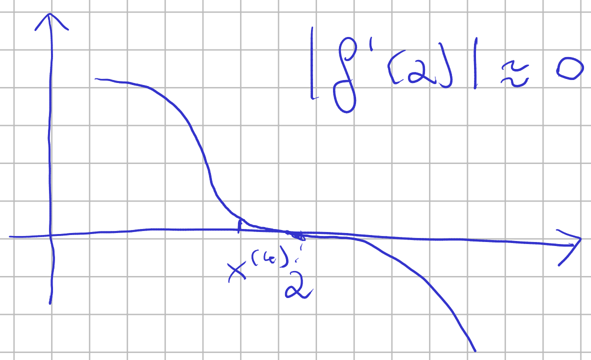
Se ho molteplicità unitaria

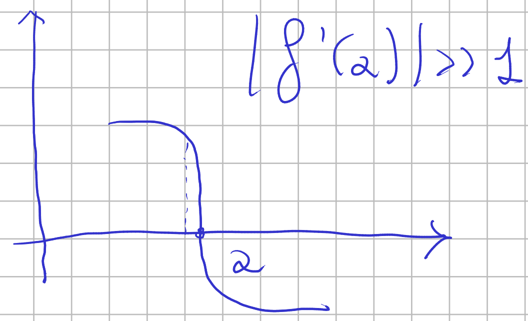
$$K_{rel}(d) = \frac{|d|}{|f'(\alpha)||\alpha|} \qquad K_{abs} = \frac{1}{|f'(\alpha)|}$$

$x^{(k)}$ $\qquad$ $r^k = f(x^k)$

$|f(x^k)|$ $\qquad$ $\varepsilon^k = |x^k - \alpha|$







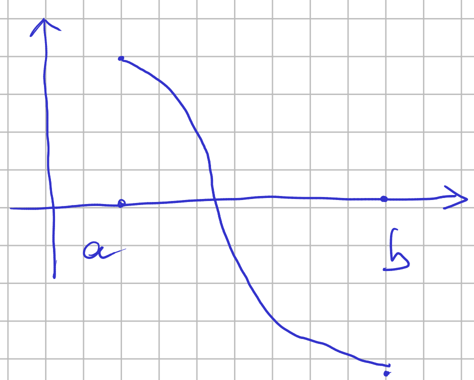
APPROCCI GEOMETRICI

bisezione, corde, secanti, newton

Bisezione

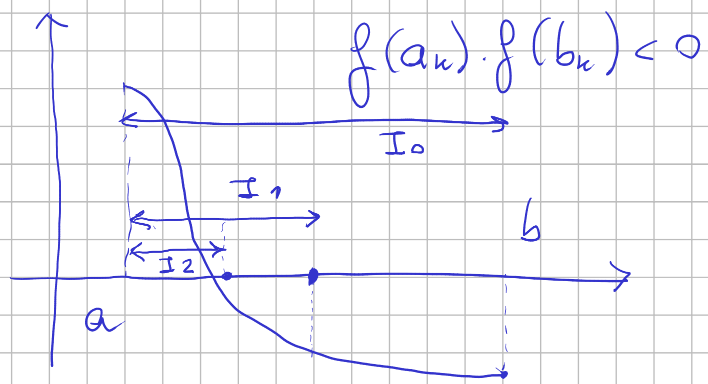
Th di esistenza degli zeri

Data una funzione f continua con $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ e t.c. $f(a) \cdot f(b) < 0$ allora $\exists\ \alpha \in (a,b)$ t.c. $f(\alpha) = 0$



$I_0 = [a, b]$ verifico che $f(a) \cdot f(b) < 0$

$I_k = [a_k, b_k] \quad k \geq 0 \quad I_k \subset I_{k-1}$



$a^0 = a \qquad x^0 = \frac{(a^0 + b^0)}{2}$

$b^0 = b$

$k \geq 0$

$a^{k+1} = a^k \qquad b^{k+1} = x^k \quad$ se $\quad f(x^{(k)}) \cdot f(a^k) < 0$

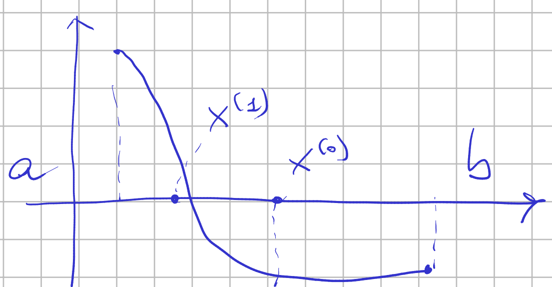
$a^{k+1} = x^k \qquad b^{k+1} = b^k \quad$ se $\quad f(x^k) f(b^k) < 0$

$x^{k+1} = \frac{a^{k+1} + b^{k+1}}{2}$

<u>OSS</u> È globalmente convergente su a, b

<u>OSS</u> mi basta saper valutare $f(x)$

$e^k = x^k - \alpha \qquad |e^k| \leq \frac{|I^k|}{2} = \frac{b-a}{2^{k+1}}$



n iterazioni per avere $|e^{(k)}| \leq \varepsilon$

$$e^{(k)} \leq \frac{b-a}{2^{k+1}} < \varepsilon$$

$$2^{k+1} > \frac{b-a}{\varepsilon} \qquad k+1 > \log_2 \frac{b-a}{\varepsilon}$$

$$k > \log_2 \frac{b-a}{\varepsilon} - 1$$

Input: $a, b, tol, N_{max}, f(x)$

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

SECANTI, CORDE, NEWTON

utilizzare informazioni sia su f che su f'

Sviluppo di Taylor in un intorno di $x^{(k)}$

$$f(x) \simeq f(x^k) + f'(x^{(k)}) \cdot (x - x^k) + o(x - x^k)^2$$

cercando x^{k+1} t.c. $f(x^{k+1}) = 0$

$$f(x^{k+1}) = f(x^{(k)}) + f'(x^k) \cdot (x^{k+1} - x^k) = 0$$

$$x^{k+1} = x^k - \frac{f(x^k)}{f'(x^k)} \qquad f'(x^k) \neq 0 \quad k \geq 0$$

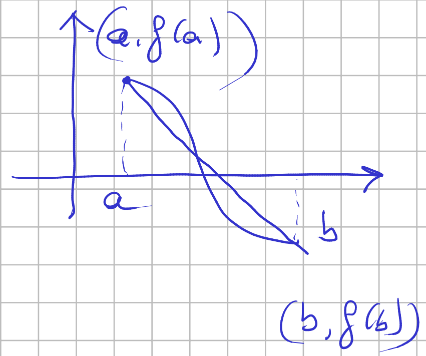
$$x^{k+1} = x^k - q_k^{-1} \cdot f(x^k)$$

q^k è una approssimazione di $f'(x^k)$

se q_k è $f'(x^k)$ => metodo di Newton

CORDE

$$q_k = \text{costante} = q = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

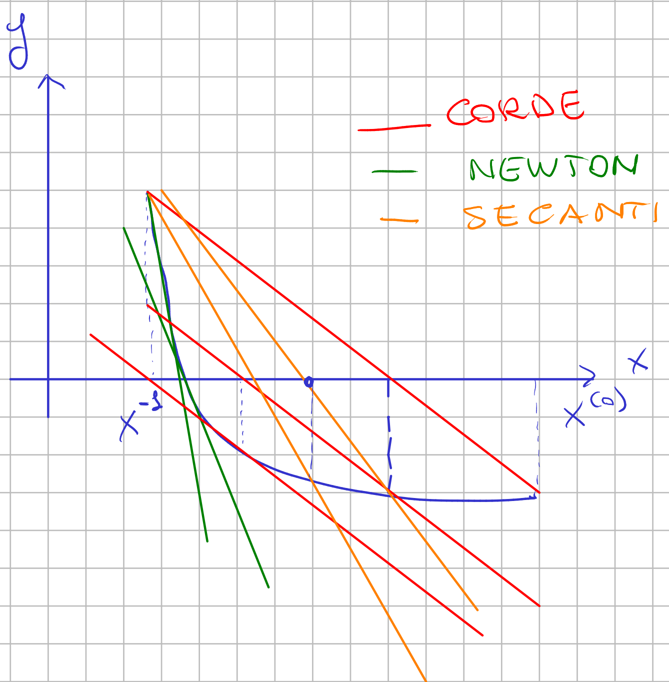


$$x^{k+1} = x^k - \frac{(b-a)}{f(b) - f(a)} \cdot f(x^k)$$

SECANTI

$$q_k = \frac{f(x^{(k)}) - f(x^{k-1})}{x^k - x^{k-1}} \qquad \forall\, k > 0$$

$$x^{k+1} = x^k - \frac{(x^k - x^{k-1})}{f(x^k) - f(x^{k-1})} \cdot f(x^k)$$



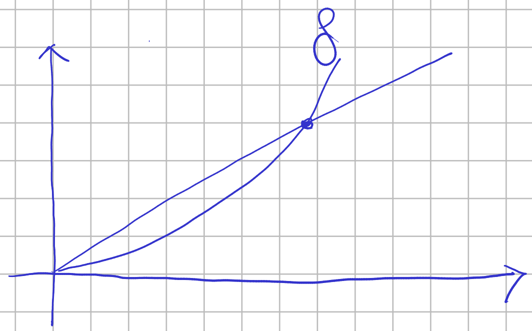
NEWTON	$x^{(0)}$, $f'(x)$, $f(x)$	$p = 2$
CORDE	$x^{(0)}$, $f(x)$, $[a, b]$	$p = 1$
SECANTI	x^{-1}, $x^{(0)}$, $f(x)$	$p \simeq 1.63$

METODO DEL PUNTO FISSO

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ $\qquad f(x) = 0$

$x - \phi(x) = 0$ $\qquad \phi$ è scelta in modo che

$\phi(\alpha) = \alpha$ quando $f(\alpha) = 0$



$$x^{k+1} = \phi(x^k) \qquad k \geq 0$$

ϕ è detta funzione di iterazione

Th. convergenza

1) $\Phi \in C^0[a,b]$ e t.c. $\Phi(x) \in [a,b]$ $\forall$ $x \in [a,b]$ allora esiste almeno un punto fisso $\alpha \in [a,b]$

2) Se supponiamo

$\exists\, L < 1$ t.c. $|\phi(x_1) - \phi(x_2)| \leq L\,|x_1 - x_2|$

$\forall\, x_1, x_2 \in [a,b]$

allora ϕ ha un punto fisso unico α e la successione $x^{k+1} = \phi(x^k)$ converge ad α

$\forall\, x^{(0)} \in [a,b]$

Th. di Ostrowski

Se α è un punto fisso di una funzione ϕ continua e derivabile in un intorno I di α

$f \in C^1(I)$

Se $|\phi'(\alpha)| < 1$ allora $\exists\ \delta > 0$ per il quale $\{x^k\}$ converge a α $\forall\ x^{(0)}$ t.c. $|x^{(0)} - \alpha| < \delta$

$|\phi'(\alpha)|$ è detto fattore asintotico di convergenza

$$\lim_{k \to \infty} \frac{x^{k+1} - \alpha}{x^k - \alpha} = \phi'(\alpha)$$

$|\phi'(\alpha)| > 1 \Rightarrow$ diverge

$|\phi'(\alpha)| < 1 \Rightarrow$ converge

$|\phi'(\alpha)| = 1 \Rightarrow$ non si può dire niente

ESEMPIO

$\phi(x) = x - x^3$ ha come punto fisso $\alpha = 0$

$x - x^3 = x \qquad x^3 = 0$

$\phi'(0) \Rightarrow 1 - 3x^2 = 1$

$x^{(0)} \in (-1, 1)$ $\quad x^{(k)} \in (-1, 1)$ per $k \geq 1$ e la successione converge

$x^{(0)} = \pm 1$ $\quad x^{(k)} = \alpha$ $\quad \forall k \geq 1$

$x^{(0)} = \frac{1}{2}$ dopo 2000 iterazioni l'errore è 0.016

$\{x^{(k)}\}$ diverge $\forall\ x^{(0)}$

CRITERI DI ARRESTO

$\{x^k\}$ per trovare $f(x)=0$

$$\lim_{k\to\infty} f(x^{(k)})=0$$

Controllo del residuo

Mi fermo quando $|f(x^k)|<\varepsilon$

$f'(\alpha)$ influenza la bontà del controllo

1) Se $|f'(\alpha)|\simeq 1$ $\quad |e^k|\simeq\varepsilon$

2) Se $|f'(\alpha)|\ll 1$ il test è inaffidabile

$$|e^k|\gg\varepsilon$$

3) Se $|f'(\alpha)|\gg 1$

il test è affidabile ma potrebbe essere troppo restrittivo

$$|e^k|\ll\varepsilon$$

Controllo sull'incremento

$$|x^{k+1}-x^k|<\varepsilon$$

RISOLUZIONE DI SISTEMI DI EQ. NON LINEARI

$F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ trovare $x^* \in \mathbb{R}^n$ t.c. $F(x^*) = 0_n$

$F \in C^1(D)$ $D \in \mathbb{R}^n$

$F: D \to \mathbb{R}^n$

$J_F(x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$

$$\left(J_F(x) \right)_{ij} = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right)(x) \quad i, j = 1, \dots, n$$

$$J_F = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} F_1 \\ F_2 \end{matrix} \begin{cases} \log(x_1) = x_2 \\ x_2^2 = x_1 \end{cases}$$

NEWTON

$x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ per $k=0$ .... convergenza

$$\underbrace{J_F(x^{(k)})}_{\mathbb{R}^{n \times n}} \, \delta x^{(k)} = -F(x^{(k)})$$

$$x^{k+1} = x^k + \delta x^k \rightarrow -J_F^{-1}(x^k) \cdot F(x^k)$$

$$x^{k+1} = x^k - J_F^{-1}(x^k) \cdot F(x^k)$$

1) Ad ogni passo assemblo $J_F(x^k)$

2) Risolvo $J_F(x^k) \cdot \delta x^k = - F(x^k)$

3) Aggiorno la soluzione