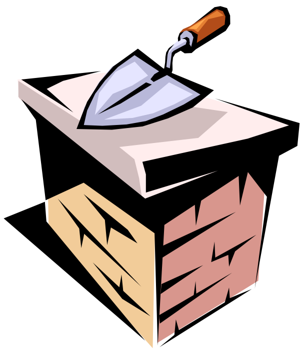
Fuzzy systémy

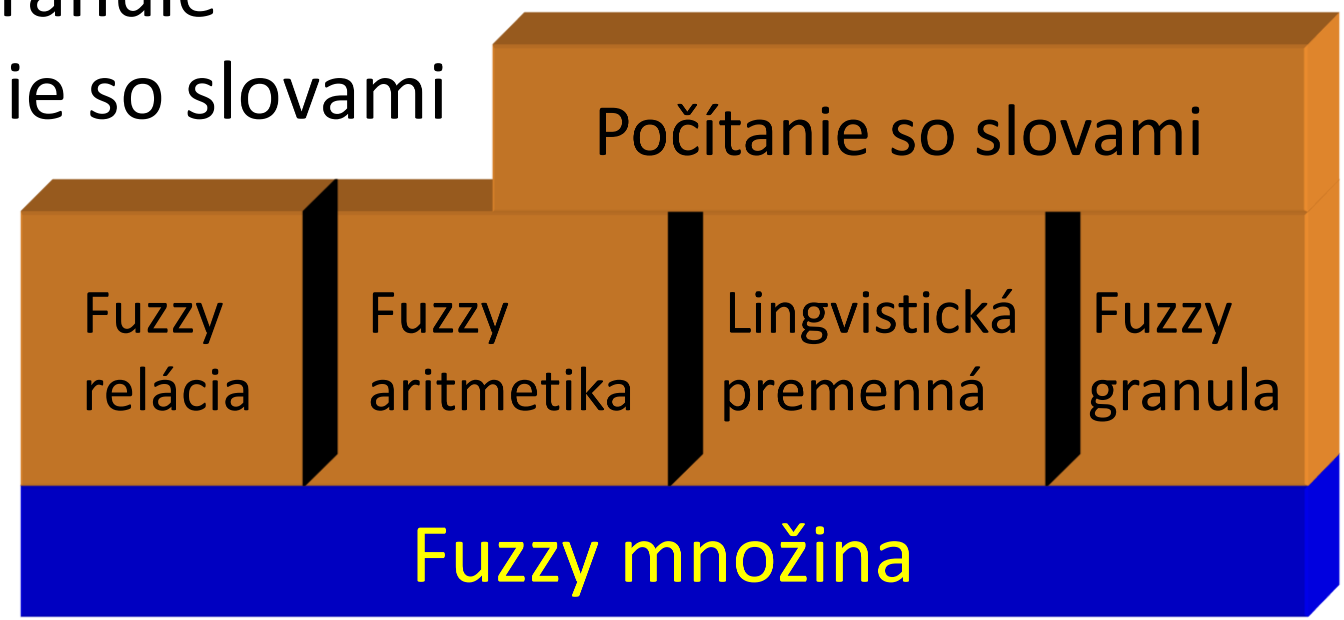
Základné pojmy

(fuzzy množina & lingvistická premenná)

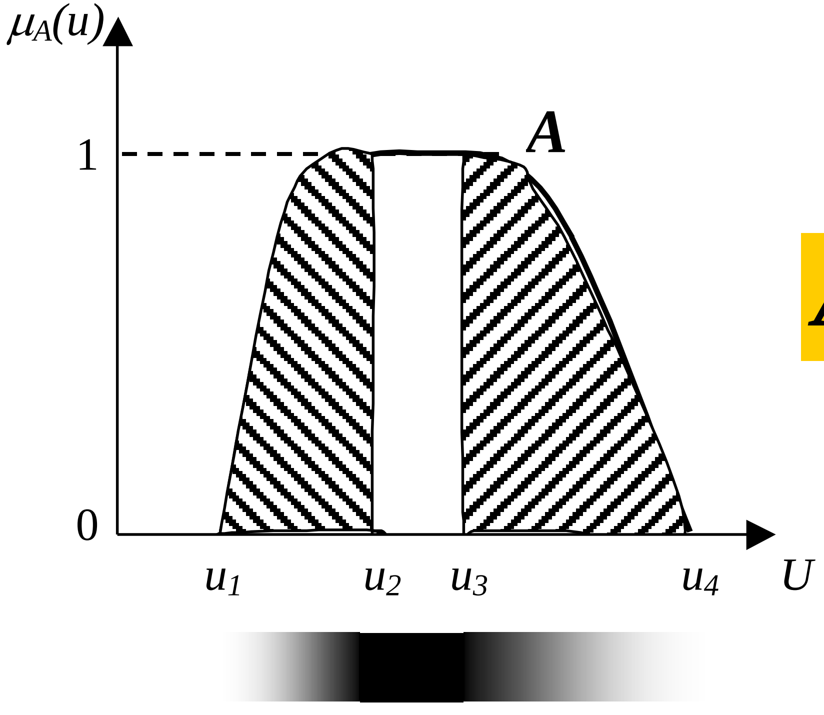
Základné koncepty teórie fuzzy množín

- Fuzzy množina (FM)
- Lingvistická (jazyková) premenná (LP)
- Princíp rozšírenia (*fuzzy aritmetika*)
- Fuzzy relácia
- Fuzzy granule
- Počítanie so slovami
- ...



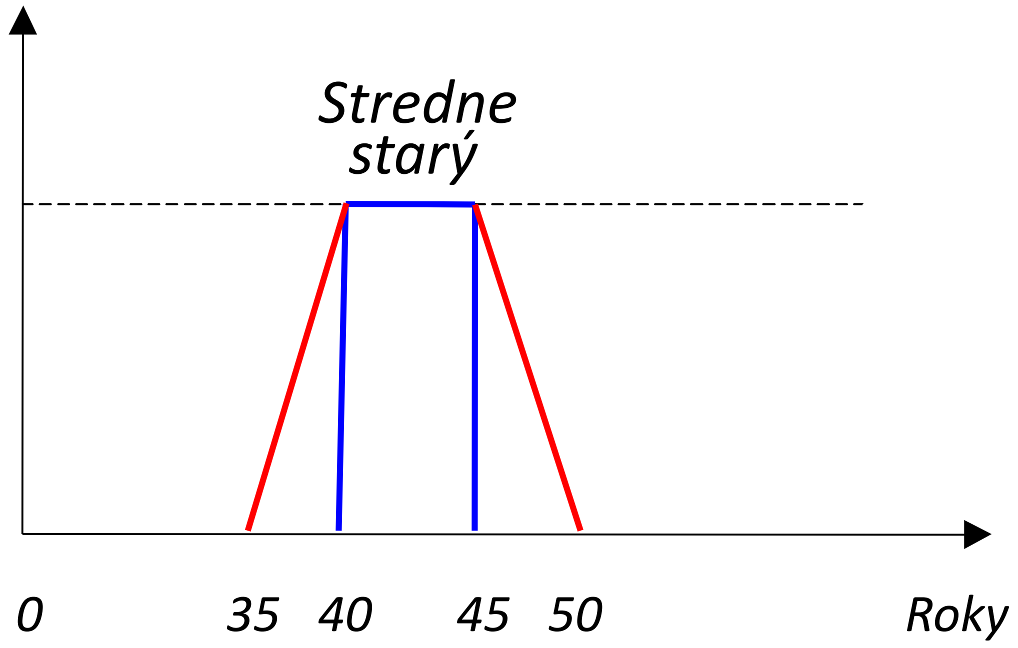


Fuzzy množina



$$A = \{(u, \mu_A(u)), u \in U\}$$

U – univerzum
A – názov FM
$\mu_A(u)$ – stupeň príslušnosti $\in$ *[0;1],*
všeobecne funkcia príslušnosti (FP)



Konvenčná (Cantorovská) množina (KM)

($\mu_A(u) \in \{0;1\}$) je špeciálny prípad FM.

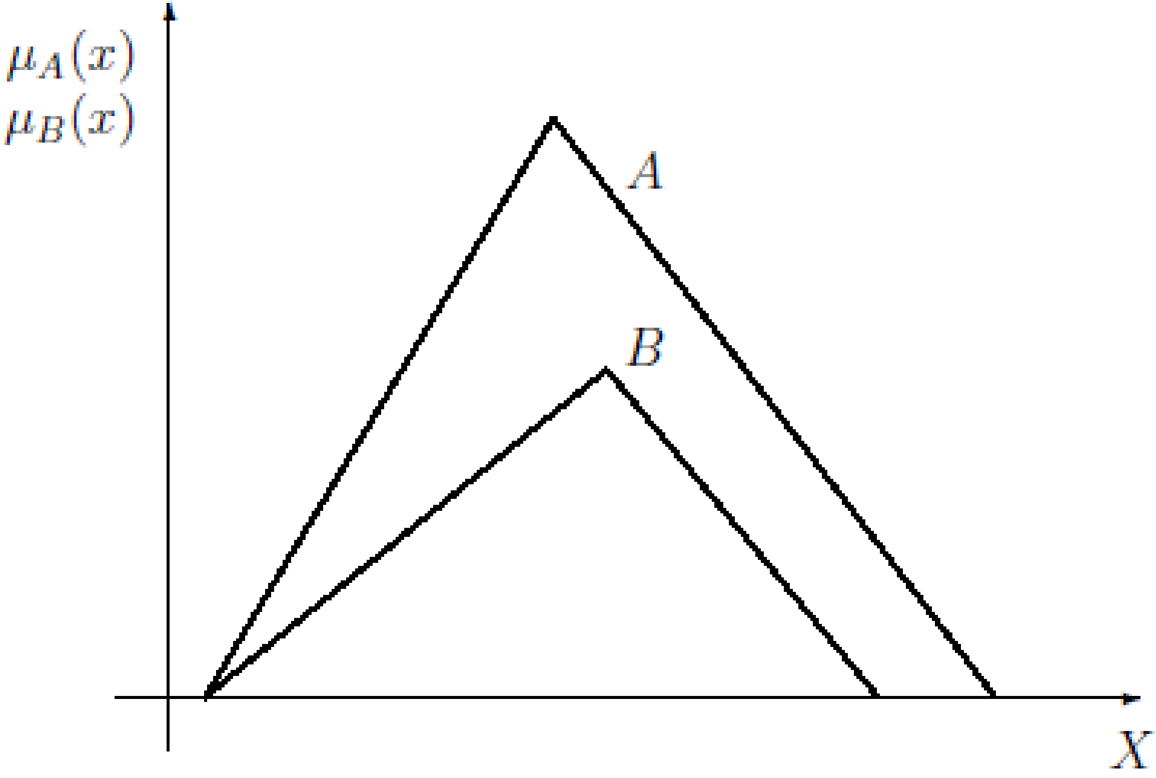
Všetko platné v konvenčnej teórii množín platí aj u FM.

FM sú jedným z možných zovšeobecnení KM.

(Možné sú aj iné zovšeobecnenia.)

FM je možné vzájomne porovnávať.

Fuzzy podmnožina



$$\boldsymbol{B} \subseteq \boldsymbol{A}, \text{ ak } \forall x \in X, \ \mu_B(x) \leq \mu_A(x)$$

Charakteristiky FP

1. **Nosič $\boldsymbol{A}$** (*support*) - množina *supp* A:

$$suppA = \{x \in X, \mu_A(x) > 0\}$$

2. **$\boldsymbol{\alpha}$-rez $\boldsymbol{A}$** (*cut*) - množina A_α:

$$A_\alpha = \{x \in X, \mu_A(x) \geq \alpha\}$$

   α-rez je striktný, ak pre všetky $x \in A_\alpha$ je $\mu_\alpha(x) > \alpha$.

3. **$\boldsymbol{\alpha}$-hladina $\boldsymbol{A}$** (*level*) - množina A^α:

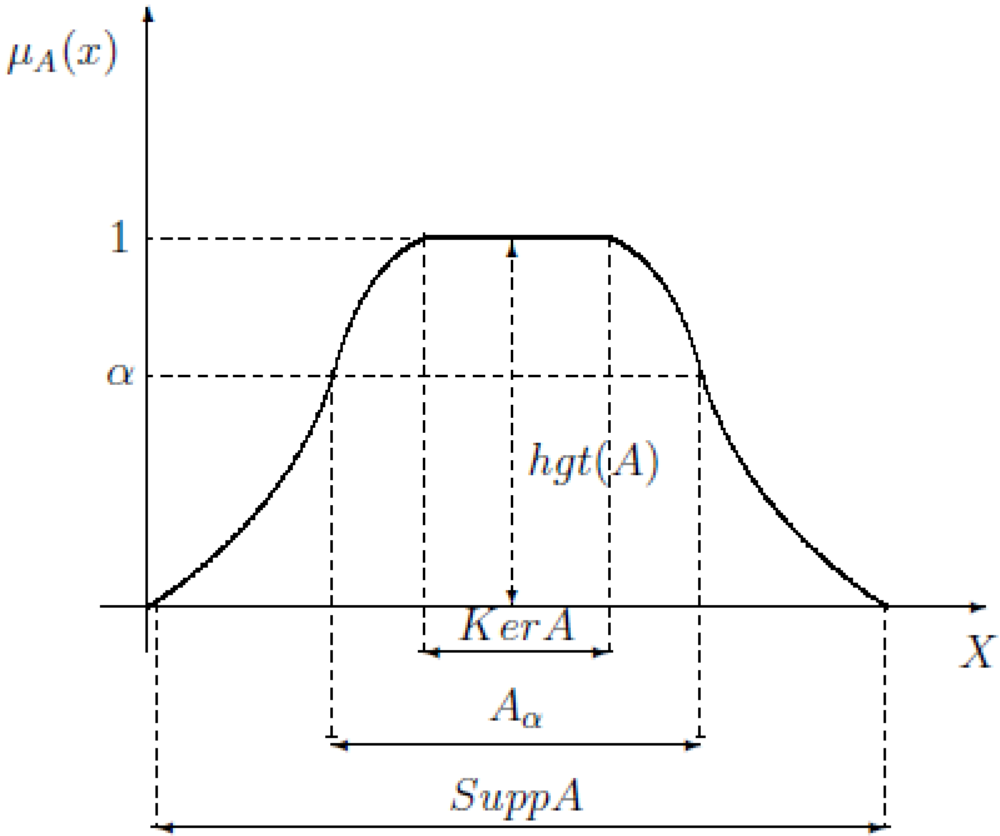
$$A^\alpha = \{x \in X, \mu_A(x) = \alpha\}$$

4. **Jadro $\boldsymbol{A}$** (*kernel*) - množina $KerA$:

$$KerA = \{x \in X, \mu_A(x) = 1\}$$

5. **Vrchol $\boldsymbol{A}$** (*peak*) - prvok univerza $x = P(A)$ jadra A: ak jadro je jednoprvkovou množinou

6. **Výška $\boldsymbol{A}$** (*height*) - $hgt(A)$: maximálna hodnota stupňa príslušnosti fuzzy množiny A



$$Supp\ A = \text{striktný}\ A_0,\ Ker\ A = A_1$$

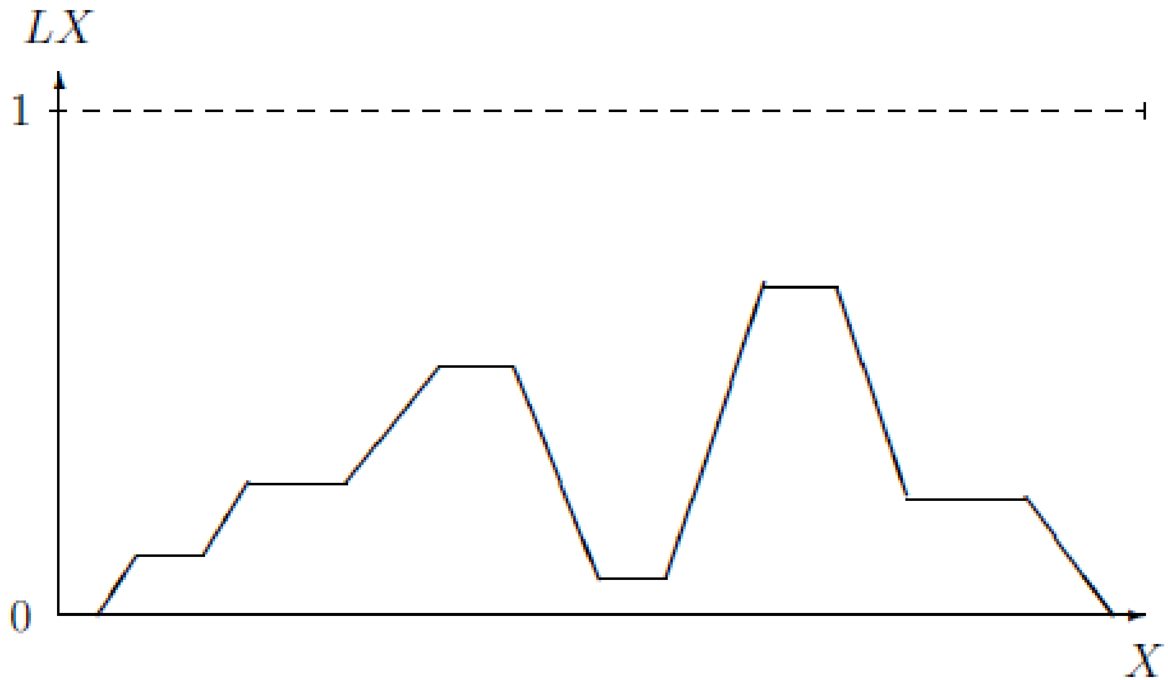
$$\Downarrow$$

$$Ker\ A \subseteq A_\alpha \subseteq Supp\ A$$

7. **Konvexnosť** - fuzzy množina A je konvexná práve vtedy, ak pre každé dva prvky $x, y \in X$ a každé číslo $\tau \in [0; 1]$ platí:

$$\mu_A(\tau x + (1-\tau)y) \geq min\{\mu_A(x), \mu_A(y)\}$$

Pozn.: Úloha sa transformuje na hľadanie minima.



Príklad nekonvexnej funkcie príslušnosti.

Spôsoby zápisu FM

1. Ak univerzum je v diskrétnom tvare, t.j. $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$:

   (a) $A = \{(x_1, \mu_A(x_1)), (x_2, \mu_A(x_2)), ..., (x_n, \mu_A(x_n))\}$

   (b) $A = \{\mu_A(x_1)/x_1, \mu_A(x_2)/x_2, ..., \mu_A(x_n)/x_n\}$

   (c) $A = \{\mu_A(x_1)/x_1 + \mu_A(x_2)/x_2 + ... + \mu_A(x_n)/x_n\}$

   (d) $A = \sum_{i=1}^{n} \mu_A(x_i)/x_i$

   (e) Graficky pomocou diskrétnej funkcie príslušnosti $\mu_A(x_i) \quad \forall x_i \in X \quad i = 1, ..., n$

   (f) Tabuľkou

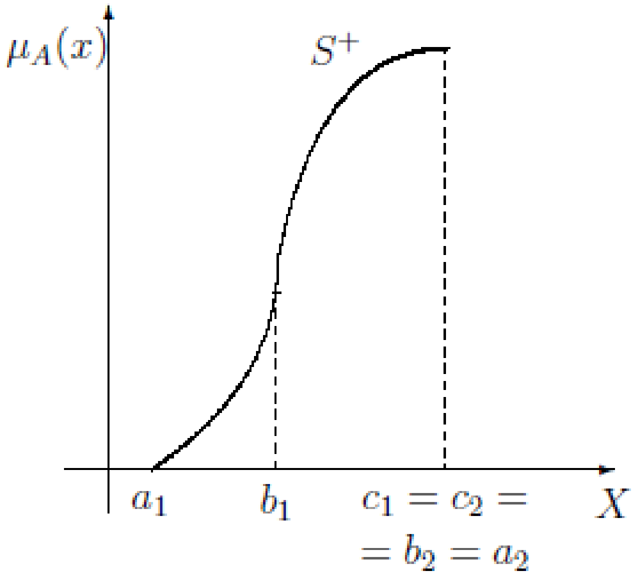
2. Ak univerzum je v spojitom tvare:

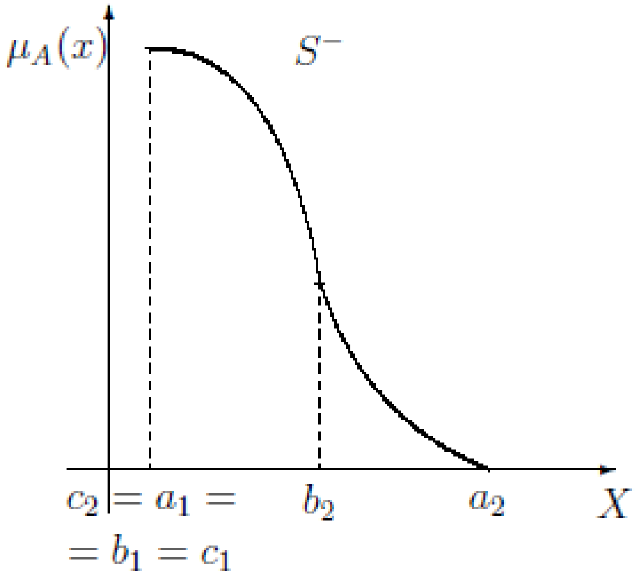
   (a) $A = \int_X \mu_A(x)/x \, dx$

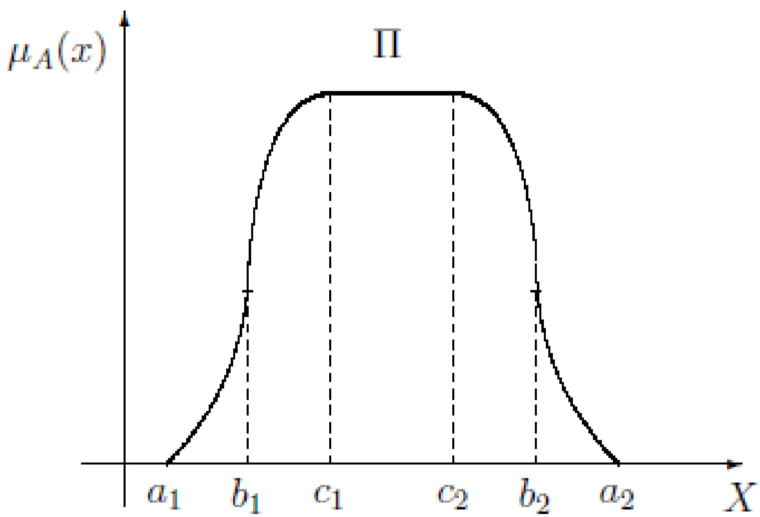
   (b) Graficky pomocou spojitej funkcie príslušnosti $\mu_A(x), \quad \forall x \in X$

Základné typy FP

- Nelineárne FP S+, S⁻, Π (zvonovitá):



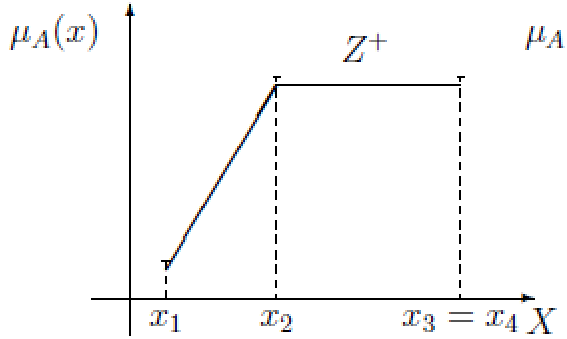


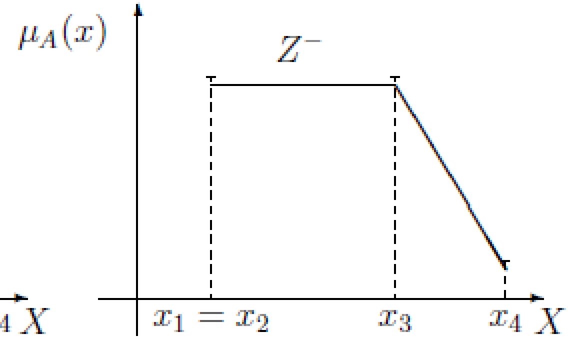


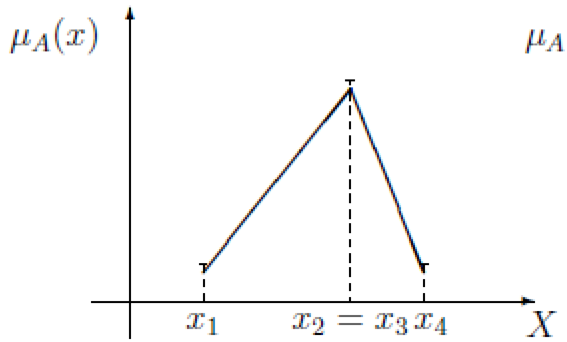
$$F(x,a_1,b_1,c_1,a_2,b_2,c_2) = \begin{cases} 0 & x < a_1 \quad \text{alebo} \quad x > a_2 \\ 1 & c_1 \leq x \leq c_2 \\ \frac{1}{2}\left(\frac{x-a_1}{b_1-a_1}\right)^2 & a_1 \leq x < b_1 \\ 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{x-c_1}{c_1-b_1}\right)^2 & b_1 \leq x < c_1 \\ 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{x-c_2}{b_2-c_2}\right)^2 & c_2 < x \leq b_2 \\ \frac{1}{2}\left(\frac{x-a_2}{a_2-b_2}\right)^2 & b_2 < x \leq a_2 \end{cases}$$

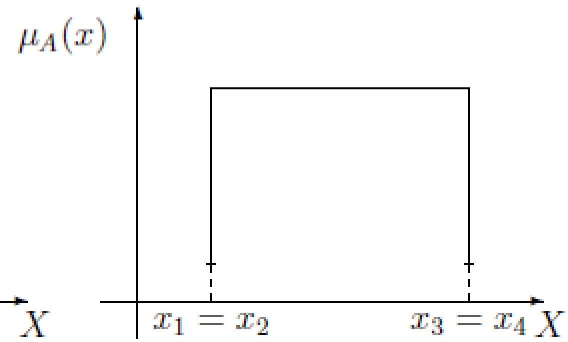
- Lineárne FP Z^+, Z^-, trojuholníková, lichobežníková:

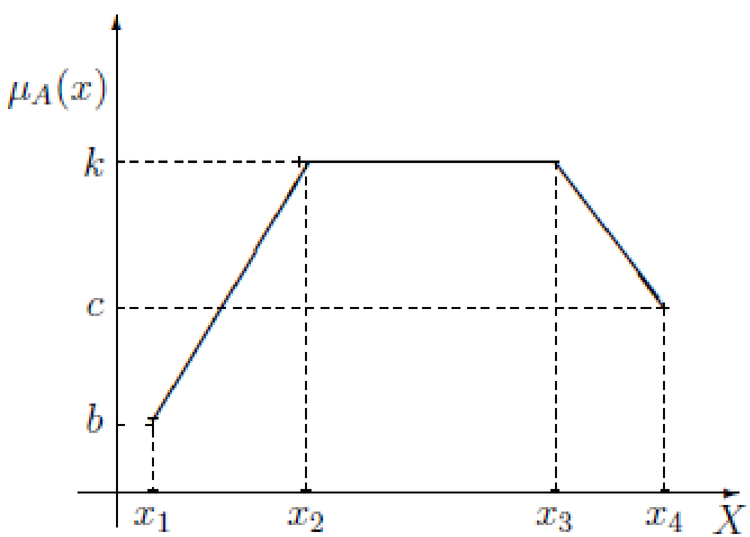
$$F(x,x_1,x_2,x_3,x_4,k,b,c) = \begin{cases} 0 & x \in [0, x_1) \\ (\frac{k-b}{x_2-x_1}).(x - x_1) + b & x \in [x_1, x_2) \\ k & x \in [x_2, x_3) \\ (\frac{k-c}{x_3-x_4}).(x - x_4) + c & x \in [x_3, x_4] \\ 0 & x \in (x_4, +\infty) \end{cases}$$

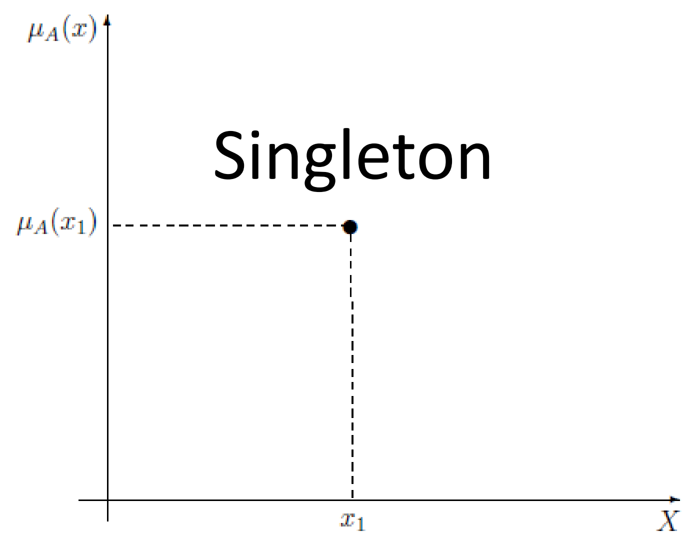

$\mu_A(x)$
Z^+
x_1
x_2
$x_3 = x_4$
X


$\mu_A(x)$
Z^-
$x_1 = x_2$
x_3
x_4
X


$\mu_A(x)$
x_1
$x_2 = x_3$
x_4
X


$\mu_A(x)$
$x_1 = x_2$
$x_3 = x_4$
X


$\mu_A(x)$
k
c
b
x_1
x_2
x_3
x_4
X

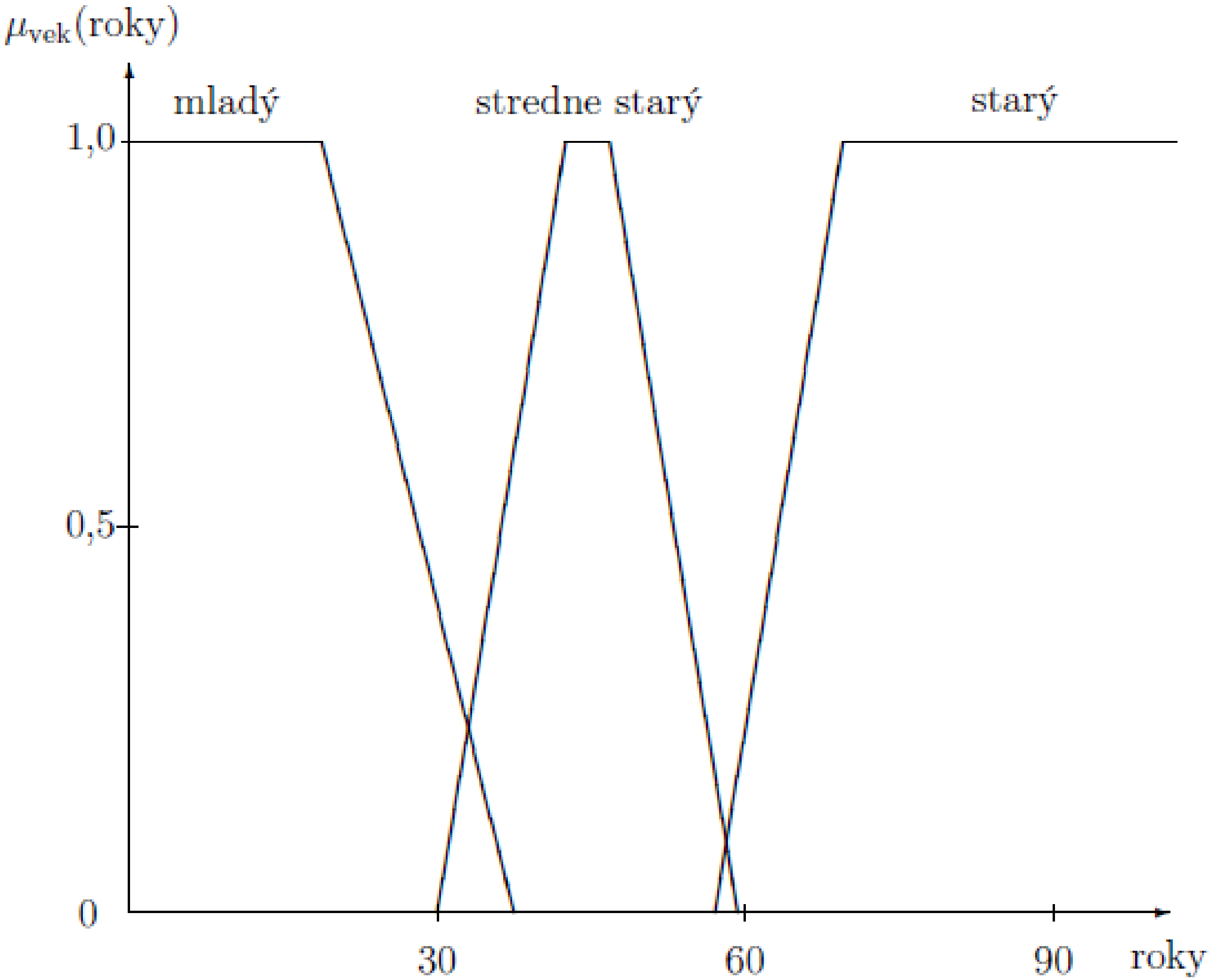

$\mu_A(x)$
Singleton
$\mu_A(x_1)$
x_1
X

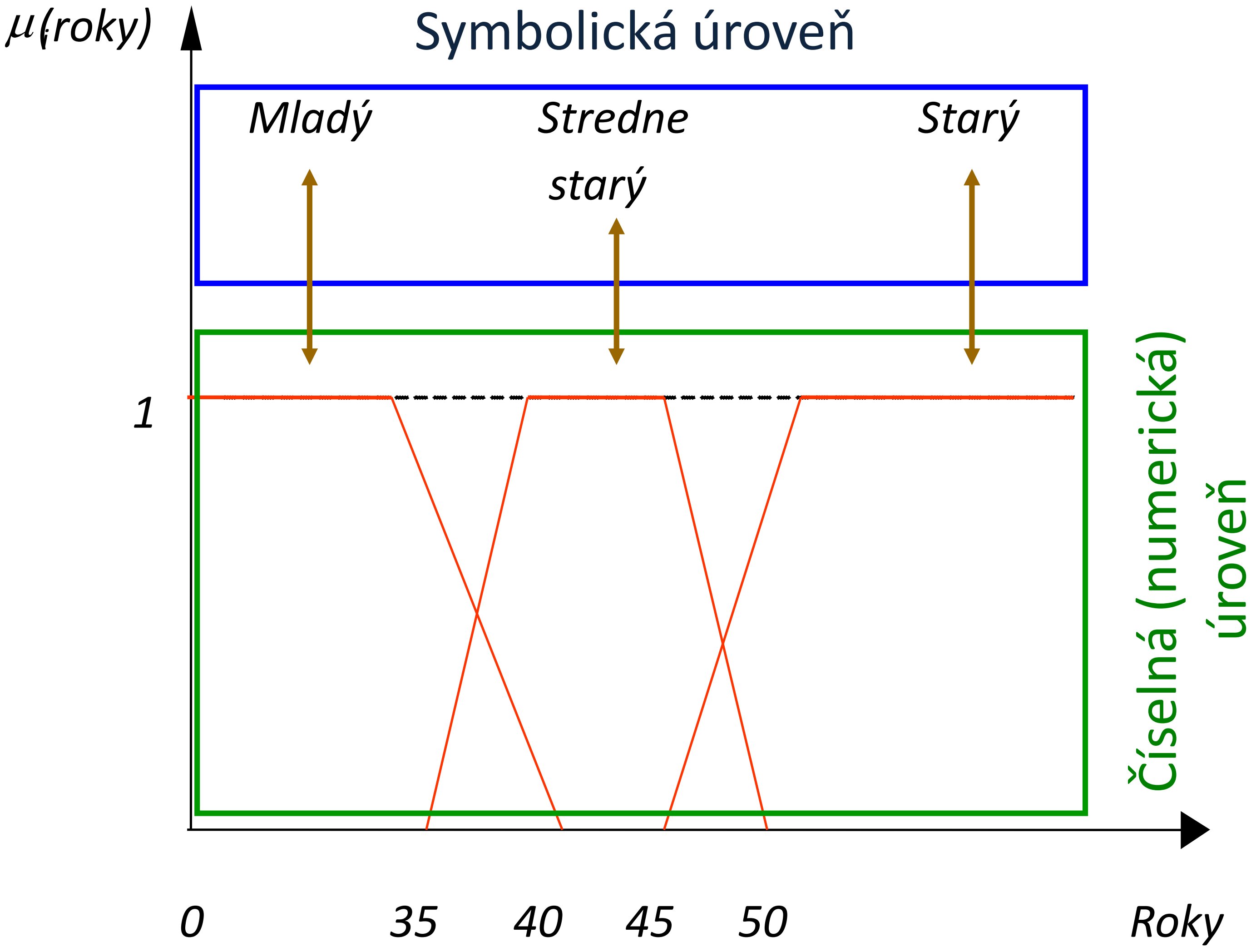
Spôsoby získavania FP

- Manuálne – najčastejšie, potreba experta.
- Štatistické vyhodnotenie – dotazníky, transformácia dát.
- Fyzikálne merania – veľmi zriedkavé, problém ako „zmerať“ FP.
- Použitie prostriedkov UI – neurónové siete, genetické algoritmy, iné metódy učenia.

Lingvistická (jazyková) premenná (LP)

Je možné zoradiť FM ako čísla?




μ(roky)
Symbolická úroveň
Mladý
Stredne starý
Starý
1
Číselná (numerická) úroveň
0
35
40
45
50
Roky

Definícia LP:

LP je usporiadaná pätica (Γ, $T(\Gamma)$,X,G,M), kde:

Γ – **názov** lingvistickej premennej

$T(\Gamma)$ (T) – **term-množina**, t.j. množina všetkých *názvov lingvistických hodnôt premennej* (NHLP) Γ

X – **univerzum**

G – **syntaktické pravidlo** (bezkontextová gramatika), je zostavený NHLP Γ (prvok T)

M – **semantické pravidlo**, priraďuje každej NHLP jej význam, t.j. jej funkciu príslušnosti

Fuzzy systémy

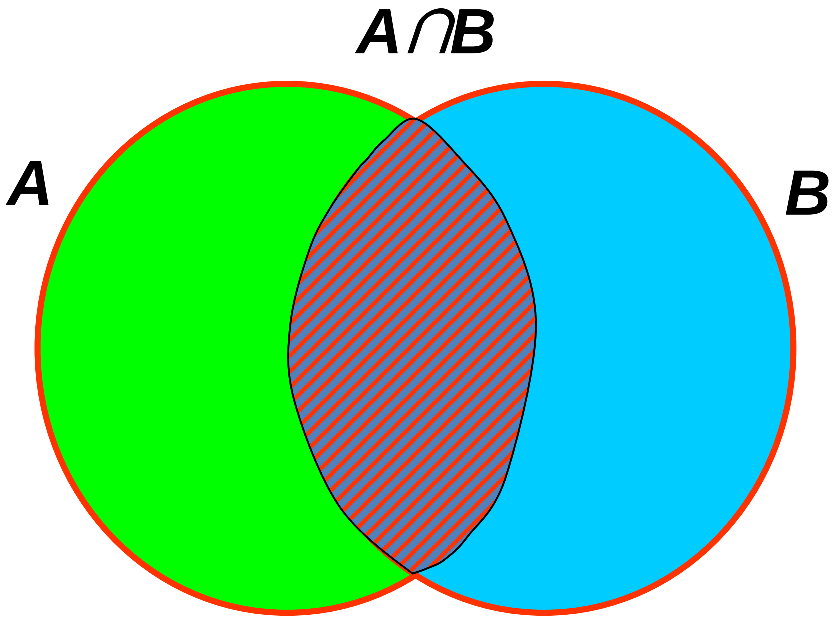
Operácie s fuzzy množinami

&

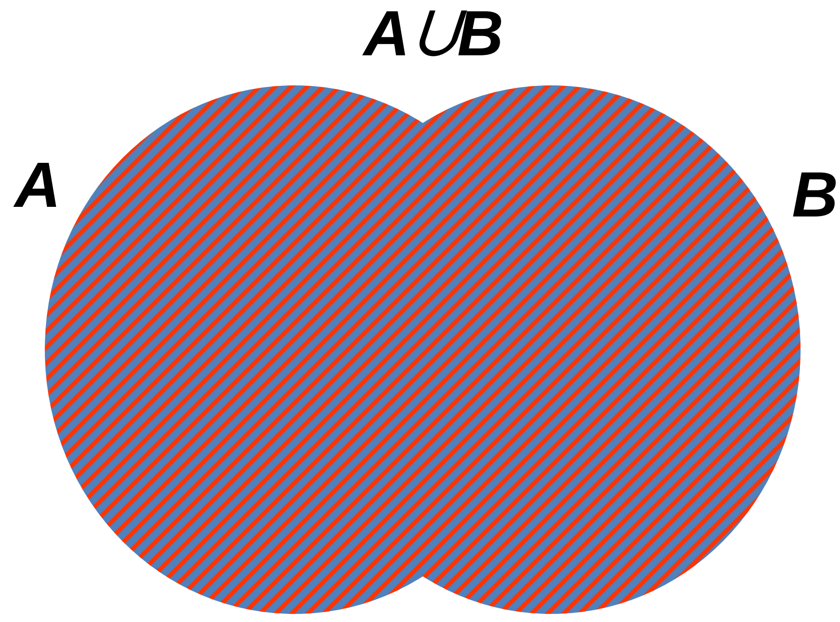
Štruktúra fuzzy regulátora

Operácie s FM

U konvenčných množín:



Prienik

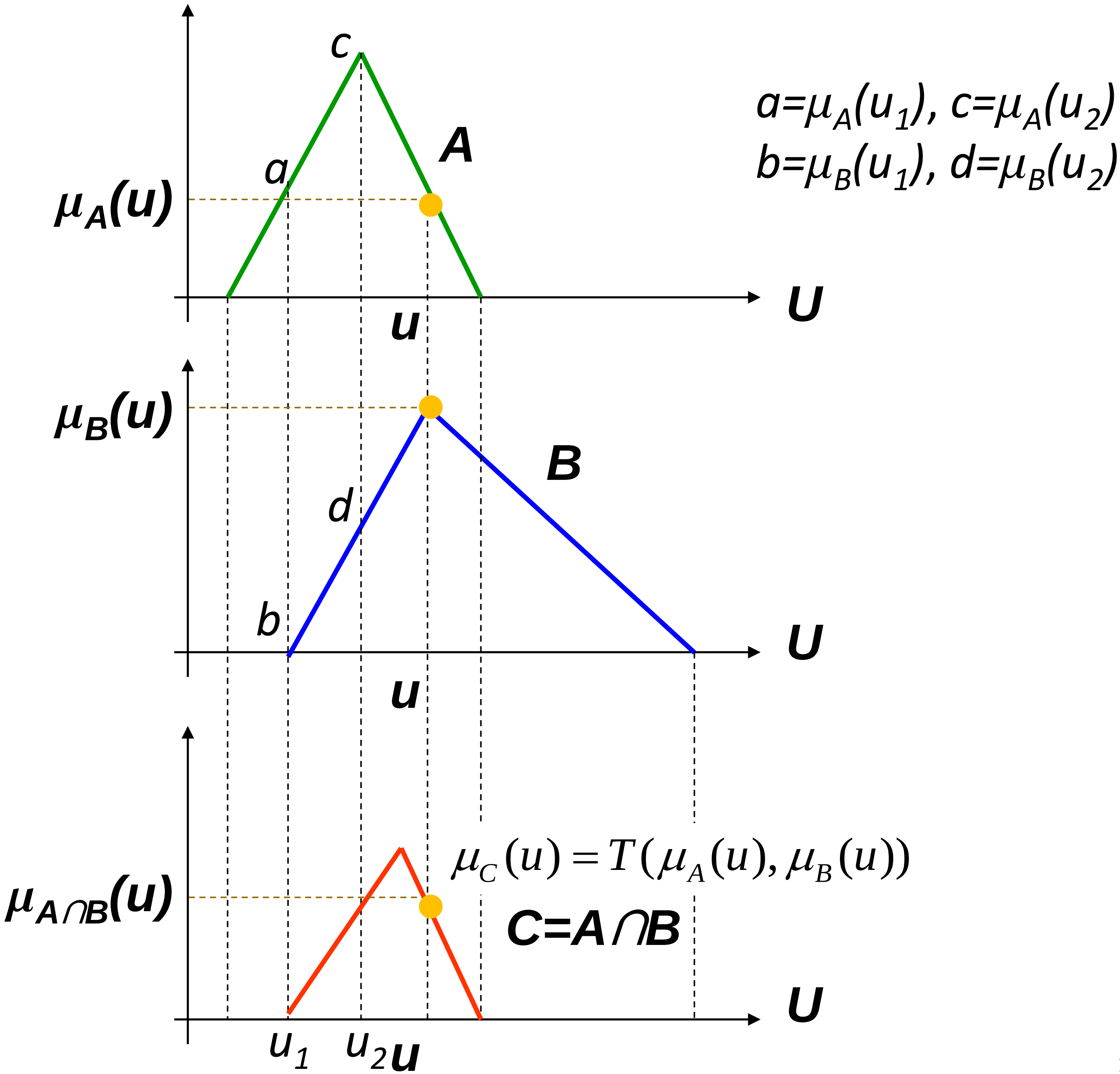


Zjednotenie

U fuzzy množín:

T-norma

T-konorma


$a=\mu_A(u_1)$, $c=\mu_A(u_2)$
$b=\mu_B(u_1)$, $d=\mu_B(u_2)$
$\mu_A(u)$
$\mu_B(u)$
$\mu_{A\cap B}(u)$
A
B
a
b
c
d
U
U
U
u
u
u
u_1
u_2
$\mu_C(u) = T(\mu_A(u), \mu_B(u))$
$C=A\cap B$

T-norma: $[0,1] \times [0,1] \to [0,1]$

(1:) $T(a,b) = T(b,a)$ — Komutatívnosť

(2:) $T(T(a,b),e) = T(a,T(b,e))$ — Asociatívnosť

(3:) $\forall a \leq c \ \& \ \forall b \leq d \ \Rightarrow \ T(a,b) \leq T(c,d)$ — Monotónne stúpajúca

(4:) $T(a,1) = a$ — Identita (neutrálny prvok)

(5:) $T(a,0) = 0$ — Nulový prvok

T-konorma: $[0,1] \times [0,1] \to [0,1]$

(1:) $S(a,b) = S(b,a)$ — Komutatívnosť

(2:) $S(S(a,b),e) = S(a,S(b,e))$ — Asociatívnosť

(3:) $\forall a \leq c \ \& \ \forall b \leq d \ \Rightarrow \ S(a,b) \leq S(c,d)$ — Monotónne stúpajúca

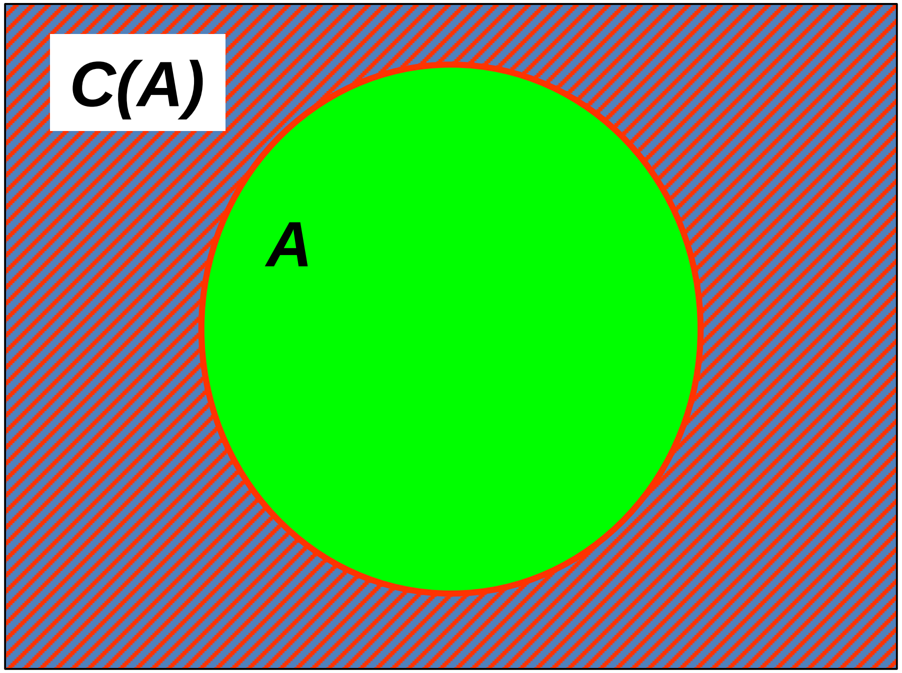
(4:) $S(a,0) = a$ — Identita (neutrálny prvok)

(5:) $S(a,1) = 1$ — Jednotkový prvok

Doplnok: $[0,1] \rightarrow [0,1]$

(1:) $C(0) = 1$ & $C(1) = 0$
(2:) $\forall a < b \Rightarrow C(a) > C(b)$
(3:) $C(C(a)) = a$

- Ohraničenie
- Monotónne klesajúca
- Involúcia



Typy T-noriem & T-konoriem

1. **Konjugované:**

$$T(a,b) = 1 - S((1-a),(1-b))$$

   a. **Drastický súčin & súčet:**

$$T_D(a,b) = \begin{cases} \min(a,b) & \text{Ak} \quad \max(\mathrm{a},\mathrm{b}) = 1 \\ 0 & \text{In} \end{cases}$$

$$S_D(a,b) = \begin{cases} \max(a,b) & \text{Ak} \quad \min(\mathrm{a},\mathrm{b}) = 0 \\ 1 & \text{In} \end{cases}$$

   b. **Ohraničený rozdiel& súčet (Lukasiewicz):**

$$T_L(a,b) = \max(0, a+b-1)$$

$$S_L(a,b) = \min(1, a+b)$$

c. **Einsteinov súčin & súčet:**

$$T_E(a,b) = \frac{a.b}{2-(a+b-a.b)}$$

$$S_E(a,b) = \frac{a+b}{1+a.b}$$

d. **Algebraický (Larsenov) súčin & pravdepodobnostný súčet:**

$$T_A(a,b) = a.b$$

$$S_A(a,b) = a+b-a.b$$

e. Hamacherov súčin & súčet:

$$T_{HC}(a,b) = \frac{a.b}{a+b-a.b}$$

$$S_{HC}(a,b) = \frac{a+b-2.a.b}{1-a.b}$$

f. Minimum & maximum:

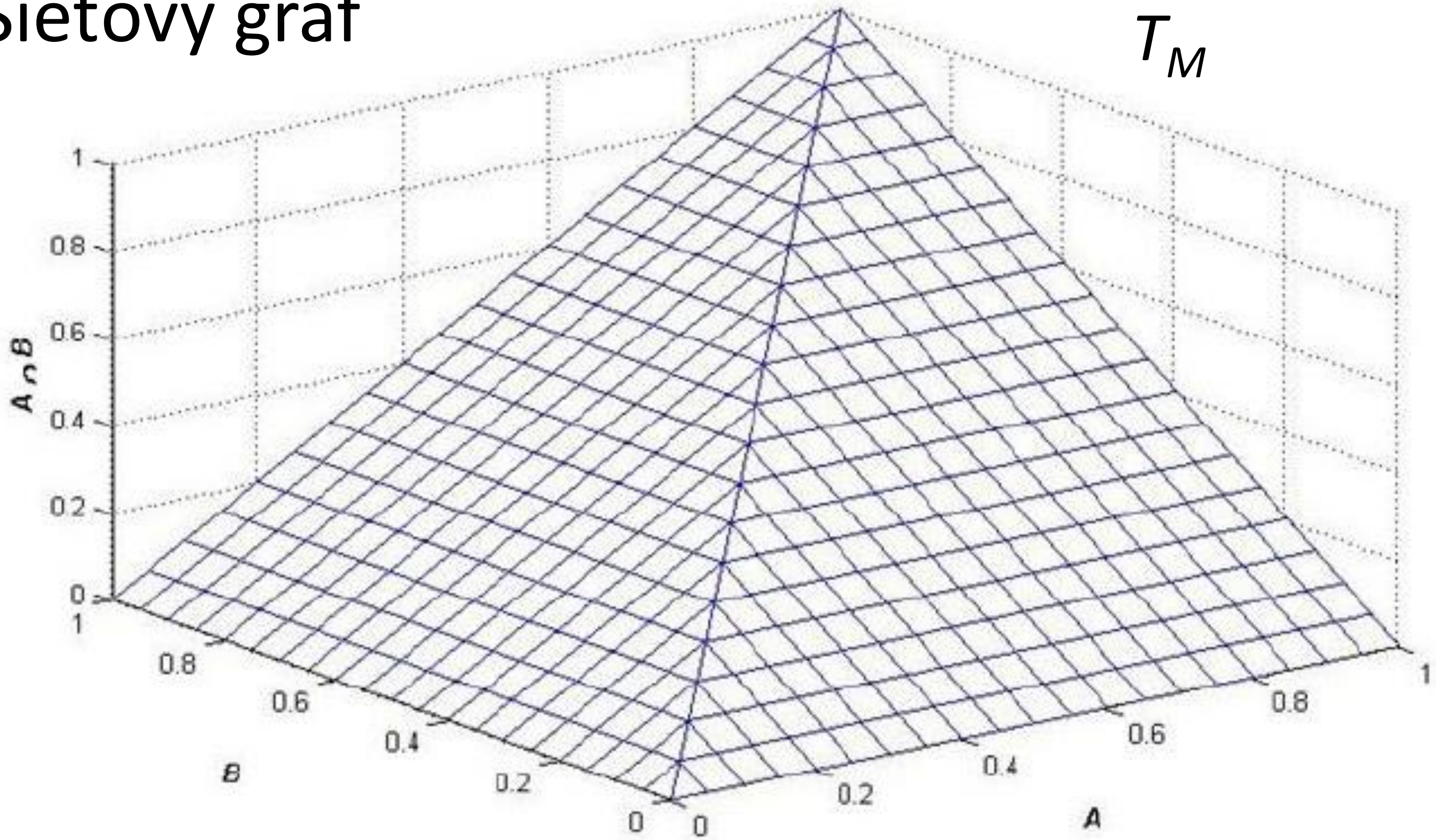
$$T_M(a,b) = \min(a,b)$$

$$S_M(a,b) = \max(a,b)$$

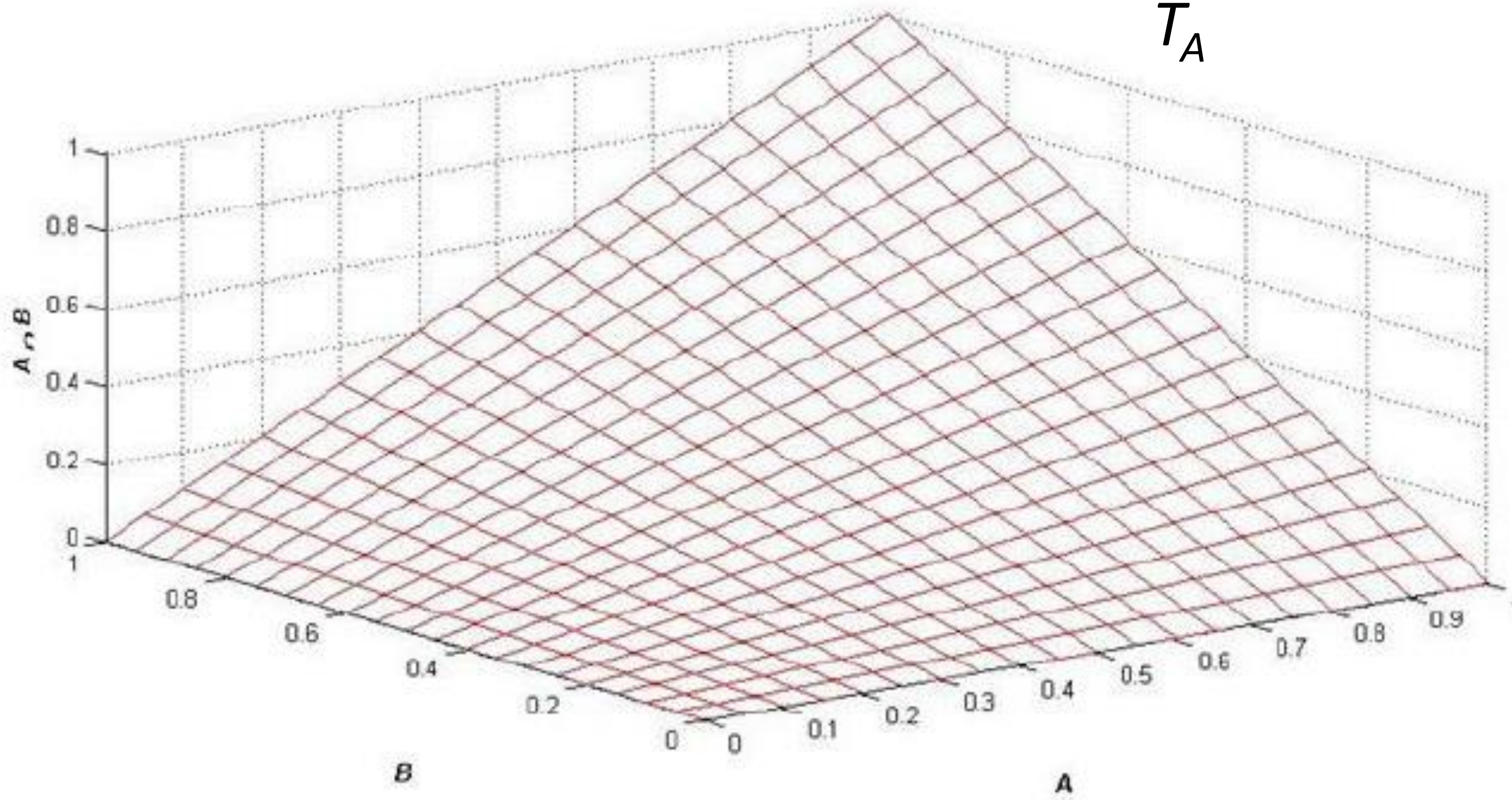
Prísnosť (tolerancia) operátorov

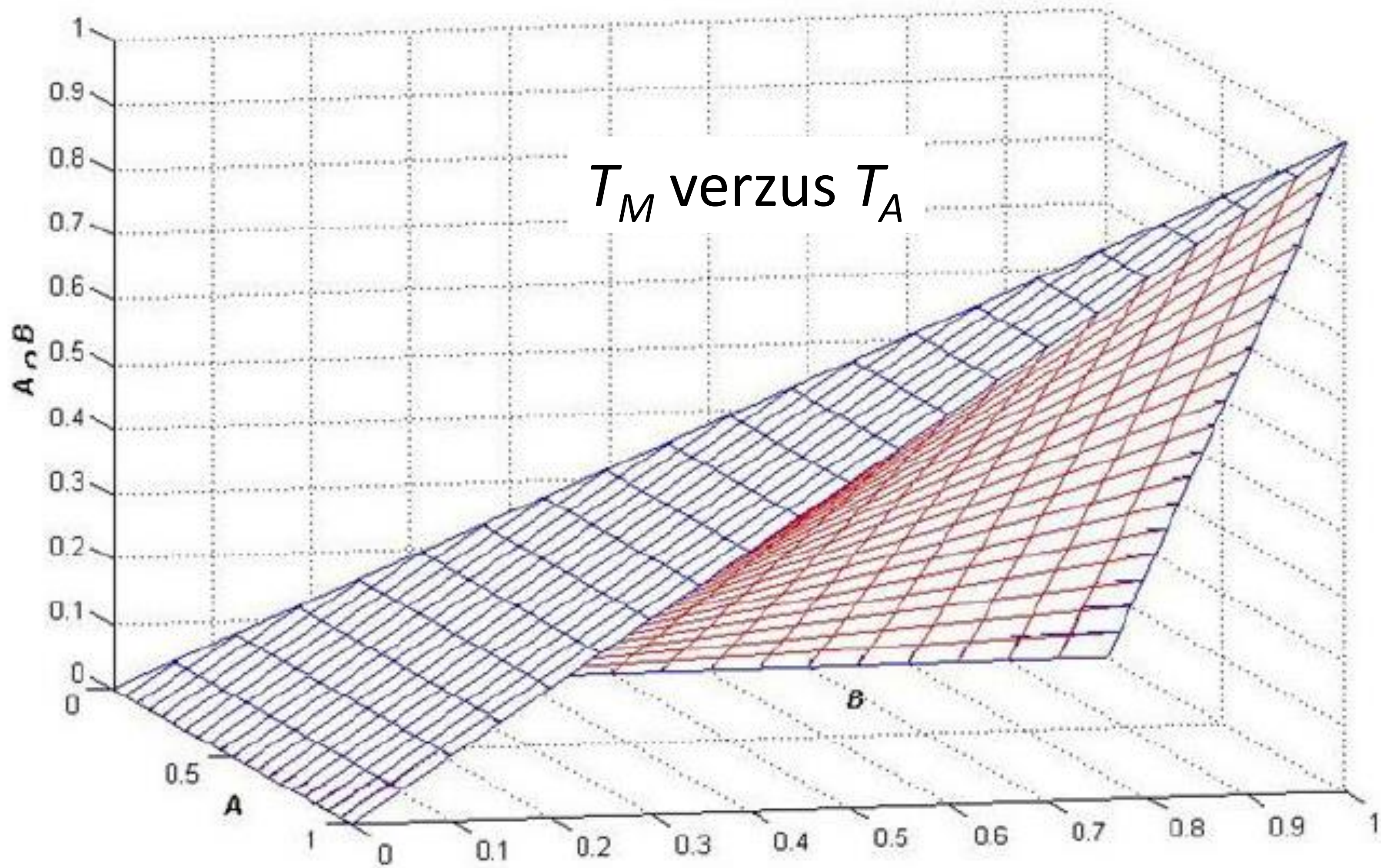
Sieťový graf

T_M



T_A





$$T_D \leq T_L \leq T_E \leq T_A \leq T_{HC} \leq T_M$$

$$S_M \leq S_{HC} \leq S_A \leq S_E \leq S_L \leq S_D$$

2. Parametrické operátory:

a. Hamacherov prienik & zjednotenie:

$$T_{HP}(a,b) = \frac{a.b}{\gamma + (1-\gamma).(a+b-a.b)} \quad \gamma \geq 0$$

$$S_{HP}(a,b) = \frac{(\gamma-1).a.b + a + b}{1 + \gamma.a.b} \quad \gamma \geq -1$$

b. Yagerov prienik & zjednotenie :

$$T_Y(a,b) = 1 - \min(1, ((1-a)^\gamma + (1-b)^\gamma)^{1/\gamma}) \quad \gamma \geq 1$$

$$S_Y(a,b) = \min(1, (a^\gamma + b^\gamma)^{1/\gamma}) \quad \gamma \geq 1$$

c. Min – Max kombinácia:

$$OP_{Min-Max}(a,b) = \gamma.\min(a,b) + (1-\gamma).\max(a,b)$$

$$\gamma \in [0;1]$$

3. Spriemerňujúce operátory:

a. Fuzzy-AND:

$$OP_{AND}(a,b) = \gamma.\min(a,b) + \frac{(1-\gamma)(a+b)}{2}$$

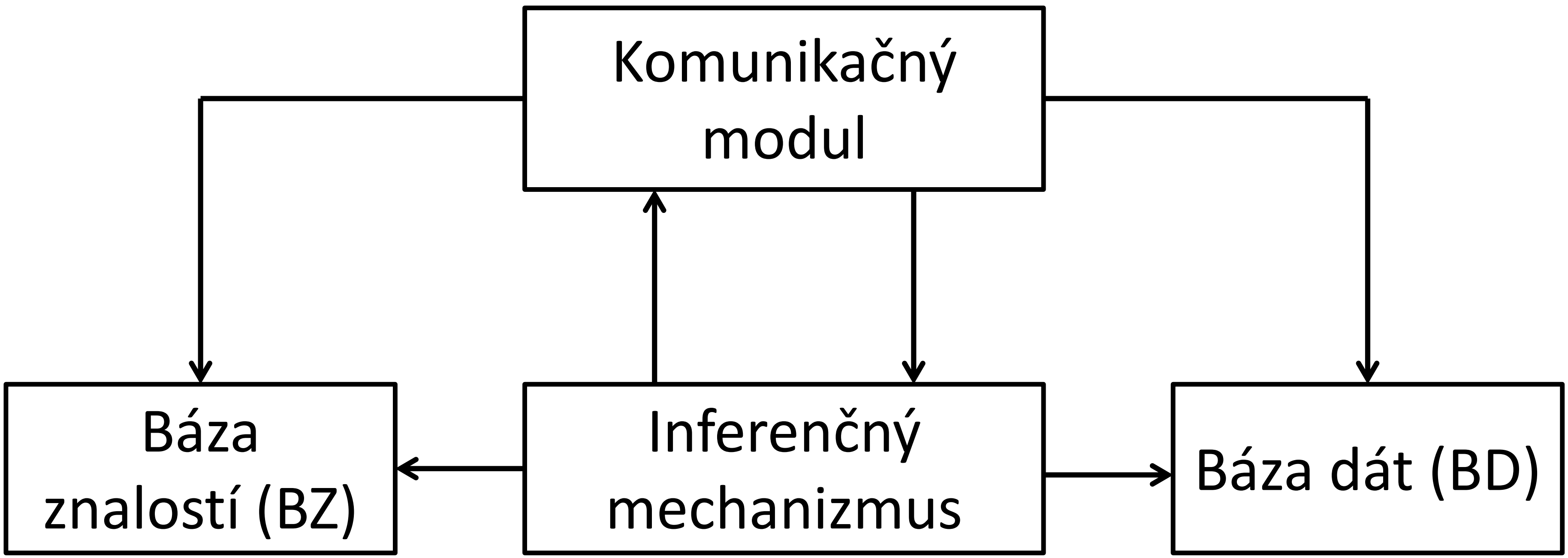
$$\gamma \in [0;1]$$

b. Fuzzy-OR:

$$OP_{OR}(a,b) = \gamma.\max(a,b) + \frac{(1-\gamma)(a+b)}{2}$$

$$\gamma \in [0;1]$$

Štruktúra expertného systému (ES)



BZ & BD sú prísne oddelené.

BZ – Stála (nemenná) časť informácií

BD – Aktuálna (premenlivá) časť informácií

Fuzzy regulátor (FR)
(*fuzzy controller*)

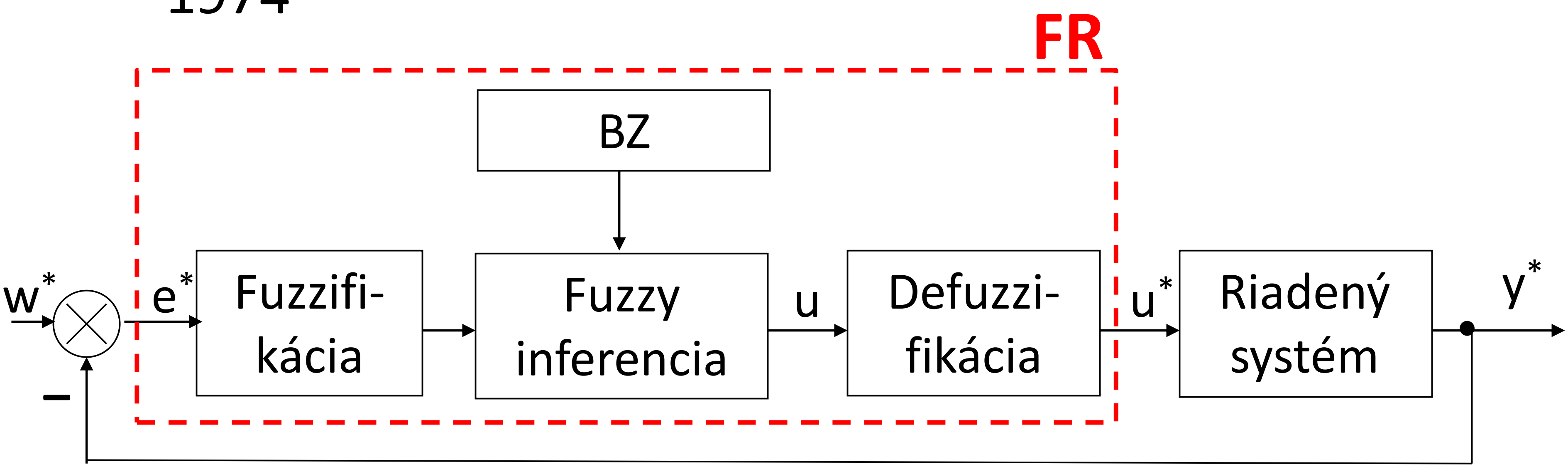
FR ako špeciálny ES schopný:

- pracovať ako nelineárny systém,
- byť robustným (premenlivosť parametrov),
- spracovať čiastočne protirečivé dáta a znalosti,
- plne nahradiť človeka z rozhodovania,
- pracovať v reálnom čase,
- udržiavať informáciu v podobe pravidiel (*user-friendly*).

Štruktúra FR

E.H. Mamdani
1974

w^* – požadovaná hodnota
y^* – skutočný výstup
e^* – odchýlka (*error*), e=w-y
u^* – akčný zásah



Znalosti ako **fuzzy produkčné pravidlá**:

(k:) AK $\underbrace{x_1 \text{ je } LX_1^k \ \& \ \ldots \ \& \ x_n \text{ je } LX_n^k}_{\text{Predpoklad (premisa)}}$ POTOM $\underbrace{u \text{ je } LU^k}_{\text{Dôsledok}}$

LX_i^j – lingvistická hodnota (LH) (malý, starý, ...)

Väčšinou 7 LH v rámci jednej LP:

Z – zero – nulová

S – small – malá

M – medium – stredná

B – big – veľká

P – kladná (positive), N – záporná (negative)

Prehľadová (*look-up*) tabuľka:

Δe=PS

e=NM

e/Δe	NB	NM	NS	Z	PS	PM	PB
NB	NB	NB	NB	NB	NM	NS	Z
NM	NB		NB		NS	Z	PS
NS	NB		NM		Z	PS	PM
Z	NB	NM	NS	Z	PS	PM	PB
PS	NM	NS	Z	PS	PM		PB
PM	NS	Z	PS	PM		PB	PB
PB	Z	PS	PM	PB	PB	PB	PB

u=NS

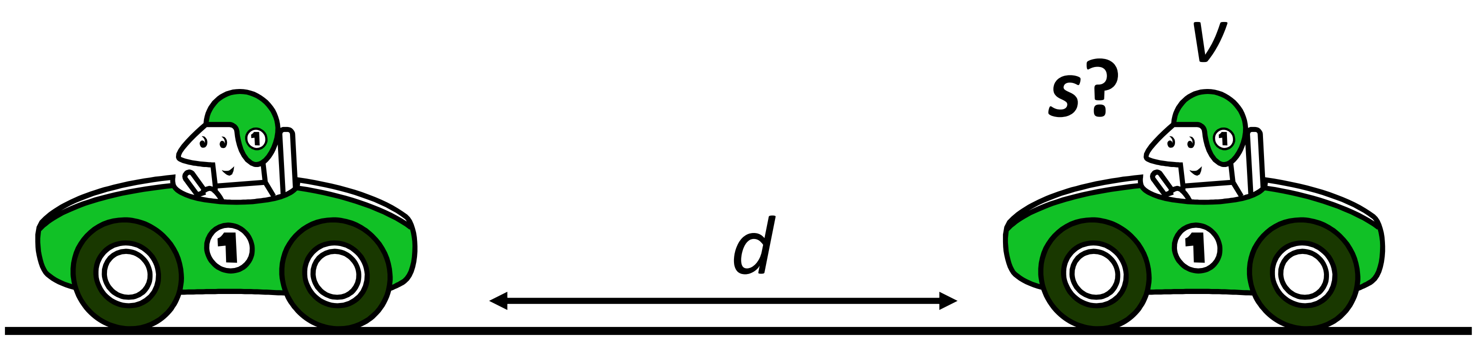
AK e je NM & Δe je PS POTOM u je NS

Príklad – dodržiavanie bezpečného odstupu

Analýza vstupov & výstupov:

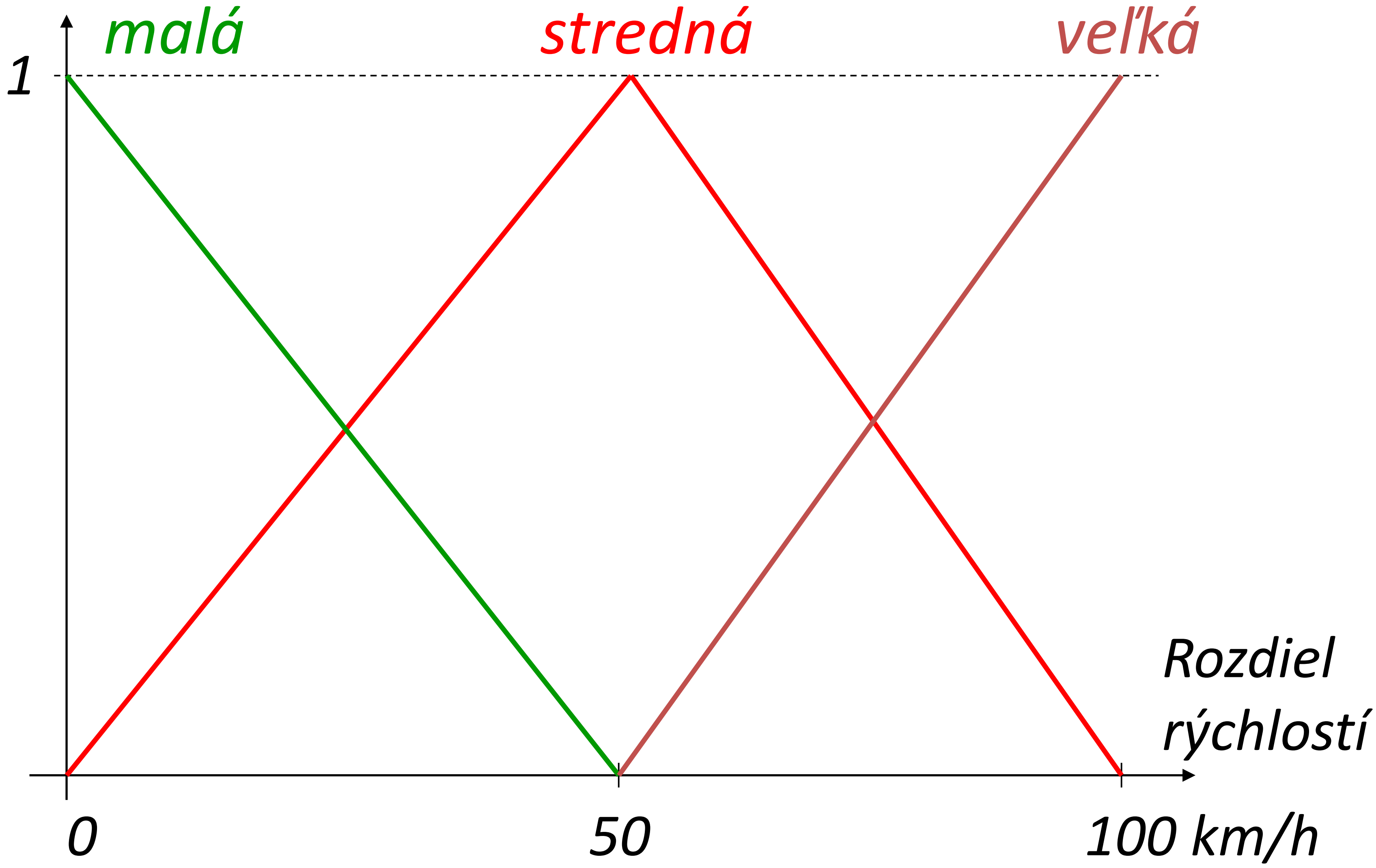
Vstupy:
- vzdialenosť medzi autami (*d*)
- rýchlosť približovania sa áut (*v*)

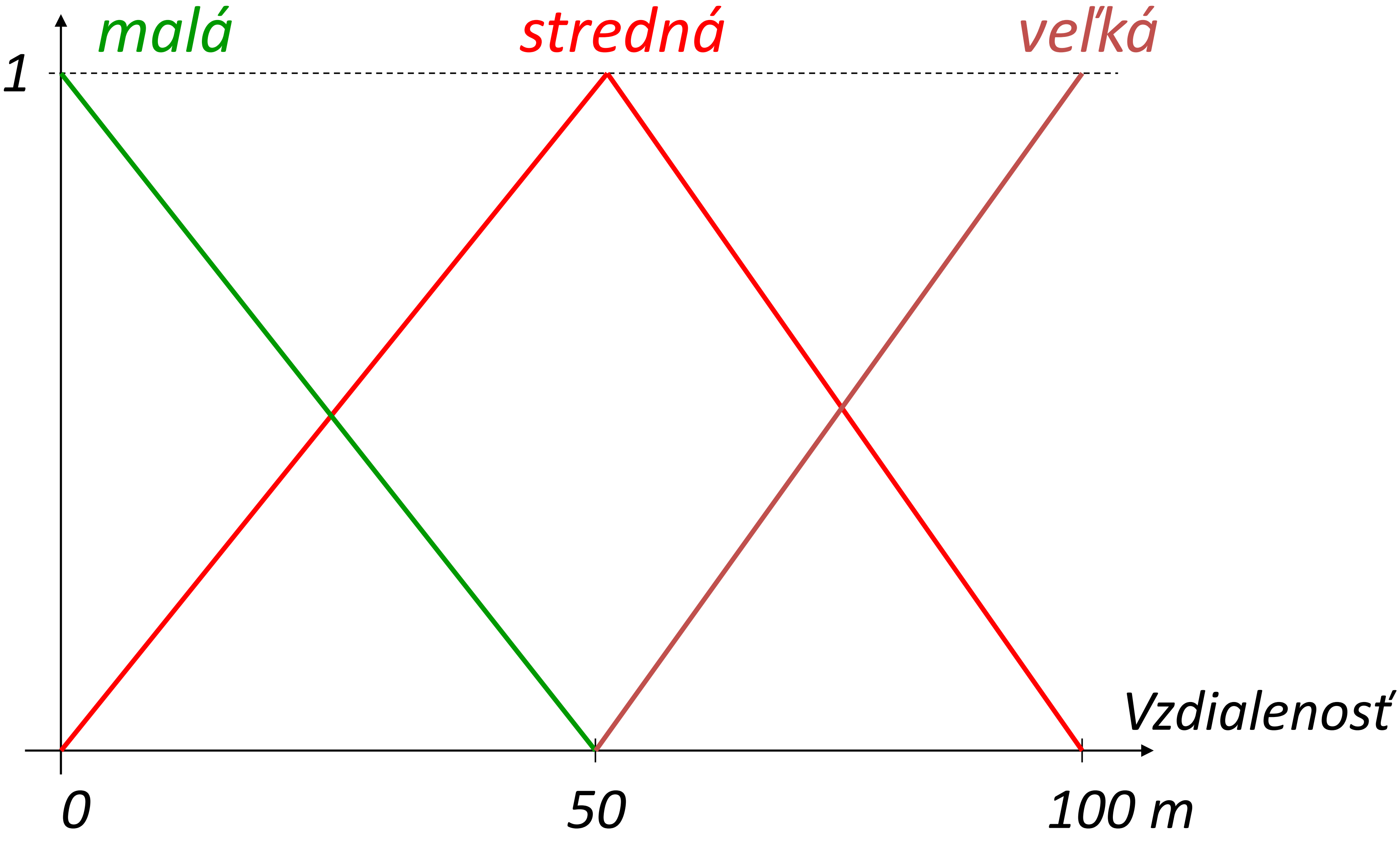
Výstupy:
- sila pre zrýchlenie / brzdenie (s)



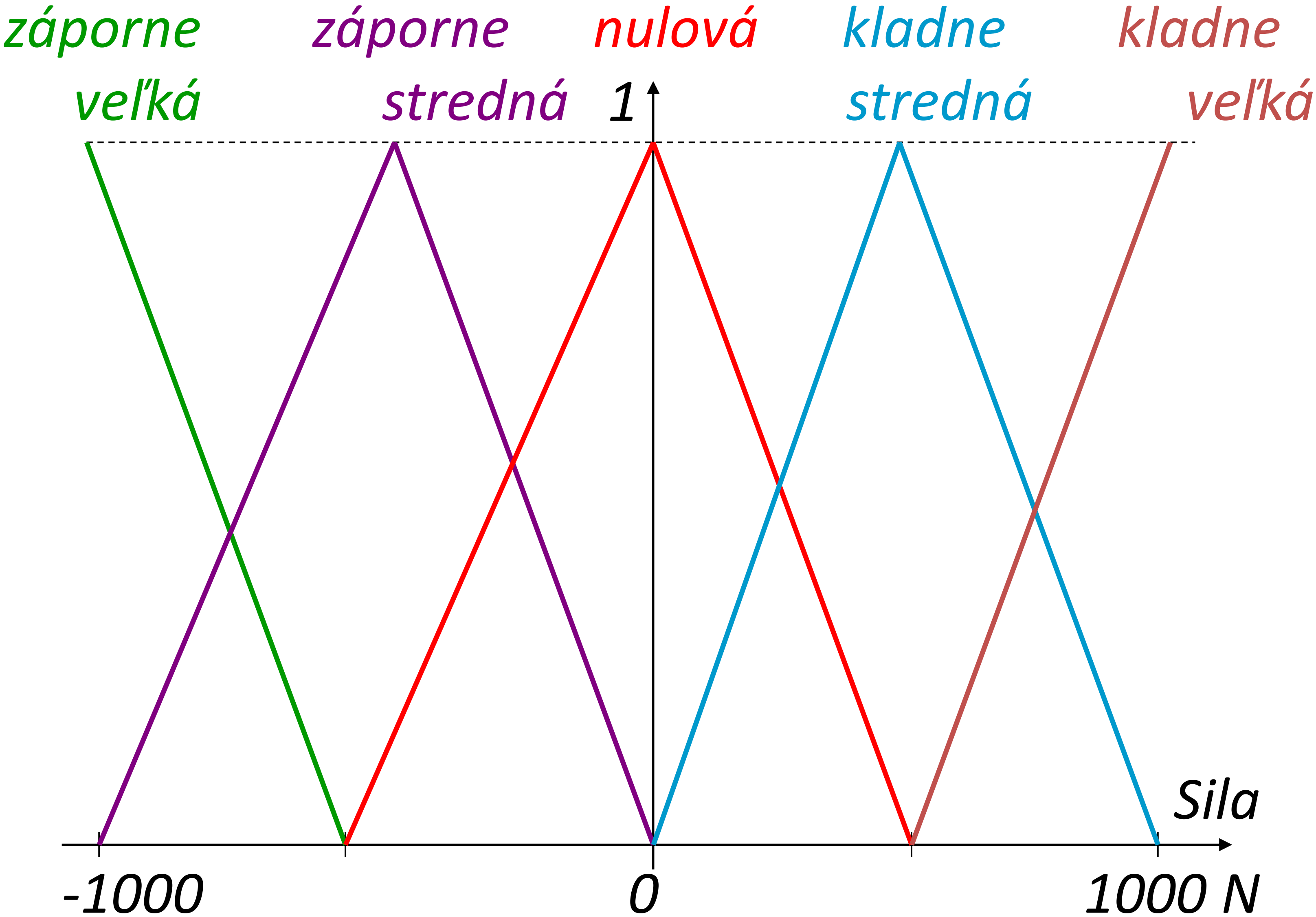
Báza pravidiel:

AK *v* **je** *malá* **&** *d* **je** *malá* **POTOM** *s* **je** *nulová*.
AK *v* **je** *malá* **&** *d* **je** *stredná* **POTOM** *s* **je** *kladne stredná*.
AK *v* **je** *malá* **&** *d* **je** *veľká* **POTOM** *s* **je** *kladne veľká*.
AK *v* **je** *stredná* **&** *d* **je** *malá* **POTOM** *s* **je** *záporne stredná*.
AK *v* **je** *stredná* **&** *d* **je** *stredná* **POTOM** *s* **je** *nulová*.
AK *v* **je** *stredná* **&** *d* **je** *veľká* **POTOM** *s* **je** *kladne stredná*.
AK *v* **je** *veľká* **&** *d* **je** *malá* **POTOM** *s* **je** *záporne veľká*.
AK *v* **je** *veľká* **&** *d* **je** *stredná* **POTOM** *s* **je** *záporne stredná*.
AK *v* **je** *veľká* **&** *d* **je** *veľká* **POTOM** *s* **je** *nulová*.


malá
stredná
veľká
1
Rozdiel
rýchlostí
0
50
100 km/h



malá
stredná
veľká
1
Vzdialenosť
0
50
100 m


záporne veľká
záporne stredná
nulová
kladne stredná
kladne veľká
1
Sila
-1000
0
1000 N

Fuzzy systémy

Výpočtový cyklus fuzzy regulátora

&

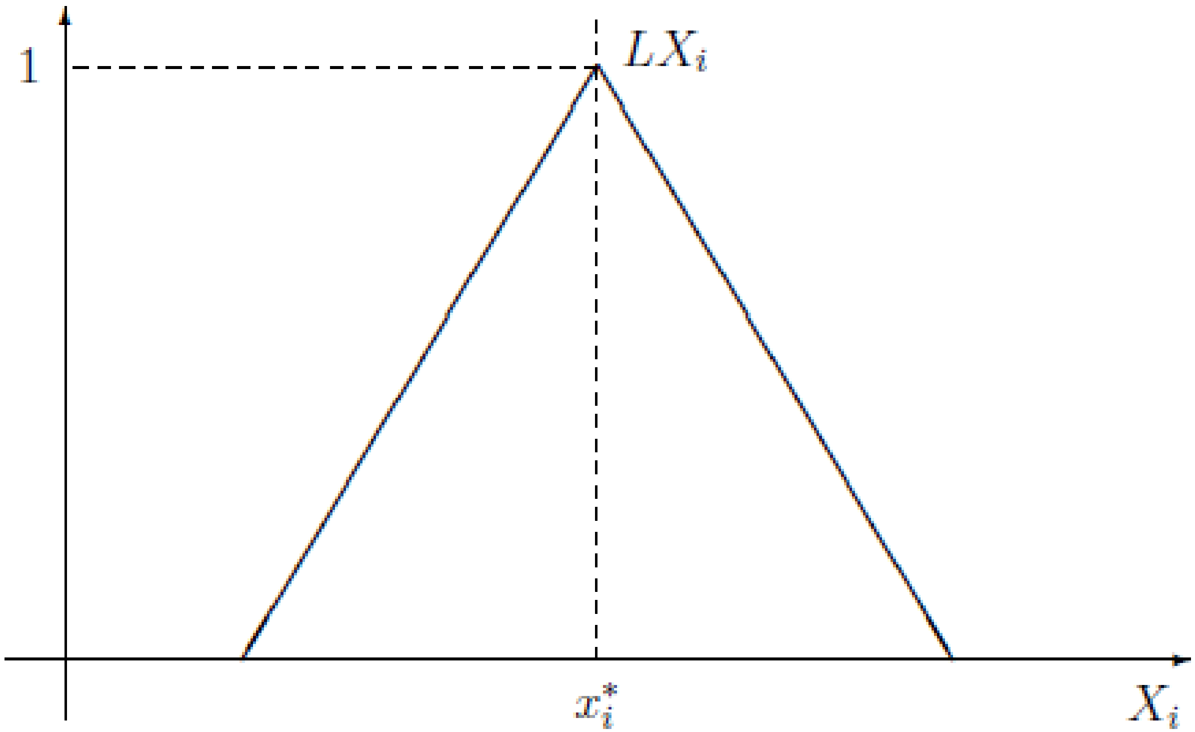
Analýza bázy pravidiel

Fuzzifikácia

Transformácia: ostré číslo $\rightarrow$ FM:

- singletonová: $LX_i = \{(x_i^*, \mu_{LX_i}(x_i^*))\}$
- tolerančná:

$$\begin{aligned} x_i^* &= P(LX_i) \\ supp\ LX_i &= \text{tolerancia} \end{aligned}$$



Postup vyhodnocovania fuzzy pravidiel

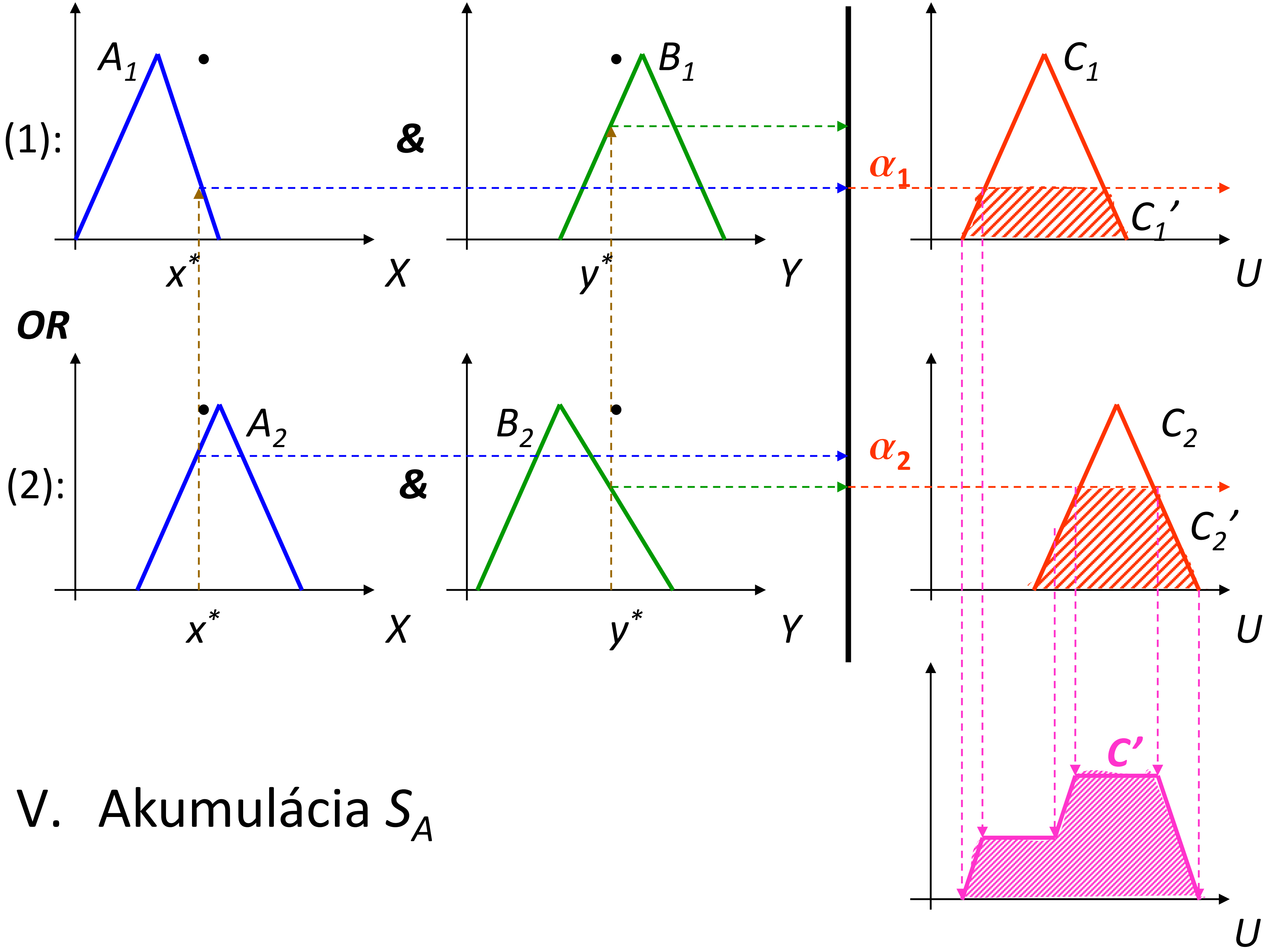
$$\underbrace{AK\quad \underbrace{\underbrace{x\ je\, A}_{\mathrm{I.}} \;\&\; \underbrace{y\ je\, B}_{\mathrm{I.}}}_{\mathrm{II.}} \quad POTOM \quad u\ je\, C}_{\mathrm{III.}} \;\; :w_i$$

I. Výpočet kompatibility T_C

II. Agregácia vstupov $T_A \rightarrow$ **sila pravidla** $\boldsymbol{\alpha} \in [0;\, 1]$

III. Vlastná inferencia $T_I \rightarrow C' \neq C$ ($C' \subseteq C$)
(C' – orezaná FP, (*clipped*))

IV. Váhovanie $w_i.C'$ – miera hodnovernosti pravidla
($w \in [0;\, 1]$)



V. Akumulácia S_A

Defuzzifikácia

Transformácia: FM → ostré číslo:

- metódy ťažiska
- metódy maxima

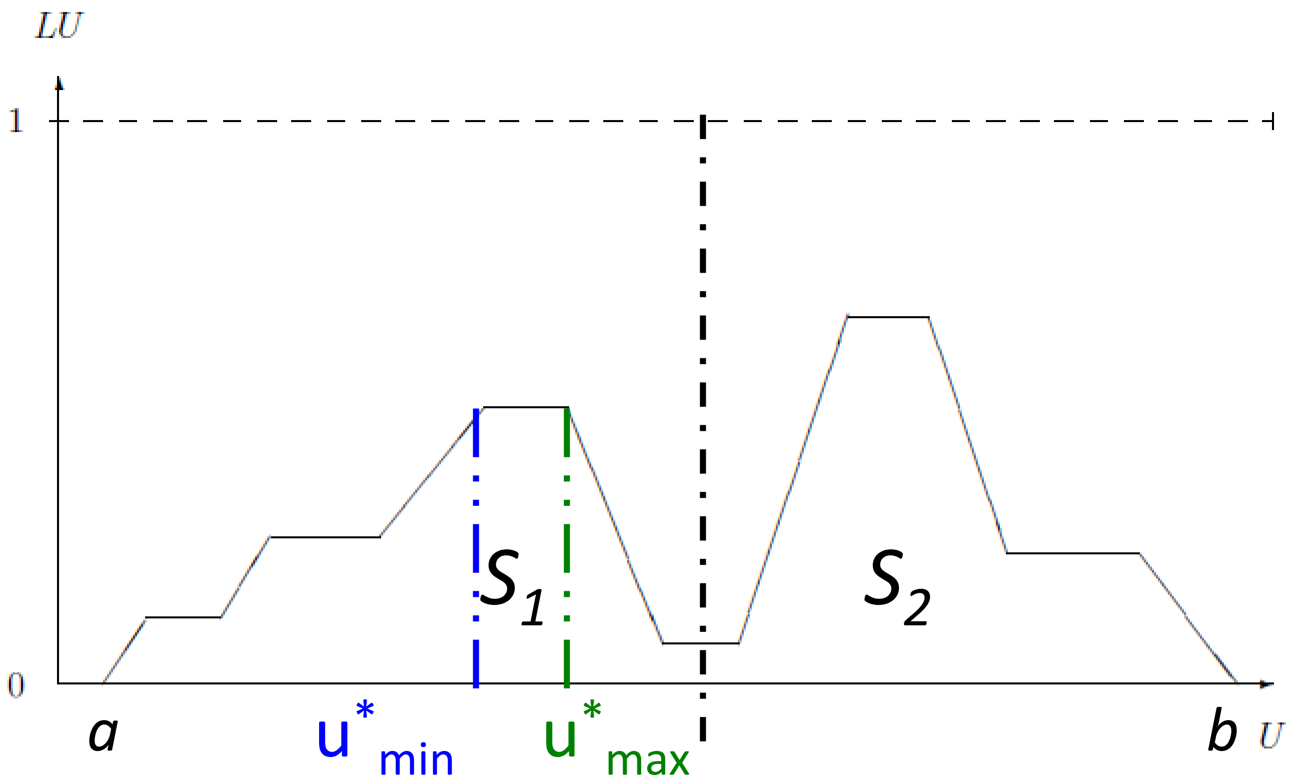
1. Ťažisko (*Center of Gravity, Center of Area*):

$$u^* = \frac{\int_U u.\mu_{LU_c}(u)\, du}{\int_U \mu_{LU_c}(u)\, du}$$

2. Súčtové ťažisko (*Center of Sums*):

$$u^* = \frac{\int_U u. \sum_{k=1}^{m} \mu_{LU_c^k}(u)\, du}{\int_U \sum_{k=1}^{m} \mu_{LU_c^k}(u)\, du}$$

3. Ťažisko najväčšieho priestoru:



4. Bisektorová metóda:

$$\int_a^{u^*} \mu_{LU_c}(u)\,du = \int_b^{u^*} \mu_{LU_c}(u)\,du$$

5. Metóda výšok (*Height method, Local Mean of Maxima*):

$$u^* = \frac{\sum_{k=1}^{m} p_k . \alpha_k}{\sum_{k=1}^{m} \alpha_k}$$

6. Prvé, posledné, stredné maximum (*First, Last, Middle of Maxima, Global Mean of Maxima*), u^*_{min}, u^*_{max}, u^*:

$$u^* = u^*_{min} + \frac{u^*_{max} - u^*_{min}}{2}$$

Metódy typu *fuzzy mean*:

$$u^* = \frac{\sum_{k=1}^{m} b_k . \alpha_k}{\sum_{k=1}^{m} \alpha_k}$$

b_k – číslo charakterizujúce orezanú FP
m – počet odpálených pravidiel
Súčtové ťažisko, metóda výšok, …

Kritériá hodnotenia defuzzifikačných metód

1. Spojitosť (*Continuity*)
2. Jednoznačnosť (*Unambiguity*)
3. Prijateľnosť (*Plausibility*)
4. Výpočtová náročnosť
5. Zohľadňovanie prekrytí (*Weight Counting*)

Niektoré kritériá sú jednoznačné – ostré (O)
a niektoré sú nejednoznačné – fuzzy (F).

Spojitosť: F

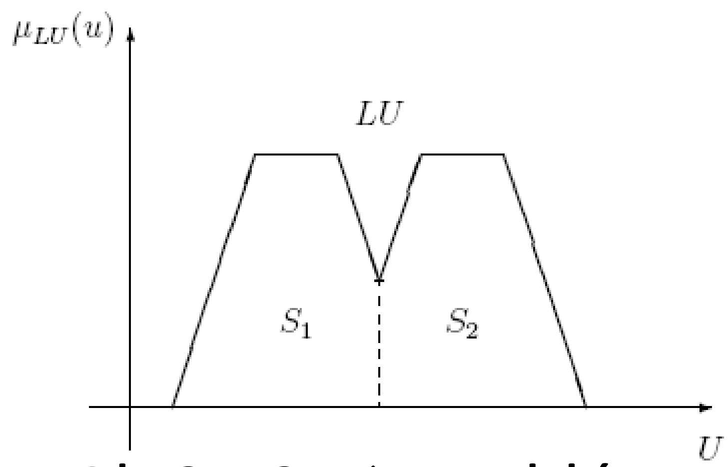
„Malej“ zmene vstupu ε má prislúchať „malá“ zmena výstupu δ:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; \delta > 0 : \quad | \; x(t+1)^* - x(t)^* \; | < \varepsilon \quad \longrightarrow \quad | \; u(t+1)^* - u(t)^* \; | < \delta$$

Predpoklad: Existencia spojitej bázy pravidiel.

Jednoznačnosť: O

Ak vždy vie vypočítať práve jednu ostrú hodnotu *u**.



Ak $S_1=S_2$ → Problém

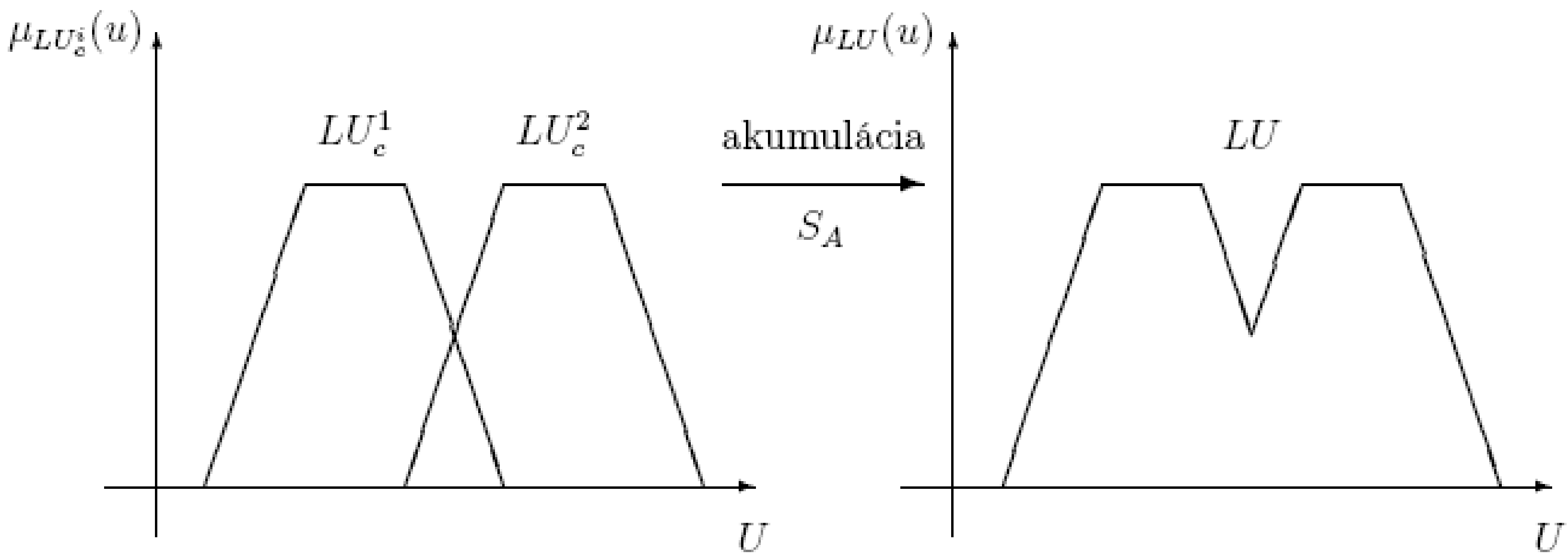
Prijateľnosť: F
Prijateľné riešenie $u^* \in LU$ by malo ležať „približne“ v strede nosiča *Supp LU* a malo by mať „vysoký“ stupeň príslušnosti v *LU*.
Predpoklad: Existencia konvexnej FP.
Pozn.: Najlepšie vyhovujú metódy ťažiska.

Výpočtová náročnosť: F
Pozn.: Najrýchlejšie metódy maxima.

Zohľadňovanie prekrytí: O

Metódy, kde akumulácia nie je samostatným výpočtovým krokom (nestráca sa informácia o prekrytí FM).

$$LU = S_A(LU_c^1; LU_c^2)$$



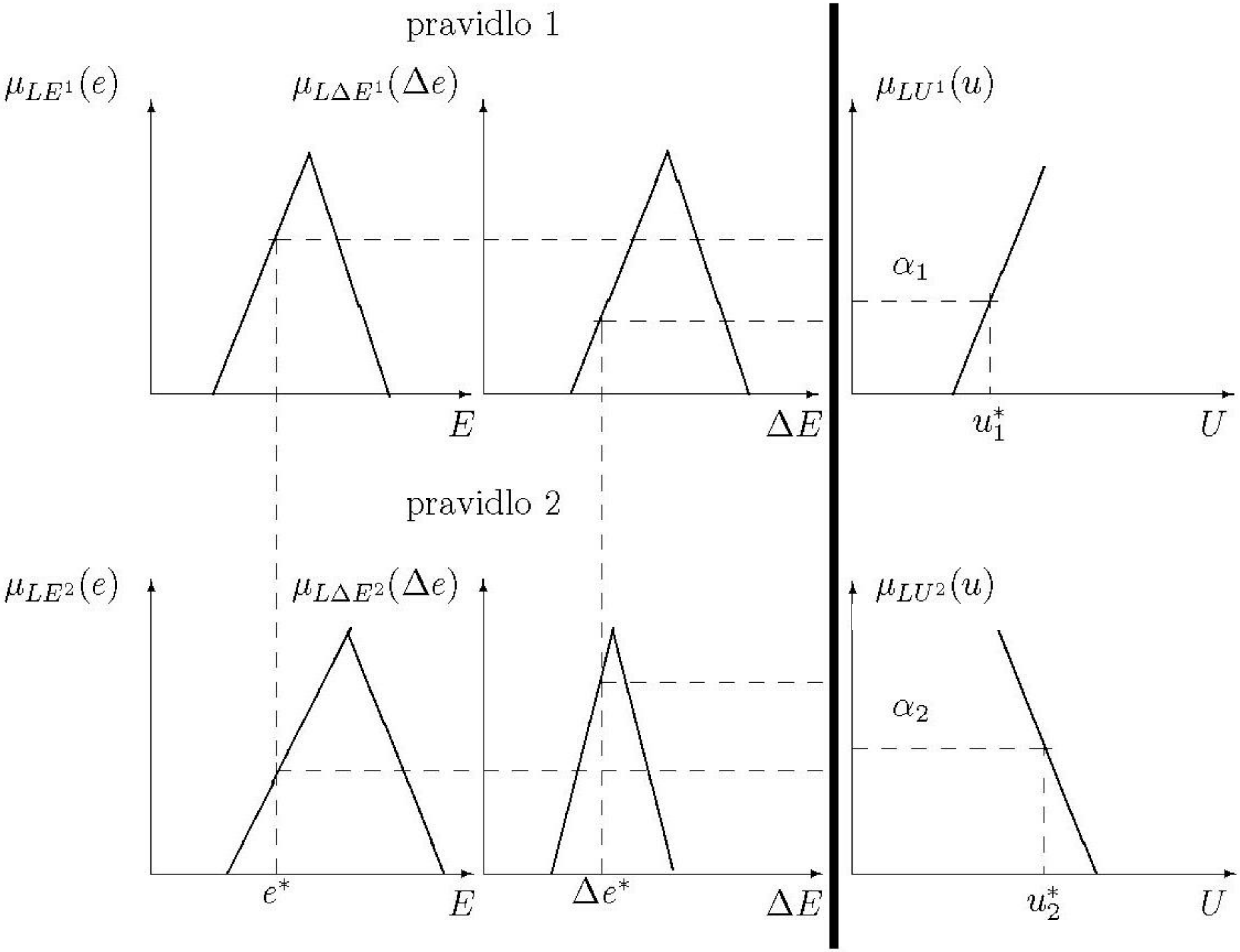
Porovnanie defuzzifikačných metód

Kritérium	Typ defuzzifikačnej metódy					
	1. 4.	2.	3.	5.	6. 7.	8.
Spojitosť	áno	áno	nie	áno	nie	nie
Jednoznačnosť	áno	áno	nie	áno	áno	áno
Prijateľnosť	áno	áno	áno	áno	nie	áno
Výpočtová zložitosť	veľká	malá	veľká	malá	malá	malá
Prekrytia	nie	áno	nie	áno	nie	nie

Typy fuzzy regulátorov

- **Mamdaniho** (1974)
  – fuzzy P, PI, PD, PID
  – fuzzy kĺzavá regulácia
- **TSK**
  – Tsukamotov
- **Adaptívny FR**
  - samoladiteľný (samonastaviteľný)
  - samoučiaci sa (samoorganizačný)
- **Špeciálne návrhy**

Tsukamotov FR



Takagi – Sugeno – Kangov (TSK) FR

T. Takagi - 1985

Dôvod: Často problém spočíva v presnom popise daného stavu sústavy. Ak tento je ale známy, nie je taký problém v určení presného akčného zásahu

(k:) Ak x_1 je LX_1^k & … & x_n je LX_n^k Potom $u^*_k = f_k(x^*_1, \ldots, x^*_n)$

Pozn.: Tsukamotov FR je špeciálny prípad TSK FR.

Výpočtové fázy:

1. Fuzzifikácia: singletonová
2. Kompatibilita: priame dosadenie do FP
3. Agregácia: ľubovoľná T-norma (T-conorma)
4. Vlastná inferencia & akumulácia:

$$u^* = \frac{\sum_{k=1}^{m} \alpha_k . u_k^*}{\sum_{k=1}^{m} \alpha_k}$$

m – počet odpálených pravidiel

α_k – sila k-teho pravidla

5. Defuzzifikácia: –

Mamdani versus TSK FR

1. Mamdani: singletonová fuzzifikácia
2. Mamdani: defuzzifikácia typu fuzzy mean
3. TSK: $u_k^* = \text{defuzz}_{\text{Mamdani}}(LU_c^k)$

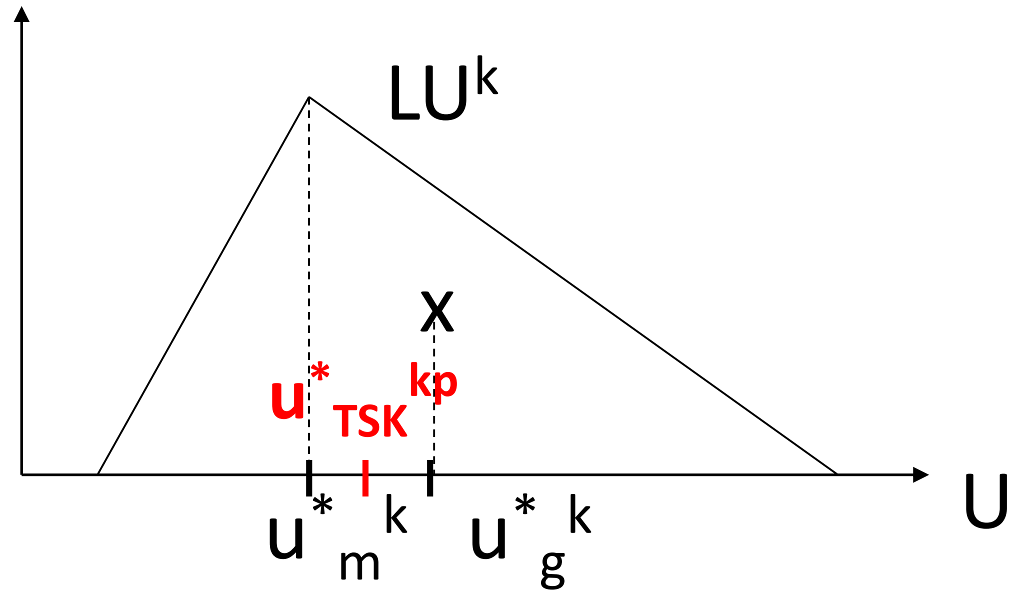
⬇

Mamdaniho FR = TSK FR

Pozn.: Mamdaniho FR sa použije vtedy, ak nie je možné použiť TSK FR, ktorý je výpočtovo jednoduchší a spravidla vie lepšie aproximovať danú funkciu.

Mamdani FR → TSK FR

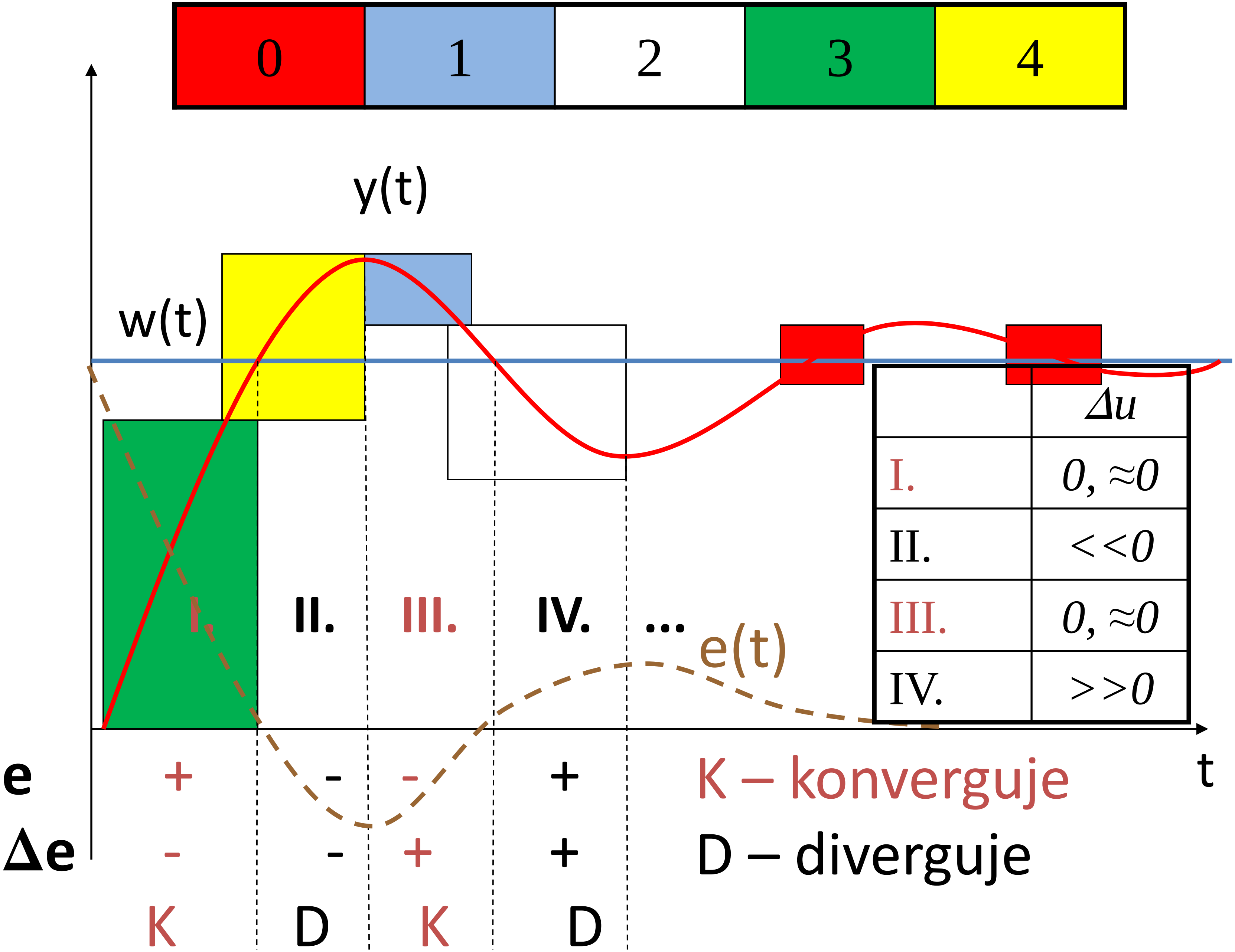
1. LU^k defuzzifikovať podľa ťažiska u_g^k a maxima u_m^k
2. Počiatočné $u^*_{TSK}{}^{kp} = (u_g^k + u_m^k)/2$
3. Výsledné $u^*_{TSK}{}^{kv}$ bude väčšinou v okolí počiatočného $u^*_{TSK}{}^{kp}$.



Analýza bázy pravidiel (BP) FR

e \ Δe	NB	NM	NS	Z	PS	PM	PB
NB	NB	NB	NB	NB	NM	NS	Z
NM	NB	NB	NB	NM	NS	Z	PS
NS	NB	NB	NM	NS	Z	PS	PM
Z	NB	NM	NS	Z	PS	PM	PB
PS	NM	NS	Z	PS	PM	PB	PB
PM	NS	Z	PS	PM	PB	PB	PB
PB	Z	PS	PM	PB	PB	PB	PB

0
1
2
3
4



	Δu
I.	$0, \approx 0$
II.	$<<0$
III.	$0, \approx 0$
IV.	$>>0$

Kritériá hodnotenia bázy pravidiel

1. Úplnosť (completeness)
2. Konzistentnosť, neprotirečivosť (consistency)
3. Spojitosť (continuity)

Úplnosť

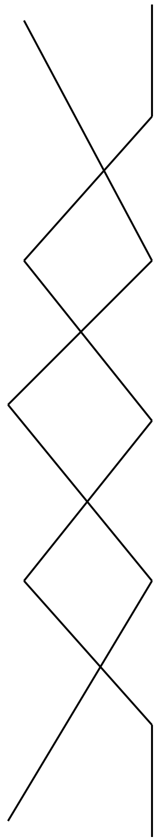
Báza pravidiel je úplná, ak ľubovoľná kombinácia vstupných hodnôt vedie k <u>neprázdnej</u> fuzzy množine výstupu:

$$\forall x_1, \ldots, x_n : \mathbf{hgt}(\mathbf{LU_C}(x_1, \ldots, x_n)) > \mathbf{0}$$

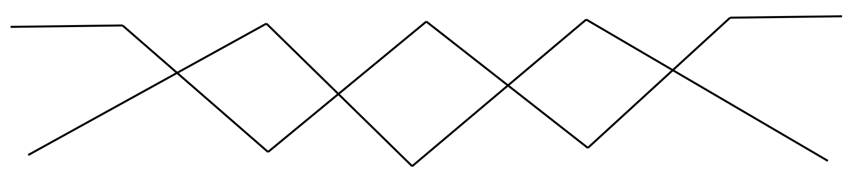
Pozn.:

- V regulačnej ploche sa nesmú nachádzať nedefin. „diery“.
- Takmer žiadna aplikačná BP nie je úplná.
- Úplnosť BP nesúvisí s existenciou nedefinovaných pravidiel.

Príklad úplnej BP



X_1 \ X_2	NB	NS	Z	PS	PB
PB	NS			PS	NS
PS			Z	PB	Z
Z		NS	Z	NS	
NS	PB	PS	PS	NB	
NB	PB	PB	NB	NB	



X_2

Konzistentnosť

Prísna definícia:
BP je nekonzistentná, ak existujú aspoň dve pravidlá s rovnakým predpokladom, ale rôznym dôsledkom.

Menej prísna definícia:
BP je nekonzistentná, ak existujú aspoň dve pravidlá s rovnakým predpokladom a prienik ich dôsledkov je prázdna množina.

Pozn.:

- Menej prísna definícia pripúšťa istú mieru protirečivosti.
- Protirečivosť je charakteristickým rysom zložitých systémov, preto vyšetrovanie konzistentnosti nehrá tak dôležitú úlohu.
- Protirečivé pravidlá nie je možné použiť, ak reprezentácia pravidiel je v maticovom tvare (prehľadová tabuľka).

Spojitosť

BP je spojitá, ak neexistujú žiadne <u>susedné</u> pravidlá, výstupy ktorých majú prázdny prienik.

NS			PS	NS
		Z	PB	Z
	NS	Z	NS	
PB	PS	PS	NB	
PB	PB	NB	NB	

Porušenie spojitosti

Pozn.:

- Prázdne pravidlo sa do susednosti nepočíta.
- Úplnosť a spojitosť BP nie sú navzájom závislé. Úplná BP nemusí byť ešte spojitá. Spojitá BP nemusí byť úplná.
- Porušenie spojitosti BP môže mať vážne následky na robustnosť systému a jeho spoľahlivosť.

Fuzzy systémy

Vplyv parametrov na činnosť fuzzy regulátora

&

Úvod do adaptívnych fuzzy regulátorov

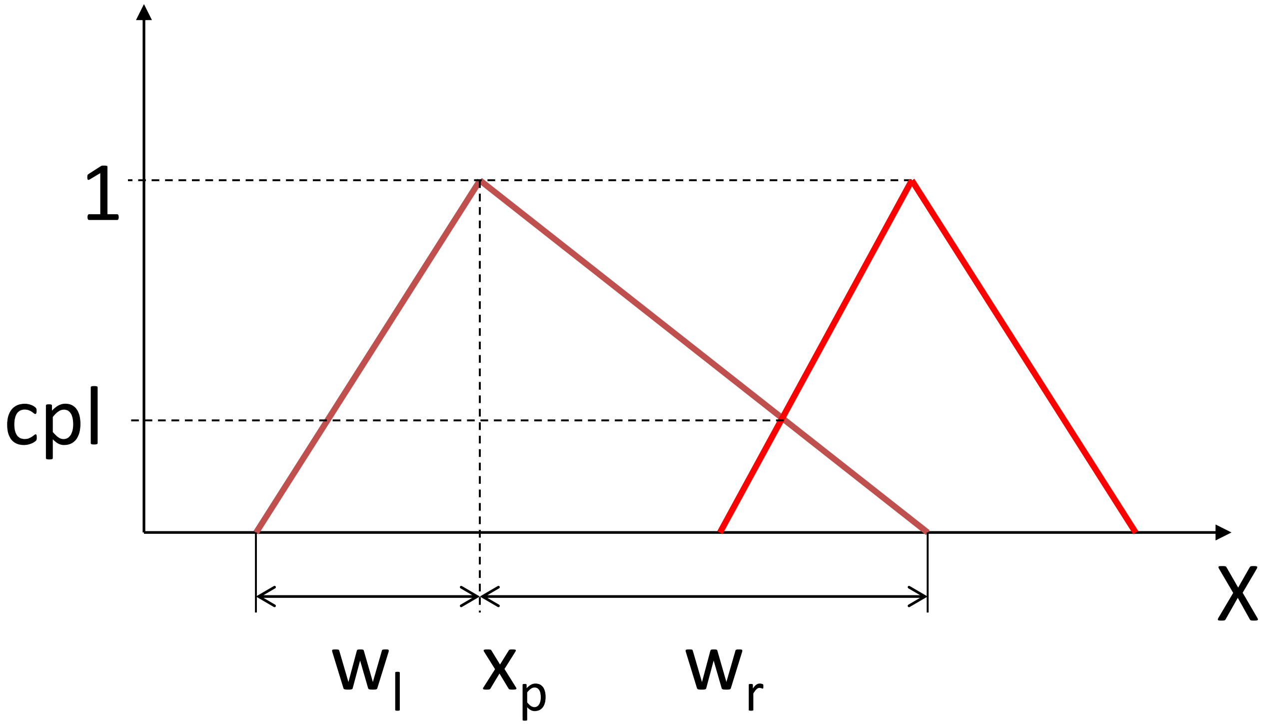
Vplyvy parametrov FR na jeho činnosť

Typy parametrov:

- Funkcie príslušnosti
- Pravidlá
- Inferenčné parametre:
  - operátory (T_C, T_A, T_I)
  - normalizačné a denormalizačné koeficienty
  - fuzzifikačná a defuzzifikačná metóda

Všeobecné poznámky

- Jednotná reprezentácia FP (jednoduchosť výpočtu)
- Nelineárne priebehy zodpovedajú viac realite, ale sú výpočtovo náročné.
- Lichobežníkové FP sú v oblasti jadra necitlivé.
- Linearizované FP v bodoch zlomov nie sú derivovateľné, t.j. vzniká riziko nestabilít.
- Odporúča sa zachovávať fuzzy partície a FP majú byť normálne.
- FP <u>výstupov</u> by mali byť symetrické (možnosť využitia aj maximovej defuzzifikácie).

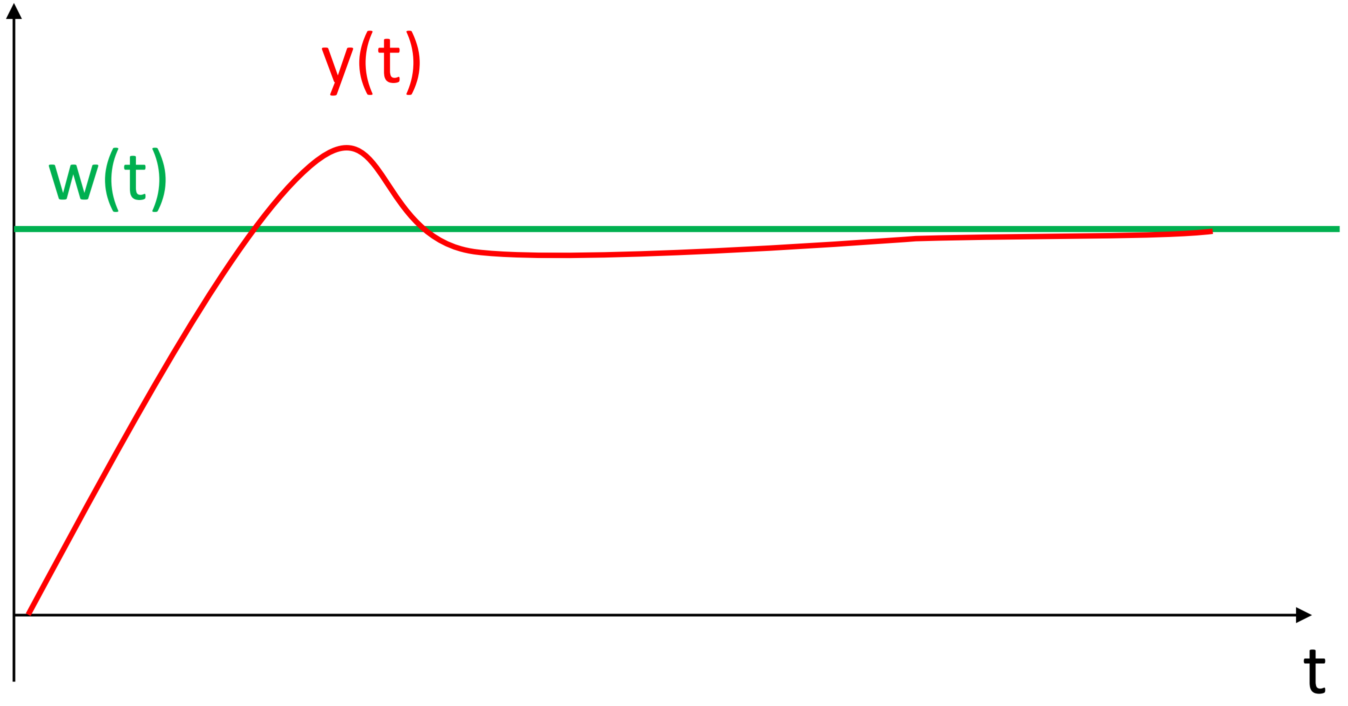


Normálna FP - $\mu(x_p) = 1$

Symetrická FP - $w_l = w_r$ (width - šírka)

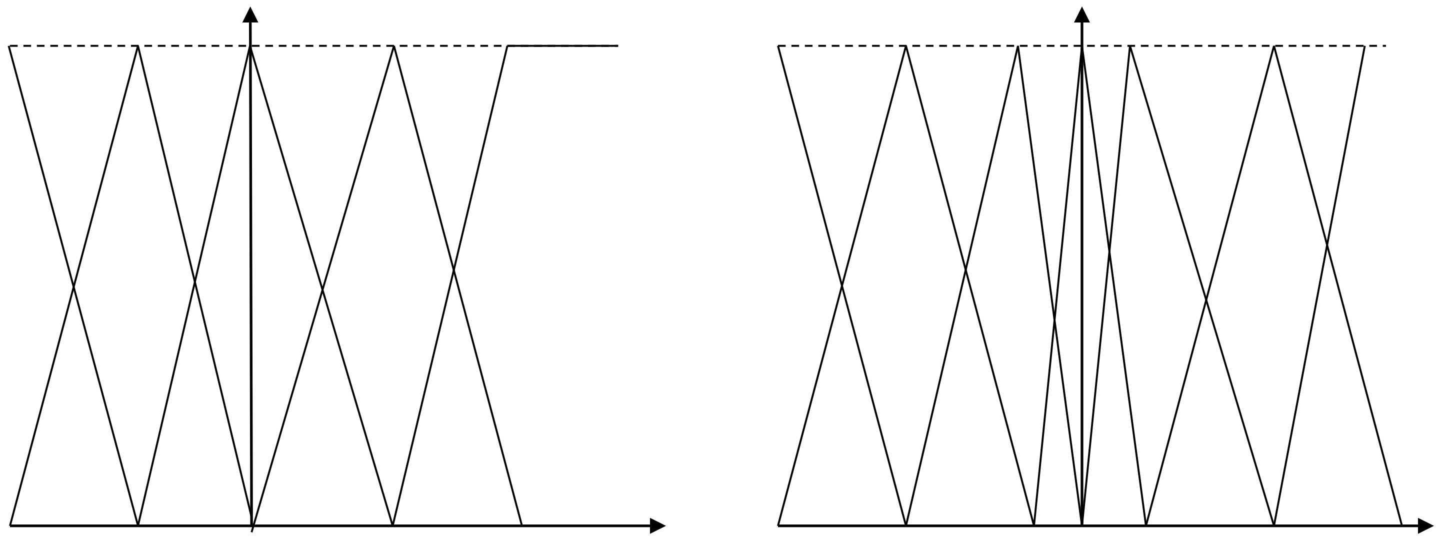
Úroveň pretnutia - cpl (Cross-Point Level)

- cpl má byť > 0 (kvôli zamedzeniu nedefinovaných častí na univerze), väčšinou <0,5; 0,7>.
- Pre lineárne systémy do 3. rádu, symetrické FP a cpl=0,5 bude odozva s malým prekmitom, rýchlejším prechodom a malým podkmitom. Tvar FP nemá vplyv, iba lichobežníkové FP spomalia prechodový dej.



- Interval hodnôt (nosič), na ktorom sú definované FP, musí byť široký aspoň 4.σ (σ - variancia), ak sa predpokladá Gaußovský priebeh vzniku šumu (aby hodnota zostala na definičnom obore FP).
- Počet úrovní kvantovania FP (počet uvažovaných stupňov príslušnosti) vplýva na prekmity, tlmenie a vznik oscilácií.
- Veľké prekrývanie FP spôsobuje zložitý tvar aproximačnej plochy, kde navzájom vplývajú aj vzdialené body. Plocha sa „vyhladzuje“. Zmena dôsledkov v pravidlách nie je triviálna.
- Ak sa navzájom prekrývajú práve 2 konvexné a normálne FP, kde platí fuzzy partícia, potom aproximácia závisí iba na najbližších charakteristických bodoch.
- Čím je vyšší počet FP, tým je zložitejší výstup.

- Častokrát je voľba ostrých dôsledkov v podobe konštánt dostatočná.
- Výhodné použitie <u>lineárneho</u> rozdelenia FP pre výstup.
- Výhodné použitie <u>logaritmického</u> rozdelenia FP pre vstup.

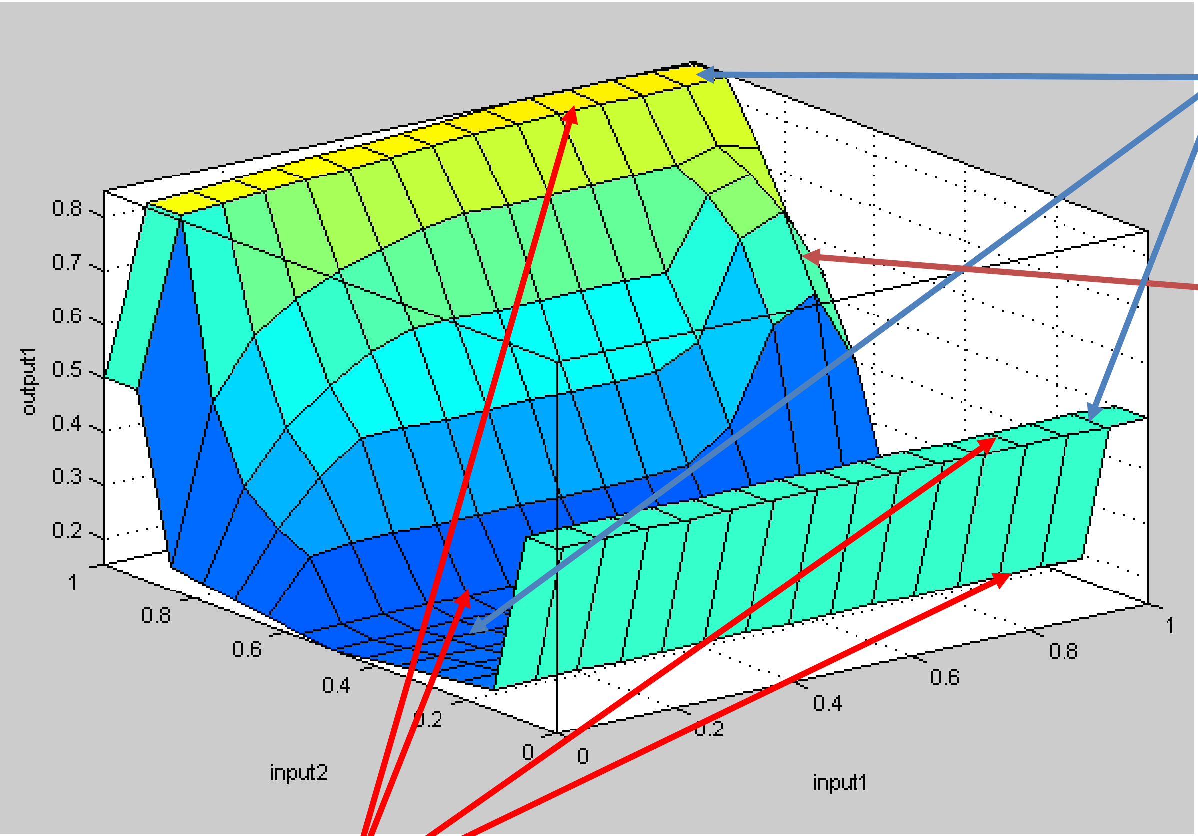


Lineárne rozdelenie   Logaritmické rozdelenie

Fuzzy partícia: $\forall x \in X \mid \sum_{i=1}^{n} \mu_i(x) = 1$

Analýza regulačnej plochy

Pozn.: Regulačná plocha = funkcia FR.



Saturácia akčného zásahu

Možnosť rozkmitu (veľké nelinearity)

Riziko narušenia robustnosti

Adaptívne FR

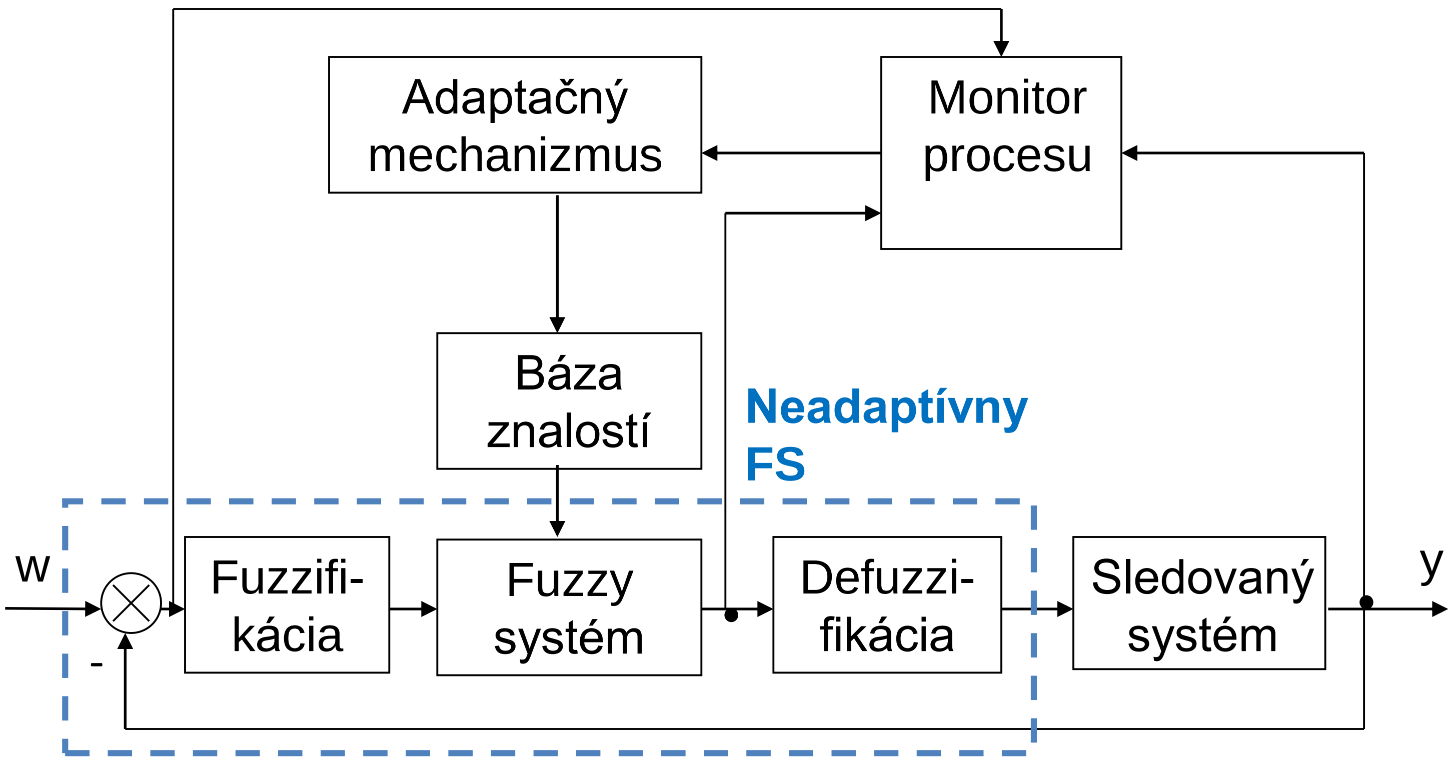
Priama (čistá) fuzzy adaptácia:

- Inkrementálne modely (Jacobian)
- Gradientové metódy
- Štatistické metódy
- Interpolačné prístupy
- Symbolické výpočty
- Genetické algoritmy (väčšinou)

Nepriama fuzzy adaptácia:

- Neurónové siete (neuro-fuzzy: RBF, Anfis, Falcon)
- Genetické algoritmy (čiastočne)

Priama fuzzy adaptácia



Pozn.:
Adaptívny = schopnosť prispôsobovať sa, t.j. samoladenie & samoučenie.

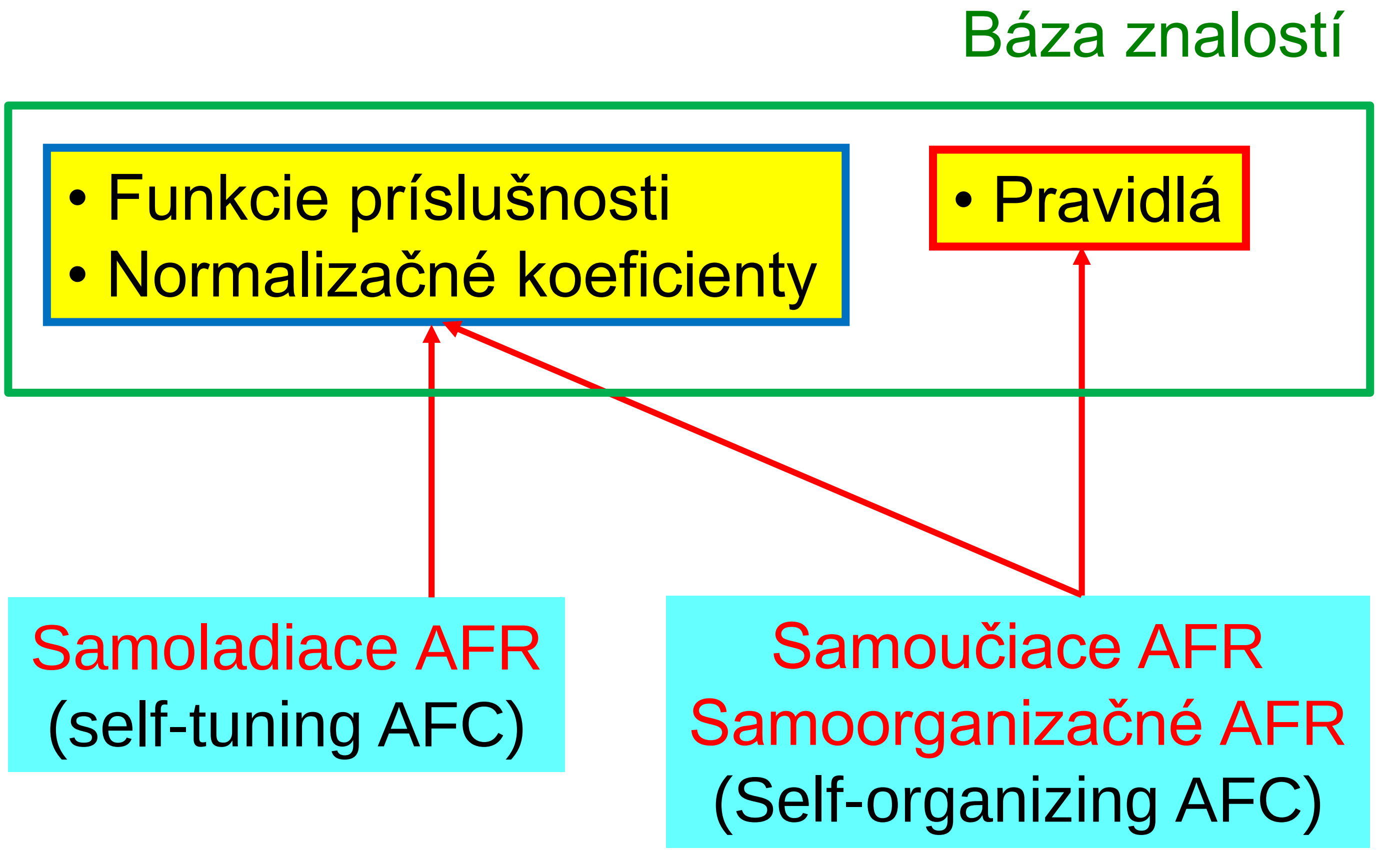
Požiadavky na činnosť:

1. Schopnosť aspoň čiastočne získavať znalosti.
2. Prispôsobivosť na meniace sa podmienky procesu.
3. Perspektívne plne automatizovaný proces učenia sa bázy znalostí (BZ).

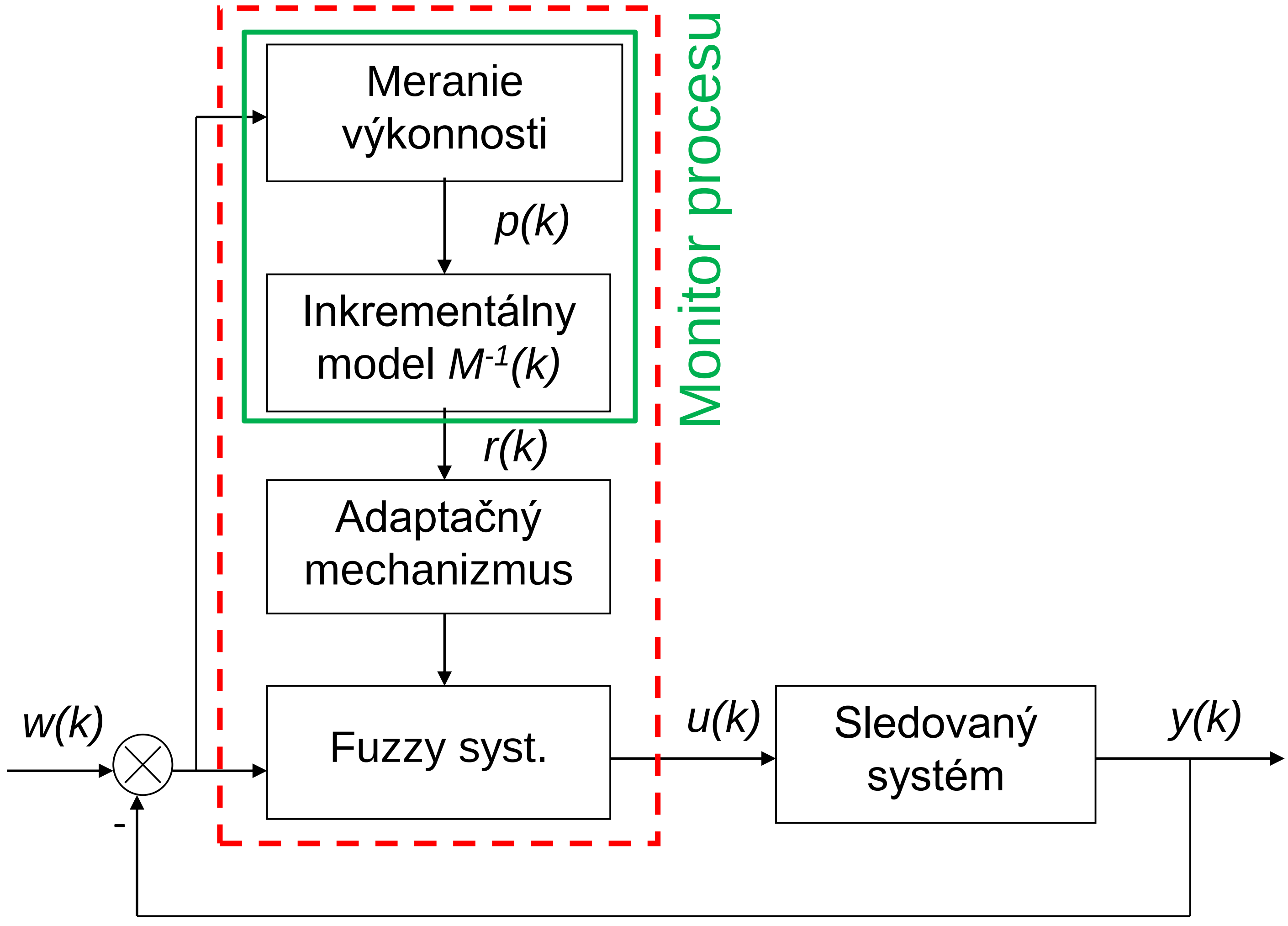
Typy AFR podľa monitora procesu:

1. Výkonnostné AFR (performance AFC) - na základe miery splnenia kritéria kvality adaptuje BZ.
2. Parametrické AFR (parameter AFC) - adaptuje BZ na základe identifikácie modelu sústavy.

Typy AFR podľa modifikovaných častí BZ:



Procyk-Mamdaniho samoorganizačný fuzzy regulátor (PMSFR) (*PM-AFR*)



Sústava:

y=M(u)

Regulátor:

u=g(y)

$$g(y) \approx M^{-1}(y)$$

p = M=T.J . r

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ & & \dots & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

T - perióda vzorkovania

J - Jacobian

(determinant matice dynamiky)

p - miera výkonnosti

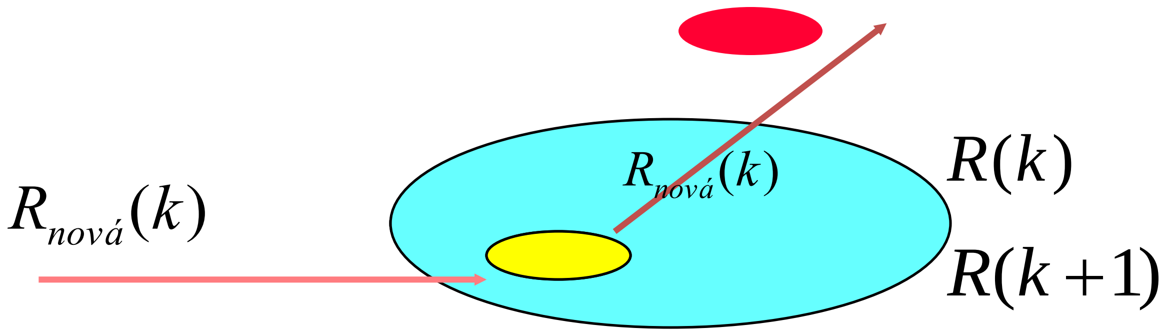
r - opravná (reinforcement) hodnota

$$\overline{f} = \frac{d\overline{X}(t)}{dt} = \boxed{\overline{F}(t)}.\overline{X}(t) + \overline{B}(t).u(t)$$

$$J(t) = \left| F(t) \right|$$

Adaptačné pravidlo

$$R(k+1) = (R(k) \cap \overline{R_{zlá}}(k)) \cup R_{nová}(k)$$



$$R_{zlá}(k) = fuzz(x_1^*(k))\, x \ldots x\, fuzz(x_n^*(k))\, x\, fuzz(u^*(k))$$

$$R_{nová}(k) = fuzz(x_1^*(k))\, x \ldots x\, fuzz(x_n^*(k))\, x\, fuzz(u^*(k) + r(k))$$

Gradientové prístupy

Cieľ:

Minimalizovať chybu (regulačnú odchýlku)

$$E = \frac{1}{2}(w - y)^2$$

w – žiadaná (očakávaná) hodnota

y – skutočný výstup

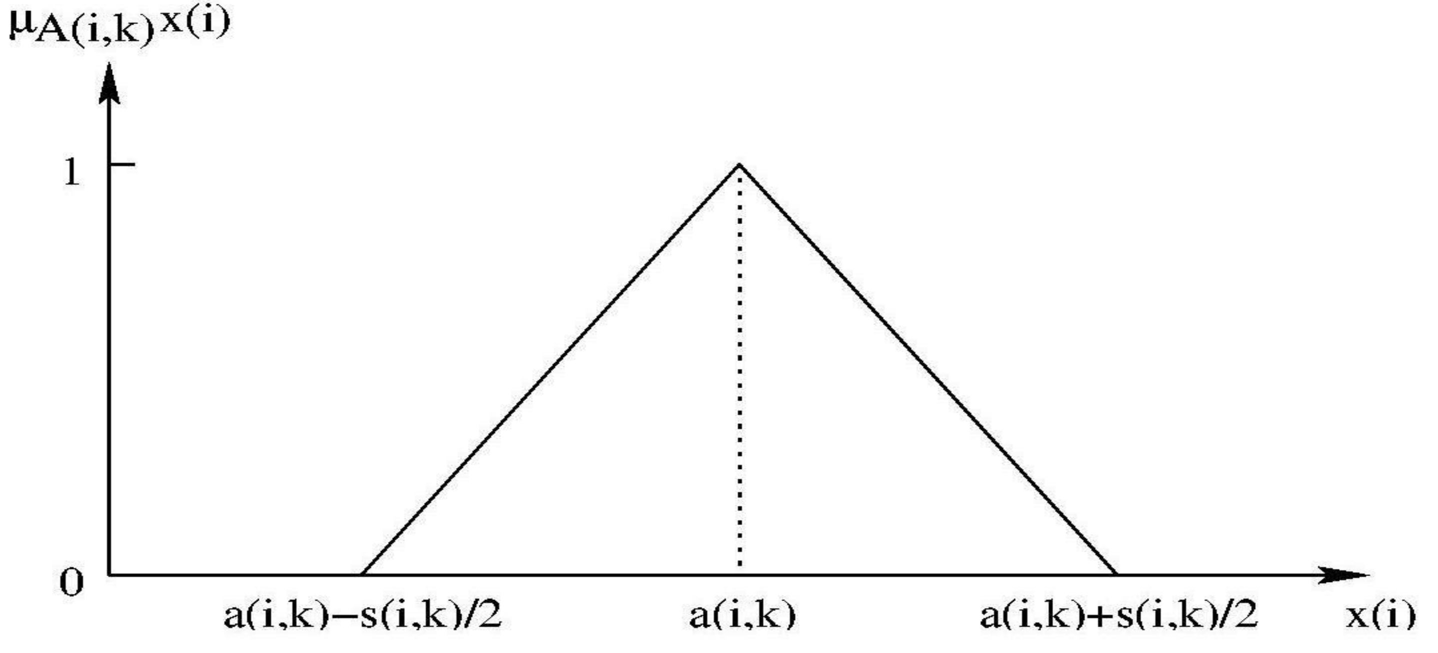
$$\left(-\frac{\partial E}{\partial p_1}, -\frac{\partial E}{\partial p_2}, \ldots, -\frac{\partial E}{\partial p_n}\right)$$

p_i – parameter bázy znalostí (*napr. vrchol, šírka nosiča FP*)

$$\boldsymbol{p_i(k+1) = p_i(k) + \gamma \frac{\partial E}{\partial p_i}}$$

γ – parameter učenia

(k:) Ak x_1 je LX_1^k & … & x_n je LX_n^k Potom $u_k^* = f_k(x^*_1, \ldots, x^*_n)$

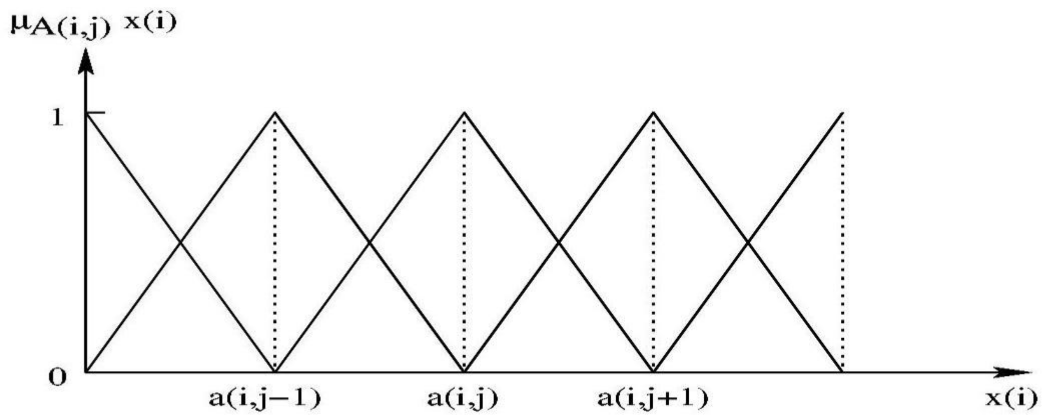


n = 2.pv.pp + pp
pv – počet vstupov
pp – počet pravidiel

$$\Delta a_{i,j} = 2.(w-y).\mathrm{sgn}(x_i - a_{i,j}).$$
$$.\frac{\left(\sum_{p=1}^{N_{A_{i,j}}} \alpha_p.b_p - y.\sum_{p=1}^{N_{A_{i,j}}} \alpha_p\right)}{\sum_{p=1}^{N_r} \alpha_p.s_{i,j}.\mu_{A_{i,j}}(x_i)}$$

$$\Delta s_{i,j} = (w-y).(1-\mu_{A_{i,p}}(x_i)).$$
$$.\frac{\left(\sum_{p=1}^{N_{A_{i,j}}} \alpha_p.b_p - y.\sum_{p=1}^{N_{A_{i,j}}} \alpha_p\right)}{\sum_{p=1}^{N_r} \alpha_p.s_{i,j}.\mu_{A_{i,j}}(x_i)}$$

$$\Delta b_j = \frac{\sum_{p=1}^{N_{b_j}} \alpha_p.(w-y)}{\sum_{p=1}^{N_r} \alpha_p}$$



$$\Delta a_{i,j} = \begin{cases} \frac{y-w}{a_{i,j}-a_{i,j-1}} \cdot \left[\frac{\mu_{A_{i,j}}(x_i)}{\mu_{A_{i,j-1}}(x_i)} \cdot \sum_{p=1}^{N_{A_{i,j-1}}} \alpha_p.(b_p - y) - \sum_{p=1}^{N_{A_{i,j}}} \alpha_p.(b_p - y) \right]; \\ \qquad \text{if } a_{i,j-1} < x_i < a_{i,j} \\ \frac{y-w}{a_{i,j}-a_{i,j+1}} \cdot \left[\frac{\mu_{A_{i,j}}(x_i)}{\mu_{A_{i,j+1}}(x_i)} \cdot \sum_{p=1}^{N_{A_{i,j+1}}} \alpha_p.(b_p - y) - \sum_{p=1}^{N_{A_{i,j}}} \alpha_p.(b_p - y) \right]; \\ \qquad \text{if } a_{i,j} < x_i < a_{i,j+1} \\ 0; \qquad \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\Delta b_r = \alpha_r.(y - w)$$

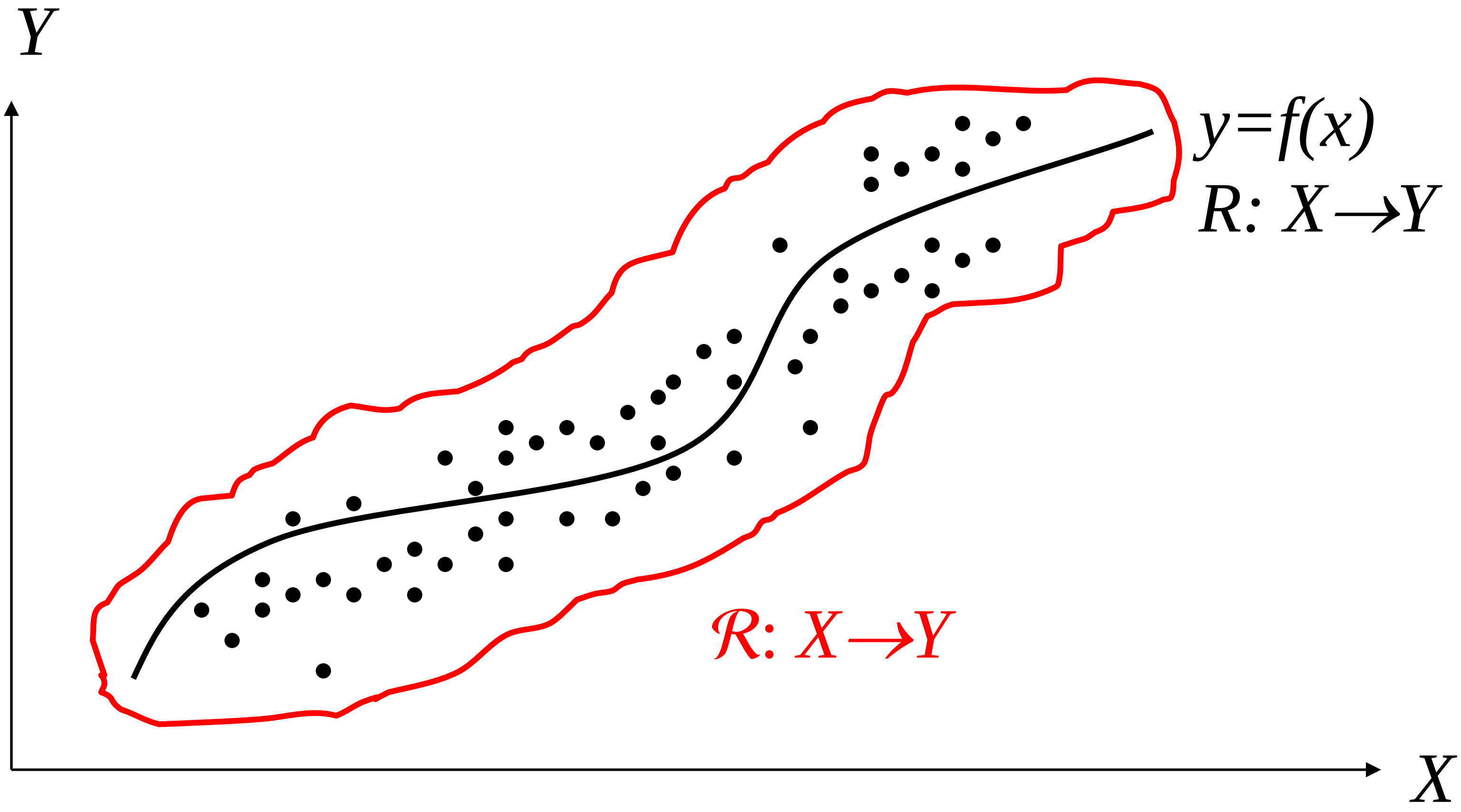
Fuzzy systémy

Fuzzy relácie

&

Dokončenie PM-AFR

Fuzzy relácie



$$\Re = \int_{XxY} \mu_{\Re}(x,y)/(x,y) \ \text{ resp. } \ \Re = \sum_{XxY} \mu_{\Re}(x,y)/(x,y)$$

Príklady fuzzy relácií

$\mathcal{S}$ = „x približne rovné y"

$\mathcal{S} \subseteq X \times Y$

	1	2	3	4
1	1	.8	.3	0
2	.8	1	.8	.3
3	.3	.8	1	.8

X

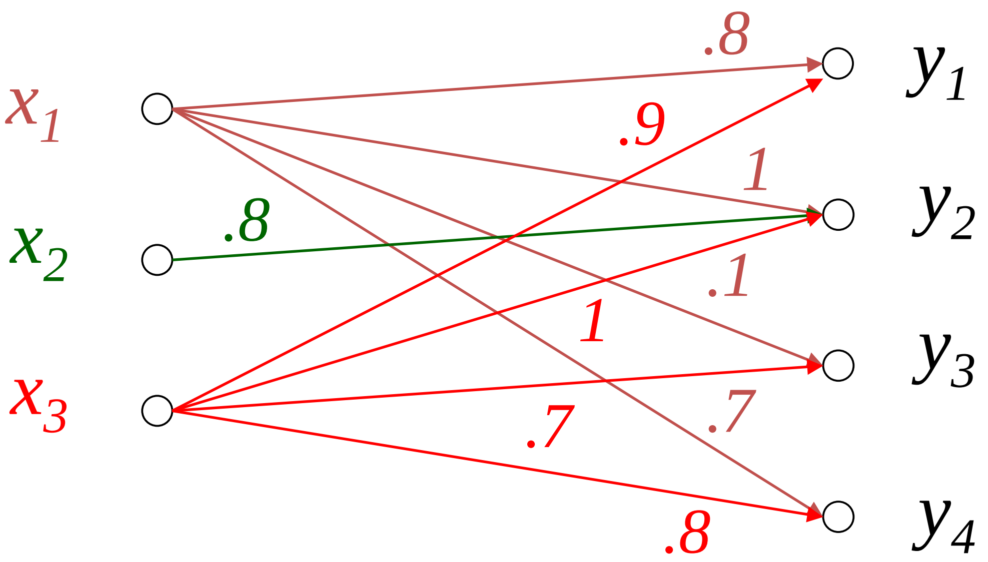
Y

$\mathcal{R}$ = „x značne väčšie než y"

$\mathcal{R} \subseteq X \times Y$

	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	.8	1	.1	.7
x_2	0	.8	0	0
x_3	.9	1	.7	.8

Sagitálny diagram



$\mathcal{R} =$

	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	.8	1	.1	.7
x_2	0	.8	0	0
x_3	.9	1	.7	.8

Prepis produkčného pravidla do fuzzy relácie

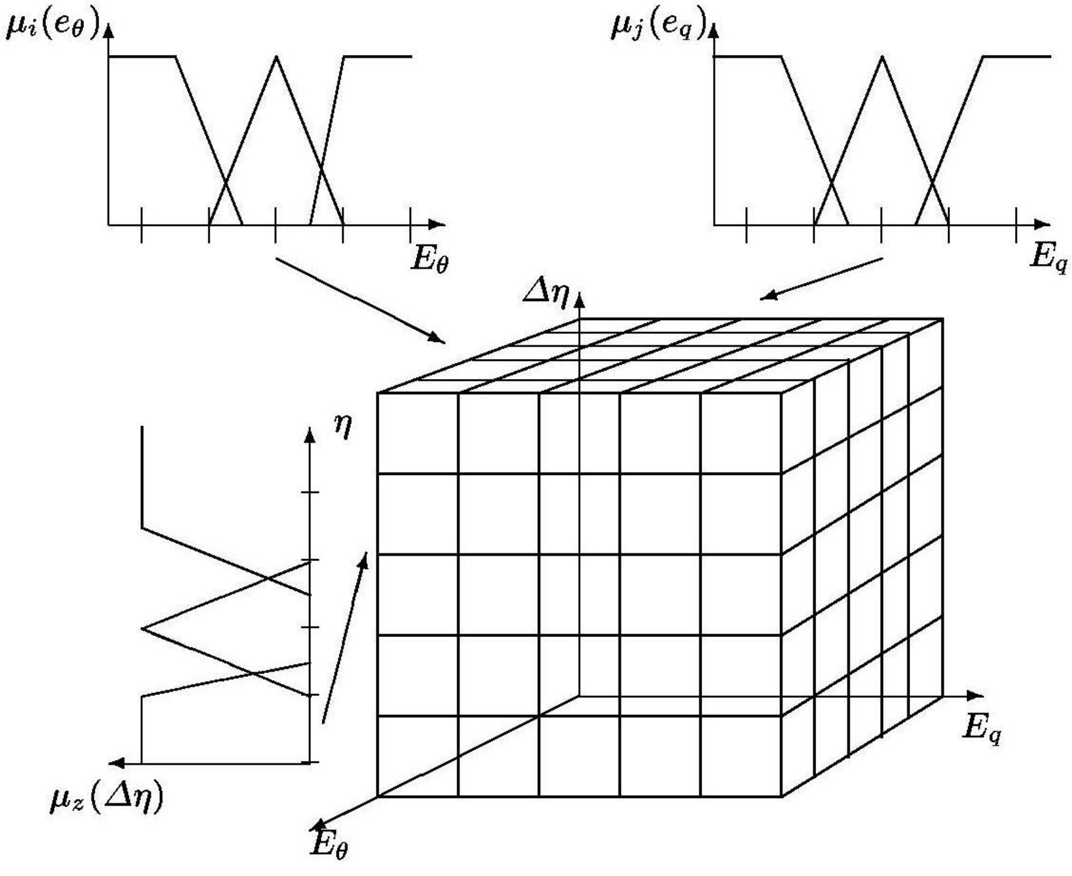
$(k{:})$ Ak x_1 je LX_1^k & … & x_n je LX_n^k Potom u je LU^k

$$\Re_k = \int_{X_1 x \ldots x X_n x U} T_I(T_A(\mu_{LX_1^k}(x_1), \ldots, \mu_{LX_n^k}(x_n)), \mu_{LU^k}(u)) / (x_1, \ldots, x_n, u)$$

Ak je m pravidiel, t.j. $\mathcal{R}_k$ ($k=1, \ldots, m$), potom celková báza znalostí je v tvare:

$\cup$ - akumulácia $$\Re = \bigcup_{k=1}^{m} \Re_k = S_A(\Re_1, \ldots, \Re_m)$$

Príklad: Ak e_θ je LE_θ & e_q je LE_q Potom u je $L\Delta_\eta$



$$\Re = \sum_{E_\theta \times E_q \times \Delta\eta} \mu_\Re(e_\theta, e_q, \Delta\eta)/(e_\theta, e_q, \Delta\eta)$$

Operácie s fuzzy reláciami

FM je špeciálny prípad unárnej fuzzy relácie.

⬇

Čo platí pre FM, to platí aj pre fuzzy relácie.

- Prienik (t-normy)
- Zjednotenie (t-conormy)
- Doplnok
- Projekcia
- Cylindrické rozšírenie
- Kompozícia

$$\mathcal{R} \cap \mathcal{S} = \begin{array}{c c} Y & \\ \begin{bmatrix} .8 & .8 & .1 & 0 \\ 0 & .8 & 0 & 0 \\ .3 & .8 & .7 & .8 \end{bmatrix} & X \end{array} \qquad (\cap \text{ - } min)$$

$$\mathcal{R} \cup \mathcal{S} = \begin{array}{c c} Y & \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & .3 & .7 \\ .8 & 1 & .8 & .3 \\ .9 & 1 & 1 & .8 \end{bmatrix} & X \end{array} \qquad (\cup \text{ - } max)$$

Projekcia

$$\Re \subseteq X\, x Y = \begin{array}{c|cccc} & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ \hline x_1 & .7 & .5 & .1 & .6 \\ x_2 & 0 & .7 & .8 & 0 \\ x_3 & .9 & .6 & 1 & .8 \end{array}$$

A = Proj $\mathcal{R}$ na X

$$\begin{array}{c|c} x_1 & .7 \\ x_2 & .8 \\ x_3 & 1 \end{array}$$

$$B = \text{Proj } \mathcal{R} \text{ na } Y = \begin{array}{cccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ \hline .9 & .7 & 1 & .8 \end{array}$$

Všeobecne:

$$\Re \subseteq \prod_{i=1}^{n} X_i$$

$$(i_1, \ldots, i_k) \subset (1, \ldots, n)$$ - zvyškové súradnice

$$(j_1, \ldots, j_l) \subset (1, \ldots, n)$$ - odstraňované súradnice

$$(i_1, \ldots, i_k) \cap (j_1, \ldots, j_l) = \{\emptyset\}$$

$$(i_1, \ldots, i_k) \cup (j_1, \ldots, j_l) = (1, \ldots, n)$$

$$V = \prod_{m=i_1}^{i_k} X_m$$

$$\Im = \mathrm{Proj}\,\Re\,\mathrm{na}\,V = \int_V \sup_{X_{j1}, \ldots, X_{jl}} \mu_{\Re}(x_1, \ldots, x_n)/(x_{i1}, \ldots, x_{ik})$$

Cylindrické rozšírenie
(*Cylindrical Extension*)

$$A = \begin{array}{c|c|} & \\ x_1 & 1 \\ x_2 & .8 \\ x_3 & 1 \end{array} \quad \Rightarrow \quad ce(A) = \begin{array}{c|c|c|c|c|} & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ x_1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_2 & .8 & .8 & .8 & .8 \\ x_3 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

Všeobecne:

$$ce(\Im) = \int_X \mu_{\Im}(x_{i1}, \ldots, x_{ik}) / (x_1, \ldots, x_n)$$

$$\mathrm{Proj}\,\mathrm{ce}(\mathfrak{I})\ \mathrm{na}\ V = \mathfrak{I}$$

$$\mathrm{ce}(\mathrm{Proj}\,\mathfrak{R}\ \mathrm{na}\ V) \neq \mathfrak{R}$$

Pozor:

Hrany matice relácie môžu byť definované v ľubovoľnom poradí, to však v ďalšom musí byť dodržané !!!

Kompozícia

$\Re : A \rightarrow B \subseteq X\,x\,Y$ - známe

A - známe *($A \subseteq X$)*

B - neznáme *($B \subseteq Y$)*

$$B = A \circ \Re = \mathrm{Proj}(\mathrm{ce}(A) \cap \Re) \text{ na Y}$$

$\cap$ - vlastná inferencia T_I

Pre n vstupov fuzzifikovaných $X_1, \ldots, X_n$:

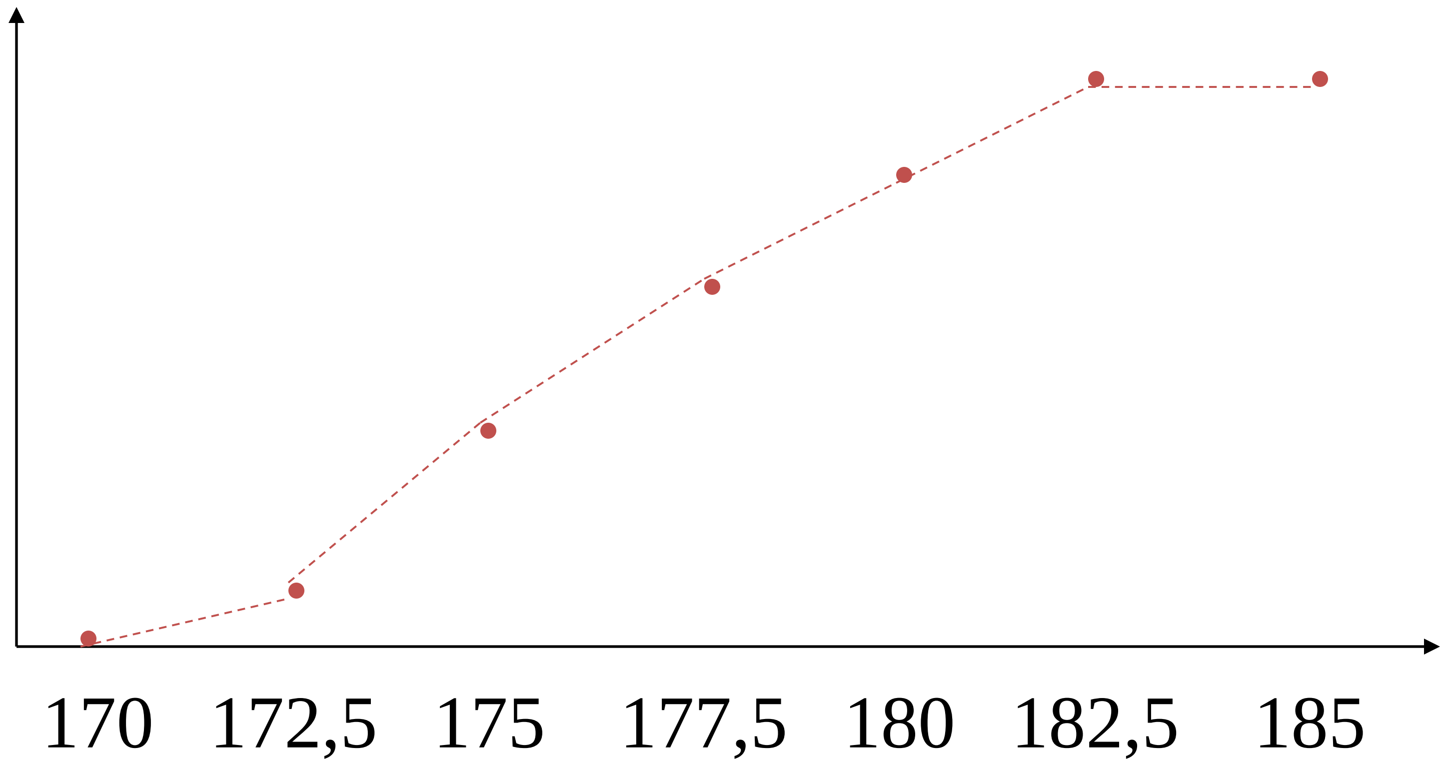
$$B = A \circ \Re = \mathrm{Proj}(T_A(\mathrm{ce}(X_1), \ldots, \mathrm{ce}(X_n)) \cap \Re) \text{ na Y}$$

$$B = A \circ \Re = \mathrm{Proj}(T_I(T_A(\mathrm{ce}(X_1), \ldots, \mathrm{ce}(X_n)), \Re)) \text{ na Y}$$

Príklad na výpočet kompozície

1. Vilma je o niečo vyššia ako Tilda.
2. Nech odhad výšky Vilmy je:

   Vilma = { 0/170 + .1/172,5 + .4/175 + .7/177,5 + + .9/180 + 1/182,5 + 1/185}



$\mathcal{R}$ = „*x niečo vyššia ako y*“

Vilma (x)							
185	0	.1	.4	.7	1	.7	.4
182,5	.1	.4	.7	1	.7	.4	.1
180	.4	.7	1	.7	.4	.1	0
177,5	.7	1	.7	.4	.1	0	0
175	1	.7	.4	.1	0	0	0
172,5	.7	.4	.1	0	0	0	0
170	.4	.1	0	0	0	0	0
	170	172,5	175	177,5	180	182,5	185

Tilda (y)

ce(Vilma)

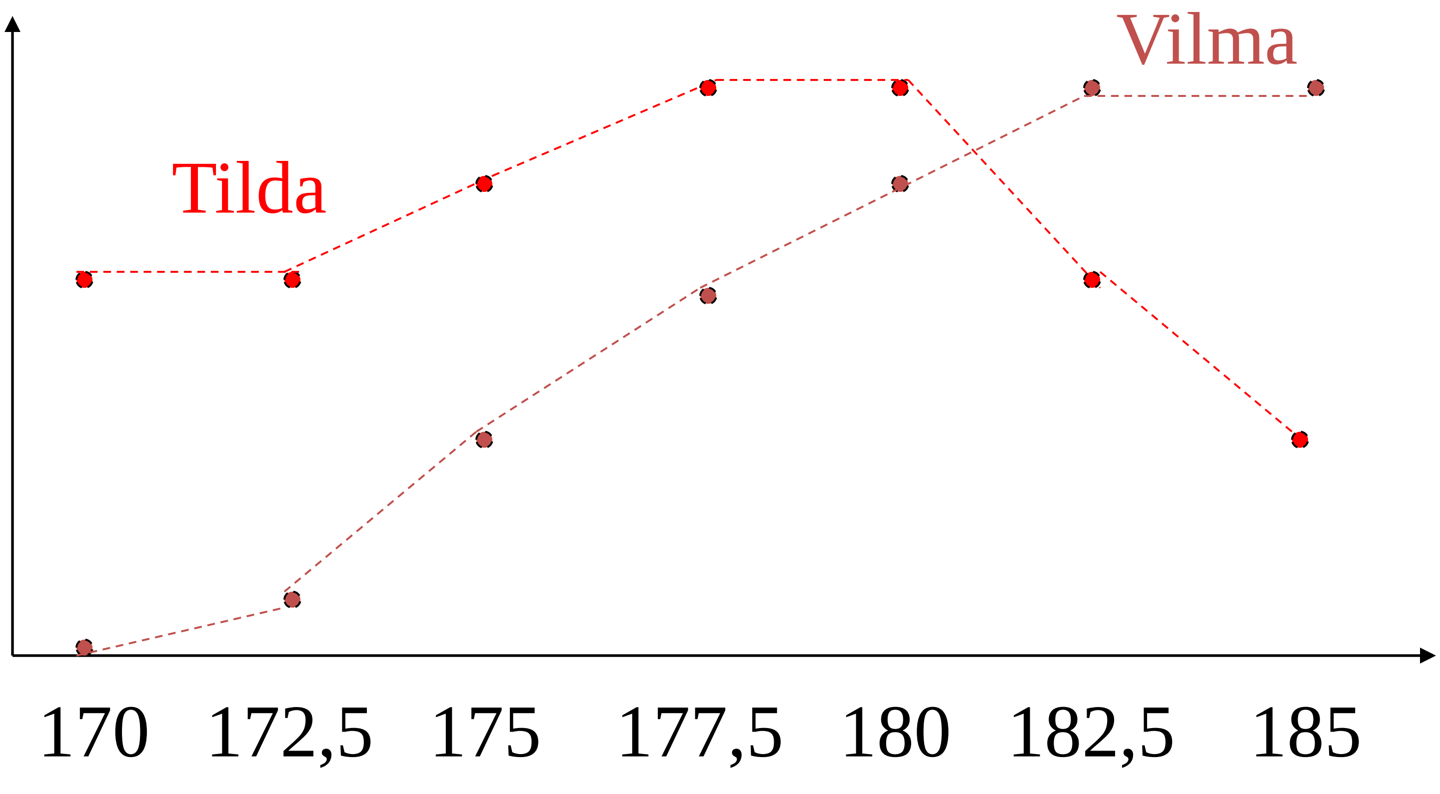
185	1	1	1	1	1	1	1
182,5	1	1	1	1	1	1	1
180	.9	.9	.9	.9	.9	.9	.9
177,5	.7	.7	.7	.7	.7	.7	.7
175	.4	.4	.4	.4	.4	.4	.4
172,5	.1	.1	.1	.1	.1	.1	.1
170	0	0	0	0	0	0	0
	170	172,5	175	177,5	180	182,5	185

T_I(ce(Vilma), R(x,y)) (T_I - *min*)

185	0	.1	.4	.7	1	.7	.4
182,5	.1	.4	.7	1	.7	.4	.1
180	.4	.7	.9	.7	.4	.1	0
177,5	.7	.7	.7	.4	.1	0	0
175	.4	.4	.4	.1	0	0	0
172,5	.1	.1	.1	0	0	0	0
170	0	0	0	0	0	0	0
	170	172,5	175	177,5	180	182,5	185

Tilda = Proj T_I(ce(Vilma), R(x,y)) na *Y*

Tilda = { .7/170 + .7/172,5 + .9/175 + 1/177,5 +
+ 1/180 + .7/182,5 + .4/185}



Formy reprezentácie znalosti vo fuzzy systémoch

1. Fuzzy produkčné pravidlá – inferencia podľa jednotlivých pravidiel (*najviac používané*)
2. Fuzzy relácie – kompozičná inferencia
3. *Fuzzy asociatívne pamäte (memories) - FAM*
4. *Fuzzy kognitívne mapy* (*asociatívne siete*)

⋮

Inferencia podľa jednotlivých pravidiel verzus kompozičná inferencia

1. Podľa jednotlivých pravidiel (*individual rule based*)
   + reprezentácia znalostí v pravidlách (user-friendly)
   + nižšia výpočtová náročnosť
   – báza znalostí rozdelená na FP a pravidlá
   – vysoký počet parametrov bázy znalostí
2. Kompozičná (*compositional based inference*)
   + jednoduchý princíp inferencie
   – výpočtovo náročná
   – strata pravidlovej reprezentácie znalostí

Adaptácia PM-AFR - dokončenie

Pravidlový prístup
(produkčné pravidlá)

Nevýhody:

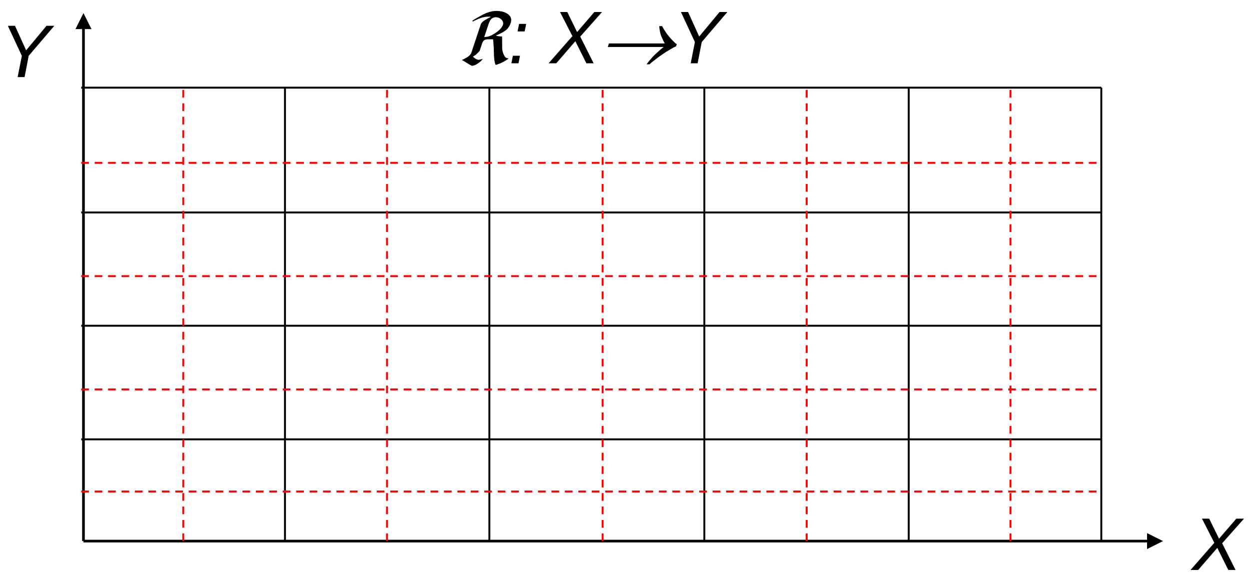
- Možnosť zmeniť naraz iba jedno pravidlo
- Ktoré pravidlo adaptovať?
- Nárast počtu pravidiel
- Potreba „zberu odpadkov“ (garbage collection)

Relačný prístup
(fuzzy relácie)

Nevýhody:

- Strata IF-THEN reprezentácie znalostí
- Vysoká výpočtová náročnosť

Nárast výpočtovej náročnosti u fuzzy relácií



Veľkosť matice závisí od veľkosti diskretizácie

[4 x 5]   = 20

[8 x 10] = 80

Riedke matice
(*sparse matrix*)

Nárast počtu pravidiel

np(k) - počet pravidiel v čase *k*

n - počet vstupov do pravidla

$R_{zlá}(k)$ - $A_1^{zlá}(k) \times \ldots \times A_n^{zlá}(k) \times B^{zlá}(k)$

$R_{nová}(k)$ - $A_1^{zlá}(k) \times \ldots \times A_n^{zlá}(k) \times B^{nová}(k)$

$$
\begin{aligned}
R(k+1) \quad = \quad & \left[\bigcup_{p=1}^{np} (A_{1,p} \cap \overline{A_1^{zlá}}) \; x \ldots x \; A_{n,p} \; x \; B_p \right] \cup \\
& \ldots \cup \left[\bigcup_{p=1}^{np} A_{1,p} \; x \ldots x \; (A_{n,p} \cap \overline{A_n^{zlá}}) \; x \; B_p \right] \cup \\
& \cup \left[\bigcup_{p=1}^{np} A_{1,p} \; x \ldots x \; A_{n,p} \; x \; (B_p \cap \overline{B^{zlá}}) \right] \cup \\
& \cup \underbrace{(A_1^{zlá} \; x \ldots x \; A_n^{zlá} \; x \; B^{nová})}_{R_{nová}}
\end{aligned}
$$

Dôsledky:

- $np(k+1)=np(k).(n+1)+1$
- Zmena tvarov FP, t.j. zmena významu lingvistických výrazov
- V každom kroku zmena **iba** 1 pravidla, t.j. dlhšia adaptácia
- Ktoré pravidlo meniť???

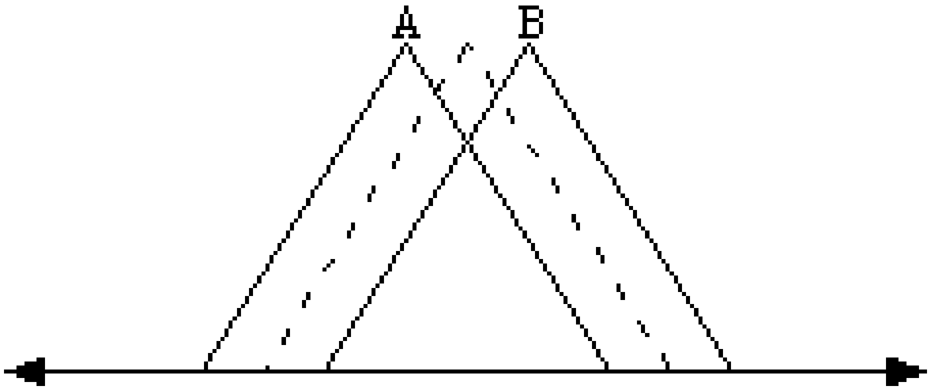
Riešenie:

Mechanizmus odpratávania odpadkov
(Garbage Collection)

Cieľ:

- Zlúčiť podobné FP (*mp* - miera podobnosti)
- Vylúčenie identických pravidiel
- Vylúčenie pravidiel s malou výpovednou schopnosťou (malé hodnoty stupňov príslušnosti FP)

$$mp = \frac{S(A \cap B)}{S(A \cup B)}$$



- $mp \in [0; 0{,}5)$ - pridať novú FP + nové pravidlo
- $mp \in [0{,}5; 0{,}8]$ - spriemerovať FP + škrtnúť identické pravidlá
- $mp \in (0{,}8; 1]$ - nová FP sa nepridá, nové pravidlo používa pôvodnú FP (ak ešte nie je)

Zjednodušená adaptácia

$$A_1^{zlá}(k) \times \ldots \times A_n^{zlá}(k) \times \mathrm{fuzz}(\mathrm{defuzz}(B^{zlá}(k)) + r(k))$$

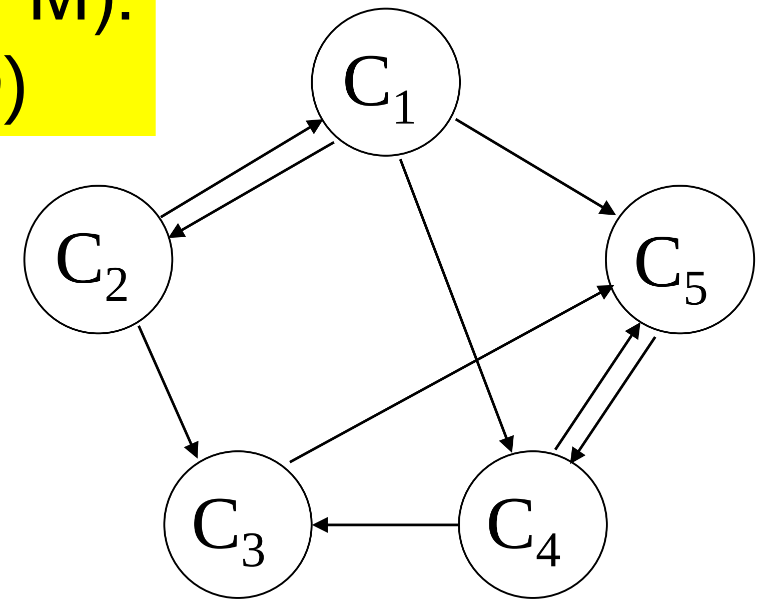
Fuzzy systémy

Fuzzy kognitívne mapy

Kognitívne mapy (KM)

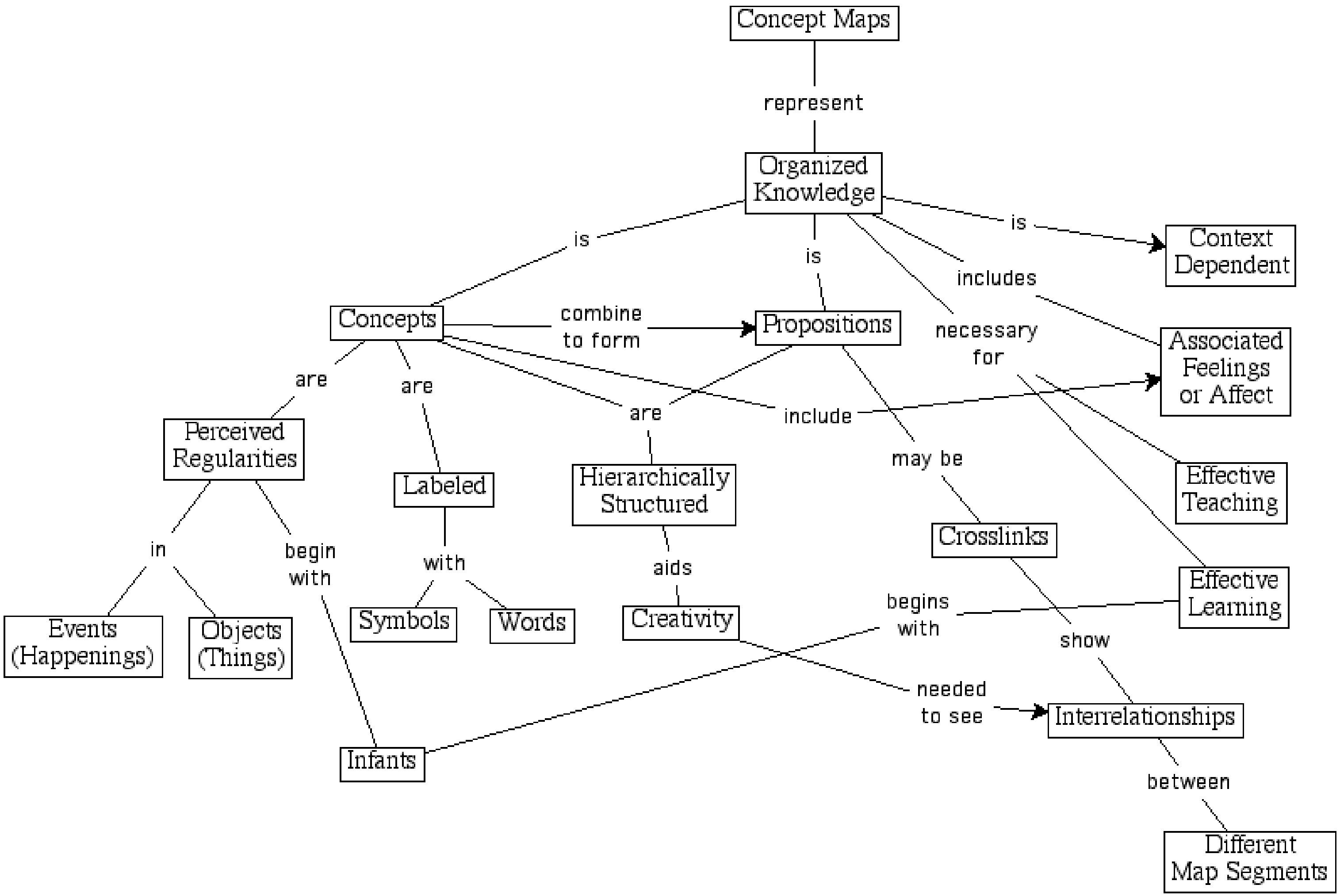
Tolman – 1948, Axelrod - 1976

Pojmová mapa (PM):
(*Conceptual Map*)



C_i – symbolické pojmy
Väzby – vzťahy (*rôznej povahy*) medzi pojmami

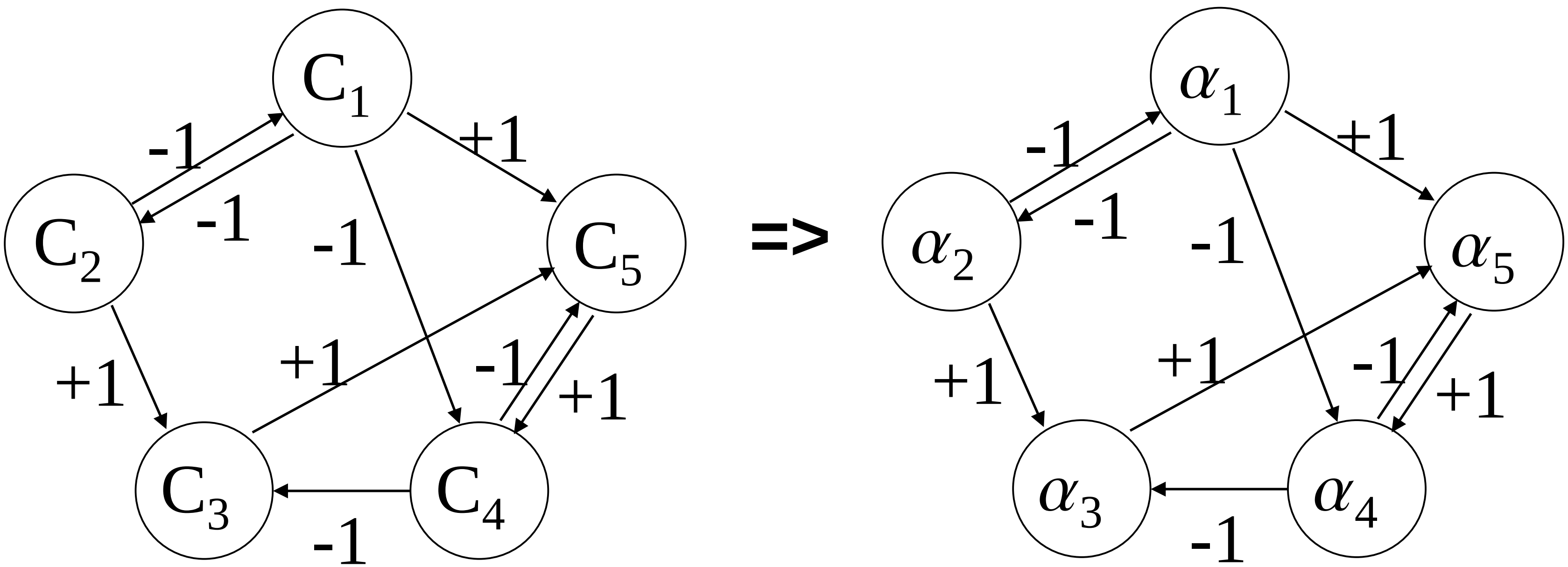
Príklad PM: *Pojmová mapa o sebe samej*



Numerická interpretácia KM

Významy:

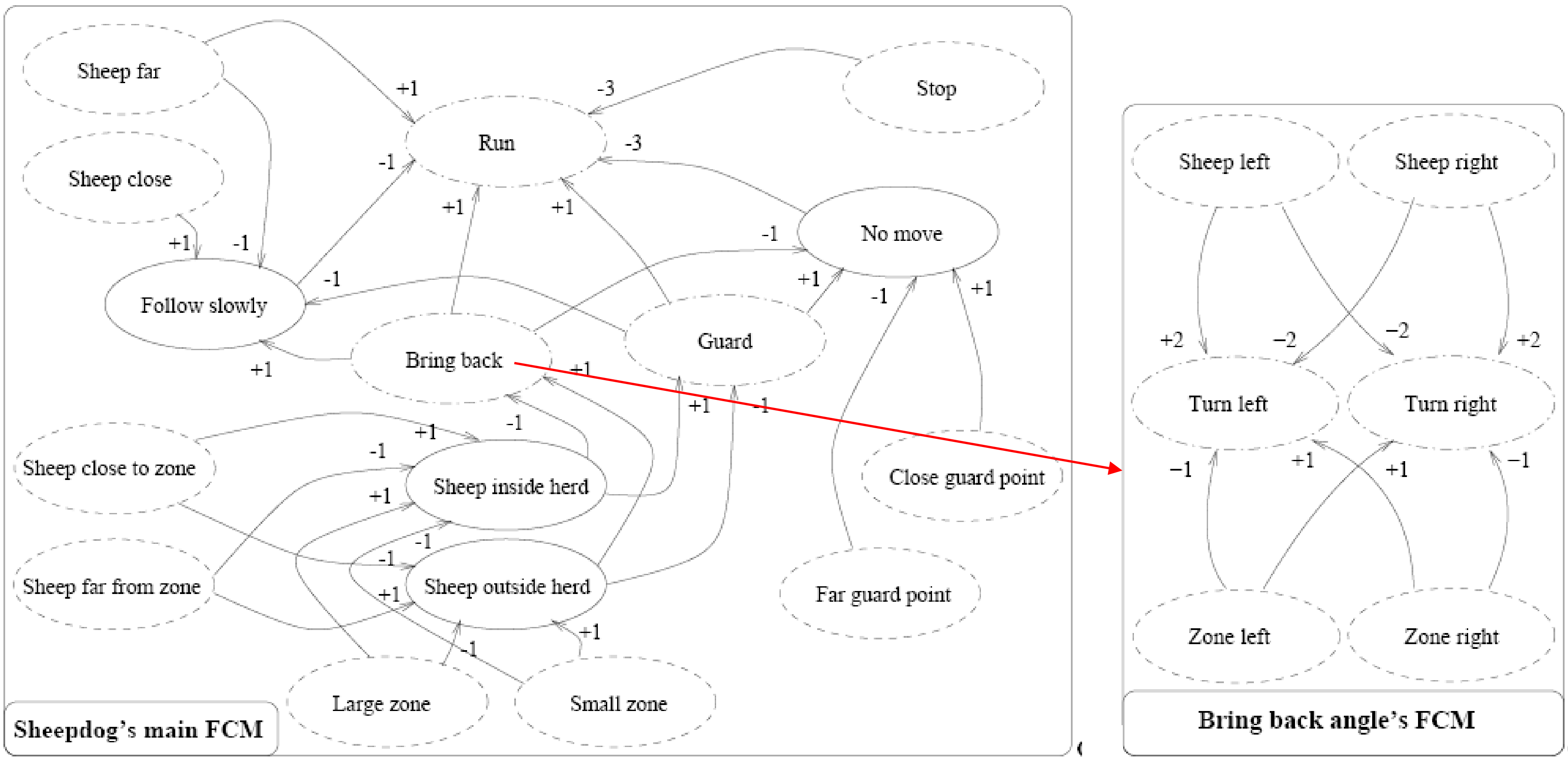
Hodnoty:
(aktivácie)



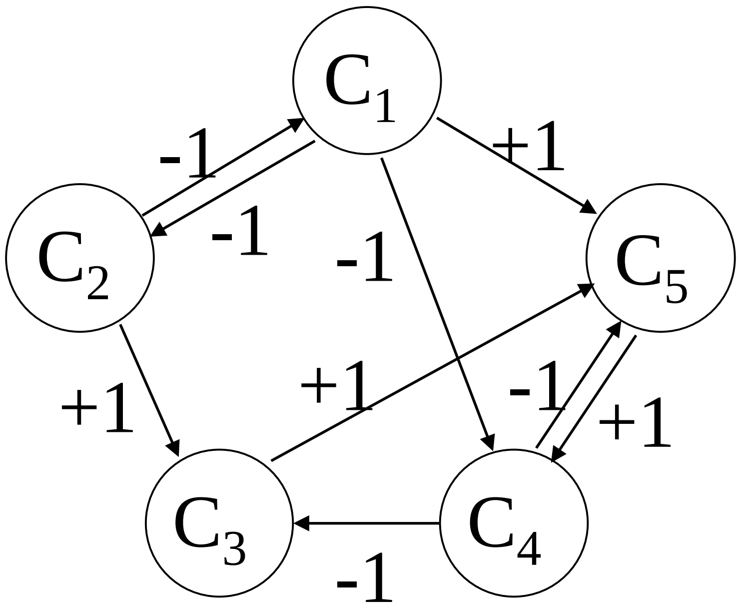
α = 1 – pojem platí

α = 0 – pojem neplatí

Príklad KM: *Kognícia ovčiarskeho psa*



KM & produkčné pravidlá



Ak C_1 Potom C_5
Ak C_5 Potom C_4
Ak C_4 Potom *nie* C_5
Ak C_4 Potom *nie* C_3
Ak C_3 Potom C_5
Ak C_1 Potom *nie* C_4
Ak C_1 Potom *nie* C_2
Ak C_2 Potom *nie* C_1
Ak C_2 Potom C_3

čas: (t) (t+1)

Pozn.: Produkčné pravidlá sú najjednoduchšie KM.

Oblasti využitia KM

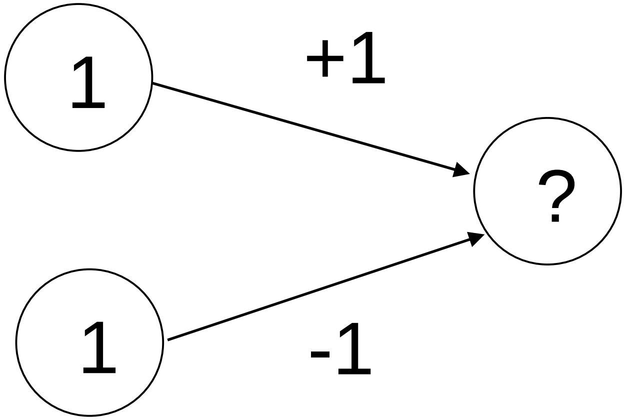
- Biológia
  - skúmanie orientácie v priestore
  - skúmanie procesov učenia sa
  - tvorba mentálnych máp (krysy, líšky)
- Sociológia
  - proces vzdelávania (*učebná látka ako KM*)
  - modelovanie spoločenských procesov (*terorizmus*)
  - prostriedky skupinového rozhodovania
- Medicína – diagnostika (*duševné poruchy*)

Výhody KM

- Zachytenie reťazených väzieb (najmä *kauzálnych, možné aj časové*) medzi pojmami (nadstavba produkčných pravidiel)
- Prehľadnosť popisu (*user-friendly*)
- Možnosť postupnej tvorby modelu reálneho sveta a zlučovať čiastkové KM
- Schopnosť previesť implicitné znalosti do symbolickej podoby
- Možnosť modelovať javy a ich závislosti v diskrétnom čase

Nevýhody KM

- Iba kvalitatívne modely (*1 – platí, 0 – neplatí, -1 - negácia*) → hrubý a nepresný popis
- Problém „nerozhodnosti“

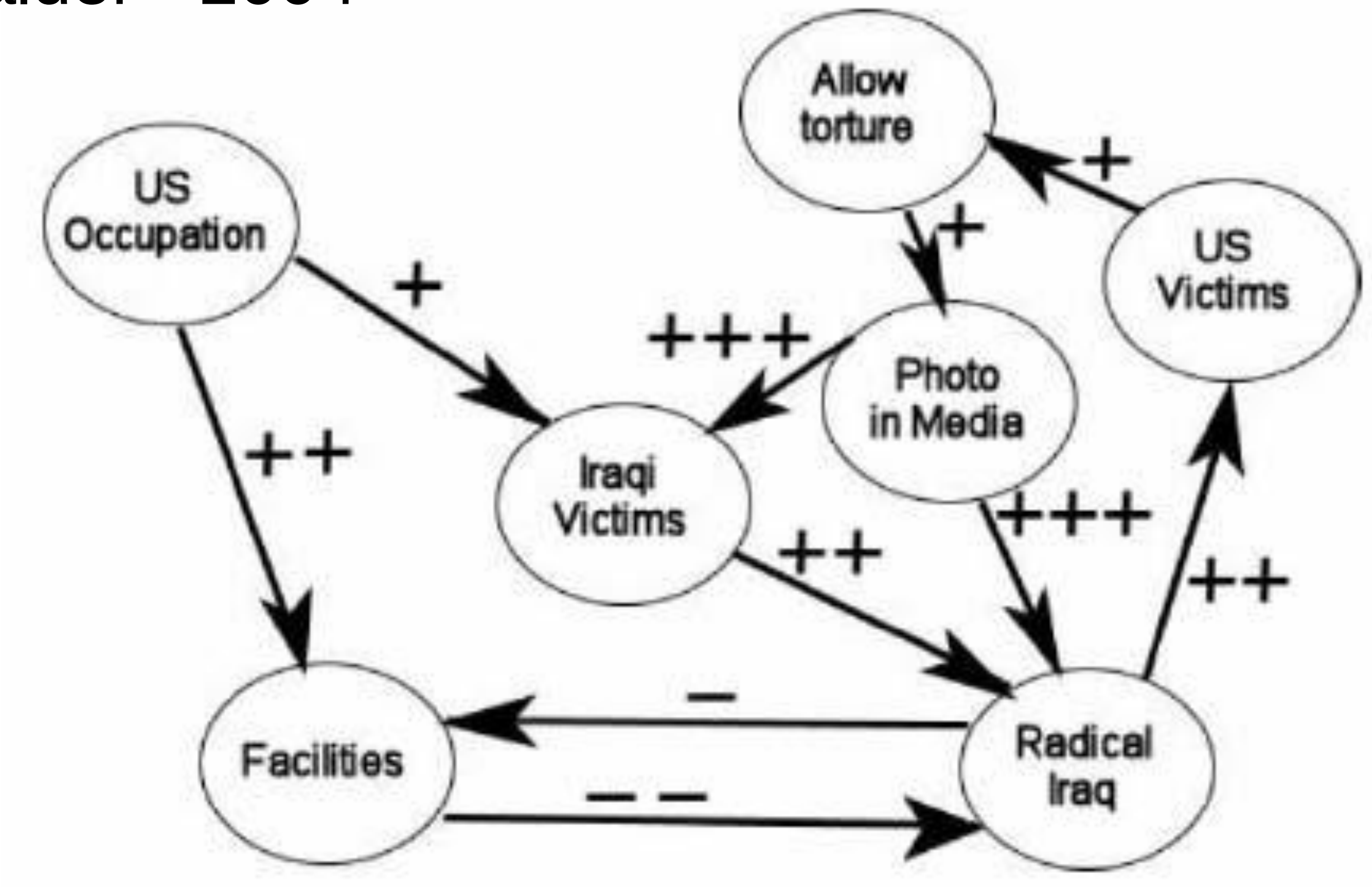


Fuzzy KM

Pôsobenie protichodných kauzálnych vplyvov

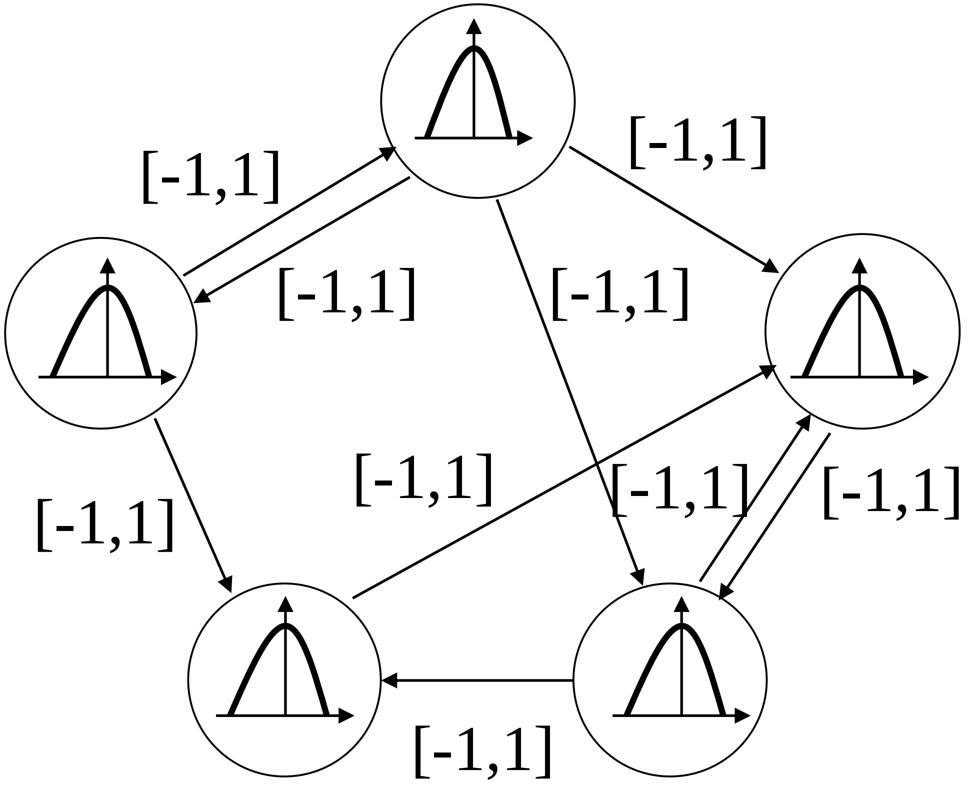
Prečo fuzzifikovať KM?
Príklad: *Vývoj politickej situácie*

Balder - 2004



Fuzzy kognitívne mapy (FKM)

Kosko - 1986



FKM = (C, E, α, f)

C – množina (symbolických) pojmov $C = \{C_1, C_2, \ldots, C_n\}$

E – množina väzieb $E = \{e_{11}, e_{12}, \ldots, e_{nn}\}$, $e_{ij} \in [-1; 1]$

E – matica väzieb, resp. susednosti

α – množina hodnôt aktivácií pojmov C_i $\alpha = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$

$\alpha \in [-1; 1]$, resp. $[0; 1]$

f – obmedzovacia funkcia $R \rightarrow [-1; 1]$, resp. $[0; 1]$

Chovanie FKM: $$\alpha(t+1) = f(\alpha(t).E)$$

resp.

$$\alpha(t+1) = f(\alpha(t) + \alpha(t).E)$$

Typy obmedzovacích funkcií:

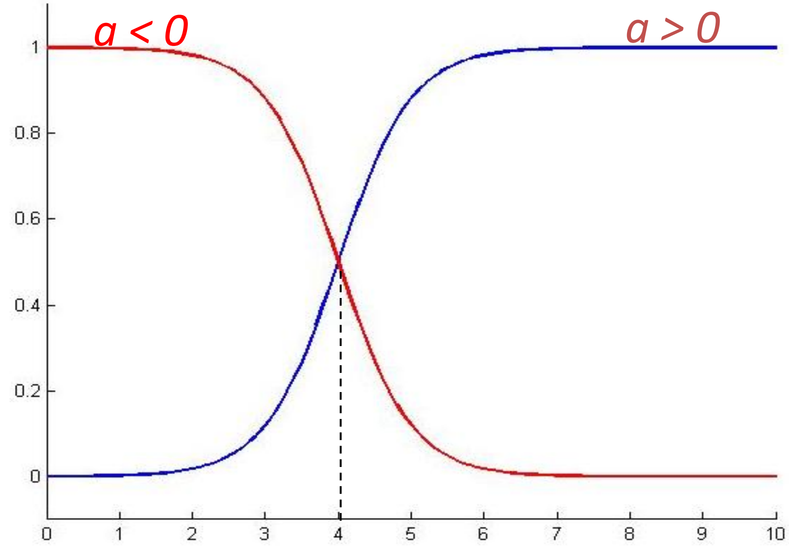
1. Prahová:

$$f(x)=\begin{cases}1, & x>T\\ 0, & x\le T\end{cases},\qquad f(x)=\begin{cases}1, & x>T\\ 0, & x=T\\ -1, & x<T\end{cases}$$

T - prah

2. Sigmoidálna:

$$f(x)=\frac{1}{1+e^{-\lambda x}}$$

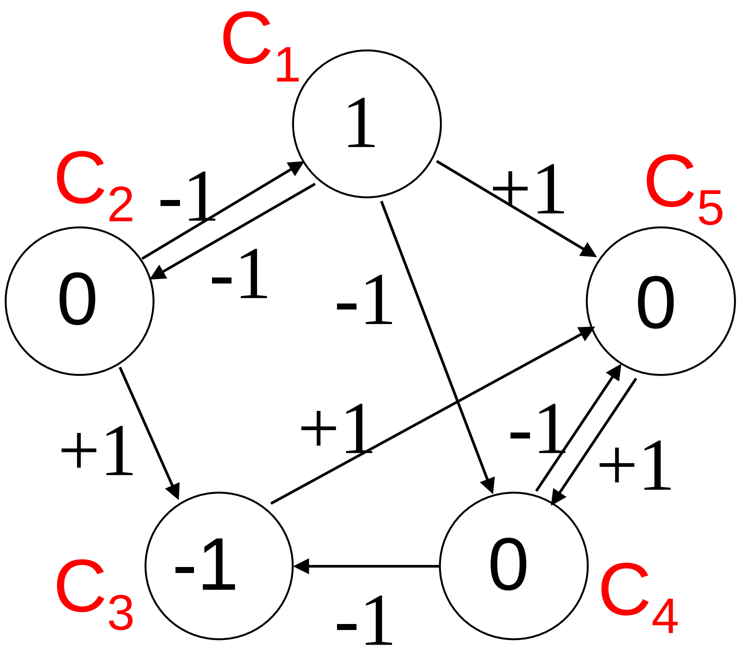


3. Lineárne lomená:

$$f\left(x\right)=\begin{cases}1, & x>k\\ \dfrac{x}{k}, & -k\le x\le k\\ -1, & x<-k\end{cases}$$

Analýza FKM

Nech v čase $t = 0$:



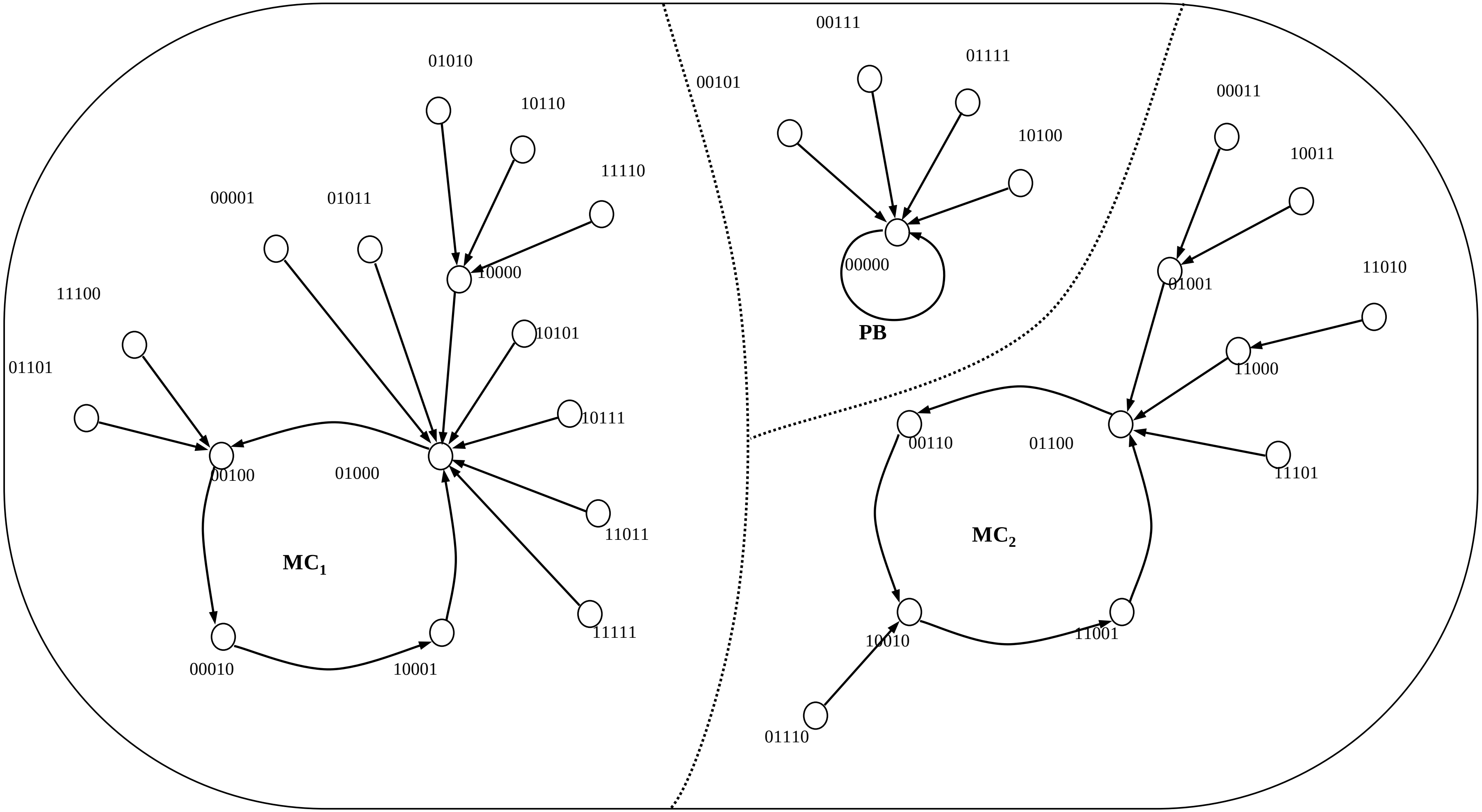
$i \to j$

$$E = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} & & j & & \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

$$\alpha(t+1) = f(\alpha(t).E)$$

α(t) = [1 0 -1 0 0]

α(t+1) = [0 -1 0 -1 0]



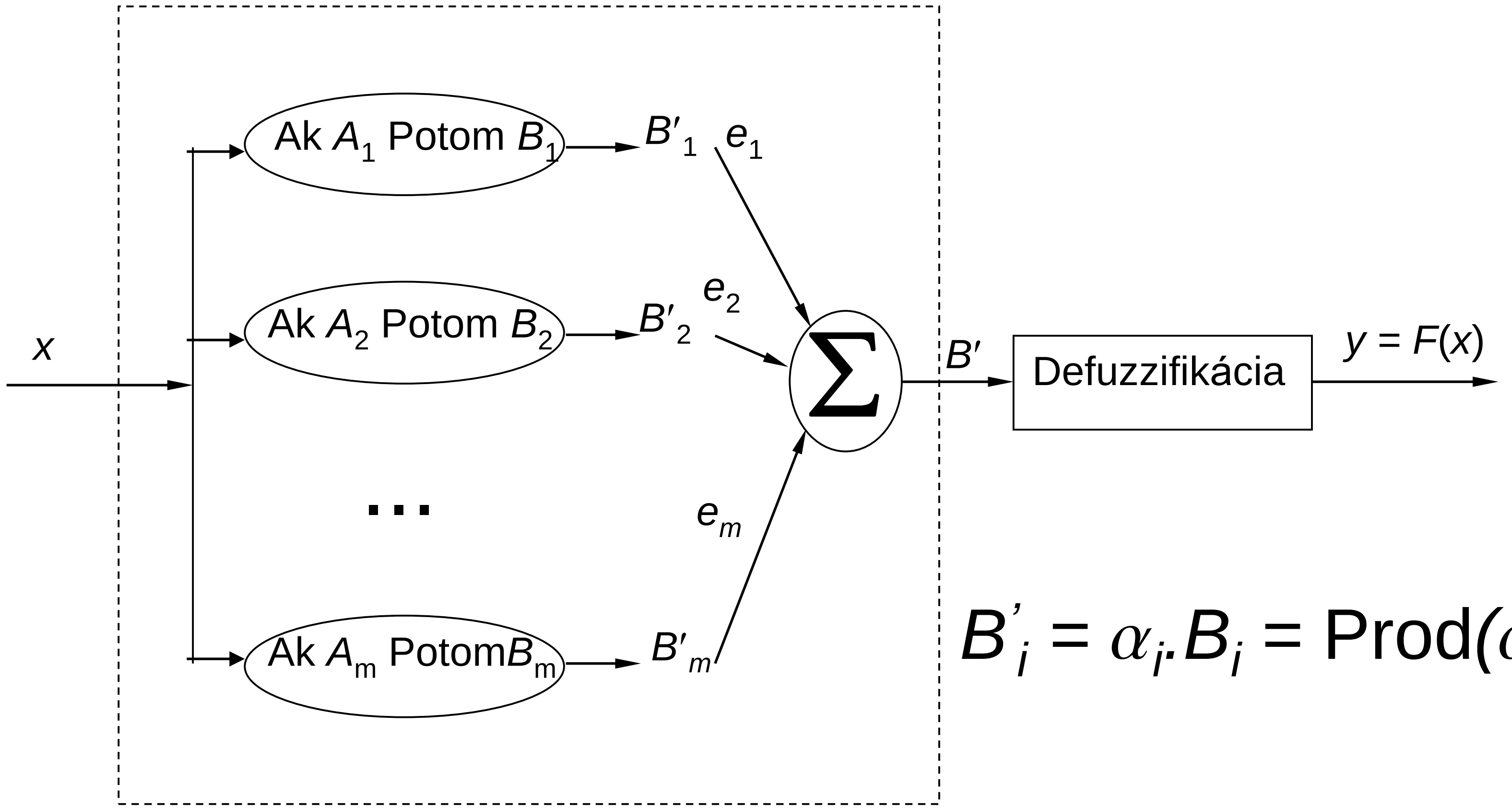
PB – pevný bod *MC – medzný cyklus*

CA – chaotický atraktor

Formy implementácie FKM

1. FKM ako hybridný systém jednoduchých fuzzy pravidiel
2. FKM ako „rekurentná NS“ (FKM ≠ NS)
3. FKM ako konečný automat

FKM ako hybridný systém fuzzy pravidiel



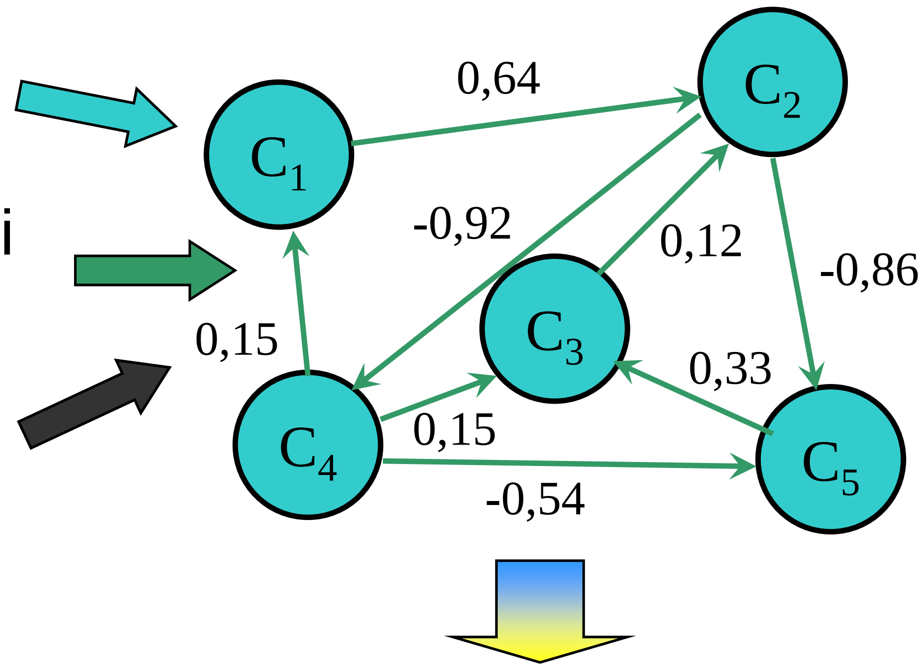
$$B'_i = \alpha_i . B_i = \mathrm{Prod}(\alpha_i,\ B_i\ )$$

α_i – aktivácia pojmu A_i, t.j. sila pravidla

e_i – hodnota väzby, t.j. váha pravidla (w_i)

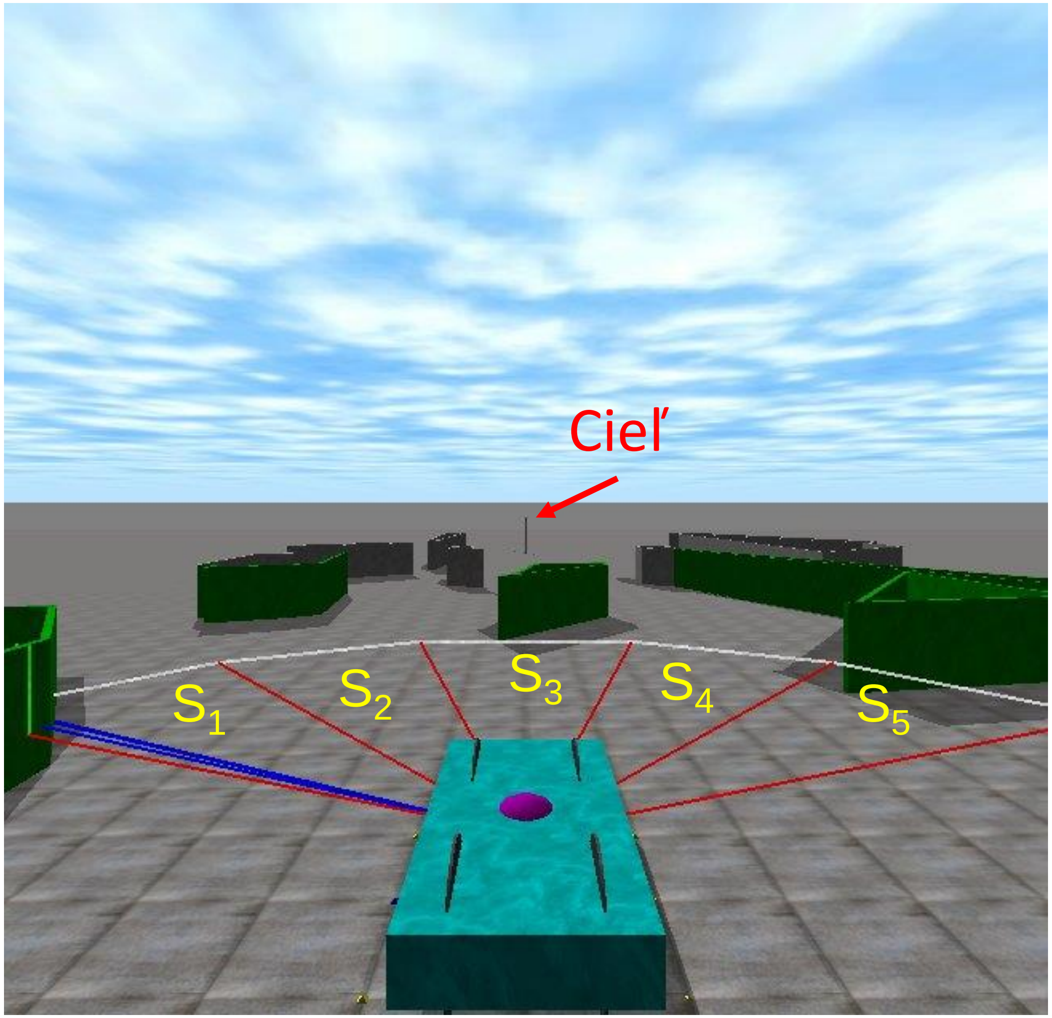
Postup manuálneho návrhu FKM

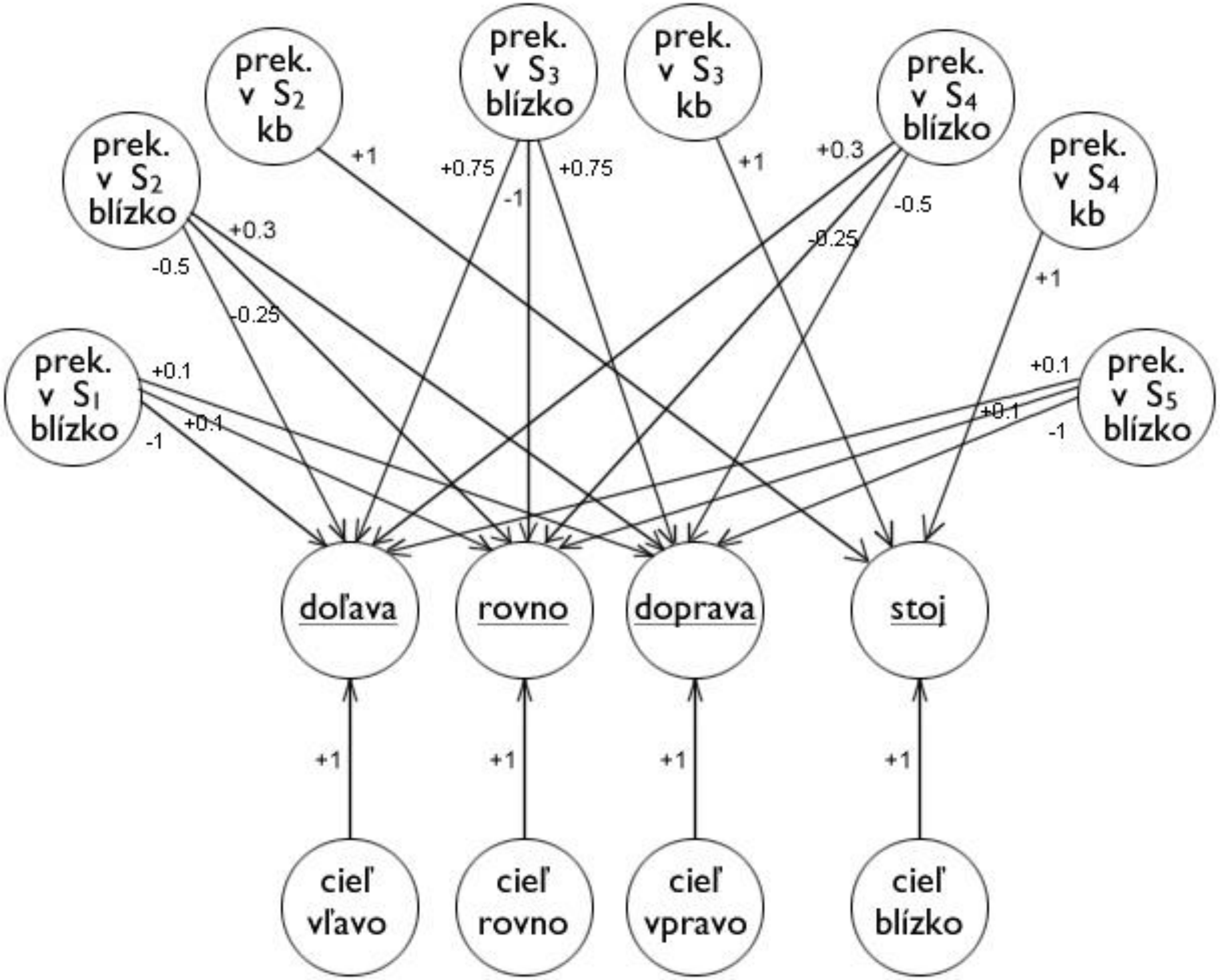
1. Expert nadefinuje charakteristické pojmy.
2. Expert určí väzby medzi pojmami (existencia, orientácia).
3. Expert ohodnotí váhy jednotlivých väzieb.

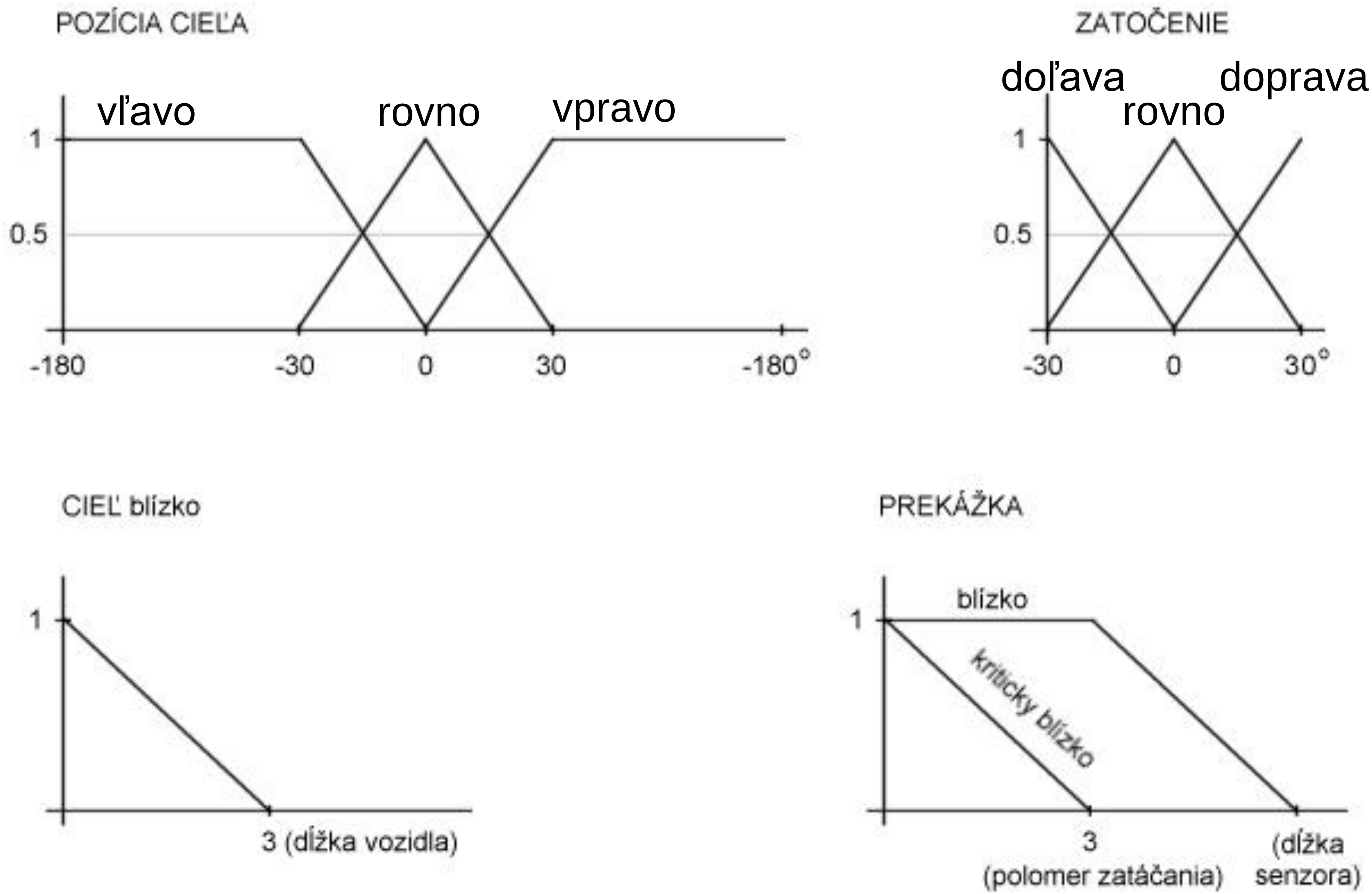


Fuzzy kognitívna mapa vyjadruje expertné znalosti o kauzálnych (funkčných) vzťahoch v modelovanom systéme - obsahuje teda znalosti o **dynamickom chovaní** systému

Príklad: *Navigácia robota medzi prekážkami*




prek. v S_2 kb
prek. v S_3 blízko
prek. v S_3 kb
prek. v S_4 blízko
prek. v S_2 blízko
prek. v S_4 kb
prek. v S_1 blízko
prek. v S_5 blízko
+1
+0.75
-1
+0.75
+1
+0.3
-0.5
-0.25
+0.3
-0.5
-0.25
+1
+0.1
+0.1
-1
+0.1
+0.1
-1
doľava
rovno
doprava
stoj
+1
+1
+1
+1
cieľ vľavo
cieľ rovno
cieľ vpravo
cieľ blízko


POZÍCIA CIEĽA
vľavo
rovno
vpravo
1
0.5
-180
-30
0
30
-180°
ZATOČENIE
doľava
rovno
doprava
1
0.5
-30
0
30°
CIEĽ blízko
1
3 (dĺžka vozidla)
PREKÁŽKA
blízko
kriticky blízko
1
3
(polomer zatáčania)
(dĺžka
senzora)

Fuzzy systémy

Implikácia & pravidlá usudzovania

Relácie podobnosti & 5 najbližších susedov

Hranové operátory

Systémy pravdivostných hodnôt

Multidimenzionálne uvažovanie

Problémy konvenčných FR

$$AK \quad x\ je\ A\ \&\ y\ je\ B \quad POTOM \quad u\ je\ C \quad : w_i$$

1. Vlastná inferencia sa má vykonávať pomocou implikácie. T-norma nie je implikátor!
2. Problém agregácie – nie je možné vykonávať operácie medzi FM definovanými na rôznych univerzách → multidimenzionálne uvažovanie.

Vlastná inferencia

implikácia $\subseteq$ vlastná inferencia

$\Rightarrow$ $\qquad\qquad\qquad$ $\rightarrow$

A	B	$A \Rightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Typy vlastných inferencií

1. **S-implikácie** $A \Rightarrow B = \neg A \vee B \equiv \boldsymbol{S}(C(A), B) = I_S(A, B)$
2. **QL-implikácie** (***Q****uantum* ***L****ogic*)

   $A \Rightarrow B = \neg A \vee (A \wedge B) \equiv S(C(A), T(A, B)) = I_{QL}(A, B)$

   S, T - konjugované
3. **R-implikácie** (zovšeobecnený modus ponens)

$$I(A,B) = \begin{cases} 1, & \text{ak } A \leq B \\ 0, & \text{ak } A=1 \wedge B=0 \\ \in (0;1) & \text{ináč} \end{cases}$$

$$I_R(A,B) = \sup\{\gamma \in [0;1] \mid I_V(A,\gamma) \leq B\}$$

4. **Konjukcie** $I_C(A, B) = T(A, B)$ - nie implikátor

Niektoré typy implikátorov

1. Kleene - Dienes

$$I_{KD}(A,B) = \max(1-A,B)$$

2. Łukasiewiczov

$$I_L(A,B) = \min(1,1-A+B)$$

3. Zadehov

$$I_Z(A,B) = \max(\min(A,B),1-A)$$

4. Stochastický

$$I_S(A,B) = \min(1,1-A) + A.B$$

5. Goguenov

$$I_{Gg} = \min(1, \frac{B}{A})$$

6. Gödelov

$$I_{Gd} = \begin{cases} 1, & \text{ak } A \leq B \\ B & \text{ináč} \end{cases}$$

7. Ostrý (*špeciálny prípad I_{Gd}*)

$$I_O = \begin{cases} 1, & \text{ak } A \leq B \\ 0 & \text{ináč} \end{cases}$$

8. Všeobecný

$$I_V = \min(I_\alpha(A, B), I_\beta(1 - A, 1 - B))$$

α, β - I_{Gd}, I_O

Modus ponens (pravidlo odlúčenia)

Vyjadruje princíp **kauzality** v produkčných pravidlách (*príčina - dôsledok*) a spôsob jeho odvodzovania.

Úloha:

Ak platí: Ak *x* je *A* Potom *y* je *B*
Ak platí aj: *x* je *A*

predpoklad (*známy*)

Potom platí: *y* je *B*

dôsledok (neznámy)

$$((A \Rightarrow B) \wedge A) \Rightarrow B$$

Príklad:

Pravidlo: *Ak prší, potom je mokrá cesta.*

x: *Prší.*

⬇

y: *Cesta je mokrá.*

Problém: *Aká je cesta, keď neprší? Mokrá alebo suchá?*
(Čo ak ju polievali cestári?)

⬇

Konvenčný modus ponens nevie zodpovedať otázku.

A	***A ⇒ B***	***B***
1	1	1
0	1	?

Zovšeobecnený modus ponens

Ak platí: Ak x je A Potom y je B

Ak platí aj: x je $A' \neq A$

Potom platí: y je $B' \neq B$

Modus tollens (reductio ad absurdum)

Vyjadruje princíp **kauzality** v produkčných pravidlách (*dôsledok - príčina*) a spôsob jeho odvodzovania.

Úloha:

Ak platí:	Ak x je A Potom y je B	dôsledok (*známy*)
Ak platí aj:	y nie je B	
Potom platí:	x nie je A	predpoklad (neznámy)

$$((A \Rightarrow B) \wedge \neg B) \Rightarrow \neg A$$

Príklad:

Pravidlo: *Ak prší, potom je mokrá cesta.*

y: *Cesta nie je mokrá.*

⇓

x: *Neprší.*

Problém: *Aké je počasie, keď cesta je mokrá?*
Prší alebo neprší?
(Čo ak ju polievali cestári?)

⇓

Konvenčný modus tollens nevie zodpovedať otázku.

B	***A ⇒ B***	***A***
1	1	?
0	1	0

Zovšeobecnený modus tollens

Ak platí: Ak x je A Potom y je B

Ak platí aj: y je $B' \neq B$

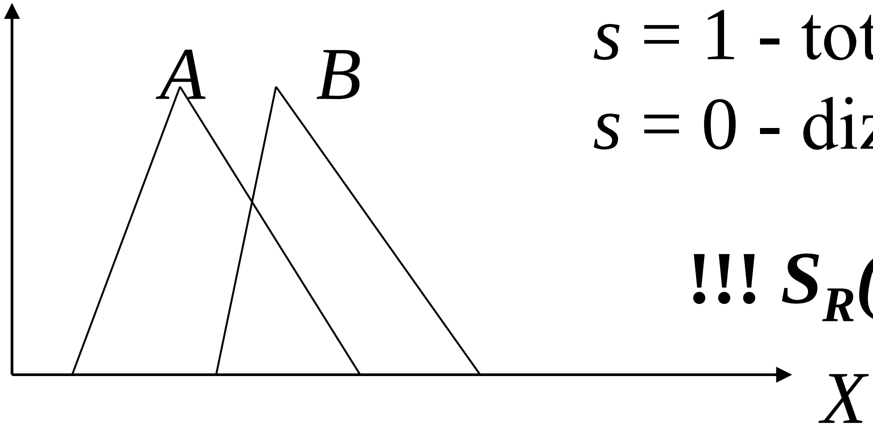
Potom platí: x je $A' \neq A$

Relácie podobnosti (RP)
(*similarity relation*)

Binárna relácia:

$$\boldsymbol{S_R : A, B \subseteq X \rightarrow [0;1]}$$

$s \in [0;1]$ index podobnosti



$s = 1$ - totožné

$s = 0$ - dizjunktné

!!! $\boldsymbol{S_R(A,B) \neq T(A,B)}$!!!

Vlastnosti:

1. Reflexivnosť $(\forall x \in X : (x, x) \in S)$
2. Tranzitívnosť $(\forall x, y, z \in X : (x, y) \in S \wedge (y, z) \in S \Rightarrow (x, z) \in S)$
3. Symetričnosť $(\forall x, y \in X : (x, y) \in S \Rightarrow (y, x) \in S)$

Typy RP:

1. Aritmetický priemer
2. Skalárna mohutnosť (*počet prvkov množiny*)
3. Suprémum (maximum)

1. Minkowského metrika:

$$S_M(A,B) = \left(\sum_{i=1}^{n} \left|\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)\right|^r\right)^{1/r}; \quad r > 0$$

2. Hammingová metrika (*obsahy plôch*):

$$S_H(A,B) = \frac{\|A \cap B\|}{\|A \cup B\|}$$

$\cap$ - min; $\cup$ - max

3. Tverského metrika:

$$S_T(A,B) = \frac{f(A \cap B)}{f(A \cap B) + \alpha . f(A - B) + \beta . f(B - A)}; \quad \alpha, \beta \geq 0$$

f - ľubovoľná transformačná funkcia

Použitie:

- multikriteriálne rozhodovanie
- inferencia produkčných pravidiel (*5 najbližších susedov*)

Metóda piatich najbližších susedov

(*Five Nearest Neighbors*)

(k): Ak x_1 je LX_1^k & … & x_n je LX_n^k Potom u je LU^k

1. Výpočet vzdialenosti

$$
\begin{array}{cccc}
x_{1,} & x_{2,} & \dots & x_n \\
\downarrow & \downarrow & & \downarrow \\
s^k{}_{1}, & s^k{}_{2}, & \dots & s^k{}_{n} \\
\uparrow & \uparrow & & \uparrow \\
LX^k{}_{1}, & LX^k{}_{2}, & \dots & LX^k{}_{n}
\end{array}
\Rightarrow
\quad \boldsymbol{d_k = \frac{1}{f(s_1^k, s_2^k, \dots, s_n^k)}}
$$

d_k – vzdialenosť vstupov od predpokladov pravidla k

f – agregačná funkcia

2. Výber <u>piatich</u> pravidiel s najmenším d_k

3. Zoradenie pravidiel $d_i < d_j$ ($d_{max}=d_5$)

4. Výpočet absolútnych váh:

$$w_{abs_i} = \frac{d_{max} - d_i}{d_{max}}; \quad w_{abs_i} \in [0;1]$$

5. Výpočet relatívnych váh:

$$w_{rel_i} = \frac{w_{abs_i}}{\sum_{i=1}^{5} w_{abs_i}}; \quad \sum_{i=1}^{5} w_{rel_i} = 1$$

6. Výpočet výstupnej FP LU_c:

$$\boldsymbol{\mu_{LU_c} = \sum_{i=1}^{5} w_{rel_i} \cdot \mu_{LU^i}} \quad *$$

Alternatíva k inferencii podľa jednotlivých pravidiel

RP FR

s $\approx$ kompatibilita (*singletonová fuzzifikácia*)

w_{rel} $\approx$ normalizovaná α

f $\approx$ agregačnej funkcii

$* \approx \begin{cases} T_I \text{ - produkt} \\ S_A \text{ - suma} \end{cases}$

Hranové (lingvistické) operátory

Termy: - atomické (*starý, mladý*)
- zložené (*stredne starý, veľmi teplý, trochu, presne, viac menej, ...*)

Príslovky *p* posúvajú, spresňujú alebo rozostrujú význam atomického termu.

⬇

Hranové operátory využiteľné ako sémantické pravidlo v definícii lingvistickej premennej.

Modifikácia atomických termov *A* operátormi f_H:

$$\mu_{pA}(x) = f_H(\mu_A(x))$$

Typy hranových operátorov:

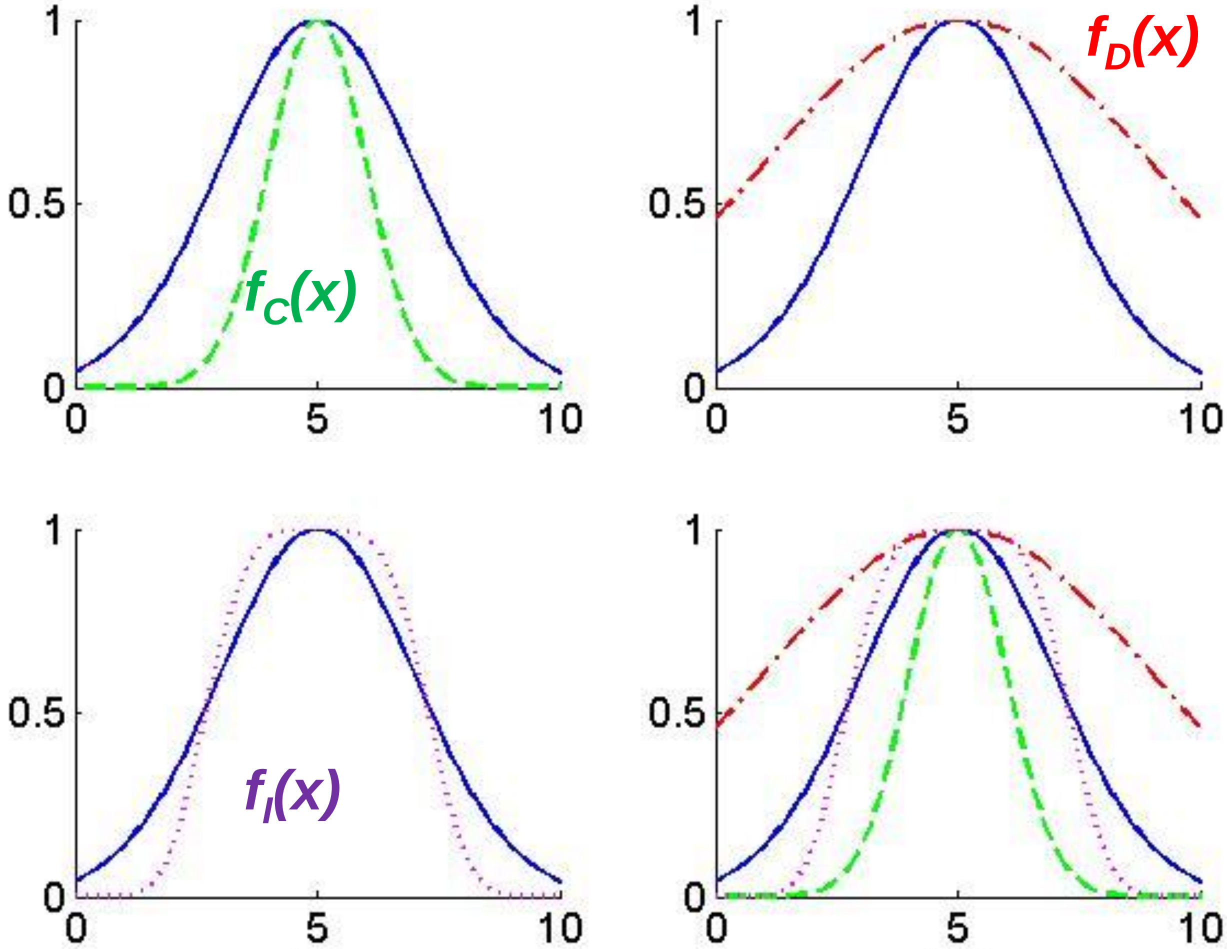
1. **Koncentrácia** ***$f_C(x)$*** – spresnenie pojmu,

   t.j. zúženie FP, $\mu_{pA}(x) \subset \mu_A(x)$

2. **Dilatácia** ***$f_D(x)$*** – rozostrenie pojmu,

   t.j. rozšírenie FP, $\mu_{pA}(x) \supset \mu_A(x)$

3. **Intenzifikácia** ***$f_I(x)$*** – kompromis medzi $f_C(x)$ a $f_D(x)$



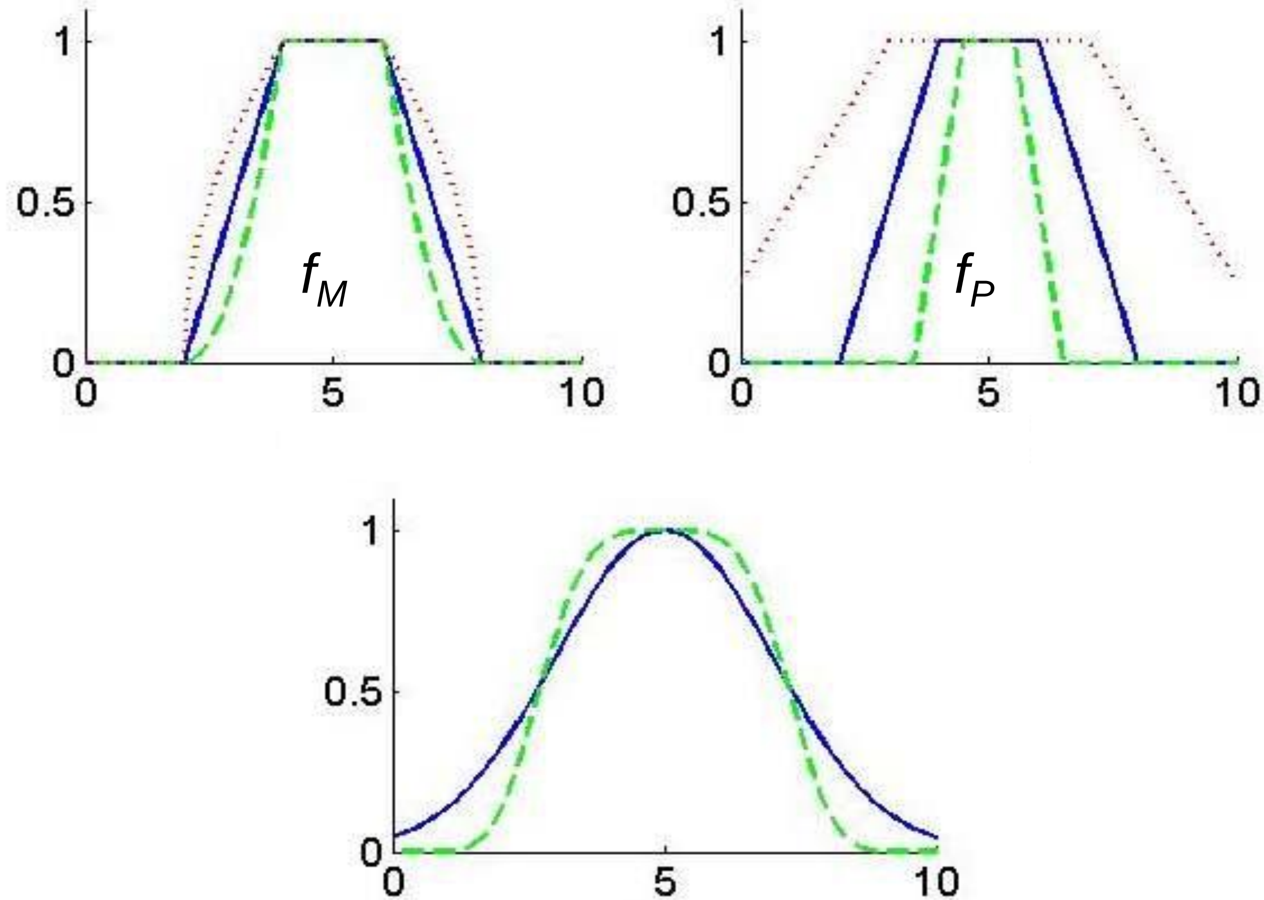
1
0.5
0
0
5
10
$f_C(x)$
$f_D(x)$
$f_I(x)$

Typy modifikačných funkcií f_H:

1. **Mocninové:** $\mu_{pA}(x) = f_M(\mu_A(x)) = \mu_A(x)^k$
   (*veľmi k=2, viac menej k=0,5*)

2. **Posuvné:** $\mu_{pA}(x) = f_P(\mu_A(x)) = \mu_A(x-s)$
   s – posun, nutnosť uvažovať typ hrany

3. **Normované:** $\mu_{pA}(x) = f_N(\mu_A(x)) = \mu_A(c.(x-r)+r)$
   c – normalizačný faktor
   Normované sú špeciálnym prípadom posuvných.



$$f_I(\mu_A(x)) = \mu_A((x-r)^{C_c}+r)^{C_d}$$

C_c – koncentrácia, C_d - dilatácia

Multidimenzionálne fuzzy uvažovanie

Jednodimenzionálne fuzzy uvažovanie:
Ak x je A Potom y je B
(*jeden vstup - jeden výstup*)

Ak x_1 je A_1 & x_2 je A_2 & … & x_n je A_n Potom u je B

Problém: Agregácie T_A je t-norma vykonávajúca prienik medzi FM definovanými na tom istom univerze.

FM vstupných premenných ale nie sú definované na tom istom univerze!!!

Metódy multidimenzionálneho uvažovania

1. Kartézsky súčin
2. Miera podobnosti (*relácie podobnosti*)
3. Lineárna interpolácia
4. Pravdivostné (*truth*) funkcie

1. Mizumoto (*kartézsky súčin*)

Ak x_1 je A_1 & x_2 je A_2 & … & x_n je A_n Potom u je B

Nech platí:

x_1 je A_1' & x_2 je A_2' & … & x_n je A_n'

Potom (*modus ponens*): u je B'

Uvažujme dvojrozmerný prípad:

Ak x_1 je A_1 & x_2 je A_2 Potom u je B

x_1 je A_1' & x_2 je A_2'

---

u je B'

a) $A_1, A_2 \subseteq X$ (to isté univerzum)

$A = A_1 \cap A_2 = T_A(A_1, A_2)$

b) $A_1 \subseteq X_1, A_2 \subseteq X_2$ (rôzne univerza)

Riešenie: cylindrické rozšírenie A_1, A_2, *t.j.* $ce(A_1), ce(A_2)$

$$\left.\begin{array}{l} ce(A_1) = A_1 \times X_2 \\ ce(A_2) = X_1 \times A_2 \end{array}\right\} \subseteq X_1 \times X_2 = X$$

Ako v a):

x_1 je A_1 & x_2 je $A_2 = ce(A_1) \cap ce(A_2) = ce(A)$

$$ce(A) = T_A(ce(A_1), ce(A_2))$$

Ak $\wedge$ & $\vee$ sú konjugované a pre $\Rightarrow$ platí:

$$(A_1 \wedge A_2) \Rightarrow B \equiv (A_1 \Rightarrow B) \vee (A_2 \Rightarrow B) \qquad (*)$$

Potom:

x_1 je A_1' & x_2 je $A_2' \Rightarrow y$ je B'

$\Downarrow$

x_1 je $A_1' \Rightarrow y$ je B_1'

$\vee$ $\qquad \Rightarrow \qquad B' = B_1' \vee B_2' = S(B_1', B_2')$

x_2 je $A_2' \Rightarrow y$ je B_2'

(*) platí pre $\Rightarrow$ - I_{KD}, I_O, I_{Gd}, I_L

Dôsledok: Jedna *n*-dimenzionálna inferencia sa nahradí *n* jednodimenzionálnymi inferenciami.

2. Tsukamoto

Ak x_1 je A_1 & x_2 je A_2 & … & x_n je A_n
Potom u je B

Dekomponuje sa na n jednorozmerných pravidiel:

Ak x_i je A_i Potom u je B
x_i je A_i'

u je B_i'

$$B' = B_1' \cap B_2' \cap \ldots \cap B_n'$$

Problém:

Ak pre I platí: $(A_1 \wedge A_2) \Rightarrow B \equiv (A_1 \Rightarrow B) \vee (A_2 \Rightarrow B)$,
potom $B' = B_1' \cup B_2' \cup \ldots \cup B_n' \neq$ Tsukamoto

3. Nafarieh & Keller (*podobnosť & pravdivosť*)

Stupeň kompatibility (*miera podobnosti*):

$$mp_H(A, A') = \frac{|A \cap A'|}{|A \cup A'|}$$ (*Hammingova metrika*)

Operátory kompatibility:

- $\cap$ - T_C
- $\cup$ - S_C

Majme: $$M = \int_0^1 (\mu_{pravdivý}(x))^k dx$$

M - fuzzy pravdivostná hodnota, miera že $A' \Rightarrow B$

Majme: ***M = f(mp$_H$(A, A'))*** =

$$= \begin{cases} \mathrm{mp}_H(A, A').\int_0^1 \mu_{pravdivý}(x)\,dx, & \text{ak } A \subset A' \\ \dfrac{1}{\mathrm{mp}_H(A, A')}.\int_0^1 \mu_{pravdivý}(x)\,dx, & \text{ak } A \supseteq A' \end{cases}$$

Ak x_1 je A_1 & x_2 je A_2 & … & x_n je A_n Potom u je B

Nech platí:

x_1 je A_1' & x_2 je A_2' & … & x_n je A_n'

$$mp_H(A_i^{'}, A_i) = \frac{\left|A_i^{'} \cap A_i\right|}{\left|A_i^{'} \cup A_i\right|}$$

Úlohou je nájsť mocninu k_i z:

$$M_i = \int_0^1 (\mu_{pravdivý}(x))^{k_i} dx = f(mp_H(A_i^{'}, A_i))$$

$$k = \min_{i=1,\ldots,n} k_i = T_A$$

$B' = B^k$ (*výsledok*)

Ak:

$$M_i = \int_0^1 (\mu_{pravdivý}(x))^0 dx$$ neurčitý

$$M_i = \int_0^1 (\mu_{pravdivý}(x))^{0,5} dx$$ viac menej pravdivý (*celkom pravdivý*)

$$M_i = \int_0^1 (\mu_{pravdivý}(x))^2 dx$$ veľmi pravdivý

$\vdots$

⬇

Možnosť popísať *B*ʹ aj slovne.

Príklad

Pravidlo: *Ak* x_1 *je malá* (A_1) *& Ak* x_2 *je veľká* (A_2)

Potom u je stredná (B)

Vstupy: *Ak* x_1 *je* ***celkom malá*** (A_1'); x_2 *je veľká* (A_2')

$$\mu_{malá} = \begin{cases} 1, & x < 1 \\ -0.25 \cdot x + 1.25, & 1 \leq x \leq 5 \\ 0, & x \geq 5 \end{cases},$$

$$\mu_{stredná} = \begin{cases} 0, & x < 2 \text{ alebo } x > 10 \\ 0.25 \cdot x - 0.5, & 2 \leq x \leq 6 \\ -0.25 \cdot x + 2.5, & 6 < x \leq 10 \end{cases},$$

$$\mu_{veľká} = \begin{cases} 0, & x < 8 \\ 0.5 \cdot x - 4, & 8 \leq x \leq 10 \\ 1, & x > 10 \end{cases}.$$

celkom malá = *malá*^{0,5} (Baldwinov systém)

$$\mu_{celkom\ malá} = \begin{cases} 1, & x < 1 \\ [-0.25 \cdot x + 1.25]^{0.5}, & 1 \leq x \leq 5 \\ 0, & x \geq 5 \end{cases}$$

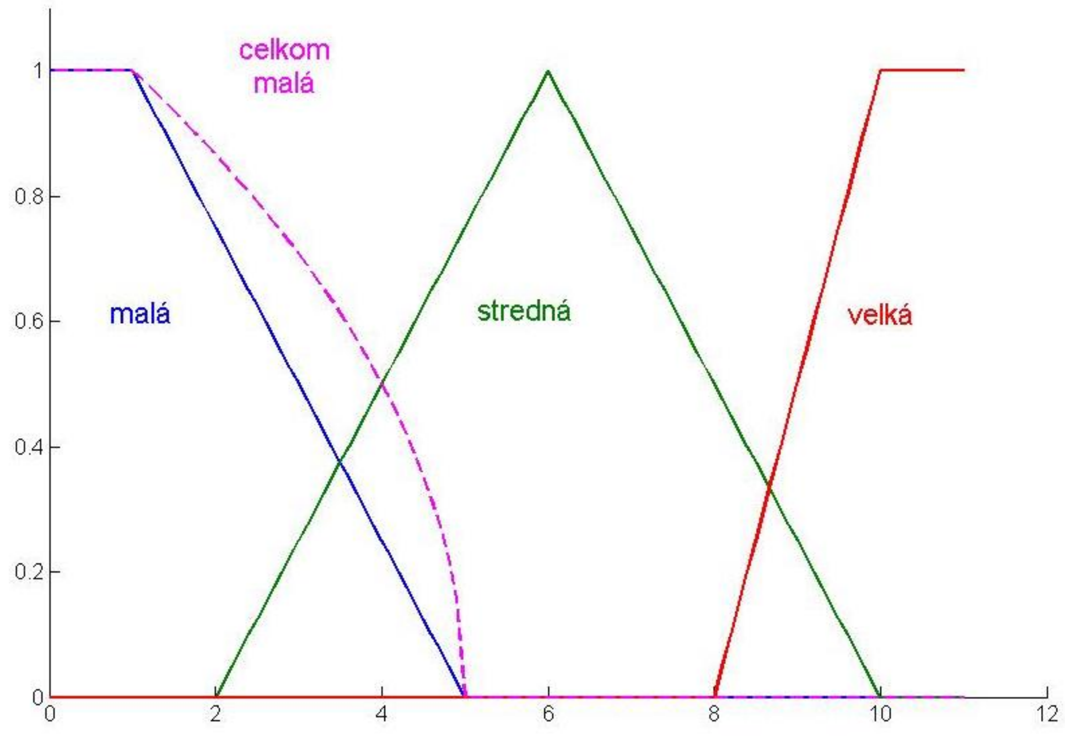
Nech: $\mu_{pravda}(x)=x \quad \rightarrow \quad T_k = \int_0^1 (\mu_{pravda}(x))^k\, dx = \frac{1}{k+1}$

- $mp_H(A_2, A_2')=1$
- $$mp_H(A_1, A_1') = \frac{\int_0^1 \mu_{malá}}{\int_0^1 \mu_{celkom\ malá}} = \frac{1 + \int_1^5 [-0.25 \cdot x + 1.25]\, dx}{1 + \int_1^5 [-0.25 \cdot x + 1.25]^{0.5}\, dx} = \frac{1+2}{1+8/3} \doteq 0.82$$
- $A_1 \subset A_1'$

$$f[mp_H(A_1, A_1')] = mp_H(A, A') \cdot \int_0^1 \mu_{pravda}(x) dx = 0.82 \cdot \int_0^1 x dx = 0.82 \cdot 0.5 = 0.41$$

- $$\left.\begin{array}{rcccl} \frac{1}{k_1+1} & = & 0.41 & \rightarrow & k_1 = 1.44 \\ \frac{1}{k_2+1} & = & 0.5/1 & \rightarrow & k_2 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow k = k_2 = 1$$

$$B \approx B'$$

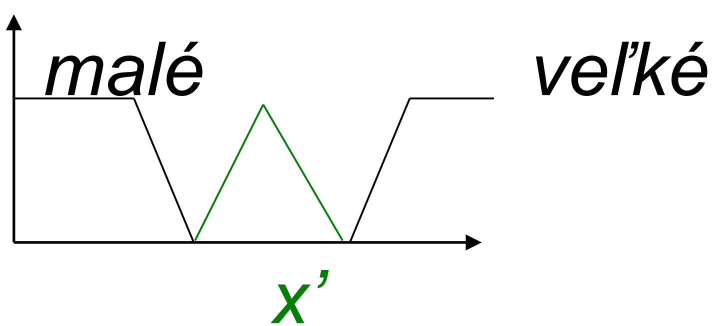


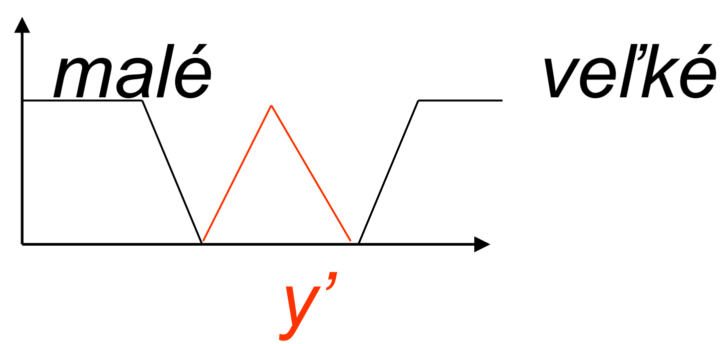
4. Sugeno & Takagi (*lineárna interpolácia*)

Potreba mať aspoň 2 pravidlá, aby sa dal odvodiť fakt ležiaci medzi nimi:

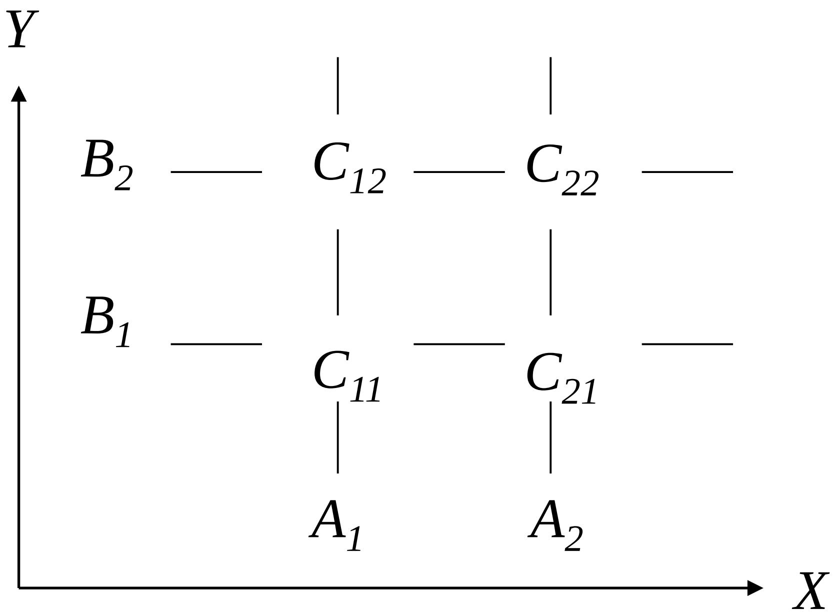
Ak x je veľké Potom y je malé
Ak x je malé Potom y je veľké

Ak x' je [malé; veľké] Potom y' je [malé; veľké]





Prípad pre 2 vstupy:



A: x je A_1 & y je B_1 $\rightarrow$ z je C_{11}

B: x je A_1 & y je B_2 $\rightarrow$ z je C_{12}

C: x je A_2 & y je B_1 $\rightarrow$ z je C_{21}

D: x je A_2 & y je B_2 $\rightarrow$ z je C_{22}

$$\left.\begin{array}{r}\text{Ak: } A' \in [A_1; A_2] \\ B' \in [B_1; B_2]\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{(x \text{ je } A' \ \& \ y \text{ je } B')}{z \text{ je } C = ?}$$

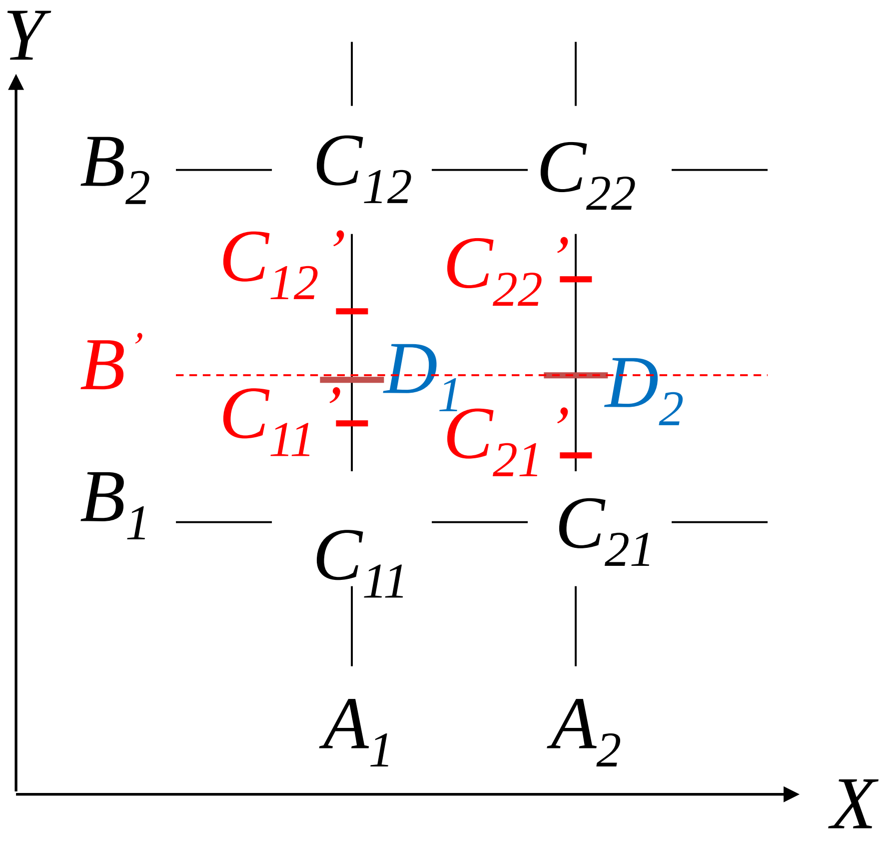
Postup:

1: Do *A:* dosaď y je B', t.j. x je A_1 & y je $B' \rightarrow z$ je C_{11}'

2: Do *B:* dosaď y je B', t.j. x je A_1 & y je $B' \rightarrow z$ je C_{12}'

3: Z 1 a 2: x je A_1 & y je $B' \rightarrow z$ je $D_1 = S_A(C_{11}', C_{12}')$

4: Pre x je A_2 & y je $B' \rightarrow z$ je $D_2 = S_A(C_{22}', C_{21}')$



Napr.: $D_1 = (C_{11}' + C_{12}')/2$

$D_2 = (C_{21}' + C_{22}')/2$

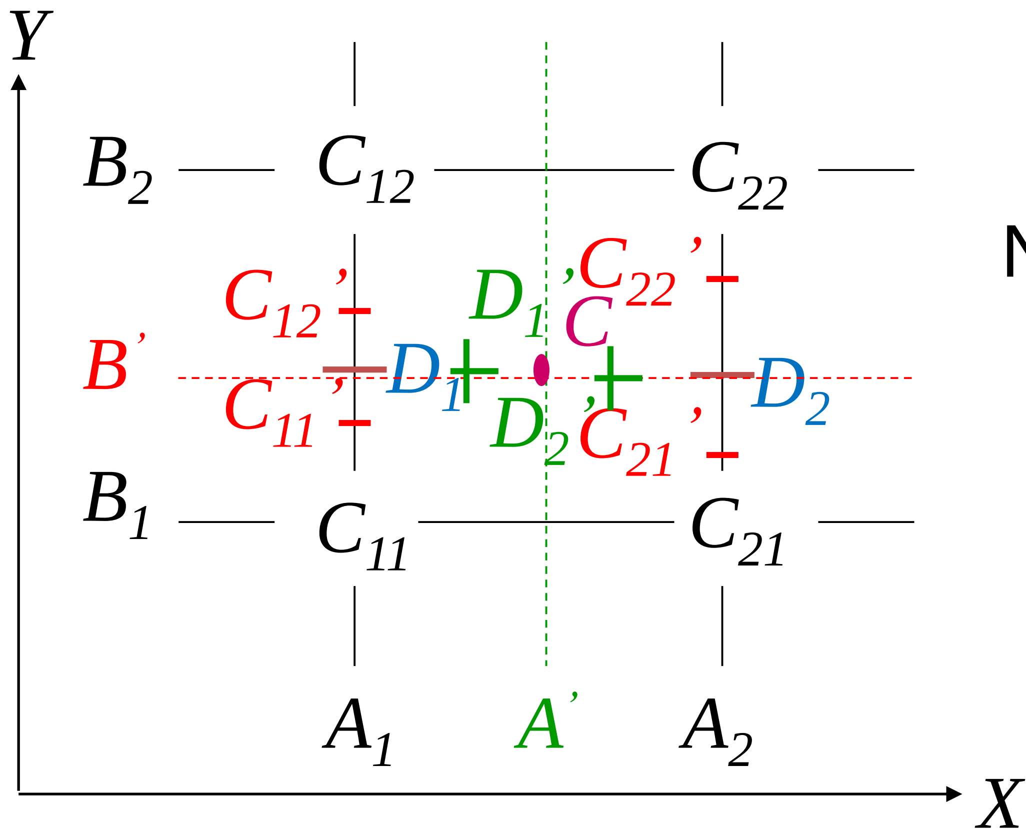
T_A – obdoba akumulácie

$(C_{11}' = T_I(C_{11}, B'))$

5: Do 3: dosaď x je A', t.j. x je A' & y je B' → z je D_1'

6: Do 4: dosaď x je A', t.j. x je A' & y je B' → z je D_2'

7: x je A' & y je B' → z je $C = S_A(D_1', D_2')$



Napr.: $C = (D_1' + D_2')/2$

Pozn.:

- Vzťah x_1 je A_1 & x_2 je $A_2 \rightarrow y$ je B nie je chápaný ako implikácia ale ako funkcia $y = f(x_1, x_2)$.
- Postup výpočtu sa podobá na lineárnu interpoláciu.
- Vyhodnotenie pravidla s n vstupmi sa rozloží na na jednodimenzionálne vyhodnocovanie v n krokoch.
- Je možné riešenie aj „inverzného“ problému: Je známe x_2 a y. Treba vypočítať x_1 (*modus tollens*).

Systémy pravdivostných hodnôt

Do akej miery je pravda že:

40km/h vysoká rýchlosť v obci;

50 rokov stredný vek;

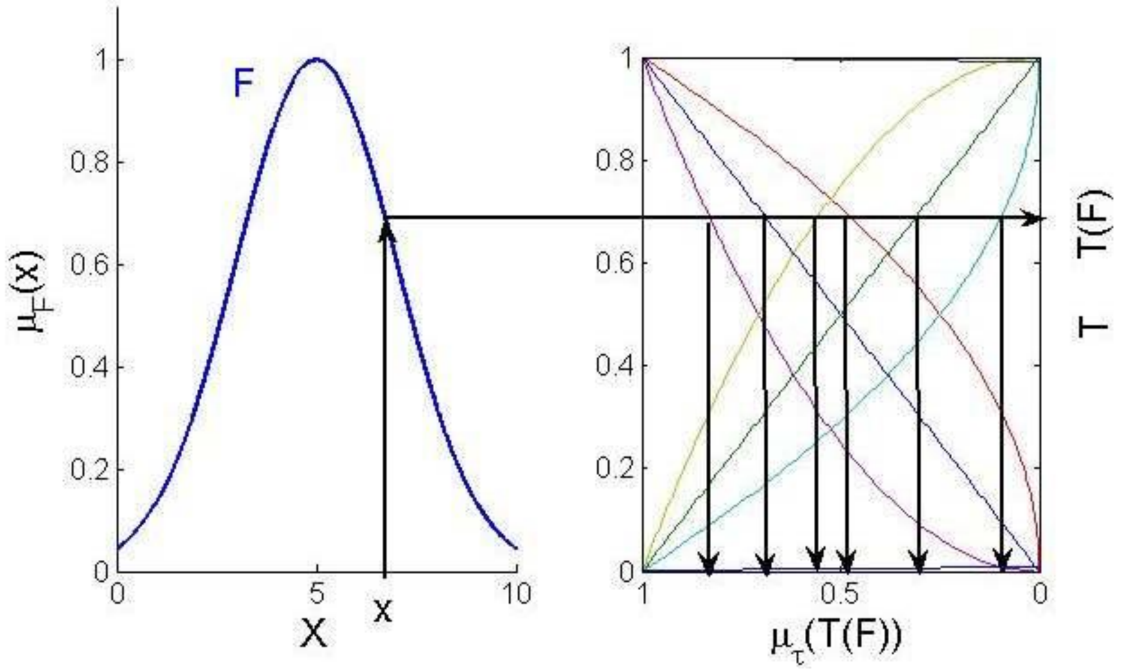
7 stupňov Celzia nízka teplota?

⬇

Miera kompatibility, resp. pravdivosti výroku: ***x je F***

T – priestor pravdivostných hodnôt $t \in [0; 1]=T$ (pravdivostný priestor)

Výhoda: Možné transformovať rôzne univerzá do jedného (*T*).



T(F) $\in$ *T = [0; 1]*
T(F) – kompatibilita *x* a *F* = pravdivostná hodnota

Pozn.:
Prav. hodnoty majú slovné a aj číselné vyjadrenie (ostré alebo fuzzy).
Negácia: $T(\neg F) = 1-T(F)$ $\Leftrightarrow$ nepravda verzus pravda.
Ak singletonová fuzz. $\Rightarrow$ $T(F_i) = T_c(x_i, F_i)$ (*c* – kompatibilita).

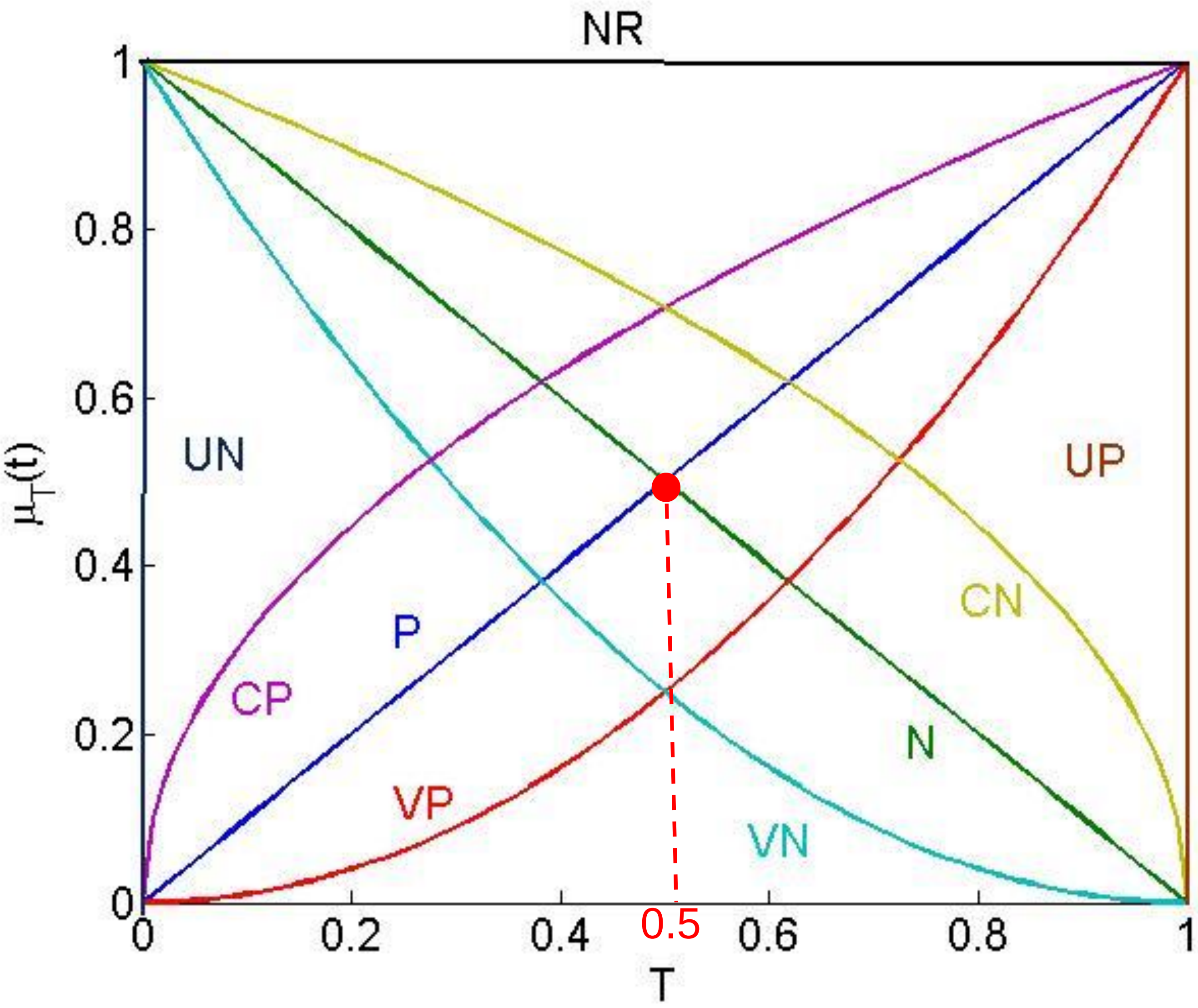
Baldwinov systém

Systém pevne definovaných 9 pravdivostných hodnôt: *pravdivý (P), nepravdivý (N), veľmi pravdivý, veľmi nepravdivý, celkom pravdivý, celkom nepravdivý, úplne pravdivý, úplne nepravdivý, nerozhodný.*

- Exponenciálna rodina pravdivostných hodnôt.
- Závisí od definície pojmu *pravdivý* (monotónne rastúci) a hodnôt exponentov.
- Bod pretnutia medzi *P* a *N* je vždy *0.5*.
- Použité hranové operátory.
- Číselné prav. hodnoty ako ostré čísla.
- Ak $k \to \infty \Rightarrow$ *veľmi*^{k} $\to$ *úplne.*
- Ak $k \to \infty \Rightarrow$ *celkom*$^{1/k}$ $\to$ *nerozhodne.*

Pre $\mu_{pravdivý}(t)=t$:

$$
\begin{array}{lccl}
\text{Nepravdivý:} & \mu_N(t) & = & 1-t \\
\text{Veľmi pravdivý:} & \mu_{VP}(t) & = & t^2 \\
\text{Veľmi nepravdivý:} & \mu_{VN}(t) & = & (1-t)^2 \\
\text{Celkom pravdivý:} & \mu_{CP}(t) & = & t^{0.5} \\
\text{Celkom nepravdivý:} & \mu_{CN}(t) & = & (1-t)^{0.5} \\
\text{Úplne pravdivý:} & \mu_{UP}(t) & = & \begin{cases} 1, & t=1 \\ 0, & \text{inak} \end{cases} \\
\text{Úplne nepravdivý:} & \mu_{UN}(t) & = & \begin{cases} 1, & t=0 \\ 0, & \text{inak} \end{cases} \\
\text{Nerozhodný:} & \mu_{NR}(t) & = & 1
\end{array}
$$



NR
UN
UP
CP
P
VP
VN
N
CN
$\mu_T(t)$
T
0
0.2
0.4
0.5
0.6
0.8
1
0.2
0.4
0.6
0.8
1

Zadehov systém

- Vie generovať ľubovoľný počet pravdivostných hodnôt *(pravdivý, nepravdivý, nie pravdivý, veľmi pravdivý, nie veľmi pravdivý, viac alebo menej pravdivý, skôr pravdivý, nie veľmi pravdivý a nie veľmi nepravdivý, …).*
- Číselné pravdivostné hodnoty buď ostré alebo FM.
- Gramatiky (syntaktické pravidlá) → názvy.
- Hranové operátory (sémantické p.) → funkcie.

$$\mu_P(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq a \\ 2 \cdot \left(\frac{t-a}{1-a}\right)^2, & a \leq t \leq \frac{1+a}{2} \\ 1 - 2 \cdot \left(\frac{t-1}{1-a}\right)^2, & \frac{1+a}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

a – minimálna príslušnosť

Možné použiť podobné definície funkcií ako u Baldwina, pokiaľ číselné prav. hodnoty $T(F)$ sú ostré.

Ak sú fuzzy, t.j. $T(F)=\{\mu_1(t_1)/t_1 + \mu_2(t_2)/t_2 + \ldots + \mu_n(t_n)/t_n\}$.

$$\mu_{\neg F}(t) = \mu_1(t_1)/(1-t_1) + \mu_2(t_2)/(1-t_2) + \ldots + \mu_n(t_n)/(1-t_n) = 1 - \mu_F(t)$$

Avšak podľa definície:

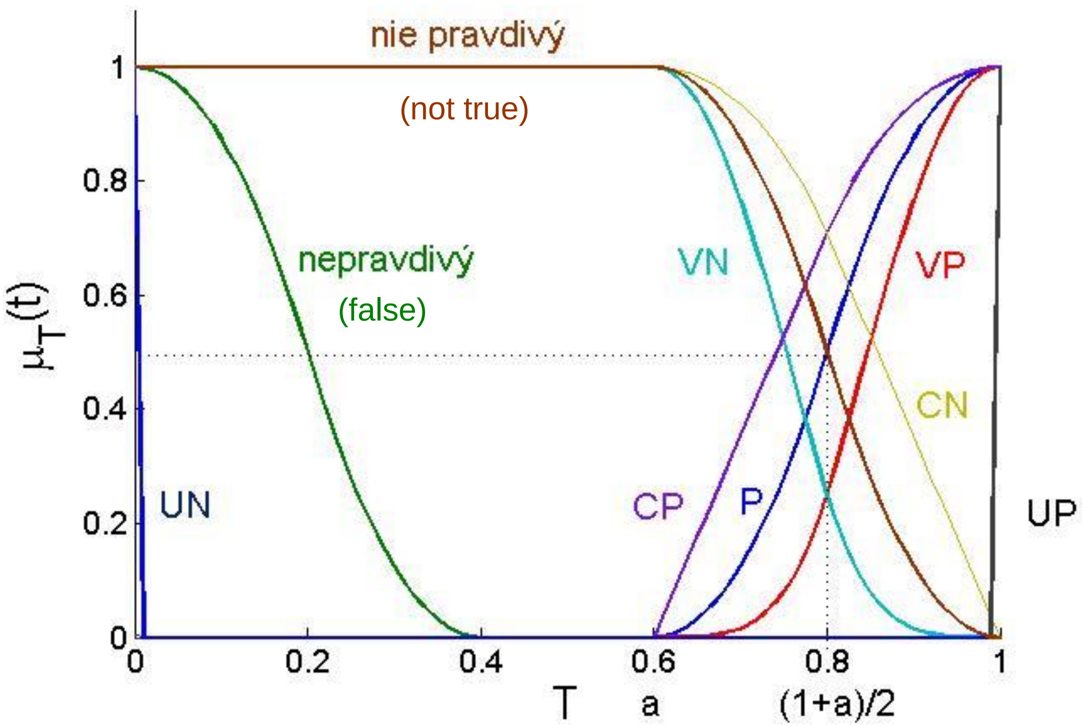
$$\mu_N(t) = \mu_1(1-t_1)/t_1 + \mu_2(1-t_1)/t_2 + \ldots + \mu_n(1-t_1)/t_n$$

$$\mu_{\neg F}(t) \neq \mu_N(t)$$

$\Downarrow$

$\mu_{\neg F}(t)$ – nie pravdivý

Pozn.:
Mocninové hranové operátory modifikujú stupne príslušnosti pri tých istých hodnotách univerza.
Pravdivostné operátory modifikujú hodnoty univerza pri tých istých hodnotách stupňov príslušnosti.



Fuzzy systémy

Zhluková analýza

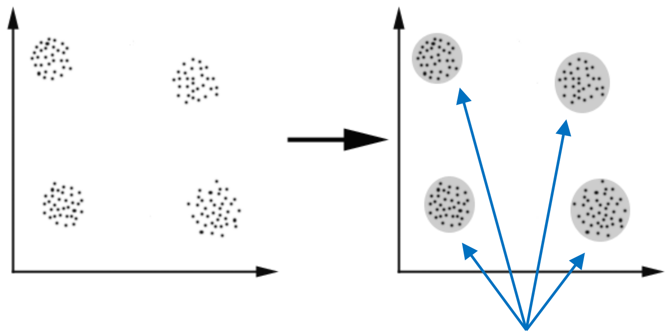
Miery neurčitosti FM

Fuzzy množiny typu 2

Druhy neurčitosti – prehľad

Zhluková analýza

Čo je zhlukovanie?



Zhluky (clusters)

Prvky sú si „niečím“ podobné.

Nekontrolované učenie, hľadanie štruktúry v dátach.

Cieľ: - Zoradiť do skupín „neoznačené“ (unlabeled) dáta.
- Nahradiť množstvo dát ich menším počtom reprezentantov.

Čím sú si prvky podobné?

- vzdialenosťou – hľadanie minimálnej vzdialenosti
- konceptom – napr. kusy nábytku, ovocie, zelenina...

Typy vzdialenostného zhlukovania:

1. Výlučné (tvrdé) – patrí / nepatrí (iba 1 zhluk)
2. S prekrytím (mäkké) – príslušnosť k viacerým zhlukom (fuzzy)
3. Hierarchické – vytváranie podzhlukov a nadzhlukov
4. Pravdepodobnostné

Požiadavky na zhlukovací algoritmus

- škálovateľnosť – pre *n* rozmerné vzorky,
- práca s rôznymi typmi veličín,
- tvorba zhlukov rôznych tvarov,
- všeobecnosť - minimálne špecifické znalosti o danej doméne,
- schopnosť práce so šumom,
- interpretovateľnosť a použiteľnosť výsledkov.

K-means

Výlučné zhlukovanie

MacQueen – 1967

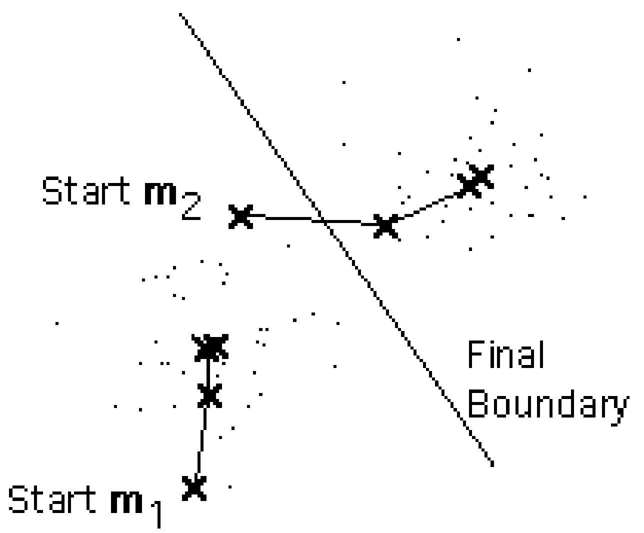
$$\min \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n} \left\| x_i^j - c_j \right\|^2$$

x_i – údaj, $i = 1, \ldots, n$

c_j – zhluk, $j = 1, \ldots, k$ $(k<n)$

Algoritmus:

1. Vyber *k* údajov (vzoriek) a označ ich za centrá zhlukov.
2. Priraď každdú vzorku do najbližšieho zhluku (najmenšia vzdialenosť).
3. Vypočítaj nové pozície centier zhlukov ako priemery pozícii vzoriek zhluku.
4. Opakuj kroky 2 a 3, pokiaľ sa centrá zhlukov menia.



Fuzzy C-means

Zhlukovanie s prekrytím, mäkká forma K-means

Dunn – 1973, Bezdek – 1981 (vylepšený)

$$\min \sum_{j=1}^{C} \sum_{i=1}^{n} w_{ij}^{m} \left\| x_i^j - c_j \right\|^2$$

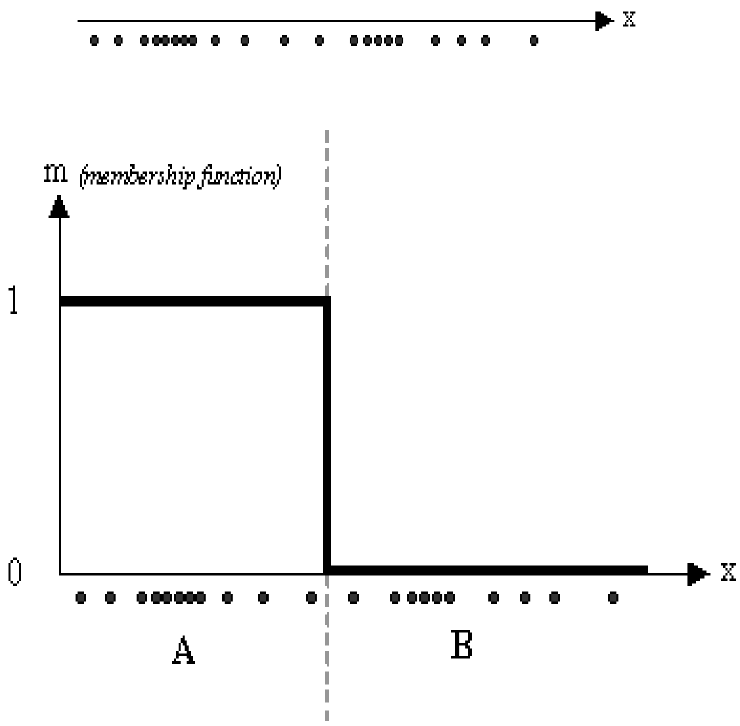
w_{ij} – váhy príslušnosti (μ) vzorky x_i k zhluku c_j
m – fuzzifikátor, $m \in [1;\infty]$

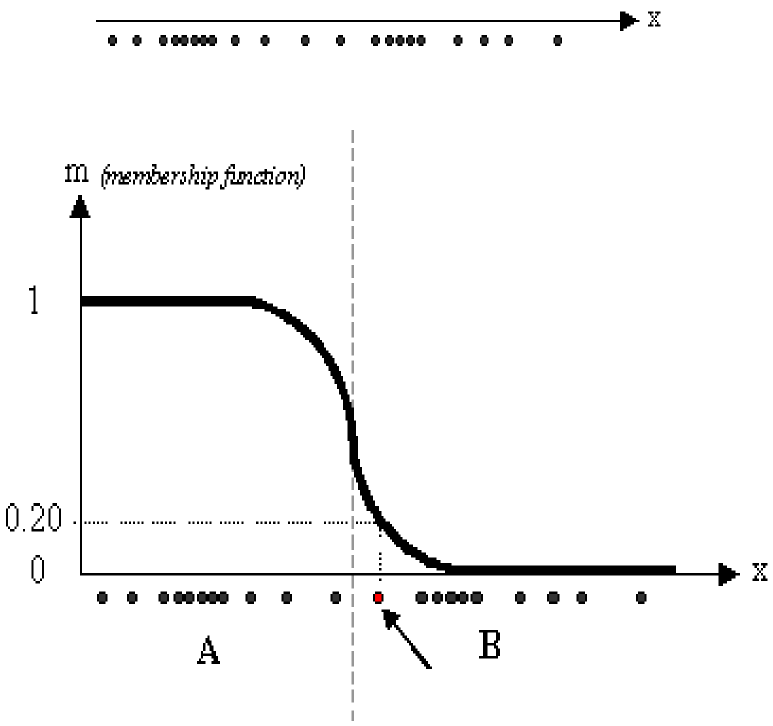
Algoritmus:

1. Inicializuj maticu $W^0=[w_{ij}]$.
2. V každom kroku k vypočítaj centrá zhlukov $c^k{}_j$ a maticu váh W^k.
3. Opakuj krok 2 pokiaľ sa neprestane meniť matica W.

$$c_j = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_{ij}^{m} . x_i}{\sum_{i=1}^{n} w_{ij}^{m}} \qquad w_{ij} = \frac{1}{\sum_{k=1}^{C} \frac{\|x_i - c_j\|}{\|x_i - c_k\|}^{\frac{2}{m-1}}}$$

Porovnanie K-means a Fuzzy C-means

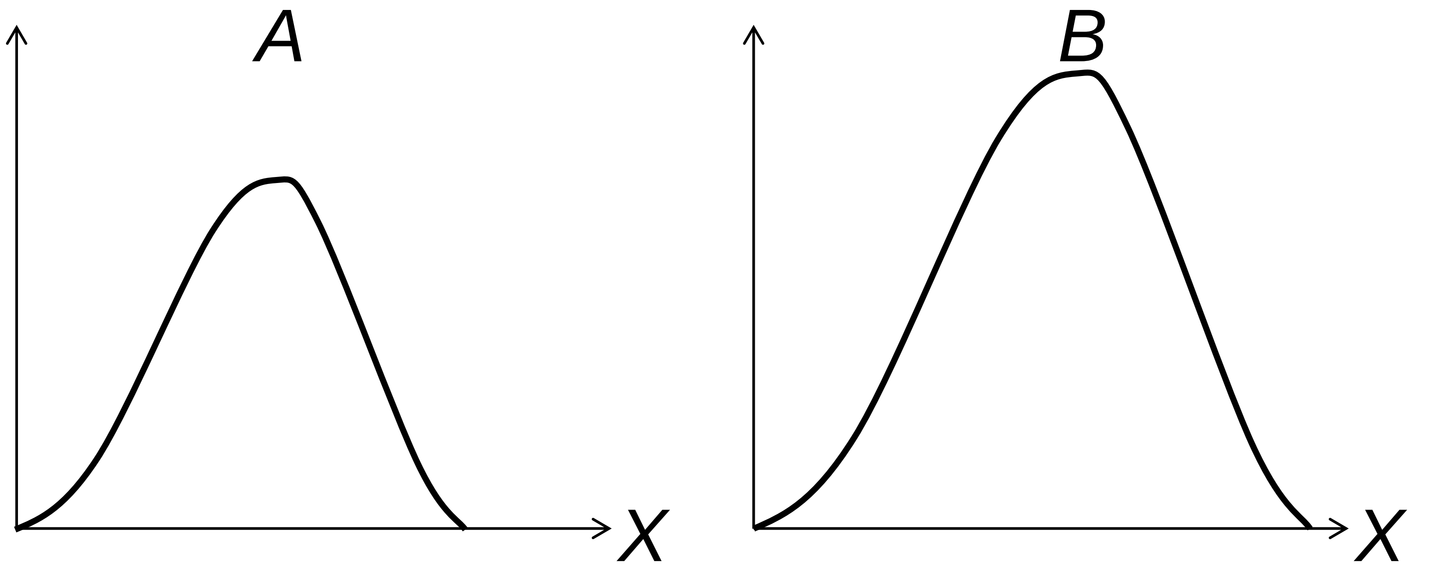




K-means

Fuzzy C-means

Miery neurčitosti FM



Ktorá FM je viac „fuzzy“?

$\mathcal{P}(x)=2^X$ – potenčná množina $\forall$ FM $\subseteq$ X

Miera neurčitosti - všeobecne

$d: \mathcal{P}(x) \to Re^+$

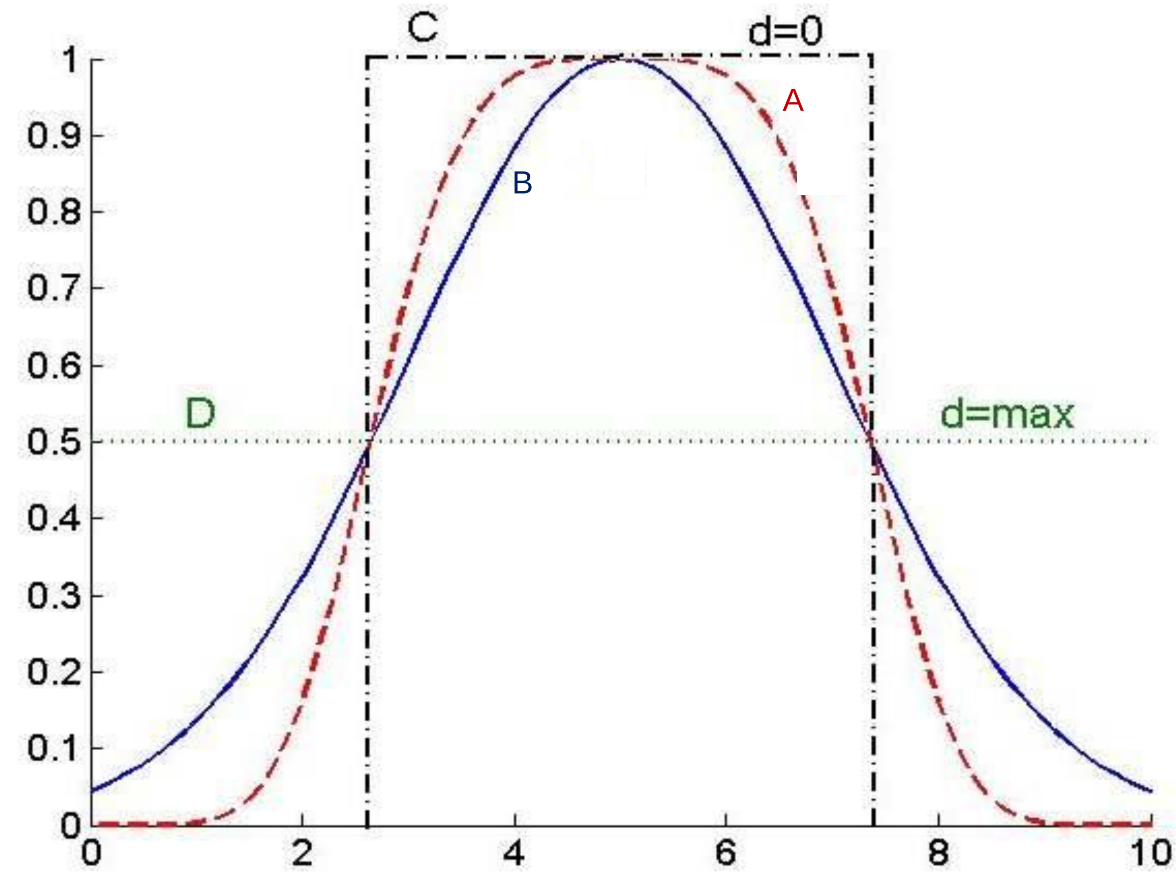
Pre $A, B \in \mathcal{P}(x)$ musí platiť:

1. Ak FM A je konvenčná množina, potom $d(A)=0$.
2. $d(A) + d(B) = d(A \cup B) + d(A \cap B)$.
3. Ak pre $\forall x \in X$ platí $\mu_A(x)=0,5$, potom $d(A)$ je maximálna.
4. Ak vždy platí jedna z podmienok:

   (a) $\mu_A(x) \leq \mu_B(x) \leq 0.5$,

   (b) $\mu_A(x) \geq \mu_B(x) > 0.5$,

   potom $d(A) \leq d(B)$.



Čím je FM viac neurčitá (fuzzy), tým menej informatívna.

Všeobecný tvar neurčitosti

$$d(A) = F(arg) = F\left(\sum_{\forall\alpha\in(0;1]} |\, A^\alpha \,| \cdot f(\alpha)\right) \quad *$$

F – neklesajúca funkcia, *F(0)=0*

$|A^\alpha|$ – mohutnosť α hladiny

f $\rightarrow$ miery entropie

$\rightarrow$ miery energie

Neurčitosť závisí viac od stupňov príslušnosti, než od prvkov univerza.

Miery typu entropie:

1. f(0)=f(1)=0.

2. Existuje α_0, pre ktoré $f(\alpha_0)$ je maximálna.

3. Pre $\forall \alpha_1$ a α_2 platí:

$$\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_0 \rightarrow f(\alpha_1) \leq f(\alpha_2),$$
$$\alpha_0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \rightarrow f(\alpha_1) \geq f(\alpha_2).$$

Hammingová miera:

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0; 0.5) \\ 1 - x, & x \in [0.5; 1] \end{cases} \implies *$$

$$\mathrm{Hm}(A) = \sum_{\forall x} \mid \mu_A(x) - A_{0.5}(x) \mid$$

$A_{0.5}(x)=1$, ak $x \in A_{0.5}$ (α-rez); ináč $A_{0.5}(x)=0$.

Euklidovská miera:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [0; 0.5) \\ (1-x)^2, & x \in [0.5; 1] \end{cases} \quad \Longrightarrow *$$

$$\mathrm{Eu}(A) = \sqrt{\sum_{\forall x} (\mu_A(x) - A_{0.5}(x))^2}$$

Entropická miera:

$$f(x) = -x \cdot logx - (1-x) \cdot log(1-x) \quad \Longrightarrow *$$

$$\mathrm{En}(A) = \sum_{\forall x} [-\mu_A(x) \cdot \log \mu_A(x) - (1-\mu_A(x)) \cdot \log(1-\mu_A(x))]$$

Normalizované miery – *d(A)* $\in$ *[0; 1]*:

Eliminujú vplyv mohutnosti nosiča FM.

$$U = \bigcup_{\forall i} \mathrm{supp}(LX_i)$$

$$\overline{Hm}(A) = \frac{2}{|U|} Hm(A)$$

$$\overline{Eu}(A) = \frac{2}{\sqrt{|U|}} Eu(A)$$

$$\overline{En}(A) = \frac{1}{|U|.\log 2} En(A)$$

Miery typu energie:

f(0)=0 a *f(1)=1.*

Napr.:

$$\mathrm{Sq}(A) = \sum_{\forall x} (\mu_A(x))^2$$

Pozn.:

Miery typu entropie sú necitlivé na prvky s rovnakým stupňom príslušnosti. Tu sú lepšie miery energie.

Fuzzy množiny typu 2

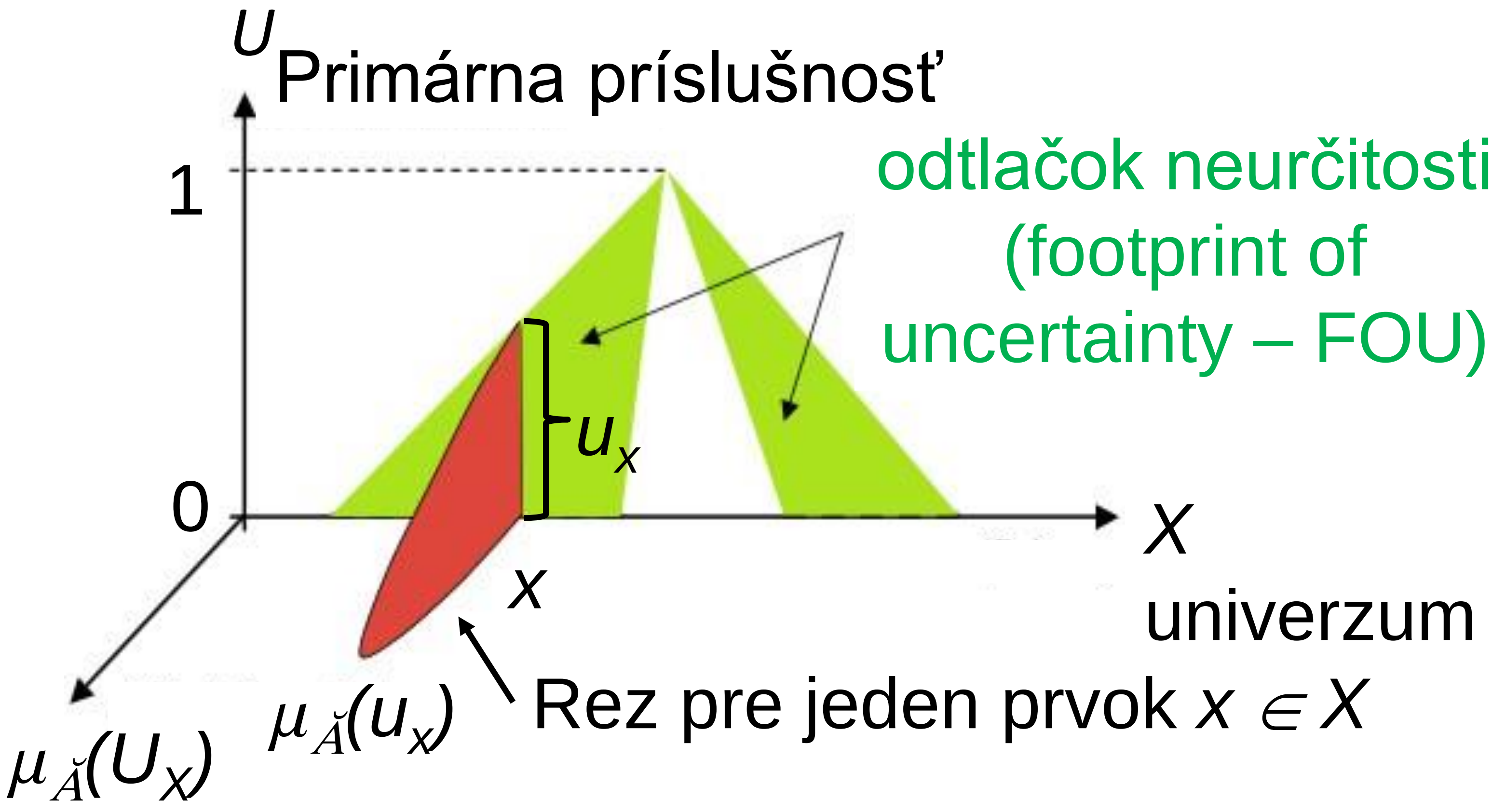
L.A. Zadeh - 1975

Umožňujú zohľadniť viac stupňov príslušnosti pre daný prvok univerza, t.j. „*fuzzifikácia fuzzy*“.

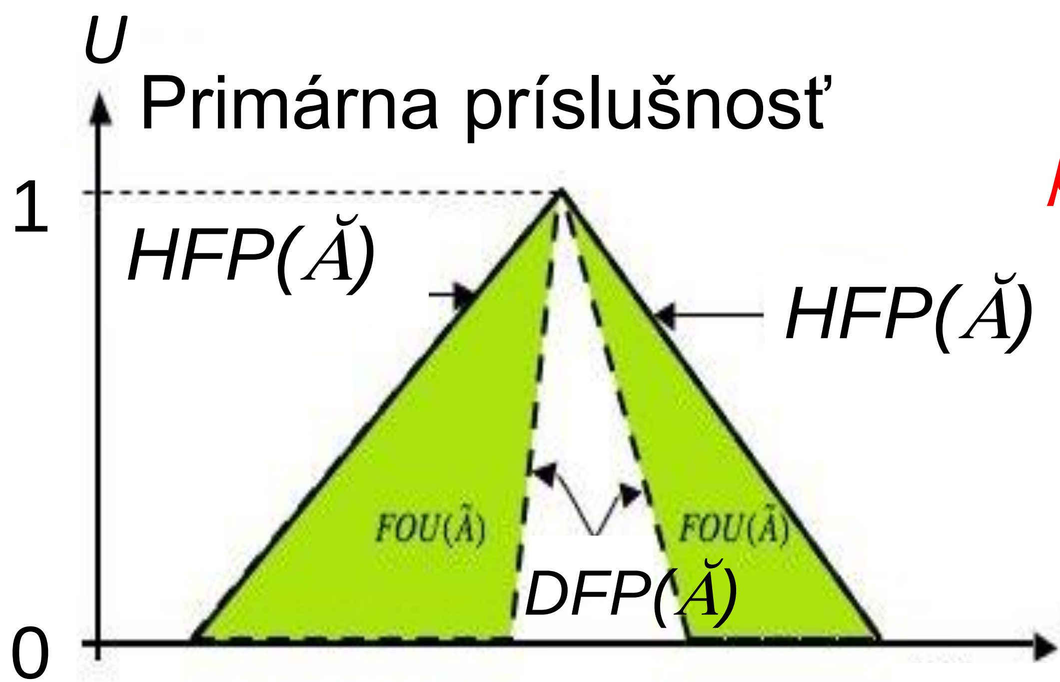
$$\tilde{A} = \left\{ \left(x, \mu_{\tilde{A}}(u_x) \right), \quad \forall x \in X, u_x \in U \right\}$$

u_x – interval hodnôt stupňov príslušnosti pre x

Všeobecná fuzzy množina typu 2 (neurčitosť 2. rádu)



Intervalová fuzzy množina typu 2 (neurčitosť 1. rádu)



$\mu_{\breve{A}}(U_X) = const.$

univerzum

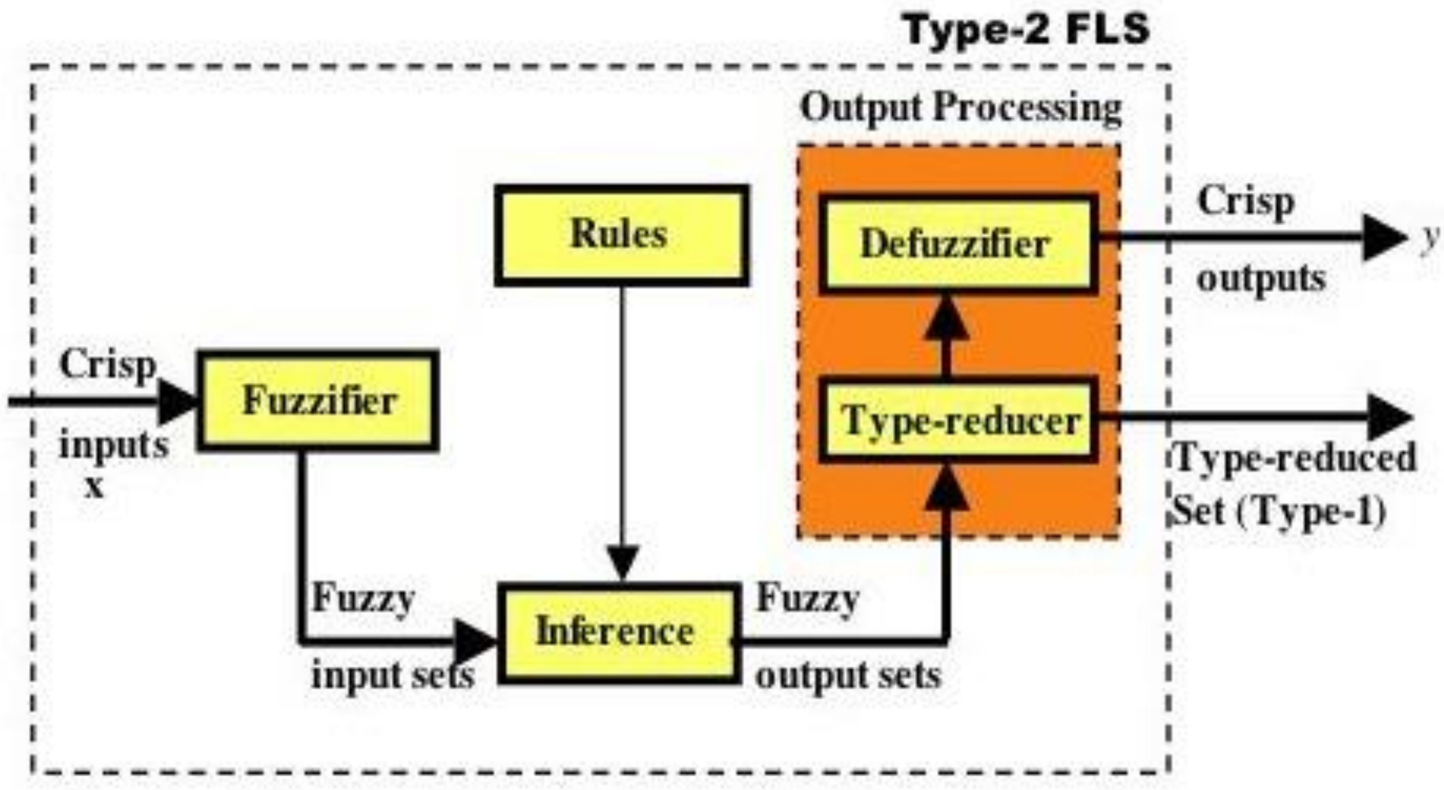
HFP – horná FP
DFP – dolná FP

Pozn.: Odpadá potreba 3. rozmeru pre $\mu_{\breve{A}}(U_X)$.

Pozn.:

- Intervalové FM typu 2 redukujú zložitosť matematiky všeobecných FM na prácu s dvomi klasickými FP (DFP a HFP).
- Všetko, čo platí pre klasické FM, platí aj pre FM typu 2 a naopak.
- Klasické FM sú špeciálnym prípadom, tzv. FM typu 1, ak u_x je jednoprvkový interval.
- Je možné zovšeobecnenie na FM typu n (n=1, 2, …).
- FM typu 2 dokážu zohľadniť odlišnosť názorov viac expertov na význam pojmov a výstupy pravidiel.
- FM typu 2 modelujú aj nestacionárny šum (FM typu 1 modelujú stacionárny šum).

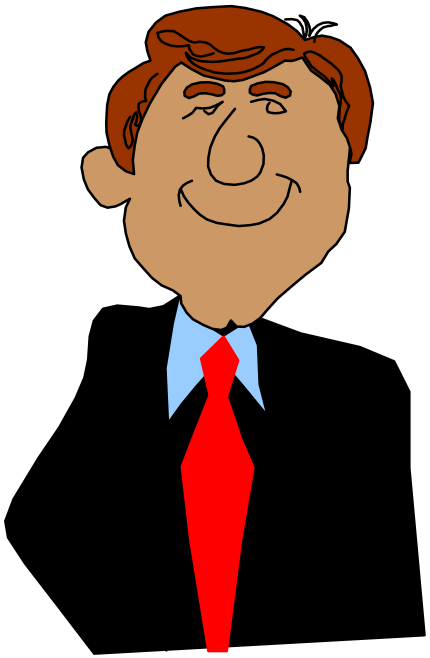
FR s intervalovými FM typu 2



FM typu 1 vyjadruje mieru neurčitosti ostrého výstupu.

Druhy neurčitostí

- Pravdepodobnosť (probability)
- Príslušnosť (fuzzy)
- Možnosť (possibility)
- Nutnosť (necessity)
- Presvedčenie, viera (belief)
- Prijateľnosť, prípustnosť (plausibility)
- **Istota (confidence)**
- ...



Koniec !

Ďakujem za pozornosť.