§1.5. $f(x)=\ln(1+x^2)-2\sqrt[3]{(e^x-1)^2}$ 同阶

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^k}=\lim_{x\to0}\frac{x^2-2\cdot x^{\frac{2}{3}}}{x^k}=A$$

$k=\frac{2}{3}$,

§1.16. $\lim_{x\to-\infty}\left[\sqrt{x^2-x+1}-(ax+b)\right]=0$

原式 $=\lim_{x\to-\infty}\left[x\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-(ax+b)\right]=0$

$\lim_{x\to-\infty}\left[x\left(-\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-a-\frac{b}{x}\right)\right]=0 \Rightarrow a=-1$

即 $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}+x\right)=b$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-x+1}{\sqrt{x^2-x+1}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-\frac{1}{x}}=\frac{-1}{-2}=\frac{1}{2}$$

1.20. $x\to0$ $x-\sin x\cos x\cos 2x$

$=x-\frac{1}{2}\sin 2x\cos 2x$

$=x-\frac{1}{4}\sin 4x$

$\sin x\sim x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)$

$\frac{1}{4}\sin 4x\sim\frac{1}{4}\cdot 4x-\frac{(4x)^3}{3!}\cdot\frac{1}{4}+o(x^3)$

$\frac{4^2x^3}{3!}+o(x^3)$

$=\frac{8}{3}x^3$ $c=\frac{8}{3}$ $k=3$

1.23. $\lim_{x\to0}\frac{\int_{\sin x}^{x}\sqrt{3+t^2}\,dt}{x(e^{x^2}-1)}$ 积分中值 $\int_{\sin x}^{x}\sqrt{3+t^2}\,dt=(x-\sin x)\cdot\sqrt{3+\xi^2}$ $\xi\in(\sin x,x)$

原式 $=\lim_{x\to0}\frac{(x-\sin x)\sqrt{3+\xi^2}}{x^3}$ $x-\sin x\sim\frac{1}{6}x^3$

$=\frac{\sqrt{3}}{6}$

1.25 $\lim_{x\to0}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)$

$x\to0^+$ $\frac{1}{x}\to+\infty$ $\lim_{x\to0^+}\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}\overset{洛}{=}\lim_{x\to0^+}\frac{e^{\frac{1}{x}}\cdot(-\frac{1}{x^2})}{e^{\frac{4}{x}}\cdot(-\frac{4}{x^2})}=\lim_{x\to0^+}e^{-\frac{3}{x}}=0$ 原式 $=0+1=1$

$x\to0^-$ $\frac{1}{x}\to-\infty$ $e^{\frac{1}{x}}\to0$ 原式 $=2-1=1$

综上 $\lim_{x\to0}=1$

1.26.

(7) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2(a^{\frac{1}{x}}+a^{-\frac{1}{x}}-2)$ $\quad a>0 \quad a\neq 1$

令 $\frac{1}{x}=t$ $\quad t\to 0$ $\quad$ 原式 $=\lim\limits_{t\to 0}\frac{a^t+a^{-t}-2}{t^2} \overset{洛}{=} \frac{a^t\ln a-a^{-t}\ln a}{2t} \overset{洛}{=} \frac{a^t(\ln a)^2+a^{-t}(\ln a)^2}{2}$

$= \frac{2(\ln a)^2}{2} = \ln^2 a$

(11) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$

原式 $= e^{\frac{\ln(\sin x)-\ln x}{1-\cos x}}$

不直接约

$g(x)=\frac{\ln\sin x-\ln x}{1-\cos x} \overset{洛}{=} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{x}}{\sin x} = \frac{x\cos x-\sin x}{x\sin^2 x}$

$= \frac{x\cos x-\sin x}{x^3} \overset{洛}{=} \frac{\cos x - x\sin x-\cos x}{3x^2} = \frac{-x\sin x}{3x^2} = -\frac{1}{3}$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0^+} = e^{-\frac{1}{3}}$

(15) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{a}{x}-\left(\frac{1}{x^2}-a^2\right)\ln(1+ax)\right]$ $\quad a\neq 0$

原式 $= \lim\limits_{x\to 0}\frac{ax-(1-a^2x^2)\ln(1+ax)}{x^2} = \frac{ax-\ln(1+ax)}{x^2} \overset{洛}{=} \frac{a-\frac{a}{1+ax}}{2x} = \frac{\frac{a^2x}{1+ax}}{2x} = \frac{a^2}{2}$

(16) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\sin^2 x+e^x)-x}{\ln(x^2+e^{2x})-2x}$

原式 $= \lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\frac{\sin^2 x+e^x}{e^x}}{\ln\frac{x^2+e^{2x}}{e^{2x}}} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{\sin x^2}{e^x}\right)}{\ln\left(1+\frac{x^2}{e^{2x}}\right)} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\sin^2 x^2}{e^x}}{\frac{x^2}{e^{2x}}} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{x^2}\cdot e^x$

$x\to 0$ $\quad$ 原式 $= e^0 = 1$

(19) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x^x-(\tan x)^x}{x(\sqrt{1+3\sin^2 x}-1)}$

$\sqrt{1+3\sin x^2}-1 \sim \frac{3}{2}\sin x^2 \sim \frac{3}{2}x^2$

$\tan x - x \sim \frac{1}{3}x^3$

原式 $= \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{2}{3}\cdot\frac{x^x\left[1-\left(\frac{\tan x}{x}\right)^x\right]}{x^3}$

$\lim\limits_{x\to 0} x^x = 1$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} -\frac{2}{3}\cdot\frac{e^{x\ln\frac{\tan x}{x}}-1}{x^3} = -\frac{2}{3}\cdot\frac{\tan x - x}{x^3} = -\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} = -\frac{2}{9}$

$e^{x\ln\frac{\tan x}{x}}-1 \sim x\ln\frac{\tan x}{x} \sim x\ln\left(\frac{\tan x}{x}+1-1\right) \sim x\left(\frac{\tan x}{x}-1\right) = \tan x - x$

§1.27. $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)$

令 $y=\frac{1}{x}$ 原式 $=\lim_{y\to0}\frac{\sqrt{\frac{1}{y}+2}-2\sqrt{\frac{1}{y}+1}+\sqrt{\frac{1}{y}}}{\sqrt{y}}=\lim_{y\to0}\frac{\sqrt{1+2y}-2\sqrt{1+y}+1}{y}$

$=\lim_{y\to0}\frac{\sqrt{\frac{1}{y^2}+2}-2\sqrt{\frac{1}{y^2}+1}+\frac{1}{y^2}}{1}=0.$

§1.28. $\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x\int_0^{u^2}\arctan(1+t)dt\,du}{\sin x\cdot\int_0^1\tan(xt)^2dt}$

令 $xt=u$ $\frac{1}{x}\int_0^x\tan u^2\cdot du$ 令 $f(u)=\int_0^{u^2}\arctan(1+t)dt$

原式 $=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x f(u)du}{x\cdot\frac{1}{x}\int_0^x\tan u^2du}\overset{洛}{=}\frac{f(x)}{\underbrace{\tan x^2}_{x^2}}\overset{洛}{=}\frac{\arctan(1+x^2)\cdot\cancel{2x}}{\cancel{2x}}=\arctan 1$

$=\frac{\pi}{4}$

§1.32. $f(x)=\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$

求 $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(a^x+b^x)^{\frac{1}{x}}}{(\frac{1}{2})^{\frac{1}{x}}\to1}=\max\{a,b\}.$

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots a_m^n}=\underbrace{\max\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}}$

$\lim_{n\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{(a^x+b^x)^{\frac{1}{x}}}{(\frac{1}{2})^{\frac{1}{x}}}\overset{x=-t}{=\!=}\lim_{t\to+\infty}(a^{-t}+b^{-t})^{-\frac{1}{t}}=\left(\left((\frac{1}{a})^t+(\frac{1}{b})^t\right)^{\frac{1}{t}}\right)^{-1}$

$=\left\{\max\{\frac{1}{a},\frac{1}{b}\}\right\}^{-1}$

$=\min\{a,b\}.$

§1.37. $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}$ $\underbrace{(\text{连}\quad x<1\ \lim_{n\to\infty}x^n=0\quad x>1\ \lim_{n\to\infty}x^n=\infty)}$

讨论：① $x=1$ $f(x)=\frac{1+a+b}{2}$ ② $x=-1$ $f(x)=\frac{-1+a-b}{2}$

③ $|x|<1$ $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{ax^2+bx}{1}=ax^2+bx$ ④ $|x|>1$ $f(x)=\frac{1}{x}$

连续 $\lim_{x\to1^+}f(x)=1=\frac{1+a+b}{2}=\lim_{x\to1^-}f(x)=a+b$ 则 $a+b=1.$

$\lim_{x\to(-1)^-}f(x)=-1=\frac{-1+a-b}{2}=\lim_{x\to(-1)^+}f(x)=a-b$ 则 $a-b=-1$ $\Big\}$ $\underline{a=0\quad b=1}$ #

巩固部分

§1.4 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^2+nx(1-x)\sin^2\pi x}{1+n\sin^2\pi x}$

讨论：$x=\pm k$ 整数　$\sin\pi x=0$　原式 $=x^2$

$x=$ 其它．　原式 $=\dfrac{nx(1-x)\sin^2\pi x}{n\sin^2\pi x}=x(1-x)$

除 $x=0$ 外，均为跳跃间断点。

§1.5 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{n+3}}{\sqrt{3^{2n}+x^{2n}}}$　找间断点．

讨论　当 $x>3$ 时　原式 $=\dfrac{x^{n+3}}{x^n}=x^3$　$\lim\limits_{x\to3^+}f(x)=27$

当 $x<3$ 时　原式 $=\dfrac{x^{n+3}}{3^n}$　$\lim f(x)=0.$

$x=3$ 跳跃间断点．

§1.7. $f(x)=27x^3+5x^2-2$　记 $f^{-1}(y)=x$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f^{-1}(x)}{\sqrt[3]{x}}=\lim_{y\to\infty}\frac{f^{-1}(y)}{\sqrt[3]{y}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt[3]{27x^3+5x^2-2}}=\frac{1}{3x}=\frac{1}{3}$$

改变字母不影响取值．

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f^{-1}(27x)}{\sqrt[3]{x}}\xlongequal{27x=u}\lim_{u\to\infty}3\frac{f^{-1}(u)}{\sqrt[3]{u}}=3\cdot\frac{1}{3}=1$$

综上 原式 $=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$　#

§1.8. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt[4]{x^4+x^3+x^2+x+1}-\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}\cdot\dfrac{\ln(x+e^x)}{x}\right]$　$\lim\limits_{x\to+\infty}xe^{-x}=0$

$\dfrac{x+\ln(1+xe^{-x})}{x}$　$\sim e^{-x}\sim0\ (x\to\infty)$

$$\text{原式}=\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt[4]{x^4+x^3+x^2+x+1}-\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}\right]$$

$$\xlongequal[t\to0^+]{x=\frac{1}{t}}\lim_{t\to0^+}\left(\frac{\sqrt[4]{1+t^4+t^3+t^2}-1}{t}-\frac{\sqrt[3]{t^3+t^2+t+1}-1}{t}\right).$$

同时凑等价代换 $(1+x)^\alpha\sim\alpha x$

$$=\lim_{t\to0^+}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{t^4+t^3+t^2}{t}\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{t^3+t^2+t}{t}\right)\right]=\frac{1}{4}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{12}$$

#

§1.10. $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}} \Rightarrow f(x)=e+Ax+Bx^2+o(x^2)$

$f(x)=e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}$ $\qquad \ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$

$\frac{\ln(1+x)}{x}=1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2+o(x^2)$

$f(x)=e^{\underbrace{1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2+o(x^2)}_{\text{不能直接展开}}}=e\cdot e^{(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2+o(x^2))}$

$\xrightarrow{x\to 0} 1$

$=e\left\{1+(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2+o(x^2))+\frac{1}{2!}(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2+o(x^2))^2\right\}+o(x^2)$

$=e+(-\frac{1}{2}e)x+(\frac{1}{3}+\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{4})x^2+o(x^2)$

$=e+(-\frac{1}{2}e)x+\frac{11}{24}ex^2+o(x^2)$

$A=-\frac{1}{2}e \qquad B=\frac{11}{24}e$

※

§1.12. $I=\lim_{x\to+\infty}[(x^\alpha+8x^4+2)^k-x]$

$\underline{\underline{x=\frac{1}{t}}}$ $\lim_{t\to 0}(\frac{1}{t^\alpha}+\frac{8}{t^4}+2)^k-\frac{1}{t}=\lim_{t\to 0}(\frac{1+8t^{\alpha-4}+2t^\alpha}{t^\alpha})^k-\frac{1}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{(1+8t^{\alpha-4}+2t^\alpha)^k-t^{\alpha k-1}}{t^{\alpha k}}$

仅当 $\alpha k=1$ 时 $\lim_{t\to 0}\frac{0}{0}$ 根限存在 即原式 $=\frac{k(8t^{\alpha-4}+2t^\alpha)}{t}=k8t^{\alpha-5}+2t^{\alpha-1}k$

① $\alpha=5$ $\quad k=\frac{1}{5}$ $\quad \lim_{t\to 0}I=\frac{8}{5}+\frac{2}{5}t^4=\frac{8}{5}$

② $\alpha>5$ $\quad \lim_{t\to 0}I=0$

※

§1.14 证明 $f(x)>0$ $\quad f(0)=1$ $\quad \therefore f(x)\geq 1$

$\therefore f(x)\leq\frac{1}{1+x^2}$

$f(x)-f(0)=\int_0^x f'(t)\,dt\leq\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}=\arctan x$

$f(x)\leq 1+\arctan x<1+\frac{\pi}{2}$

单调有界 $\qquad$ 证毕

※

§1.16. $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+(2x)^n+x^{2n}}$

由上 §1.32可知 原式 $=\max\{1, 2x, x^2\}$.

即 $f(x)=\begin{cases} 1 & [0,\frac{1}{2}) \\ 2x & [\frac{1}{2},2) \\ x^2 & [2,+\infty) \end{cases}$

$x=\frac{1}{2}$ 连续　　$x=2$ 连续　　$\therefore$ 原函数连续