Proprietà Numero di Condizionamento

$$\|\underbrace{A \cdot A^{-1}}_{I}\| = 1$$

$K_{rel}(A)$

$$\|A \cdot A^{-1}\| \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$$

- $K_{rel}(A) \geq 1$

- $K(A^{-1}) = K(A)$

- $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \ \alpha \neq 0 \qquad K(\alpha A) = K(A)$

- Se A è ortogonale $K_2(A) = 1$

- $K_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 = \dfrac{\sigma_1(A)}{\sigma_n(A)}$

valori singolari max di A

min di A

per matrici simmetriche def. positive

$$K_2(A) = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}} = \rho(A) \cdot \rho(A^{-1})$$

raggio spettrale

$$\rho(A) = \max_{i=1,N} |\lambda_i|$$

numero di cond. spettrale

RISOLUZIONE DI SISTEMI LINEARI

diretti ⇒ soluzione "esatta" con un numero finito di passi ⇒ SL piccoli, matrici dense

iterativi ⇒ soluzione approssimata con un numero finito di iterazioni
arrivo alla soluzione esatta con un numero infinito di iterazioni
SL grandi dimensioni ⇒ matrice sparse

SISTEMI TRIANGOLARI

Triangolare inferiore

$$\begin{vmatrix} e_{11} & 0 & 0 \\ e_{12} & e_{22} & 0 \\ e_{13} & e_{23} & e_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{vmatrix}$$

$$e_{11} \cdot x_1 = b_1 \qquad x_1 = \frac{b_1}{e_{11}}$$

$$x_2 = \frac{(b_2 - e_{21} \cdot x_1)}{e_{22}}$$

$$x_3 = \frac{(b_3 - e_{31} x_1 - e_{32} \cdot x_2)}{e_{33}}$$

$$x_1 = \frac{b_1}{e_{11}}$$

$$x_i = \frac{1}{e_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} e_{ij} x_j \right) \qquad i = 2, \dots, n$$

metodo di sostituzione in avanti

costa n^2 operazioni $\longrightarrow$ cramer $o((n+1)!)$

inversa $o(n^3)$

SISTEMI TRIANGOLARI SUPERIORI

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$u_{33} x_3 = b_3 \qquad x_3 = \frac{b_3}{u_{33}}$$

$$x_n = \frac{b_n}{u_{nn}}$$

$$x_i = \frac{1}{u_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij} x_j \right) \qquad i = n-1, \dots, 1$$

Metodo di sost. all'indietro

costo $o(n^2)$

Metodo di eliminazione di Gauss

$Ax = b \implies Ux = \hat{b}$ con U triangolare superiore

$$A^{(1)} x = b^{(1)}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \cancel{a_{21}} & a_{22} & a_{23} \\ \cancel{a_{31}} & \cancel{a_{32}} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$2\,eq_{(1)} = 2 \cdot 1eq + 2eq_{(0)}$$

$$A^{(n)} x = b^{(n)}$$

elementi pivotali

$$m_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} \qquad i = k+1, \dots, n$$

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - m_{ik}\, a_{kj}^{(k)} \qquad i,j = k+1, \dots, n$$

$$b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - m_{ik}\, b_k^{(k)} \qquad i = k+1, \dots, n$$

costo $O\left(\frac{2}{3} n^3\right)$

$$Ax = b \qquad Ux = \hat{b}$$

MEG come un metodo di fattorizzazione

$$U = A^{(n)}$$

$$A^{(2)} = M_1 \cdot A^{(1)}$$

$$M_2 \underbrace{M_1 A^{(1)}}_{A^{(2)}} = A^{(3)}$$

$$(M_n \cdot \dots\dots M_1) \cdot A^{(1)} = A^{(n)}$$

$$A^{(1)} = (M_n \dots\dots M_1)^{-1} \cdot A^{(n)}$$

$$\hookrightarrow L \cdot U$$

$$A = L \cdot U$$

FATTORIZZAZIONE LU

$$Ax = b$$

$$L\underbrace{Ux}_{y} = b$$

$$\begin{cases} Ly = b & \Rightarrow \text{sost. in avanti} \Rightarrow \text{trovo } y \\ Ux = y & \Rightarrow \text{sost. all'indietro} \Rightarrow \text{trovo } x \end{cases}$$

$$A = LU \qquad \det(A)$$

calcolo det

$$\det(LU) = \underbrace{\det(L)}_{\prod_{i=1}^{n} L_{ii}} \underbrace{\det(U)}_{\prod_{i=1}^{n} U_{ii}}$$

Calcolo Inversa

$$AA^{-1} = I \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & & \\ 0 & & 1 & & \\ 0 & & & \ddots & \\ & & & & \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} A \cdot x_1 = e_1 \\ A \cdot x_2 = e_2 \\ \vdots \\ A\, x_n = e_n \end{cases} \qquad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \left(x_1, x_2, x_3 \right)$$

$$LU\,x_i = e_i$$

$2n$ sistemi triangolari

PSEUDOCODICE

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

```
for k = 1 : n-1
    assert A(k,k) ≠ 0
    A(k+1:n, k) = A(k+1:n, k) / A(k,k)

    for j = k+1 : n
        i = k+1 : n
            A(i,j) = A(i,j) - A(i,k) · A(k,j)
    end
end
```

FATTORIZZAZIONE DI CHOLESKY

A è simmetrica e definita positiva

$\exists!$ matrice H triangolare superiore per cui

$$A = H^T H \qquad L = U^T$$

H^T è L, H è U

$$\frac{1}{3} n^3$$

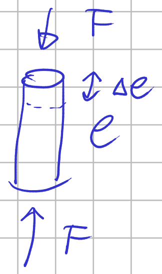
$$h_{11} = \sqrt{a_{11}}$$

per $j = 2, \dots, n$ $\qquad i = 1, \dots, j-1$

$$h_{ij} = \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} h_{ki} h_{kj}\right) \Big/ h_{ii}$$

$$h_{jj} = \left(a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} h_{kj}^2\right)^{1/2}$$

Metodo minimi quadrati



$$\varepsilon = \frac{\Delta e}{e}$$

test i	pressione	def. ε
1	0	0
	0.06	0.08
⋮	⋮	⋮
8	0,7	0,29

$$\varepsilon(p) = a p + q$$

$$\varepsilon_1 = a p_1 + q$$
$$\varepsilon_2 = a p_2 + q$$
$$\vdots$$
$$\varepsilon_8 = a p_8 + q$$

$\tilde{f}_m(x)$ il polinomio di grado m t.c.

$$\sum_{i=1}^{n} \left| y_i - \tilde{f}_m(x_i) \right|^2 \leq \sum_{i=0}^{m} \left| y_i - p_m(x_i) \right|^2$$

$$\forall\ p_m(x) \in \mathbb{P}_m$$

$$f_m(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \cdots + a_m x^m$$

$y_i \qquad x_i$

$$\tilde{f}_m(x_i) = y_i$$

$$B a = \tilde{y} \qquad B = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^n \\ 1 & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & & & \\ \vdots & x_m & x_m^2 & x_m^n \end{vmatrix}$$

$$a = \begin{vmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{vmatrix} \qquad \tilde{y} = \begin{vmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_m \end{vmatrix}$$

$$B^T B a = B^T \tilde{y}$$

Fattorizzazione LU

```
function [A]=lukji(A)
% LUKJI fattorizzazione LU di una matrice A nella versione kji
% Y=LUKJI(A): U e' memorizzata nella parte triangolare superiore di Y
% e L nella parte triangolare inferiore stretta di Y.
[n,m]=size(A);
if n ~= m, error('Solo sistemi quadrati'); end
for k=1:n-1
    if A(k,k)==0; error('Elemento pivotale nullo'); end
    A(k+1:n,k)=A(k+1:n,k)/A(k,k);
    for j=k+1:n
        i=k+1:n; A(i,j)=A(i,j)-A(i,k)*A(k,j);
    end
end
return
```

CHOLESKY

```
function [A]=chol2(A)
% CHOL2 fattorizzazione di Cholesky di una matrice A di tipo s.d.p..
% A=CHOL2(A) il triangolo superiore H di A è tale che H'*H=A.
[n,m]=size(A);
if n ~= m, error('Solo sistemi quadrati'); end
A(1,1)=sqrt(A(1,1));
for j=2:n
    for i=1:j-1
      if A(j,j) <= 0, error('Elemento pivotale nullo o negativo'); end
      A(i,j)=(A(i,j)-(A(1:i-1,i))'*A(1:i-1,j))/A(i,i);
   end
   A(j,j)=sqrt(A(j,j)-(A(1:j-1,j))'*A(1:j-1,j));
end
return
```