强化训练

1. $y=\int_0^x e^{-\sqrt{t}}\,dt$ 与 y 轴及其水平渐近线围成图形面积？

$\sqrt{t}=u \quad t=u^2 \quad dt=2u\,du \quad y=\int_0^{\sqrt{x}} e^{-u}\cdot 2u\,du$

$y=-2\int_0^{\sqrt{x}} u\,de^{-u} = -2ue^{-u}\Big|_0^{\sqrt{x}} + 2\int_0^{\sqrt{x}} e^{-u}\,du = -2\sqrt{x}e^{-\sqrt{x}} - 2e^{-\sqrt{x}} + 2$

当 $x\to+\infty$ $\quad y=-(2\sqrt{x}+2)e^{-\sqrt{x}}+2=2$

即 $S=2\int_0^{+\infty}(\sqrt{x}e^{-\sqrt{x}}+e^{-\sqrt{x}})\,dx$

$\sqrt{x}=t \quad x=t^2 \quad dx=2t\,dt \quad S=2\int_0^{+\infty}(te^{-t}+e^{-t})\cdot 2t\,dt$

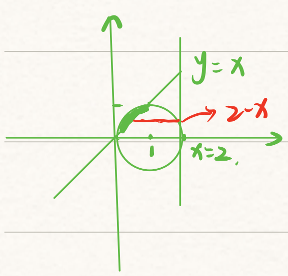
$S=4\int_0^{+\infty} \underline{t^2e^{-t}}\,dt + 4\int_0^{+\infty} te^{-t}\,dt$

$\int t^2e^{-t}dt = -\int t^2 de^{-t} = -t^2e^{-t}+\int e^{-t}\cdot 2t\,dt = -t^2e^{-t}+(-2te^{-t}-2e^{-t})$
$= e^{-t}(-t^2-2t-2)$

$\int te^{-t}dt = -te^{-t}-e^{-t} = -(t+1)e^{-t}$

代入得：$S=4\times(2+1)=12$ #

4. $y=\sqrt{2x-x^2}$ 与 $y=x$ 线 $x=2$ 形成的旋转体体积 $-\frac{2}{3}$



$V=2\pi\int_0^1(2-x)(\sqrt{2x-x^2}-x)\,dx$

$=2\pi\int_0^1(\underline{2\sqrt{2x-x^2}}\ \underline{-2x}-x\underline{\sqrt{2x-x^2}}+\underline{x^2})\,dx$

$V_1=2\pi\int_0^1(-2x+x^2)\,dx=(-x^2+\frac{1}{3}x^3)\Big|_0^1\cdot 2\pi=-\frac{4}{3}\pi$

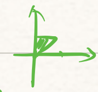
$V_2=2\pi\int_0^1(2-x)\sqrt{2x-x^2}\,dx=2\pi\int_0^1(2-x)\sqrt{1-(x-1)^2}\,dx$

令 $\underline{x-1=\sin t}<0$ $\quad V_2=2\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^0(+1-\sin t)\cos^2t\,dt \overset{m=t+\frac{\pi}{2}}{=\!=\!=} 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(+1-\cos m)(-\underline{\sin^2 m})\,dm$

$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2m+\cos m-\cos^3m)\,dm = 2\pi\times(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}+1-\frac{2}{3})=\frac{\pi^2}{2}+\frac{2}{3}\pi$

$\therefore\ V_1+V_2=\frac{\pi^2}{2}-\frac{2}{3}\pi$ #

7. $f(x)=\int_x^1 \cos t^2\,dt$ 在$[0,1]$上平均值.



$\bar{y}=\int_0^1\int_x^1 \cos t^2\,dt\,dx$ ※ 交换积分次序

$=\int_0^1\int_0^t \cos t^2\,dx\,dt=\int_0^1 t\cos t^2\,dt=\frac{1}{2}\sin 1$

#

9. $0\le y\le\sqrt{4x-x^2}$ $x\le 1$, 绕y轴旋转一周形成体积

$V=2\pi\int_0^1 x\sqrt{4x-x^2}\,dx$ 注意积分方法

$=\pi\int_0^1(4-(4-2x))\sqrt{4x-x^2}\,dx$

$=\pi\int_0^1 4\sqrt{4x-x^2}\,dx-\pi\int_0^1(4-2x)\sqrt{4x-x^2}\,dx$

$=\frac{8}{3}\pi^2-4\sqrt{3}\pi$

巩固提高

1. L_1: $y=\sin x$ L_2: $y=\frac{1}{2}\sin 2x$ L_3: $y=\frac{1}{3}\sin 3x$

比弧长?

$f(x)=\frac{1}{n}\sin nx$ $L:\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\cos^2 nx}\,dx$

令 $nx=t$ $L=\frac{1}{n}\int_0^{2n\pi}\sqrt{1+\cos^2 t}\,dt$

$=\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\cos^2 t}\,dt.$

∴与n无关 故均相等

3. 心形线 $r=2(1+\cos\theta)$ 和 $\theta=0$, $\theta=\frac{\pi}{2}$ 围成的图形绕极轴所成旋转体体积 V ?

x轴

先化为参数方程 $\begin{cases} x=2(1+\cos\theta)\cos\theta \\ y=2(1+\cos\theta)\sin\theta \end{cases}$

$$V=\int_0^4 \pi y^2 dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\pi(4\sin^2\theta(1+\cos\theta)^2)\times(4\cos\theta\times(-\sin\theta)-2\sin\theta)\,d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\pi(4\sin^2\theta\cos^2\theta+8\sin^2\theta\cos\theta+4\sin^2\theta)\times(\sin\theta)(4\cos\theta+2)\,d\theta$$

$$=8\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2\theta\cos^2\theta+2\sin^2\theta\cos\theta+\sin^2\theta)(2\sin\theta\cos\theta+\sin\theta)\,d\theta$$

$$=8\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\sin^3\theta\cos^3\theta+5\sin^3\theta\cos^2\theta+4\sin^3\theta\cos\theta+\sin^3\theta)\,d\theta.$$

$$=8\pi\left\{\int_0^1 2(\sin^3\theta-\sin^5\theta)\,d\sin\theta+5\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^3\theta-\sin^5\theta)\,d\theta+4\int_0^1\sin^3\theta\,d\sin\theta+\frac{2}{3}\right\}$$

$$=8\pi\left((\tfrac14-\tfrac16)\times2+5\times(\tfrac23-\tfrac45\times\tfrac23)+1+\tfrac23\right)$$

$$=8\pi\times\frac{5}{2}=20\pi$$

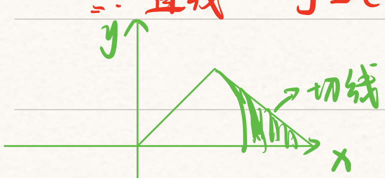
#.

5. 曲线 $r=1+\cos\theta$ 与 $(\frac{\pi}{4}, 1+\frac{\sqrt2}{2})$ 处切线与 x轴所围图形 S ?

化参数方程 $\begin{cases} x=r\cos\theta=\cos\theta+\cos^2\theta \\ y=r\sin\theta=\sin\theta+\sin\theta\cos\theta. \end{cases}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\cos\theta+\cos^2\theta-\sin^2\theta}{-\sin\theta-2\cos\theta\sin\theta}\bigg|_{\theta=\frac{\pi}{4}}=\frac{\frac{\sqrt2}{2}}{-\frac{\sqrt2}{2}-1}=\frac{1}{-1-\sqrt2}=1-\sqrt2.$$

∴ 直线 $y=(1-\sqrt2)(x-\frac{\sqrt2}{2}-\frac12)+\frac12+\frac{\sqrt2}{2}=(1-\sqrt2)x+1+\frac{\sqrt2}{2}$



$S=S_{\triangle}-S_{心形线}$

$=\frac12\times(2+\frac{3\sqrt2}{2})(\frac{\sqrt2}{2}+\frac12)=\frac{10+7\sqrt2}{8}-S_{心}$

$S_{心}=\frac12\int_0^{\frac{\pi}{4}}r^2d\theta=\frac18+\frac{\sqrt2}{2}+\frac{3}{16}\pi$ ∴ $S=\frac{10+7\sqrt2}{8}-\frac18-\frac{\sqrt2}{2}-\frac{3}{16}\pi=\frac98+\frac{3\sqrt2}{8}-\frac{3}{16}\pi$

7. $r^2=a^2\cos 2\theta\ (a>0)$ 绕极轴旋转曲面面积？

×: $S=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} r\sin\theta\sqrt{r^2+(r')^2}\,d\theta.$

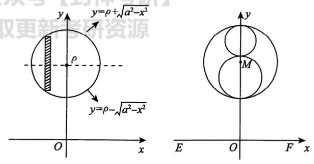
8.

8.【解析】首先计算一个圆绕其外一直线旋转所得旋转体体积 V_0 的通式. 建立坐标系如图 1-10-11(a) 所示. 设圆的半径为 a，圆心到转轴的距离为 ρ，则圆的方程为 $x^2+(y-\rho)^2=a^2$. 故有

$$V_0=\pi\int_{-a}^{a}[(\rho+\sqrt{a^2-x^2})^2-(\rho-\sqrt{a^2-x^2})^2]\mathrm{d}x$$
$$=8\pi\rho\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x=8\pi\rho\cdot\frac{1}{4}\pi a^2=2\pi^2\rho a^2.$$

现设上面小圆的半径为 r，则下面小圆的半径为 $R-r$，且上、下两个小圆的圆心到转轴的距离分别为 $3R-r$, $2R-r$，如图 1-10-11(b) 所示. 于是，所述旋转体的体积为

$$V=V_{大}-V_{上}-V_{下}$$
$$=2\pi^2(2R)R^2-2\pi^2(3R-r)r^2-2\pi^2(2R-r)(R-r)^2$$
$$=2\pi^2(2r^3-7Rr^2+5R^2r)\ (0<r<R).$$



(a) (b)

图 1-10-11

令 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}=2\pi^2(6r^2-14Rr+5R^2)=0$，解得 $r=\frac{7-\sqrt{19}}{6}R$. 这是函数 $V(r)$ 在其定义域 $(0,R)$ 内的唯一驻点. 因为在该点处 $\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}r^2}=4\pi^2(6r-7R)=-4\sqrt{19}\pi^2R<0$，所以当 $r=\frac{7-\sqrt{19}}{6}R$ 时，函数 $V(r)$ 取极大值，从而也是最大值. 此时，上、下两个小圆的半径分别为 $r=\frac{7-\sqrt{19}}{6}R$ 与 $R-r=\frac{\sqrt{19}-1}{6}R$.