Prerequisiti di base di Algebra lineare

- Spazi vettoriali
- Matrici - vettori ⇒ operazioni su matrici

somma, sottrazione, determinante, inversa, trasposta, etc.

- autovalori e autovettori

FONDAMENTI DELLA MATEMATICA NUMERICA

$$F(x, d) = 0$$

incognita

dati del mio problema

funzione nota

diretti conosce d, conosce F, voglio trovare x

inversi conosce x, conosco F, voglio trovare d

identificazione conosco x, conosco d, voglio trovare F

Problema ben posto

① $\forall d \in D \ \exists! \ x$ t.c. $F(x,d)=0$

unicità della soluzione

② dipendenza continua dai dati

prendo $d \in D$ ed una variazione δd

$$F(x+\delta x, d+\delta d) = 0$$

Si ha dipendenza continua dai dati

Se $\exists \ k_0 = k(d)$ t.c. $\forall \delta d : d+\delta d \in D$

$$\|\delta x\| \leq k_0 \|\delta d\|$$

piccole variazioni dei dati portano a piccole variazioni della soluzione

ESEMPIO PROBLEMA MAL POSTO

$$p(x) = x^4 - x^2(2d-1) + d(d-1) \qquad F = p(x,d)$$

$$F(x,d) = 0$$

$$x^2 = t$$

$$\underbrace{1}_{a}\, t^2 - t\,\overbrace{(2d-1)}^{b} + \overbrace{d(d-1)}^{c} = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\frac{2d-1 \pm \sqrt{\cancel{4d^2} + 1 - \cancel{4d} - \cancel{4d^2} + \cancel{4d}}}{2}$$

$$\frac{2d-1 \pm \sqrt{1}}{2} \quad \begin{cases} t = d \\ t = d-1 \end{cases}$$

$x^2 = d$

$x^2 = d-1$

- $d \geq 1$ 4 radici $x = \pm\sqrt{d}$ $\quad x = \pm\sqrt{d-1}$
- se $d \in [0,1)$ ho due radici $x = \pm\sqrt{d}$
- se $d < 0$ non ho radici

Numero di condizionamento relativo

$$K_{rel}(d) = \sup \left\{ \frac{\|\delta x\| / \|x\|}{\|\delta d\| / \|d\|} \;,\; \begin{matrix} \delta d \neq 0 \;,\; d+\delta d \in D \\ x \neq 0 \\ d \neq 0 \end{matrix} \right\}$$

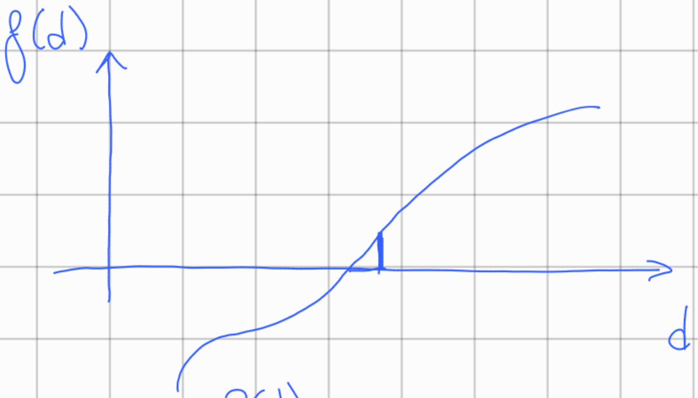
K è piccolo il problema è ben condizionato
K è grande " " " mal condizionato

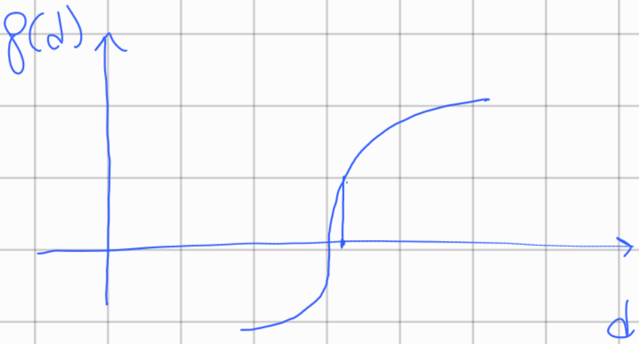
se abbiamo $x = 0$ $d = 0$

Numero di condizionamento assoluto

$$K_{abs}(d) = \sup \left\{ \frac{\|\delta x\|}{\|\delta d\|} \;,\; \delta d \neq 0 \;,\; d+\delta d \in D \right\}$$

$$Ax = b \qquad A(x+\delta x) = b + \delta b$$

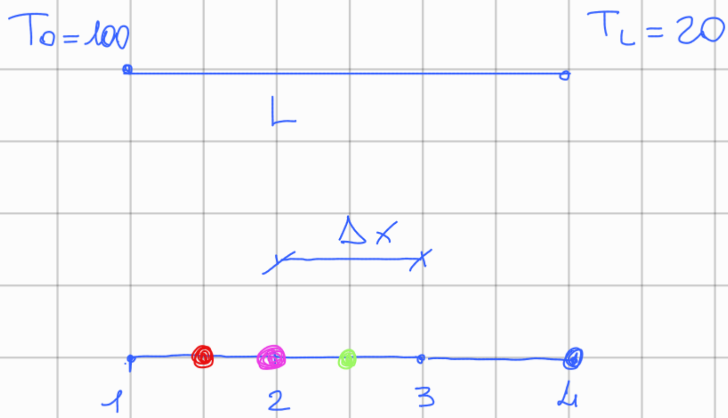




Eq. trasmissione del calore

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = f$$

$$\Delta T$$



$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} = f \\ \text{B.C. su } \partial\Omega \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{i+1/2} \simeq \frac{T_{i+1} - T_i}{\Delta x}$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{i-1/2} \simeq \frac{T_i - T_{i-1}}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \simeq \frac{\left.\dfrac{\partial T}{\partial x}\right|_{i+1/2} - \left.\dfrac{\partial T}{\partial x}\right|_{i-1/2}}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \simeq \frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{\Delta x^2} = 0$$

1) $T_1 = 100$

2) $$\frac{T_3 - 2T_2 + T_1}{\Delta x^2} = 0$$

3) $$\frac{T_4 - 2T_3 + T_2}{\Delta x^2} = 0$$

4) $T_4 = 20$

$$AT = b \qquad T = \begin{vmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{vmatrix} \qquad b = \begin{vmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \\ 20 \end{vmatrix}$$

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/\Delta x^2 & -2/\Delta x^2 & 1/\Delta x^2 & 0 \\ 0 & 1/\Delta x^2 & -2/\Delta x^2 & 1/\Delta x^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \\ 20 \end{vmatrix}$$

1) A è invertibile

$$T = A^{-1} b$$

2) rank(A) = n $\quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

3) Se sistema omogeneo associato $AT = 0$ ha come soluzione unica $T = 0$

METODO DI CRAMER

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$$ la matrice ottenuta sostituendo b con la colonna i-esima

Costo computazionale

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$n+1$ determinanti — un determinante $n!$

1 flop = floating point operation

$(n+1)n! \Rightarrow$ costo totale

$\approx (n+1)!$

3×3 costo $4!$ flops

20×20 $7 \cdot 10^{-8}$ secondi

$T = 2 \cdot 10^{6}$ anni

INVERSA

$x = A^{-1} b$ calcolarsi $A^{-1} \approx n^3$ $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$\Rightarrow x = \underbrace{A^{-1} b}$ n^2

$n^3 + n^2$

Numero di condizionamento per sistema lineare

$$K_{rel}(b) = \frac{\|A^{-1}\| \|b\|}{\|x\|} = \frac{\|A^{-1}\| \cdot \|Ax\|}{\|x\|}$$

$\|b\| = \|Ax\|$, $\|x\| \longrightarrow \|A^{-1}b\|$

$$K_{rel}(b) = \frac{\|Ax\| \cdot \|A^{-1}\|}{\|x\|} \le \frac{\|A\| \cancel{\|x\|} \cdot \|A^{-1}\|}{\cancel{\|x\|}} = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$$

$$\|Ax\| \le \|A\| \cdot \|x\|$$

$V = \begin{pmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_n \end{pmatrix}$

$$\|V\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |V_i|$$

$$\|V\|_2 = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (V_i)^2}$$

$$K_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 = \boxed{\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}}$$

$$\|A\|_{FROBENIUS} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2} = \sqrt{tr(AA^T)} \qquad A \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

$$\|A\|_1 = \max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|$$

$$\|A\|_\infty = \max_{i=1,\dots,m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

Proprietà numero di condizionamento

$$\| \underbrace{A \cdot A^{-1}}_{I} \| = 1$$

$$\overbrace{\| A \cdot A^{-1} \|}^{1} \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$$

- $K_{rel}(A) \geq 1$
- $K(A^{-1}) = K(A)$
- $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0 \quad K(\alpha A) = K(A)$
- Se A è ortogonale $K_2(A) = 1$
- $K_2(A) = \|A\|_2 \, \|A^{-1}\|_2 = \dfrac{\sigma_1(A)}{\sigma_n(A)}$

valore singolare max di A

valore singolare min di A

per matrici SPD

$$K_2(A) = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}} = \rho(A) \cdot \rho(A^{-1})$$

numero di cond. spettrale

$$\rho(A) := \max_{i=1,\dots,N} |\lambda_i|$$