Relazione HA_7

Mario Sguario S4841630, Federica Tamerisco S4942412

Introduzione

L'assignment consiste nell'implementare un codice di correzione degli errori.
Durante la comunicazione è possibile che si generino dei weak error, ad esempio che un qubit del tipo $|1\rangle$ si trasformi in $a|1\rangle + b|0\rangle$ con $|b| \ll |a|$.

Per ovviare a ciò, si immagazzina l'informazione logica in un numero dispari sempre maggiore di bit, a seconda dell'importanza del rumore: per esempio, il qubit logico $|0_L\rangle$ può essere rappresentato come stato composto dai qubit $|000\rangle$.

Per riuscire a capire l'errore e correggerlo si applica quindi il protocollo di voto di maggioranza: si misurano i bit e, grazie alla ridondanza d'informazione, è possibile riconoscere l'errore e correggerlo.

Inizializzazione

Per implementare il codice abbiamo utilizzato PennyLane e le librerie per generare numeri random, per le operazioni matematiche e per la creazione dei grafici

```
import pennylane as qml
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import random
```

Siamo partiti creando lo stato a singolo qubit $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$, con α e β a piacimento.
Abbiamo definito il numero di qubit per immagazzinare l'informazione

```
n_qubits = 3
```

Poi abbiamo inizializzato il device

```
dev = qml.device('default.qubit', wires=n_qubits, shots=1000)
```

Abbiamo scelto i coefficienti, α e β, in quanto la probabilità $|\alpha|^2 + |\beta|^2$ deve essere uguale a 1

```
alpha = 0.4
beta = np.sqrt(1 - alpha ** 2)
```

Infine abbiamo creato la funzione per inizializzare lo stato

```
def initial_state(alpha, beta):
    qml.RY(2 * np.arccos(alpha), wires=0)
    qml.CNOT(wires=[0, 1])
    qml.CNOT(wires=[0, 2])
```

Per creare lo stato abbiamo utilizzato una rotazione sull'asse Y sul qubit in posizione 0.

Dopodiché abbiamo applicato 2 porte CNOT per poter inizializzare i qubit ancilla: sono i qubit aggiunti alla rappresentazione del qubit logico, necessari per la ridondanza e quindi il riconoscimento dell'errore. In questo momento quindi il nostro stato generico è $|\psi\rangle = \alpha|0_L\rangle + \beta|1_L\rangle$.

Implementazione dell'errore

Ora è necessario implementare una trasformazione unitaria che simuli l'errore su un qubit del tipo $|1\rangle \rightarrow a|1\rangle + b|0\rangle$ con $|b| \ll |a|$.

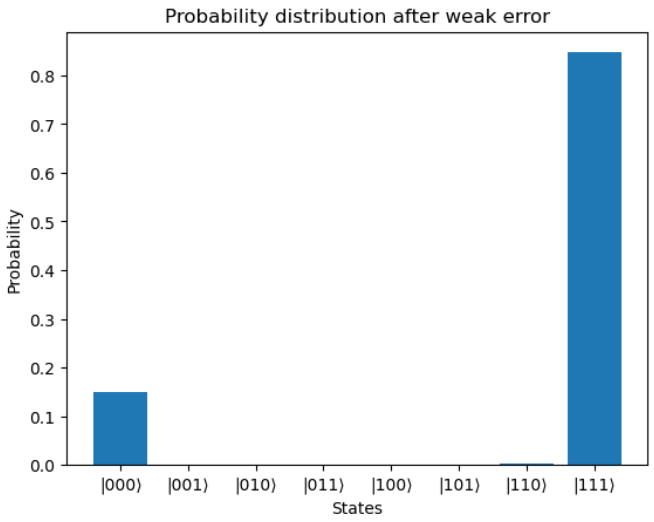
```
def apply_weak_error():
    qubit_to_flip = random.randint(0, 2)
    epsilon = 0.1
    qml.RX(epsilon, wires=qubit_to_flip)
```

Abbiamo implementato una funzione che si occupa di scegliere un qubit randomico da flippare per poi applicare una rotazione sull'asse X di angolo $epsilon$ che andrà a sviluppare l'errore.

```
@qml.qnode(dev)
def circuit1(alpha, beta):
    initial_state(alpha, beta)
    apply_weak_error()

    return qml.probs(wires=[0, 1, 2])
```

Quindi l'abbiamo applicata al nostro stato e abbiamo stampato la probabilità di errore

```
State |000⟩: 0.1520
State |001⟩: 0.0010
State |010⟩: 0.0000
State |011⟩: 0.0000
State |100⟩: 0.0000
State |101⟩: 0.0000
State |110⟩: 0.0030
State |111⟩: 0.8440
```



L'output indica come si ha una grande probabilità di ricadere nello stato $|111\rangle$ (come indicato da β), una minor probabilità di ricadere in $|000\rangle$ (come indicato da α) e delle piccole probabilità di avere un bit flip randomico, che in questo caso provoca il flip del terzo qubit.

Codice di correzione

Ora che è presente l'errore, bisogna implementare l'algoritmo che lo rilevi e lo risolva.
Una misura diretta dello stato distruggerebbe la sovrapposizione, per cui si devono trovare degli osservabili che permettono di estrarre l'informazione senza perturbare lo stato.
Si prendono quindi gli operatori:

- $Z_1 \otimes Z_2$, che misura contemporaneamente il valore dell'operatore Z di Pauli del primo e del secondo qubit
- $Z_1 \otimes Z_3$, che invece misura il valore dell'operatore Z di Pauli del primo e del terzo qubit

Essendo che il nostro stato è un autostato degli operatori $Z_1 \otimes Z_2$ e $Z_1 \otimes Z_3$, avremo che lo stato collasserà o nello stato corretto autocorreggendo l'errore, oppure nello stato con un bit flippato: in quest'ultimo caso, uno dei due autovalori avrà valore -1

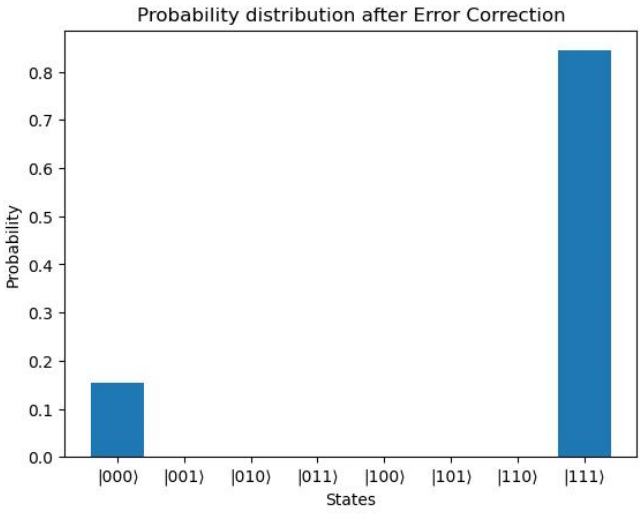
```
@qml.qnode(dev)
def circuit2(alpha, beta):
    initial_state(alpha, beta)
    apply_weak_error()

    Z1Z2 = qml.sample(qml.PauliZ(0) @ qml.PauliZ(1))
    Z1Z3 = qml.sample(qml.PauliZ(0) @ qml.PauliZ(2))

    if Z1Z2 == 1 and Z1Z3 == 1:
        pass
    elif Z1Z2 == -1 and Z1Z3 == -1:
        qml.PauliX(wires=0)
    elif Z1Z2 == -1 and Z1Z3 == 1:
        qml.PauliX(wires=1)
    elif Z1Z3 == 1 and Z1Z2 == -1:
        qml.PauliX(wires=2)

    corrected_state = qml.probs(wires=[0, 1, 2])
    return Z1Z2, Z1Z3, corrected_state
```

Abbiamo misurato gli operatori utilizzando delle porte di Pauli Z.

A seconda del risultato della misura abbiamo utilizzato delle strategie di correzione diverse.
Infatti, se entrambi gli operatori hanno riportato $+1$ vuol dire che non si è verificato errore.
Altrimenti, abbiamo applicato una porta di Pauli X sul qubit compromesso:

- Se entrambi hanno riportato -1, l'errore è nel primo qubit
- Se $Z_1 \otimes Z_2 = -1$ e $Z_1 \otimes Z_3 = 1$, l'errore è nel secondo
- Se $Z_1 \otimes Z_2 = 1$ e $Z_1 \otimes Z_3 = -1$, l'errore è nel terzo

Dopodiché abbiamo misurato lo stato corretto e plottato il risultato.



Conclusioni

Durante l'implementazione abbiamo avuto delle problematiche con l'utilizzo di PennyLane.
Infatti, non è possibile mantenere lo stato finale nella forma $|\psi\rangle = \alpha|000\rangle + \beta|111\rangle$.
Si avrà invece uno stato $|000\rangle$ con probabilità $|\alpha|^2$ e $|111\rangle$ con probabilità $|\beta|^2$.
Avendo scelto $\alpha = 0.4$, avremo $P_{|000\rangle} \approx 0.16$ e $P_{|111\rangle} \approx 0.84$.