METODI ITERATIVI

Th Se il metodo è consistente allora converge alla soluzione $\forall x^{(0)}$ se $\underbrace{\rho(B)}_{\text{raggio spettrale}} < 1$

$\rho(B)$ è piccolo tanto più il metodo converge rapidamente

Definizione quantità

1) $\|B^m\|$ fattore di convergenza dopo m iterazioni

2) $\|B^m\|^{1/m}$ fattore " " medio " " "

3) $R_m(B) = -\frac{1}{m} \log \|B^m\|$ velocità media di convergenza dopo m iterazioni

$\|B\| < 1$ condizioni sufficiente per la convergenza

METODO ITERATIVI LINEARI

$A = P - N \qquad A = P - N \qquad (P - N)x = b$

P ed N sono matrici opportune P sia non singolare

P detta matrice di precondizionamento

dato $x^{(0)}$ x^{k+1} per $k \geq 0$ è data da

$$Px^{(k+1)} = Nx^{(k)} + b \qquad k \geq 0$$

↳ deve essere semplice da invertire

$$x^{k+1} = \underbrace{P^{-1}N}_{B}\, x^{(k)} + \underbrace{P^{-1}b}_{f}$$

$P = A \qquad P^{-1} = A^{-1} \qquad N = 0$

$x^{k+1} = A^{-1}b$ — $\times$ $\qquad P \approx A$

↳ n^3

$P = \text{diag}(A)$

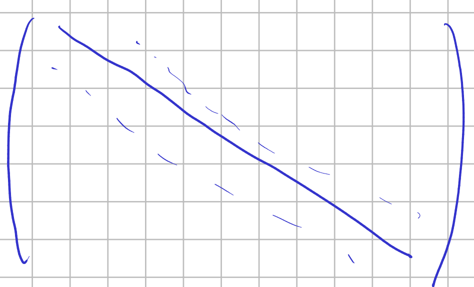
<u>proprietà</u>

Sia $A = P - N$ con A e P simmetriche e definite positive se $2P - A$ è definita positiva allora il metodo converge $\forall\, x^{(0)}$

<u>Jacobi, Gauss-Seidel, Rilassamento</u>

JACOBI

Se gli elementi diagonali di A sono non nulli



$$x_i = \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right] \qquad i = 1, \dots, n$$

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

dato $x^{(0)}$

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}\right]$$

$$A = P - N$$

$$P = D \qquad N = D - A = E + F$$

E triangolare inferiore

$$e_{ij} = -a_{ij} \quad i > j \qquad e_{ij} = 0 \quad \text{se} \quad i \leq j$$

F triangolare superiore

$$f_{ij} = -a_{ij} \quad i < j \qquad f_{ij} = 0 \quad \text{se} \quad i \geq j$$

$$B_J = D^{-1}(E + F) = I - D^{-1}A$$

$\downarrow$ matrice iterazione metodo di jacobi

$$(D - E - F)x = b$$

$$Dx = (E + F)x + b$$

$$Dx^{k+1} = (E + F)x^{(k)} + b$$

$$x^{k+1} = \underbrace{D^{-1}(E+F)}_{B_J} x^{(k)} + \underbrace{D^{-1} \cdot b}_{g_J}$$

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad D^{-1} = \begin{pmatrix} 1/a_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & 1/a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\overset{A}{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}} = \overset{D}{\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}} - \overset{E}{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -a_{21} & 0 & 0 \\ -a_{31} & -a_{32} & \end{pmatrix}} - \overset{F}{\begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} \\ 0 & 0 & -a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

$$A = P - N$$

$$Px^{(k+1)} = Nx^{(k)} + b$$

$$x^{k+1} = P^{-1} N x^{(k)} + P^{-1} b$$

$$B = P^{-1} N \qquad g = P^{-1} b$$

$$\boxed{x^{(k+1)} = x^{(k)} + P^{-1} r^{(k)}}$$

$$r^{(k)} = \underbrace{b - Ax^{(k)}}$$

vettore residuo alla iterazione k-esima

JOR = JACOBI OVER RELAXED

metodo del rilassamento

parametro di rilassamento ω

$$x_i^{(k+1)} = \frac{\omega}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}\right] + (1-\omega)x_i^{(k)}$$

$$B_{J_\omega} = \omega B_J + (1-\omega) I \qquad P = D$$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \omega D^{-1} r^{(k)}$$

il metodo è consistente $\forall \omega \neq 0$

$\omega = 1$ coincide con Jacobi

METODO DI GAUSS-SEIDEL

al passo $x^{(k+1)}$ si utilizzano i valori

$x_i^{(k+1)}$ se disponibili

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}\right]$$

$i = 1, \dots, n$

$$A = P - N$$

$$P = D - E \qquad N = F$$

$$B_{GS} = (D-E)^{-1} F$$

SOR metodo del rilassamento successivo

$$x_i^{(k+1)} = \frac{\omega}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right] +$$

$$+ (1-\omega) x_i^{(k)}$$

$$(I - \omega D^{-1} E) x^{(k+1)} = [(1-\omega) I + \omega D^{-1} F] x^{(k)} +$$
$$\omega D^{-1} b$$

$$B(\omega) = (I - \omega D^{-1} E)^{-1} [(1-\omega) I + \omega D^{-1} F]$$

consistente $\forall\, \omega \neq 0$ $\omega = 1$ coincide con GS

$\omega \in (0, 1)$ sottorilassato

$\omega > 1$ sovrarilassato

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \left(\frac{1}{\omega} D - E \right)^{-1} \cdot r^{(k)}$$