Prerequisiti di base di Algebra Lineare

- Spazi vettoriali
- Matrici - vettori $\Rightarrow$ operazioni su matrici
  somma, sottrazione, determinante, inversa, trasposta, moltiplicazione, traccia, rango di una matrice
  Matrici simmetriche, triangolari, antisimmetriche
- Autovalori e autovettori

FONDAMENTI DELLA MATEMATICA NUMERICA

$$F(x, d) = 0$$

d → dati del mio problema

x → incognita

F → funzione nota

diretto = conosco d, conosco F, voglio trovare x

inverso = conosco x, conosco F, voglio trovare d

identificazione = conosco x, conosco d, voglio trovare F

Problemi ben posti

1. $\forall d \in D \ \exists! \ x \quad t.c. \quad F(x, d) = 0$
   unicità della soluzione
2. dipendenza continua dai dati

prendo $d \in D$ ed una sua variazione δd

$$F(x + \delta x, d + \delta d) = 0$$

Si ha dipendenza continua dai dati

se $\exists \; k_0 = k(d)$ t.c. $\forall \; \delta d : d + \delta d \in D$

$$\|\delta x\| \leq k_0 \|\delta d\|$$

piccole variazioni dei dati portano a piccole variazioni della soluzione

ESEMPIO PROBLEMA MAL POSTO

$$p(x) = x^4 - x^2(2d-1) + d(d-1)$$

$$F(x,d) = 0 \qquad F = p(x,d)$$

$$x^2 = t$$

$$t^2 - t\underbrace{(2d-1)}^{(b)} + \underbrace{d(d-1)}^{(c)} = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\frac{2d - 1 \pm \sqrt{\cancel{4d^2} + 1 - \cancel{4d} - \cancel{4d^2} + \cancel{4d}}}{2}$$

$$\frac{2d-1 \pm \sqrt{1}}{2} \quad \begin{cases} t = d \\ t = d-1 \end{cases}$$

$x^2 = d$ $\qquad$ $d > 0$, $d > 1$ $\qquad$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{se } d \geq 1 \\ x = \pm\sqrt{d} \end{array} \right.$ $\quad$ 4 radici $\quad x = \pm\sqrt{d-1}$

$x^2 = d - 1$ $\qquad$ se $d \in [0, 1)$ ho due radici $x = \pm\sqrt{d}$ 2 radici

se $d < 0$ non ho radici

Numero di condizionamento relativo

$$k(d) = \sup \left\{ \frac{\|\delta x\| / \|x\|}{\|\delta d\| / \|d\|} \quad \delta d \neq 0,\ d+\delta d \in D \right\}$$

k piccolo il problema è ben condizionato

k grande " " è mal condizionato

$d=0 \quad x=0$

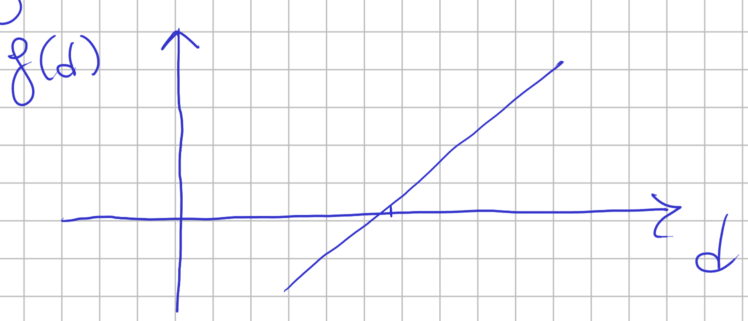
Numero di condizionamento assoluto

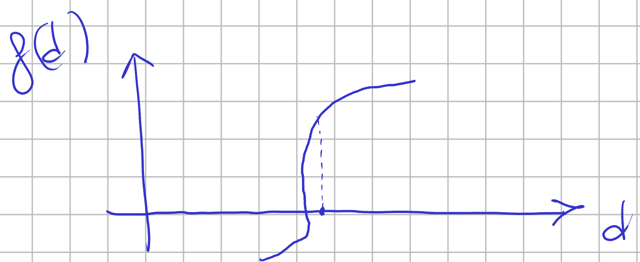
$$k_{abs}(d) = \sup \left\{ \frac{\|\delta x\|}{\|\delta d\|},\ \delta d \neq 0,\ d+\delta d \in D \right\}$$

$$Ax = b$$

$$A(x+\delta x) = b + \delta b$$

$$f(d) = 0$$



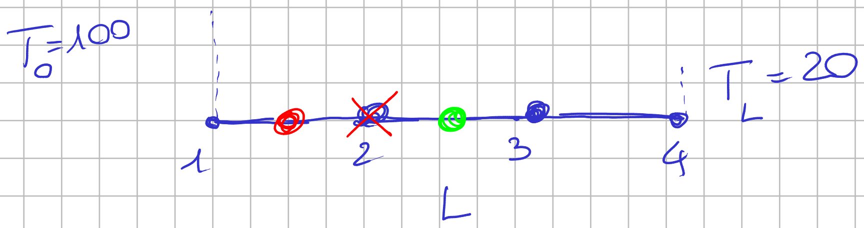


Eq. trasmissione del calore

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = f$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = f$$

$$\begin{cases} \nabla^2 T = f \\ \text{B.C. su } \partial\Omega \end{cases}$$



$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{i+1/2} \approx \frac{T_{i+1} - T_i}{\Delta x}$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{i-1/2} \approx \frac{T_i - T_{i-1}}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \approx \frac{\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{i+1/2} - \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{i-1/2}}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \approx \frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{\Delta x^2} = 0$$

1) $T_1 = 100$

2) $\dfrac{T_3 - 2T_2 + T_1}{\Delta x^2} = 0$

3) $\dfrac{T_4 - 2T_3 + T_2}{\Delta x^2} = 0$

4) $T_4 = 20$

$$AT = b \qquad T = \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/\Delta x^2 & -2/\Delta x^2 & 1/\Delta x^2 & 0 \\ 0 & 1/\Delta x^2 & -2/\Delta x^2 & \frac{1}{\Delta x^2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La soluzione è garantita se

1) A è invertibile

$$x = A^{-1} b$$

2) $\text{rank}(A) = n$ $\quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

3) Il sistema omogeneo associato

$Ax = 0$ ha come soluzione unica $x = 0$

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$$ la matrice ottenuta sostituendo b con la colonna i-esima

Costo computazionale

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$n+1$ determinanti

$n!$

costo $(n+1)n! \simeq (n+1)!$

3×3 costo $4!$ flops

20×20 $\quad 7 \cdot 10^{-8}$ secondi

$T = 2 \cdot 10^{6}$ anni

INVERSA

$$x = A^{-1} b$$

calcolo $A^{-1} \approx n^3$

$x = A^{-1} b \approx n^2$

$n^3 + n^2$ operazioni

Numero di condizionamento per sistema lineare

$$K_{rel}(b) = \frac{\|A^{-1}\| \|b\|}{\|x\|} = \frac{\|A^{-1}\| \cdot \|Ax\|}{\|x\|}$$

$Ax = b$ $\quad \|A^{-1}b\|$

$$K_{rel}(b) = \frac{\|Ax\| \cdot \|A^{-1}\|}{\|x\|} \leq \underbrace{\|A\| \cdot \|A^{-1}\|}_{\text{stima del numero di condizionamento}}$$

$$\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$$

$$v = \begin{matrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{matrix} \qquad \|v\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |v_i|$$

$$\|v\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (v_i)^2}$$

$$K_2(A) = \frac{\ell_{max}}{\ell_{min}}$$