METODI NUMERICI PER LA RISOLUZIONE DI EQ. NON LINEARI

data $f: I = (a,b) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

si cerca $\alpha \in \mathbb{R}$ t.c. $f(\alpha) = 0$

1) determinare gli zeri di un polinomio per gradi
2) determinare zeri di funzioni esponenziali, logaritmiche, trigonometriche, etc.

$$x^{(k)} \quad \text{t.c.} \quad \lim_{k \to \infty} x^{(k)} = \alpha$$

Definizione di ordine di convergenza

Si dice che la successione $\{x^{(k)}\}$ converge ad α con ordine $p \geq 1$ se

$$\exists\, c > 0 \quad \text{t.c.} \quad \frac{|x^{(k+1)} - \alpha|}{|x^{(k)} - \alpha|^p} \leq C \quad \forall\, k \geq k_0$$

se $p = 1$ per avere convergenza $C < 1$

$$|x^{(k+1)} - \alpha| < |x^{(k)} - \alpha|$$

C fattore di convergenza

OSS la convergenza dipende dalla scelta di $x^{(0)}$

Ho risultati di convergenza solo locali in un intorno di $x^{(0)}$

Se $x^{(k)}$ converge ad α $\forall x^{(0)} \in I$ si dice che il metodo è globalmente convergente ad α sull'intervallo I

Condizionamento eq. nonlineare

$$f(x) = 0 \qquad f(x) = \varphi(x) - d = 0$$

$$\varphi(x) = d \Rightarrow f(x) = 0$$

$f \in C^1$

φ è localmente invertibile

$$\alpha = \varphi^{-1}(d)$$

$$K_{rel}(d) \simeq \frac{\| G'(d)\| \cdot \|d\|}{\|G(d)\|}$$

$$K_{abs}(d) \simeq \|G'(d)\|$$

$G(d)$ risolvente

G è φ^{-1} $\qquad (\varphi^{-1})'(d) = \dfrac{1}{\varphi'(\alpha)}$

$$K_{rel}(d) = \frac{|d|}{|f'(\alpha)||\alpha|}$$

solo con molteplicità unitaria

$$K_{abs}(d) \simeq \frac{1}{|f'(\alpha)|}$$

$f'(\alpha)$ non sia troppo piccolo

Relazione con il residuo

$x : f(x) = 0 \qquad \alpha$

$d = 0$ e α radice con molteplicità $= 1$

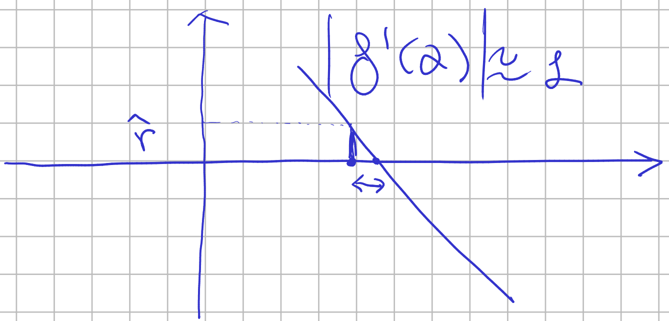
$\hat{\alpha} \neq \alpha \qquad f(\hat{\alpha}) = \hat{r} \neq 0 \qquad (x-2)^2 = 0$

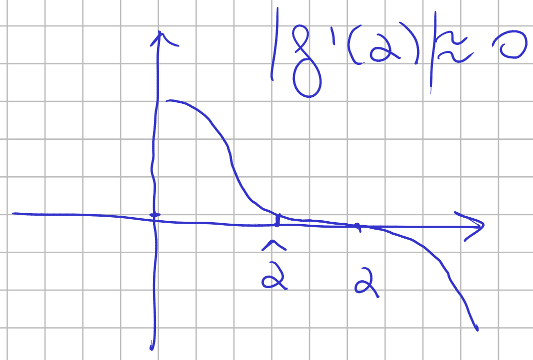
$(x-2)^3 = 0$

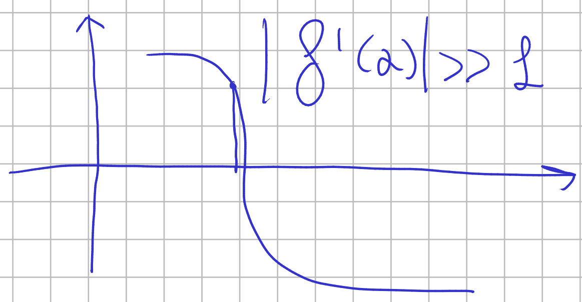
$\delta x = \hat{\alpha} - \alpha$

$\delta d = \hat{r}$

$$\frac{|\hat{\alpha} - \alpha|}{|\alpha|} \lesssim \frac{|\hat{r}|}{|f'(\alpha)||\alpha|}$$







$f(x) = 0$

$\underbrace{\varphi(x) - g(x)} = 0$

$f(x) \Rightarrow 0$

APPROCCI GEOMETRICI

$\Rightarrow$ bisezione $\qquad f(x) = 0$

$\Rightarrow$ corde

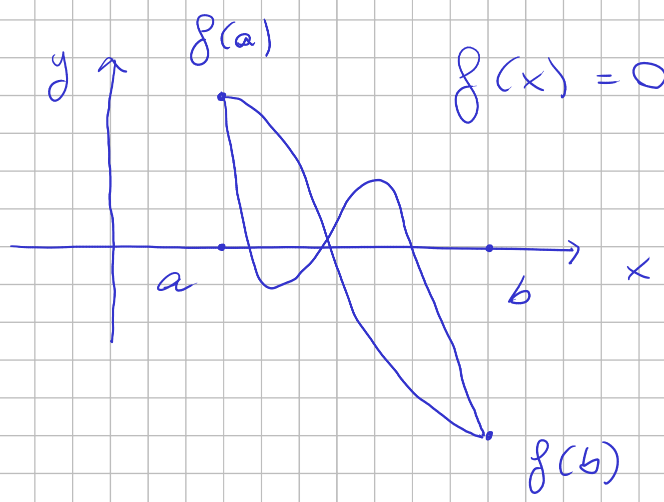
$\Rightarrow$ secanti

$\Rightarrow$ Newton

Bisezione

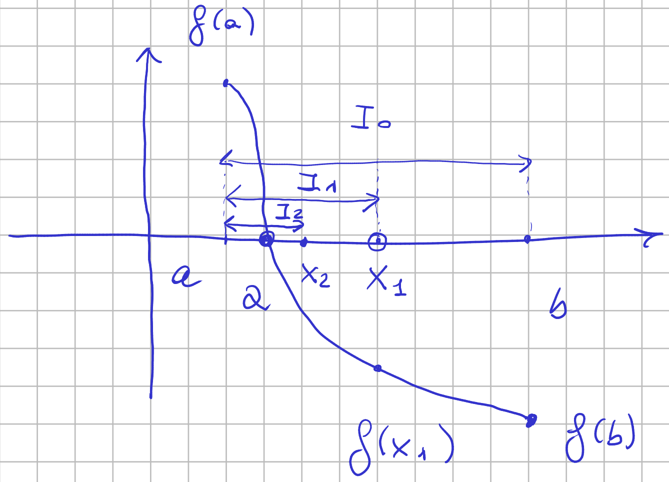
Th (Teorema degli zeri)

Data una funzione f continua con $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ e t.c. $f(a) \cdot f(b) < 0$ allora $\exists\ \alpha \in (a,b)$ t.c. $f(\alpha) = 0$

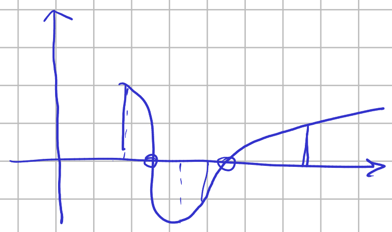


$I_0 = [a,b]$ verifico che $f(a)f(b) < 0$

$I_k = [a_k, b_k] \quad k \geq 0 \qquad I_k \subset I_{k-1}$



$f(a)\,f(b)<0$



$$a^0 = a \qquad x^0 = \frac{(a^{(0)}+b^{(0)})}{2}$$
$$b^0 = b$$

$k \geq 0$

$$a^{k+1} = a^k \qquad b^{k+1} = x^k \qquad \text{se } f(x^{(k)})\cdot f(a^{(k)})<0$$
$$a^{k+1} = x^k \qquad b^{k+1} = b^k \qquad \text{se } f(x^{(k)})\cdot f(b^k)<0$$
$$x^{k+1} = \frac{a^{k+1}+b^{k+1}}{2}$$

OSS metodo globalmente convergente su a, b

OSS basta valutare la funzione $f(x)$

$$e^{(k)} = x^{(k)} - \alpha$$

a b

$\frac{b-a}{2}$

$$|e^{(k)}| \leq \frac{|I_k|}{2} = \frac{b-a}{2^{k+1}}$$

$e^{(k)} \leq \varepsilon$ n iterazioni per avere $e^{(k)} \leq \varepsilon$

$$e^{(k)} \le \frac{b-a}{2^{k+1}} < \varepsilon$$ tolleranza

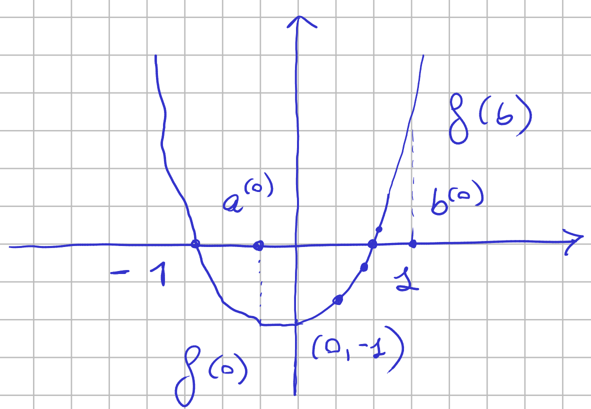
$$\frac{b-a}{2^{k+1}} < \varepsilon \qquad 2^{k+1} > \frac{b-a}{\varepsilon}$$

$$k+1 > \log_2 \frac{b-a}{\varepsilon}$$

$$k > \log_2 \frac{b-a}{\varepsilon} - 1$$

ESEMPIO

$$f(x) = x^2 - 1 \qquad a^{(0)} = -0,25 \qquad b^{(0)} = 1.25$$



$$I^{(0)} = (-0,25,\ 1,25) \qquad x^{0} = 0.5 = \frac{a^{(0)}+b^{(0)}}{2} \qquad f(x)<0$$

$$I^{(1)} = (0,5,\ 1,25) \qquad x^{1} = 0,875 \qquad f(x)<0$$

$$I^{(2)} = (0,875,\ 1,25) \qquad x^{(2)} = 1,0625 \qquad f(x)>0$$

$$I^{(3)} = (0,875,\ 1,0625) \qquad x^{(3)} = 0,96875 \qquad f(x)<0$$

$$\alpha = 1$$

Input: a, b, tol, N_{max}, $f(x)$

Caratteristiche: glob. convergente in a, b
sfrutta solo $f(x)$
non si generalizza a casi $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

SECANTI, CORDE, NEWTON

utilizzare informazioni sia su f che su f'

Sviluppo di Taylor in un intorno di $x^{(k)}$

$$f(x) \simeq f(x^{(k)}) + f'(x^{(k)}) \cdot (x - x^{(k)}) + \cancel{o\left((x-x^{(k)})^2\right)}$$

Δx

cercando x^{k+1} t.c. $f(x^{(k+1)}) = 0$

$$f(x^{(k+1)}) = f(x^{(k)}) + f'(x^{(k)}) \cdot \left(x^{(k+1)} - x^{(k)}\right) = 0$$

$$f'(x^{(k)}) \cdot x^{k+1} = -f(x^{(k)}) + f'(x^{(k)}) \cdot x^{(k)}$$

$$\boxed{x^{k+1} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}}$$

$f'(x^{(k)}) \neq 0$

$k \geq 0$

$$x^{k+1} = x^{k} - q_k^{-1} f(x^{(k)})$$

dove q_k è una approssimazione di $f'(x^{(k)})$

Se q_k coincide con $f'(x^{(k)}) \Rightarrow$ metodo di Newton

CORDE

$$q_k = \text{costante} = q = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

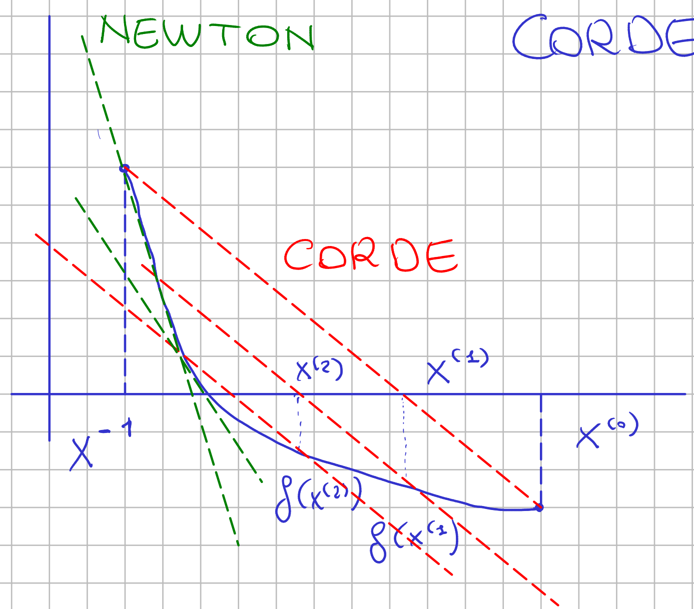
$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{(b-a)}{f(b)-f(a)} \cdot f(x^{(k)})$$

$$y = mx + q \qquad f'(x)$$

SECANTI

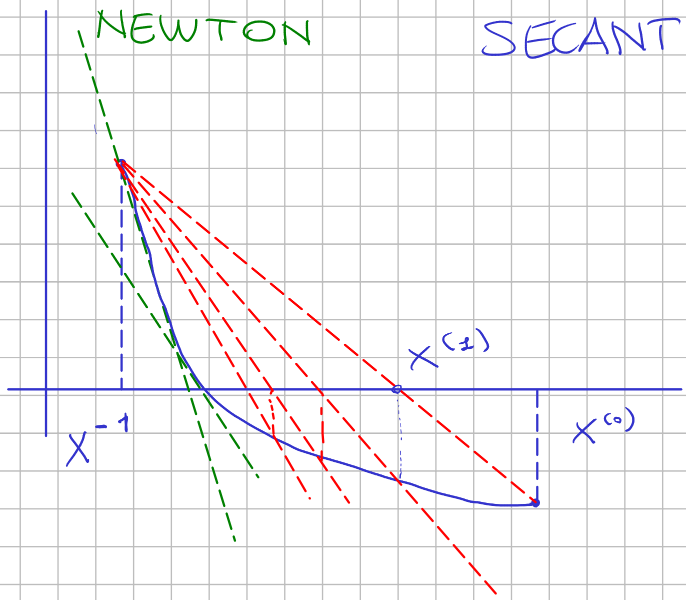
$$q_k = \frac{f(x^{(k)}) - f(x^{(k-1)})}{x^{(k)} - x^{(k-1)}} \qquad \forall\ k>0$$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{(x^{(k)} - x^{(k-1)})}{f(x^{(k)}) - f(x^{(k-1)})} \cdot f(x^{(k)})$$



CORDE vs NEWTON

SECANTI VS NEWTON



NEWTON $x^{(0)}, f'(x), f(x)$ $p=2$

CORDE $x^{(0)}, f(x), [a,b]$ $p=1$

SECANTI $x^{-1}, x^{(0)}, f(x)$ $p \simeq 1.63$

PROPRIETÀ (METODO DELLE SECANTI)

Se $f \in C^2(I)$ I è un intorno di α $f'(\alpha) \neq 0$ allora se $x^{(-1)}$ e $x^{(0)}$ sono sufficientemente vicini ad α il metodo converge con ordine $p = \frac{(1+\sqrt{5})}{2} \simeq 1.63$

NEWTON

$f \in C^1(I)$ $f'(x) \neq 0$ $\forall x \in I / \{\alpha\}$

$$q^k = f'(x^{(k)}) \quad \forall k \geq 0$$

ordine $p=2$

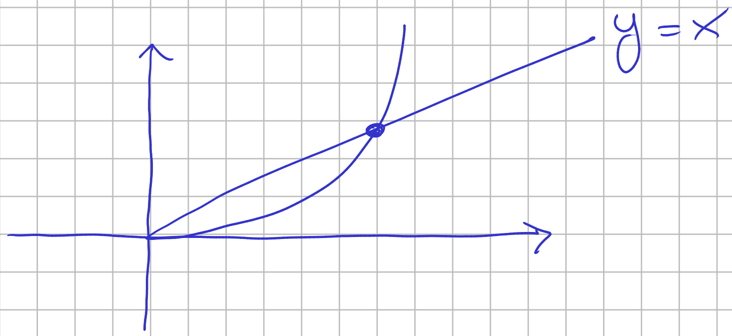
METODO DEL PUNTO FISSO

$f:[a,b] \to \mathbb{R}$ $\qquad f(x)=0$

$x - \phi(x) = 0 \longrightarrow$ funzione ausiliaria

$\phi(\alpha)=\alpha$ quando $f(\alpha)=0$

punti fissi sono i punti per cui $f(x)=x$



$$x^{(k+1)} = \phi(x^{(k)}) \qquad k \geq 0$$

Φ funzione di iterazione

$$f(x)+x = \Phi(x)$$

Th. Convergenza

$$x^{k+1} = \phi(x^{(k)})$$

1) $\phi \in C^0[a,b]$ e t.c. $\phi(x) \in [a,b]$ $\forall$ $x \in [a,b]$ allora esiste almeno un punto fisso $\alpha \in [a,b]$

2) Se supponiamo

$\exists\ L < 1$ t.c. $|\phi(x_1) - \phi(x_2)| \leq L\,|x_1 - x_2|$

$\forall\ x_1, x_2 \in [a,b]$

allora ϕ ha un punto fisso unico α e la successione converge ad α $\forall\ x^{(0)} \in [a,b]$

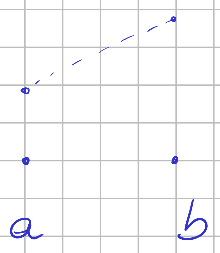
Dimostrazione (1)

Si suppone l'esistenza di punti fissi per ϕ

$g(x) = \phi(x) - x$

↳ per costruzione è continua su $[a,b]$

$g(a) = \phi(a) - a \geq 0$



$g(b) = \phi(b) - b \leq 0$

$g(a) \geq 0$

$g(b) \leq 0$

$g(x)$ si annulla in almeno un punto

⇓

c'è almeno un punto per cui

$\phi(x) = x$

2) ho supposto che α_1, α_2 siano 2 punti fissi distinti

$$|\alpha_1 - \alpha_2| = \underbrace{|\phi(\alpha_1) - \phi(\alpha_2)| \leq L|\alpha_1 - \alpha_2|}_{\text{ipotesi}} < |\alpha_1 - \alpha_2|$$

$L < 1$

$x^{(k)}$ converge ad α

$$x^{(k+1)} = \phi(x^{(k)}) \Rightarrow \text{converge } \alpha$$

$x^{(k)}$ converge ad α $\forall$ $x^{(0)} \in [a,b]$

$$0 \leq |x^{(k+1)} - \alpha| = |\phi(x^{(k)}) - \phi(\alpha)| \leq$$

$$L|x^{(k)} - \alpha| \leq \quad \leq L^{k+1}|x^{(0)} - \alpha| \quad \forall \; k \geq 0$$

$$\frac{|x^{(k)} - \alpha|}{|x^{(0)} - \alpha|} \leq L^k \qquad k \geq 0$$

per $k \to \infty$ $\quad L^k \to 0 \quad |x^{(0)} - \alpha| = \text{costante}$

per $k \to \infty$ $\quad |x^{(k)} - \alpha| \to 0 \quad x^{(k)} \to \alpha$

Th. di Ostrowski

Se α è un punto fisso di un funzione ϕ continua e derivabile con continuità in un intorno I di α $f \in C^1(I)$

Se $|\phi'(\alpha)| < 1$ allora $\exists\, \delta > 0$ per il quale $\{x^{(k)}\}$ converge ad α $\forall$ $x^{(0)}$ t.c. $|x^{(0)} - \alpha| < \delta$

si ha

$$\lim_{k \to \infty} \frac{x^{(k+1)} - \alpha}{x^{(k)} - \alpha} = \phi'(\alpha)$$

$|\phi'(\alpha)|$ è detta fattore asintotico di convergenza

$R = -\log(|\phi'(\alpha)|)$ velocità asintotica di convergenza

$|\phi'(\alpha)| > 1$ $\quad |\alpha - x^{(k+1)}| > |\alpha - x^{(k)}|$

diverge

$|\phi'(\alpha)| < 1$ $\quad |\alpha - x^{(k+1)}| < |\alpha - x^{(k)}|$

converge

$|\phi'(\alpha)| = 1$ non posso dire niente

ESEMPIO

$$\phi(x) = x - x^3$$

ha come punto fisso $\alpha = 0$

$\phi'(0) = 1 - 3x^2 = 1$

$x^{(0)} \in (-1,1)$ $\quad x^{(k)} \in (-1,1)$ per $k \geq 1$ e la successione converge

$x^{(0)} = \pm 1 \quad x^{(k)} = \alpha \quad \forall k \geq 1$

$x^{(0)} = \frac{1}{2}$ l'errore dopo 2000 iterazioni è pari 0,016

$\phi(x) = x + x^3 \qquad \alpha = 0$

$\phi'(0) = 1 \qquad \{x^{(k)}\}$ diverge $\forall\, x^{(0)} \neq 0$

$$f(x) = 0 \qquad f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

$$\phi(x) = x \qquad f(x) = 0$$

$$\phi(x) = f(x) + x \qquad x^{(k+1)} = f(x^{(k)}) + x^k$$

Generalizzazione di metodi geometrici come metodi di punto fisso

CORDE

$$\phi(x) = \phi_{CORDE}(x) = x - q^{-1} f(x) =$$

$$x - \frac{(b-a)}{f(b)-f(a)} \cdot f(x)$$

$$f(x) = 0 \qquad x = \phi(x)$$

$$x^{(k+1)} = \phi(x^k)$$

$$|\phi'_{CORDE}(\alpha)| < 1 \qquad |1 - q^{-1} \cdot f'(\alpha)| < 1$$

$$0 < q^{-1} f'(\alpha) < 2$$

$$b - a < \frac{2 f(b) - f(a)}{f'(\alpha)}$$

se f è lineare converge in una sola iterazione, altrimenti ha convergenza lineare $p = 1$

NEWTON

$$\phi_{NEWT}(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

supponendo $f'(a) \neq 0$ si ha

$$\phi'_{newton}(a) = 0 \qquad \phi''_{NEWT}(a) = \frac{f''(a)}{f'(a)}$$

Newton è di ordine 2

NEWTON, CORDE, SEC. etc. non sono globalmente convergenti, ho risultati di convergenza solo in prossimità di a

BISEZIONE è glob. convergente

ESEMPIO PUNTO FISSO

$$f(x) = x^2 + x + 1 \qquad f(x) = 0$$

$$\phi(x) = x$$

$$\phi(x) = x \overset{+}{\cancel{-}} f(x)$$

$$\phi(x) = x - x^2 - x - 1 = -x^2 - 1$$

$x = -1 - \frac{1}{x}$ $\phi(x) = -1 - \frac{1}{x}$

1 - 4

$f(x) = x^2 + x + 1 = 0$

$x + 1 + \frac{1}{x} = 0$ $x = -1 - \frac{1}{x}$

PROPRIETÀ

Se $\phi \in C^{p+1}(J)$ con J intorno di α

Se $\phi^{(i)}(\alpha) = 0$ per $i = 1, \dots, p$ allora

il metodo converge con ordine $p+1$

CRITERI DI ARRESTO

$\{x^{(k)}\}$ per trovare $f(x) = 0$

$$\lim_{k \to \infty} f(x^{(k)}) = 0$$

controllo del residuo

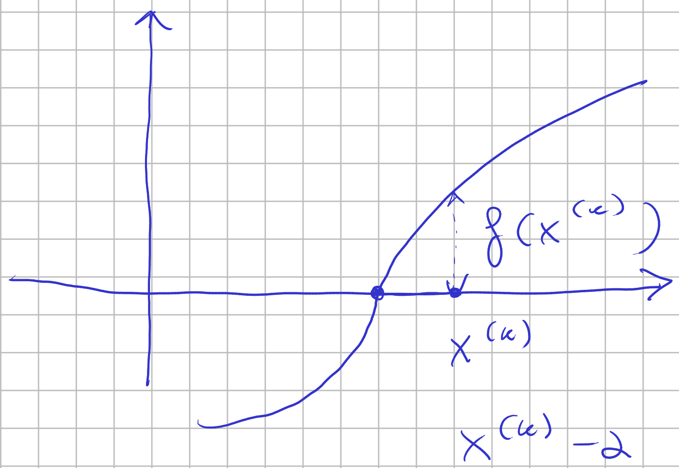
Mi fermo quando $|f(x^{(k)})| < \varepsilon$

$f'(\alpha)$ influenza la bontà di questo controllo

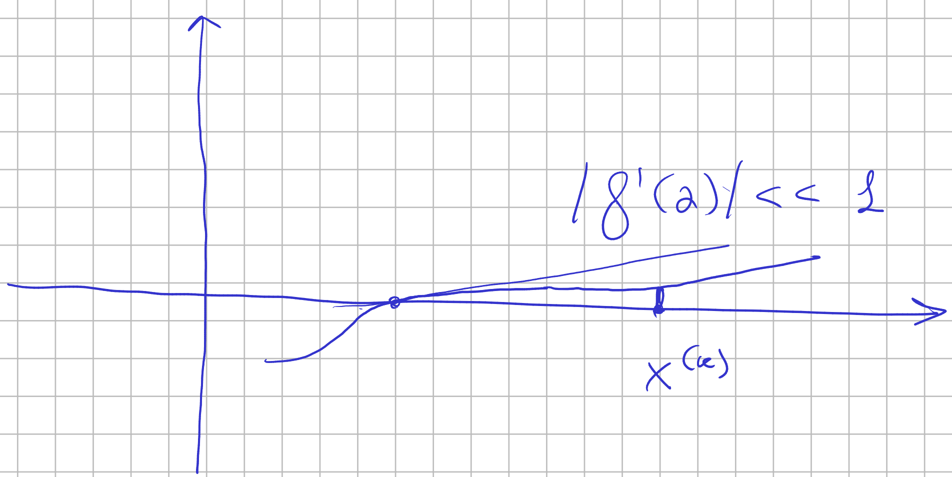
1) Se $|f'(\alpha)| \simeq 1$ $\quad |e^{(k)}| \simeq \varepsilon$

$$m = \frac{f(x^{k}) - f(\alpha)}{x^{k} - \alpha}$$

$$|e^{(k)}| = |x^{(k)} - \alpha|$$

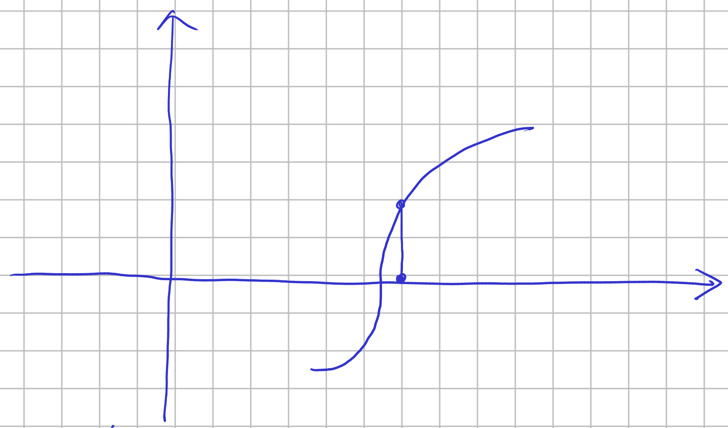


2) Se $|f'(\alpha)| << 1$ il test è inaffidabile



$|e^{(k)}|$ potrebbe essere molto maggiore di ε

3) $|f'(\alpha)| >> 1$



$|f(x)| < \varepsilon$ è affidabile ma potrebbe essere troppo restrittivo

Controllo sull'incremento

Mi fermo quando

$$|x^{k+1} - x^{k}| < \varepsilon$$

espansione di Taylor di ϕ al primo ordine calcolata in α

$$e^{k+1} = \phi(\alpha) - \phi(x^{(k)}) = \phi'(\xi^{(k)}) \cdot e^{k}$$

$$\phi(x+\alpha) = \phi(\alpha) + \phi'(\alpha)(x+\alpha)$$

x

→ compreso tra $x^{(k)}$ ed α

$$x^{(k+1)} - x^{(k)} = e^{(k)} - e^{(k+1)} = \left(1 - \phi'(\xi^{(k)})\right) \cdot e^{(k)}$$

$$\phi'(\xi^{(k)}) \approx \phi'(\alpha)$$

$$e^{(k)} \simeq \frac{1}{1-\phi'(\alpha)} \cdot \left(x^{k+1} - x^{k} \right)$$

$$\phi'(\alpha) \approx 1$$

TECNICHE DI ACCELLERAZIONE DI AITKEN

Un metodo di iterazione del punto fisso che converge ad α linearmente

l una approssimizzazione di $\phi'(\alpha)$

↳ utilizzare l ottimale che accelera la convergenza

Th. di Ostrowski

$$\lim_{k \to \infty} \frac{x^{k+1} - \alpha}{x^k - \alpha} = \phi'(\alpha)$$

k sufficientemente grande

$$\frac{x^{k+1} - \alpha}{x^k - \alpha} \simeq l$$

$$x^{k+1} - \alpha = l(x^k - \alpha)$$

$$\alpha \simeq \frac{x^k - l x^{k-1}}{1 - l} = \frac{x^k - l x^k + l x^k - l x^{k-1}}{1 - l} =$$

$$\alpha \simeq x^k + \frac{l}{1-l}(x^k - x^{k-1})$$

$$l^k = \frac{x^k - x^{k-1}}{x^{k-1} - x^{k-2}}$$

$$\lim_{k\to\infty} \ell^k = \phi'(\alpha)$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{x^k - x^{k-1}}{x^{k-1} - x^{k-2}} = \lim_{k\to\infty} \frac{(x^k - \alpha) - (x^{k-1} - \alpha)}{(x^{k-1} - \alpha) - (x^{k-2} - \alpha)} =$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\overbrace{\frac{x^k - \alpha}{x^{k-1} - \alpha}}^{\phi'(\alpha)} - 1}{1 - \frac{x^{k-2} - \alpha}{x^{k-1} - \alpha}} = \frac{\phi'(\alpha) - 1}{1 - \frac{1}{\phi'(\alpha)}} = \phi'(\alpha)$$

$$\frac{\cancel{\phi'(\alpha) - 1}}{\frac{\cancel{\phi'(\alpha) - 1}}{\phi'(\alpha)}} = \phi'(\alpha)$$

$$\alpha = x^k + \frac{\ell^k}{1 - \ell^k} \cdot (x^k - x^{k-1})$$

a rigori vale solo per k grandi però di fatto si usa per $k \geq 2$

$\hat{x}^{(k)}$ approssimazione di α

$$\hat{x}^k = x^k - \frac{(x^k - x^{k-1})^2}{(x^k - x^{k-1}) - (x^{k-1} - x^{k-2})}$$

formula di estrapolazione di Aitken

$$\Delta x^k = x^k - x^{k-1} \qquad \Delta^2 x^k = \Delta(\Delta x^k) =$$

$$= \Delta x^k - \Delta x^{k-1} = (x^k - x^{k-1}) - (x^{k-1} - x^{k-2})$$

$$\hat{x}^k = x^k - \frac{(\Delta x^k)^2}{\Delta^2 x^k}$$

$\Downarrow$

$\Downarrow$

rimpiazza $x^{k+1} = \Phi(x^k)$

Proprietà

$x^{k+1} = \Phi(x^k)$ con ordine $p \geq 1$

se $p = 1$ Aitken ha ordine 2

se $p \geq 2$ Aitken converge con ordine $2p-1$

se $p = 1$ e il punto fisso non converge Aitken converge comunque

RISOLUZIONE DI SISTEMI DI EQ NON LINEARI

$F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ trovare x^* t.c. $F(x^*) = 0_n$

$F \in C^1(D)$ $\quad D \in \mathbb{R}^n$

$F: D \to \mathbb{R}^n$

$J_F(x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ $\quad x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$

$$\left(J_F(x)\right)_{ij} = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)(x) \qquad i, j = 1, \dots, n$$

$$J_F = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_1(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n(x)}{\partial x_1} & & \dots & \frac{\partial F_n(x)}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{l} F_1 \\ F_2 \end{array} \begin{cases} \log(x_1) = x_2 \\ x_2^2 = x_1 \end{cases} \qquad F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$(x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$

NEWTON

$x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ per $k=0$ ... convergenza

$$\underbrace{J_F(x^{(k)})}_{\mathbb{R}^{n\times n}} \underbrace{\delta x^{(k)}}_{\mathbb{R}^n} = -\underbrace{F(x^{(k)})}_{\mathbb{R}^n}$$

residuo valutato in $x^{(k)}$

$$A x = b$$

$$x^{k+1} = x^k + \delta x^k \Rightarrow -J_F^{-1}(x^k)\,F(x^k)$$

$$x^{k+1} = x^k - \frac{f(x^k)}{f'(x^k)}$$

1) Ad ogni passo assemblo $J_F(x^{(k)})$

2) Risolvo il sistema lineare associato

$$J_F(x^k)\cdot(\delta x)^k = -F(x^k)$$

$\delta x \in \mathbb{R}^n$

3) Aggiorno la soluzione

metodo sensibile rispetto alla scelta di $x^{(0)}$, la convergenza è locale per $x^{(0)}$ vicini ad x^*

Converge con ordine 2 se $x^{(0)}$ è sufficientemente vicino a x^* e J_F non singolare

METODI DI NEWTON MODIFICATI

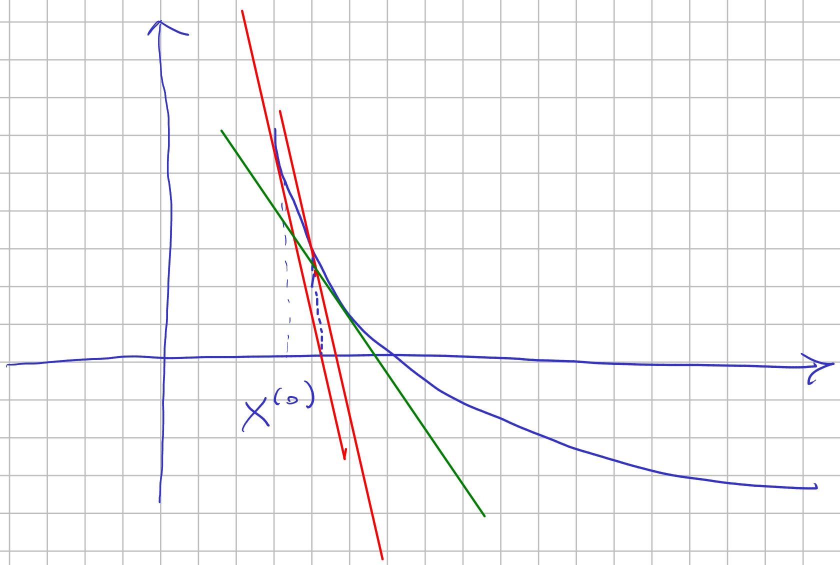
1) Calcolo della matrice Jacobiana

Tenere fissa la matrice Jacobiana per un certo numero di passi

$$J_F(x^{(k)})\,\delta x^{(k)} = -F(x^{(k)})$$

LU

$$J_F(x^{(k)})\,\delta x^{(k+1)} = -F(x^{(k+1)})$$



ESEMPIO IN 2D

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$F = \begin{cases} \overbrace{x_0 \cos(x_1) - 4}^{F_0} = 0 \\ \underbrace{x_1 x_0 - x_1 - 5}_{F_1} = 0 \end{cases}$$

$$F = \begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \end{pmatrix} \qquad x^{(0)} = \begin{pmatrix} x_0^0 \\ x_1^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$J_F(x^k)\,\delta x^k = -F(x^k)$$

$$J_F(x^0)\,\delta x^0 = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_0}{\partial x_0} & \dfrac{\partial F_0}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial F_1}{\partial x_0} & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(x_1) & -x_0 \cdot \sin(x_1) \\ x_1 & x_0 - 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x_0^0 \\ \delta x_1^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\delta x_0^0 = -4 \qquad x_0^1 = -4$$

$$\delta x_1^0 = 5 \qquad x_1^1 = 5$$

2) RISOLUZIONE INESATTA DEL SISTEMA LINEARE ASSOCIATO AD OGNI ITERAZIONE

$$J_F(x^{(k)})\,\delta x^{(k)} = -F(x^{(k)})$$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \delta x^{(k)}$$

METODI ITERATIVI

NEWTON - SOR

$$J_F(x^{(k)}) = D_k - E_k - F_k$$

$$\delta x_r^{(k)} = M_k\, \delta x_{r-1}^{(k)} - \omega_k (D_k - \omega_k E_k)^{-1} F(x^{(k)})$$

$r = 1, 2, \dots$ fino a convergenza

invece di $\bar{r}$ che mi da soluzione "esatta"

prendo r che mi da una sol. appross.

Newton - Jacobi, Newton-Krylov

3) APPROSSIMAZIONE CON RAPPORTI INCREMENTALI DI $J_F(x^{(k)})$

$J_F(x^k)$ può essere costoso

$$\left(J_h^{(k)}\right)_j = \frac{F\left(x^{(k)} + h_j^{(k)} e_j\right) - F\left(x^{(k)}\right)}{h_j^{(k)}}$$

e_j è il j-esimo vettore della base canonica $\mathbb{R}^n$

$$e_1 \in \mathbb{R}^n = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$h_j^{(k)} > 0$ sono incrementi

METODI QUASI NEWTON E IBRIDI

Quasi Newton: generalizzazione al caso n-dimensionale del metodo delle secanti

Sostituire a $J_F(x^{(k)})$ una sua approx.

Ibridi: combinare metodi globalmente convergenti con metodi solo localmente convergenti

1. calcola $F(x^{(k)})$

2 Pone $\tilde{J}_F(x^{(k)}) = J_F(x^{(k)})$ ho ad una sua approx.

3 Risolvo $\tilde{J}_F(x^{(k)})\,\delta x^{(k)} = -F(x^{(k)})$

4 pongo $x^{k+1} = x^{k} + \alpha_k \delta x^{(k)}$

↳ parametro di smorzamento

METODI QUASI NEWTON

dati due vettori $x^{(0)}$ e $x^{(1)}$ al passo k si risolve

$$Q_k\,\delta x^{(k+1)} = -F(x^{(k)})$$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \delta x^{(k+1)}$$

Q_k è una matrice $\in \mathbb{R}^{n \times n}$ t.c.

$$Q_k\,\delta x^{(k)} = F(x^{(k)}) - F(x^{(k-1)}) = b^{(k)}$$

Si richiede che per $k \geq n$ la matrice Q_k soddisfi al seguente insieme di n sistemi

$$Q_k\left(x^{(k)} - x^{(k-j)}\right) = F(x^{(k)}) - F(x^{(k-j)}) \qquad j = 1, \dots, n$$

↳ metodo di Broyden

METODO DEL PUNTO FISSO

$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ trovare $x^* \in \mathbb{R}^n$ t.c. $F(x^*) = 0$

$G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ trovare $x^* \in \mathbb{R}^n$ t.c. $G(x^*) = x^*$

se x^* è punto fisso di G allora
$F(x^*) = 0$

dato $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$

$$x^{k+1} = G(x^{(k)})$$

Def.

Una funzione $G : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è contrattiva su $D_0 \subset D$ se esiste $\alpha < 1$ t.c.
$\|G(x) - G(y)\| \leq \alpha \|x - y\| \quad \forall x, y \in D_0$
$\|\cdot\|$ una certa norma vettoriale

Proprietà

Se $G : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è contrattiva su $D_0 \subset D$ e $G(x) \in D_0 \quad \forall x \in D_0$ allora G ha un unico punto fisso in D_0

Proprietà

Se $G: D \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ha un punto fisso x^* all'interno di D e G è derivabile in un intorno di x^*. Ed indichiamo con J_G la matrice Jacobiana di G. e si ha

$\rho(J_G(x^*)) < 1$.

Esiste un intorno S di x^* tale che $S \subset D$ e $\forall\, x^{(0)} \in S$ la successione di punto fisso $\in D$ e converge a x^*

$$\rho(J_G(x^*)) < 1$$

allora è vero questo

$$\| J_G(x^*) \| < 1$$

Se è vero questo

ESEMPIO

$$F(x) = (\underbrace{x_1^2 + x_2^2 - 1}_{F_1},\ \underbrace{2x_1 + x_2 - 1}_{F_2})^T = 0$$

$$x_1^* = (0, 1)^T \qquad x_2^* = \left(4/5, -\frac{3}{5}\right)^T$$

$$G_1(x) = \begin{vmatrix} \dfrac{1 - x_2}{2} \\ \sqrt{1 - x_1^2} \end{vmatrix} \qquad G_2(x) = \begin{vmatrix} \dfrac{1 - x_2}{2} \\ -\sqrt{1 - x_1^2} \end{vmatrix}$$

$$G_i(x_i^*) = x_i^* \quad \text{per } i = 1,2$$

$$J_{G_1}(x_1^*) = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$J_{G_2}(x_2^*) = \begin{vmatrix} 0 & -1/2 \\ \frac{4}{3} & 0 \end{vmatrix}$$

$$\rho(J_{G_1}(x_1^*)) = 0 \qquad \rho(J_{G_2}(x_2^*)) = \sqrt{\frac{2}{3}} \simeq 0{,}81 < 1$$

- G_1

$x^{(0)} = (-0{,}9, 0{,}9)^T$ in 9 iterazioni

- G_2

$x^{(0)} = (0{,}9, 0{,}9)^T$ in 115 iterazioni

NEWTON COME PUNTO FISSO

$$G_N(x) = x - J_F^{-1}(x) \cdot F(x)$$