

プロコン練習会Advanced



京都大学工学部電気電子工学科
久留島隆史 (KMC ID: gire)



累積和、おぼえていますか

累積和、おぼえていますか

あなたはケーキ屋さんです



累積和、おぼえていますか

お客さんがきました



競技プログラミング練習会 Advanced

累積和、おぼえていますか

お客さんが言いました



この棚のケーキ全部下さい

累積和、おぼえていますか

値段を言うと…



競技プログラミング練習会 Advanced

累積和、おぼえていますか

値段を言うと…



やっぱりこの区間の
ケーキ全部下さい

累積和、おぼえていますか

改めて値段を言うと…



競技プログラミング練習会 Advanced

累積和、おぼえていますか

改めて値段を言うと…



やっぱりこの区間で…

累積和、おぼえていますか

このやりとり、正直言って



累積和、おぼえていますか

このやりとり、正直言って



うざい

毎回レジ打つのめんどい

累積和を使おう

各ケーキの値段

ケーキ1	ケーキ2	ケーキ3	ケーキ4	ケーキ5	ケーキ6
500	600	570	890	700	690

累積和を使おう

各ケーキの値段

ケーキ1	ケーキ2	ケーキ3	ケーキ4	ケーキ5	ケーキ6
500	600	570	890	700	690

左端からn個足したときの和 sum

0	500	1100	1670	2560	3260	3950
---	-----	------	------	------	------	------

※左端に $\text{sum}[0]=0$ を挿入した理由はあとで説明します

累積和を使おう

各ケーキの値段

ケーキ1	ケーキ2	ケーキ3	ケーキ4	ケーキ5	ケーキ6
500	600	570	890	700	690

左端からn個足したときの和 sum

0	500	1100	1670	2560	3260	3950
---	-----	------	------	------	------	------

ケーキ $a \sim b$ ($a < b$)を買うときの値段の和は
 $\text{sum}[b] - \text{sum}[a-1]$ で求められる

累積和を使おう

各ケーキの値段

ケーキ1	ケーキ2	ケーキ3	ケーキ4	ケーキ5	ケーキ6
500	600	570	890	700	690

左端からn個足したときの和 sum

0	500	1100	1670	2560	3260	3950
---	-----	------	------	------	------	------

例 1 : ケーキ 3 ~ 6 の値段の合計

$$\text{sum}[6] - \text{sum}[3-1]$$

累積和を使おう

各ケーキの値段

ケーキ1	ケーキ2	ケーキ3	ケーキ4	ケーキ5	ケーキ6
500	600	570	890	700	690

左端からn個足したときの和 sum

0	500	1100	1670	2560	3260	3950
---	-----	------	------	------	------	------

例 1 : ケーキ 3 ~ 6 の値段の合計

$$\text{sum}[6] - \text{sum}[3-1] = 3950 - 1100$$

累積和を使おう

各ケーキの値段

ケーキ1	ケーキ2	ケーキ3	ケーキ4	ケーキ5	ケーキ6
500	600	570	890	700	690

左端からn個足したときの和 sum

0	500	1100	1670	2560	3260	3950
---	-----	------	------	------	------	------

例 1 : ケーキ 3 ~ 6 の値段の合計

$$\text{sum}[6] - \text{sum}[3-1] = 3950 - 1100 = 2850$$

累積和を使おう

各ケーキの値段

ケーキ1	ケーキ2	ケーキ3	ケーキ4	ケーキ5	ケーキ6
500	600	570	890	700	690

左端からn個足したときの和 sum

0	500	1100	1670	2560	3260	3950
---	-----	------	------	------	------	------

例 2 : ケーキ 1 ~ 4 の値段の合計

$\text{sum}[4] - \text{sum}[1-1]$

累積和を使おう

各ケーキの値段

ケーキ1	ケーキ2	ケーキ3	ケーキ4	ケーキ5	ケーキ6
500	600	570	890	700	690

左端からn個足したときの和 sum

0	500	1100	1670	2560	3260	3950
---	-----	------	------	------	------	------

例 2 : ケーキ 1 ~ 4 の値段の合計

$$\text{sum}[4] - \text{sum}[1-1] = 2560 - 0$$

累積和を使おう

各ケーキの値段

ケーキ1	ケーキ2	ケーキ3	ケーキ4	ケーキ5	ケーキ6
500	600	570	890	700	690

左端からn個足したときの和 sum

0	500	1100	1670	2560	3260	3950
---	-----	------	------	------	------	------

例 2 : ケーキ 1 ~ 4 の値段の合計

$$\text{sum}[4] - \text{sum}[1-1] = 2560 - 0 = 2560$$

累積和を使おう

各ケーキの値段

ケーキ1	ケーキ2	ケーキ3	ケーキ4	ケーキ5	ケーキ6
500	600	570	890	700	690

左端からn個足したときの和 sum

0	500	1100	1670	2560	3260	3950
---	-----	------	------	------	------	------

例 2 : ケーキ 1 ~ 4 の値段の合計

$$\text{sum}[4] - \text{sum}[1-1] = 2560 - 0 = 2560$$

※左端に $\text{sum}[0]=0$ を挿入したのはこのときのため

累積和の計算量

ケーキの数を N , 質問の回数を Q とすると…

質問のたびに計算するとき

最悪「この棚全部」と Q 回聞かれ $O(NQ)$

累積和で計算するとき

累積和の表作成： $O(N)$

値段の計算： $O(1)$

$\therefore O(N+Q)$

2次元の累積和

問題：

ある表において左上を (a,b) ,右下を (c,d) とする長方形内の数字の合計を求めよ

$(1,1)$	$(1,2)$	•	•	•	$(1,N)$
$(2,1)$	$(2,2)$	•	•	•	
•	•	(a,b)	...		•
•	•	⋮		⋮	•
•	•		...	(c,d)	•
$(M,1)$		•	•	•	(M,N)

2次元の累積和

累積和 $\text{sum}(m,n)=$

左上 $(1,1)$ 右下 (m,n) の長方形内の数字の和

ただし $m=0$ または $n=0$ において $\text{sum}=0$ とする

0	0				0
0	$\text{sum}(1,1)$	•	•	•	$\text{sum}(1,N)$
		$\text{sum}(a-1,b-1)$	•	•	$\text{sum}(a-1,d)$
	•	•	$\text{sum}(a,b)$...	•
	•	•	:		:
	•	$\text{sum}(c,b-1)$...	$\text{sum}(c,d)$
0	$\text{sum}(M,1)$	•	•	•	$\text{sum}(M,N)$

2次元の累積和

左上(a,b)右下(c,d)の長方形内の数の合計=
 $\text{sum}(c,d) - \text{sum}(c,b-1) - \text{sum}(a-1,d) + \text{sum}(a-1,b-1)$

0	0				0
0	(1,1)	•	•	•	(1,N)
		(a-1,b-1)	•	•	(a-1,d)
	•	•	(a,b)	...	•
	•	•	⋮		•
	•	(c,b-1)		...	(c,d)
0	(M,1)	•	•	•	(M,N)

2次元の累積和

左上(a,b)右下(c,d)の長方形内の数の合計=
 $\text{sum}(c,d) - \text{sum}(c,b-1) - \text{sum}(a-1,d) + \text{sum}(a-1,b-1)$

0	0					0
0	(1,1)	• • •				(1,N)
		(a-1,b-1)	•	•	(a-1,d)	
	•	•	(a,b)	...		•
	•	•	⋮		⋮	•
	•	(c,b-1)		...	(c,d)	•
0	(M,1)	• • •				(M,N)

2次元の累積和

左上(a,b)右下(c,d)の長方形内の数の合計=
 $\text{sum}(c,d) - \text{sum}(c,b-1) - \text{sum}(a-1,d) + \text{sum}(a-1,b-1)$

0	0					0
0	(1,1)	• • •				(1,N)
		(a-1,b-1)	•	•	(a-1,d)	
	•	•	(a,b)	...		•
	•	•	⋮		⋮	•
	•	(c,b-1)		...	(c,d)	•
0	(M,1)	• • •				(M,N)

2次元の累積和

左上(a,b)右下(c,d)の長方形内の数の合計=
 $\text{sum}(c,d) - \text{sum}(c,b-1) - \text{sum}(a-1,d) + \text{sum}(a-1,b-1)$

0	0				0
0	(1,1)		•	•	(1,N)
		(a-1,b-1)	•	•	(a-1,d)
	•	•	(a,b)	...	•
	•	•	⋮		⋮
	•	(c,b-1)		...	(c,d)
0	(M,1)		•	•	(M,N)

2次元の累積和

左上(a,b)右下(c,d)の長方形内の数の合計=
 $\text{sum}(c,d) - \text{sum}(c,b-1) - \text{sum}(a-1,d) + \text{sum}(a-1,b-1)$

0	0					0
0	(1,1)	• • •				(1,N)
		(a-1,b-1)	•	•	(a-1,d)	
	•	•	(a,b)	...		•
	•	•	:		:	•
	•	(c,b-1)		...	(c,d)	•
0	(M,1)	• • •				(M,N)

2次元の累積和

左上(a,b)右下(c,d)の長方形内の数の合計=
 $\text{sum}(c,d) - \text{sum}(c,b-1) - \text{sum}(a-1,d) + \text{sum}(a-1,b-1)$

0	0					0
0	(1,1)	.	.	.		(1,N)
	(a-1,b-1)	.	.	(a-1,d)		
	.	.	(a,b)
	.	.	:	.	:	.
	(c,b-1)	(c,d)	.	.
0	(M,1)	.	.	.		(M,N)

2次元の累積和

左上(a,b)右下(c,d)の長方形内の数の合計=
 $\text{sum}(c,d) - \text{sum}(c,b-1) - \text{sum}(a-1,d) + \text{sum}(a-1,b-1)$

0	0				0
0	(1,1)	•	•	•	(1,N)
		(a-1,b-1)	•	•	(a-1,d)
	•	•	(a,b)	...	•
	•	•	⋮		⋮
	•	(c,b-1)		...	(c,d)
0	(M,1)	•	•	•	(M,N)

3次元以降は…

3次元以降の累積和もあります

プロコンで扱うのは2次元1次関数まで(いもす研より)
いもす(imos)さん…KMC部員で今は某G社の社員

高次元高次の累積和の使い道

画像処理・信号処理に便利(いもす研より)

余談

累積和での解法をプロコン界隈では「いもす法」と呼ぶ

まとめ

累積和の使いどころ

- ある範囲内の値の合計をたくさん求めるときに使う
- 計算量は $O((\text{空間の広さ}) + (\text{クエリの数}))$

別名「いもす法」

解説とかで「いもす(imos)法」と書いてたら累積和のこと

おしまい