Ex 4 $\quad \phi \in L^1$, bien sûr, et sa TF vaut (cf. tableau)

$$\hat{\phi}(\xi) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2\pi + 4\pi^2\xi^2}.$$ En appliquant alors

la formule dans L^1, $\widehat{f*\phi} = \hat{f}\,\hat{\phi}$ et en

notant que $\widehat{g_\pi} = g_\pi$ (cf. tableau), on obtient :

$$\frac{\sqrt{2\pi}}{2\pi+4\pi^2\xi^2}\,\hat{\phi}(\xi) = e^{-\pi\xi^2}$$. Soit encore

$$\hat{\phi}(\xi) = \sqrt{2\pi}\, e^{-\pi\xi^2} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(2i\pi\xi)^2 e^{-\pi\xi^2}$$

Cette fonction étant L^1, ainsi que ϕ, on

peut appliquer le thm d'inversion dans L^1, qui donne :

$$\phi(x) = \sqrt{2\pi}\, g_\pi(x) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\widehat{(-2i\pi\xi)^2 \widehat{g_\pi}(\xi)}(x)$$

$$= \sqrt{2\pi}\, g_\pi(x) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\widehat{\widehat{g_\pi''}}(x)$$

Formule (5)

$$= \sqrt{2\pi}\, g_\pi(x) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} g_\pi''(x).$$

On peut noter que $g_\pi''(x) = 2\pi\, g_\pi(x)\,(2\pi x^2 - 1)$.
(et donc une petite simplification).