Axiom Paths

> **La tua wiki personale: appunti, idee e risorse per ogni materia.**
> *Dalla geometria alla fisica, dall'informatica all'analisi.*

Nota importante

Questa wiki è pensata per raccogliere e ripassare i tuoi appunti.
Controlla sempre i materiali ufficiali.
Se trovi errori: - Fai una **Pull Request** su GitHub
- Oppure scrivimi su Discord: `@giovyx90.` (con il punto)

Axio ti dà il benvenuto!

```
   .-"         "-.
  /   O       O   \
 |      .----.     |
 \    '        '  /
   '-._______.-'
   /     | |    \
  /     || ||    \
```

(|| ||)

Axio, lo gnomo matematico

> *"Ciao! Sono Axio, e ti guiderò lungo i sentieri degli assiomi.*
> *Ogni teorema risolto è un passo verso la vetta geometrica!"*

Spazi Vettoriali

Definizione 1 – Spazio Vettoriale

Uno **spazio vettoriale** (o spazio lineare) è una struttura algebrica composta da:

- Un **campo** $\mathbb{K}$, i cui elementi sono detti **scalari**;
- Un **insieme** V, i cui elementi sono detti **vettori**;
- Due operazioni binarie:
- **Addizione**:

  $$ + : V \times V \longrightarrow V $$
- **Moltiplicazione per scalare**:

  $$ \cdot : \mathbb{K} \times V \longrightarrow V $$

Osservazione – Chiusura

Lo spazio vettoriale è **chiuso** rispetto alle due operazioni: il risultato resta in V.

Proprietà Fondamentali

Uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ gode delle seguenti proprietà:

1. **Associatività della somma**

$$ (u+v)+w = u+(v+w) $$

1. **Esistenza dell'elemento neutro (O)**

$$ \exists O \in V : v+O = O+v = v $$

1. **Esistenza dell'inverso additivo**

$$ \forall v \in V, \exists -v : v+(-v)=O $$

1. **Commutatività della somma**

$$ v+w = w+v $$

1. **Distributività rispetto ai vettori**

Sottospazi Vettoriali

Definizione 2 – Sottospazio

Sia V uno spazio vettoriale. Un sottoinsieme $W \subseteq V$ è un **sottospazio vettoriale** se:

1. Se $v,w \in W$, allora $v+w \in W$ (chiusura per somma);
2. Se $v \in W$ e $c \in \mathbb{K}$, allora $cv \in W$ (chiusura per scalari);
3. Il vettore nullo $O \in V$ appartiene a W.

> **Nota:** Ogni sottospazio è a sua volta uno spazio vettoriale.

Esempio – Intersezione

Sia V uno spazio vettoriale e $U, W \subseteq V$ sottospazi.
Allora:

$$ U \cap W = \{ v \in V : v \in U \ \text{e} \ v \in W \} $$

è un sottospazio di V.

Esempio – Somma

Siano $U, W \subseteq V$ sottospazi.
Definiamo:

$$ U + W = \{ u+w : u \in U, w \in W \} $$

Anche $U+W$ è un sottospazio di V.

Combinazioni Lineari e Prodotto Scalare

Definizione 3 – Combinazione Lineare

Dati n scalari $x_1,\dots,x_n$ e n vettori $v_1,\dots,v_n$ in V,
una **combinazione lineare** è:

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n.$$

Esempio – Combinazione lineare in $\mathbb{R}^3$

Siano:

$$v_1 = (1,0,2), \quad v_2 = (0,1,-1), \quad v_3 = (1,1,0).$$

Una combinazione lineare è:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = (\lambda_1 + \lambda_3,\ \lambda_2 + \lambda_3,\ 2\lambda_1 - \lambda_2).$$

Definizione – Sottospazio generato (Span)

Dato un insieme $S = \{v_1,\dots,v_k\} \subset V$,
lo **span** o **sottospazio generato** è:

$$\text{Span}(S) = \{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k : \lambda_i \in \mathbb{K}\}.$$

È il più piccolo sottospazio di V che contiene S.

Definizione 4 – Prodotto Scalare (canonico)

Dati:

$$A = (a_1,\dots,a_n), \quad B = (b_1,\dots,b_n),$$

il **prodotto scalare** è:

Basi e Dimensione

Definizione – Dipendenza e Indipendenza Lineare

I vettori $v_1,\dots,v_n$ sono **linearmente dipendenti** se esistono $a_1,\dots,a_n$, non tutti nulli, tali che:

$$a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = O$$

Se questa equazione implica solo $a_1=\dots=a_n=0$, allora i vettori sono **indipendenti**.

Esempio – Funzioni

Siano $f_1,\dots,f_n$ funzioni. Dire che sono indipendenti significa che:

$$a_1 f_1(t)+\dots+a_n f_n(t)=0 \ \forall t \implies a_i=0$$

Esempio: e^t e e^{2t} sono indipendenti.

Definizione – Base

Un insieme di vettori:

- **genera** lo spazio;
- è **linearmente indipendente**.

Allora è una **base**.
La cardinalità di una base è la **dimensione** dello spazio.

Definizione – Dimensione

La **dimensione** di uno spazio vettoriale V, denotata $\dim(V)$, è il numero di vettori di una sua base.
Tutte le basi di V hanno la stessa cardinalità.

Teoremi Fondamentali

Teorema – Unicità delle coordinate

Sia $v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n = y_1 v_1 + \dots + y_n v_n$
con v_i indipendenti.
Allora:

$$x_i = y_i \ \forall i$$

Teorema – Numero massimo di indipendenti

Se $\dim V = m$ e $n > m$, allora ogni insieme di n vettori è dipendente.

Matrici – Indice dei contenuti

Questa sezione raccoglie le principali nozioni sulle **matrici** in Algebra Lineare.

Suggerimento

Se stai ripassando per un esame, leggi in ordine dall'introduzione fino alla riduzione di Gauss.
Alla fine, puoi scaricare la versione **PDF completa** con tutti i contenuti.

Argomenti

Definizione e Operazioni di base

Definizione

Una **matrice** di dimensione $m \times n$ su un campo $\mathbb{K}$ è una tabella rettangolare di elementi di $\mathbb{K}$, con m righe e n colonne:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad A \in M_{m,n}(\mathbb{K}).$$

Tipi di Matrici

- **Nulla**: tutti gli elementi sono zero.
- **Quadrata**: $m = n$.
- **Identità**: I_n con 1 sulla diagonale.
- **Diagonale**, **Triangolare**, **Simmetrica**.

Operazioni di Base

- **Somma**:

$$(A+B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

- **Prodotto per scalare**:

$$(\lambda A)_{ij} = \lambda a_{ij}.$$

- **Trasposta**:

$$(A^T)_{ij} = a_{ji}.$$

Foglio 1

Esercizio 1

Dimostrare che in uno spazio vettoriale \(V\), abbiamo che \(0\cdot v = O\) per ogni \(v \in V\) (qui \(O \in V\) e \(0 \in \mathbb{R}\)) usando solo le altre proprietà della definizione di spazio vettoriale.

Dimostrazione

1. \(0 = 0\).
   Giust. Identità riflessiva nello scalare.
2. \(0+0=0\).
   Giust. Proprietà dell'elemento neutro additivo in \((\mathbb{R},+)\).
3. $$ (0+0)\cdot v = 0\cdot v $$
   Giust. Moltiplicazione per scalare definita.
4. $$ 0\cdot v + 0\cdot v = 0\cdot v $$
   Giust. Distributività rispetto alla somma degli scalari.
5. Poiché \(0\cdot v\in V\), esiste l'opposto \(-\big(0\cdot v\big)\). Sommo ad ambo i membri:
   $$ (0\cdot v + 0\cdot v) + (-0\cdot v) = 0\cdot v + (-0\cdot v) $$
6. Per associatività e definizione di opposto:
   $$ 0\cdot v = O $$

\[\boxed{\text{Conclusione: } 0\cdot v = O.} \]

Errori comuni

- **Circolarità:** non assumere \(0\cdot v=O\) a metà dimostrazione.
- **Notazione:** distinguere **\(0\)** (scalare) da **\(O\)** (vettore nullo).

Foglio 2

Esercizio 1

Scrivere i seguenti sottospazi W nella forma
$W = L(v_1,\dots,v_k)$ per opportuni generatori:

(a)

$$ W=\{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : x-3y+3z=0\}. $$

(b)

$$ W=\{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : x+2y=0,\ z+3x=0\}. $$

(c)

$$ W=\{(x,y,z,t)^T \in \mathbb{R}^4 : x+y=0,\ z+t=0\}. $$

(d)

$$ W=\{(x,y,z,t)^T \in \mathbb{R}^4 : x+y=0,\ z+t=0,\ x+z+t=0\}. $$

Soluzione e metodo

Tutorial – Come trovare una base di un sottospazio

1. Prendiamo le equazioni che definiscono W.
2. Isoliamo alcune variabili vincolate in funzione di quelle libere.
3. Scriviamo il vettore generico in forma parametrica.
4. Separiamo le parti moltiplicate dalle variabili libere generatori.
5. Verifichiamo che i generatori sono linearmente indipendenti.

(a)

Condizione:

$$ x-3y+3z=0 \ \Longrightarrow\ x=3y-3z. $$

Vettore generico:

Calcolo del rango, base del kernel e base dell’immagine

Sia data la matrice A con colonne:

$$ (1,0,1,0), \ (2,1,3,0), \ (0,1,1,0), \ (1,1,2,0). $$

Scriviamo la matrice in forma esplicita:

$$ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. $$

Passo 1 – Riduzione di Gauss

Applichiamo operazioni elementari:

$$ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. $$

Quindi la matrice ridotta ha **2 righe non nulle**.

Rango di A

$$ \boxed{\operatorname{rank}(A) = 2.} $$

Base dell’immagine ($\operatorname{Im}(A)$)

L’immagine è generata dalle colonne **pivot**, cioè le colonne 1 e 2 originali:

$$ \mathcal{B}_{\operatorname{Im}(A)} = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\3\\0\end{pmatrix} \right\}. $$

Quindi:

$$ \dim(\operatorname{Im}(A)) = 2. $$

Limiti

Definizione:
Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e x_0 punto di accumulazione per A.
Si dice che: $$ \lim_{x \to x_0} f(x) = L $$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che...

Esercizi sui Limiti

Esempio 1
Calcolare: $$ \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} $$ **Soluzione**: Il limite vale \(1\).