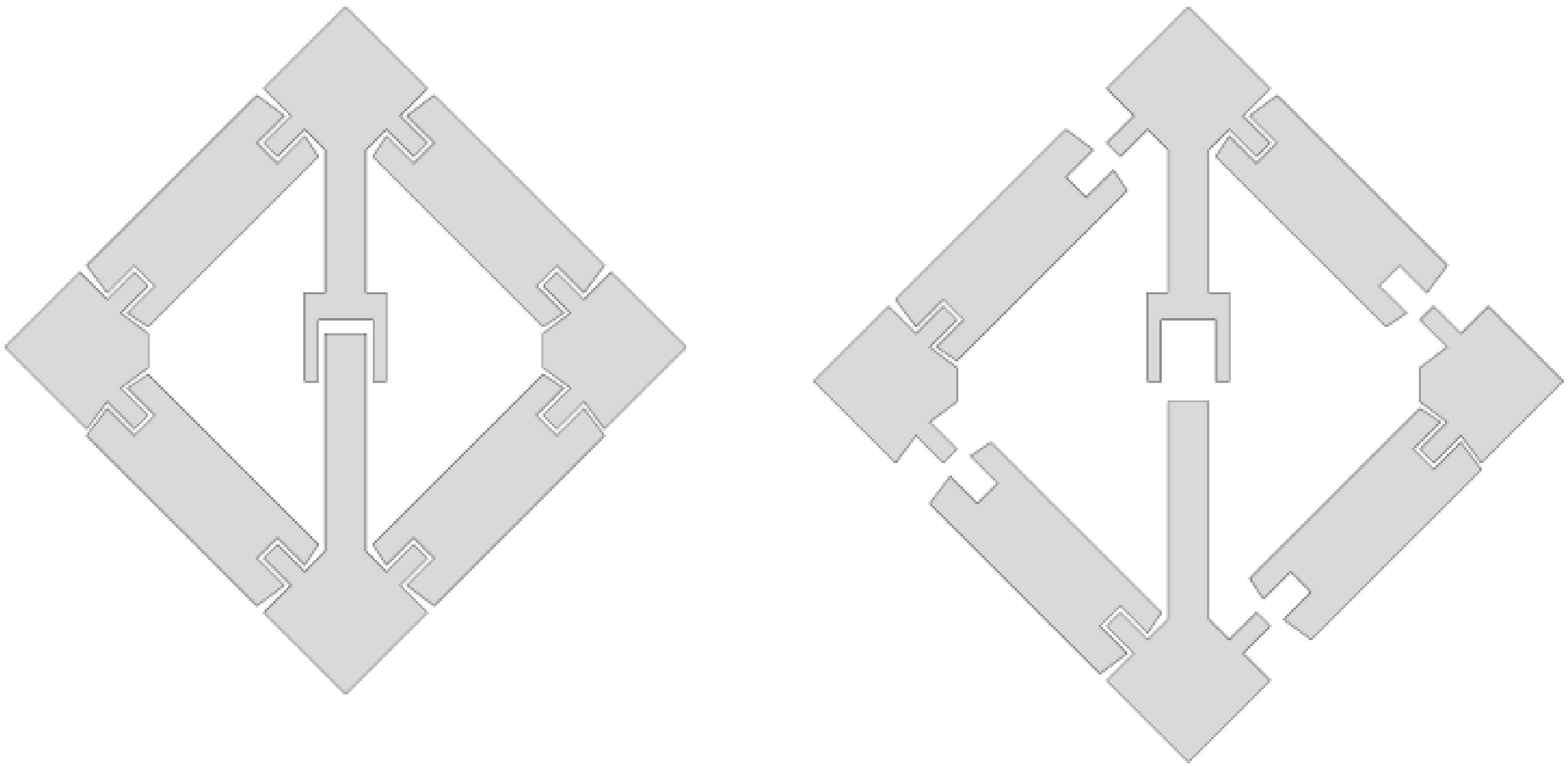
Linear Programming

Motivation

Trenn-/Montierbarkeit von polyedrischen Objekten



Linear Programming

Linear Programming? Was ist das?

Spezielles Optimierungsverfahren

Und warum hier?

Simplex-Verfahren: Geometrische Interpretation

Linear Programming

Historie

- Notwendigkeit, militärische Logistik zu optimieren
    - Kantorovich, Leonid, 1939: Lineare Programme
    - Dantzig, George, 1947: Simplex-Methode

- Standard-Methode im Bereich Operations Research
  (z.B. Produktionsplanung)

Linear Programming

Linear Programming?

- Optimierungsproblem
- Lineare Zielfunktion
- Randbedingungen: Lineare Ungleichungen

Mathematische Formulierung…

Linear Programming

Lineares Programm, mathematisch formuliert

Optimierungsproblem,

geg. $A \in \mathbb{R}^{m,n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ $c \in \mathbb{R}^n$ $x \in \mathbb{R}^n$ x_i positiv

Randbedingungen (lineare Ungleichungen) (manchmal auch b_i)

$$\begin{array}{llll} a_{11}x_1 & + \ldots & +a_{1n}x_n & \leq b_1 \\ a_{21}x_1 & + \ldots & +a_{2n}x_n & \leq b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + \ldots & +a_{mn}x_n & \leq b_m \end{array}$$

- Zu maximierende, lineare Zielfunktion

$$c^T x = c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n$$

Kurzform: $\max\{c^T x \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$

schnell ein Beispiel…

Linear Programming

Beispiel: Produktionsplanung, Engpassrechnung

Zwei Produktvarianten: Typ1 (X1), Typ2 (X2)

Drei Bestandteile

- Vorräte begrenzt
- Bedarf unterschiedlich nach Variante (s. Tabelle)

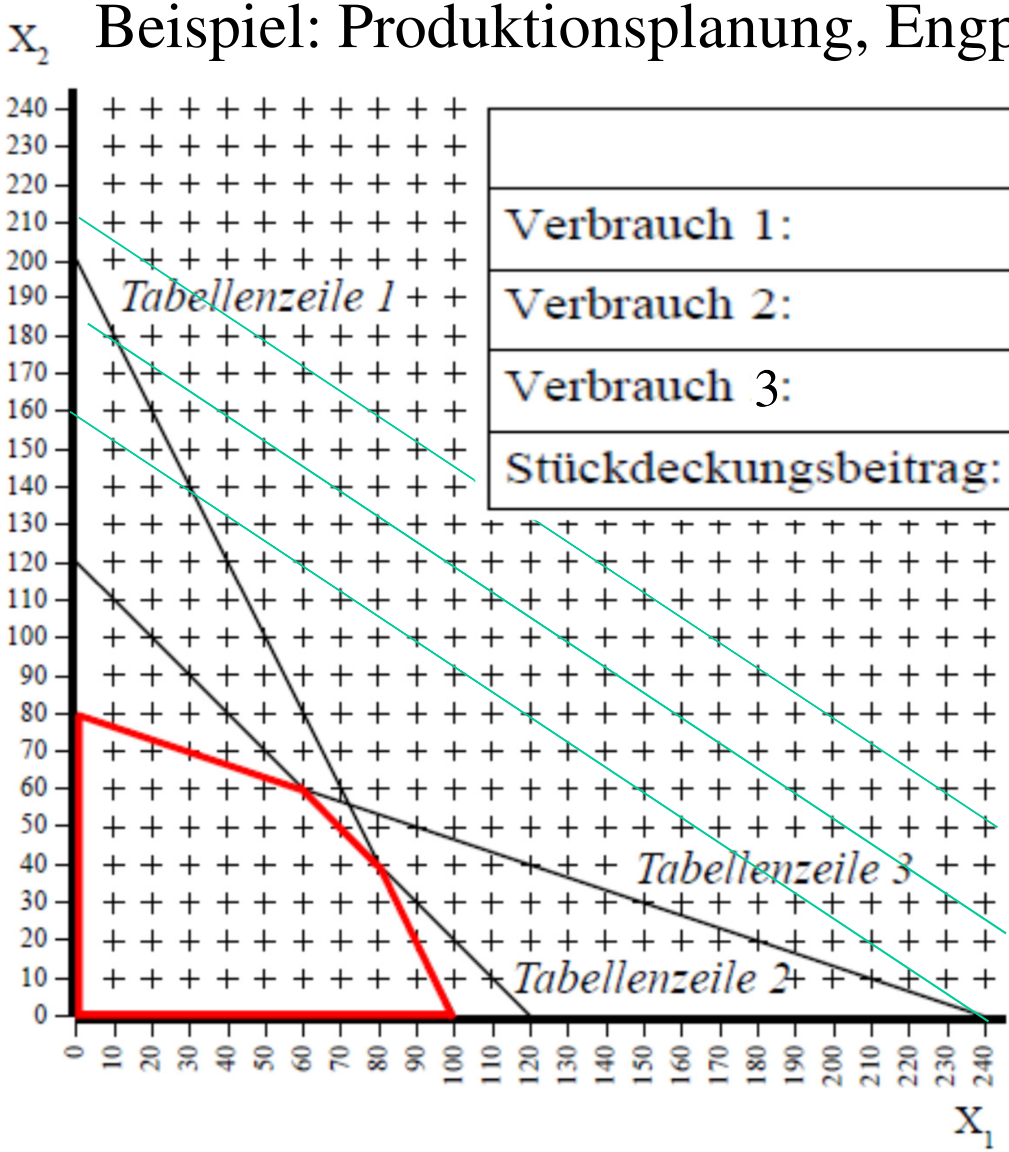
Ertrag (Stückdeckungsbeitrag, DB) unterschiedlich (s. Tabelle)

Ziel: Ertrag maximieren!

	Typ 1	Typ 2	Vorrat
Verbrauch 1:	2 Kg	1 Kg	200 Kg
Verbrauch 2:	1 Kg	1 Kg	120 Kg
Verbrauch 3:	1 Kg	3 Kg	240 Kg
Stückdeckungsbeitrag:	2 €	3 €	→ Max!

Linear Programming

Beispiel: Produktionsplanung, Engpassrechnung



	Typ 1	Typ 2	Vorrat
Verbrauch 1:	2 Kg	1 Kg	200 Kg
Verbrauch 2:	1 Kg	1 Kg	120 Kg
Verbrauch 3:	1 Kg	3 Kg	240 Kg
Stückdeckungsbeitrag:	2 €	3 €	→ Max!

Zielfunktion:

Max: $2\ X_1 + 3\ X_2$

Randbedingungen:

$2\ X_1 + 1\ X_2 \leq 200$

$1\ X_1 + 1\ X_2 \leq 120$

$1\ X_1 + 3\ X_2 \leq 240$

Prof. M. Fischer, HS München

Linear Programming

Beispiel: Abbildung auf LP-Solver

Mathematisch:

$$\max\{c^T x \mid Ax \le b, x \ge 0\}$$

MATLAB:

x = linprog(f,A,b) solves **min** f'*x such that A*x ≤ b.

Variablen: X_1, X_2

Zielfunktion:

Max: $2\,X_1 + 3\,X_2$ $\quad c^T = (2 \;\; 3) \quad$ (MATLAB wg. min: $c^T = (-2 \;\; -3)$)

Randbedingungen:

$2\,X_1 + 1\,X_2 \le 200$

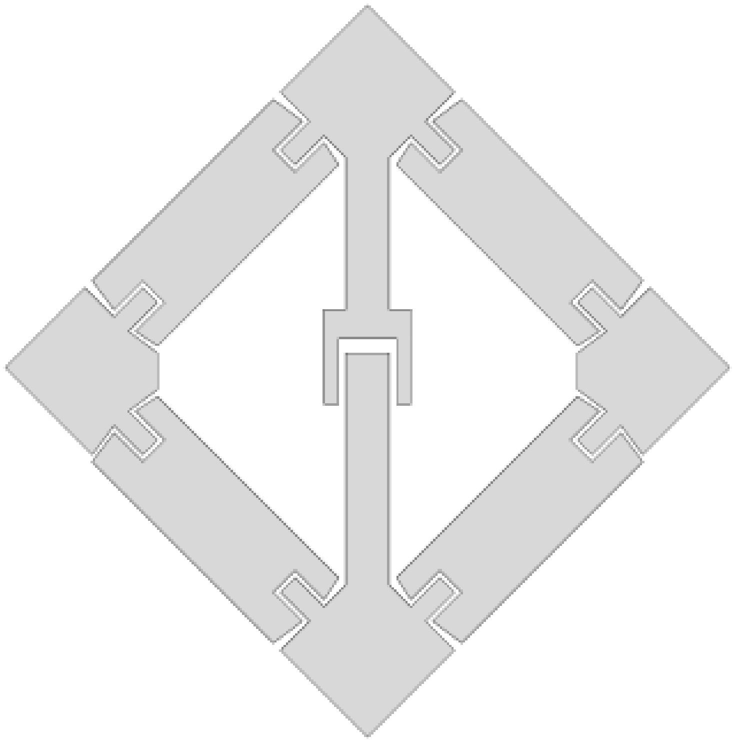
$1\,X_1 + 1\,X_2 \le 120$

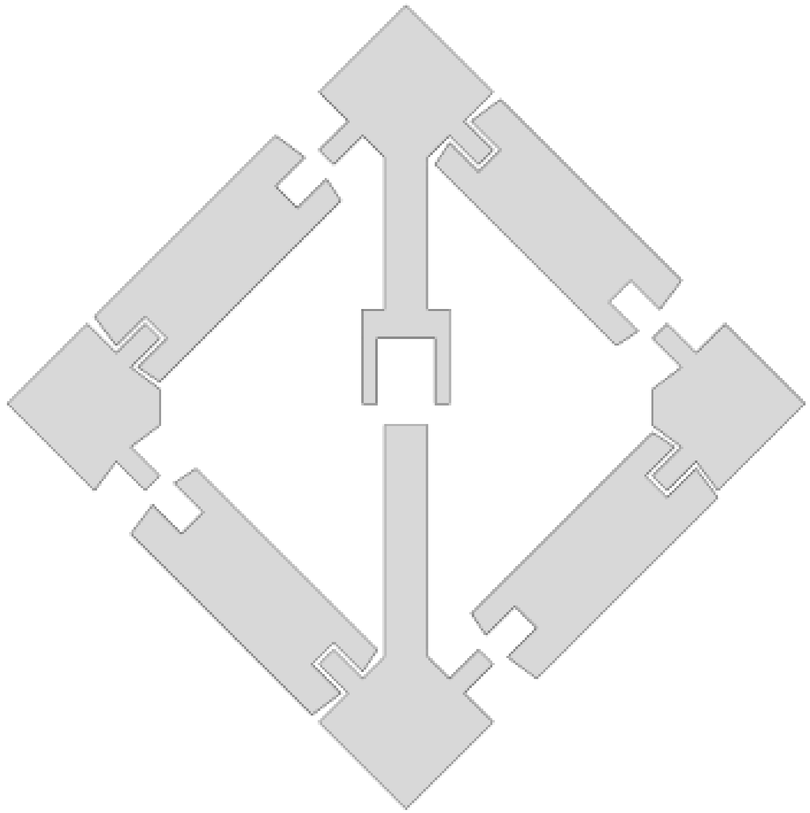
$1\,X_1 + 3\,X_2 \le 240$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 200 \\ 120 \\ 240 \end{pmatrix}$$

Linear Programming

Trenn-/Montierbarkeit von polyedrischen Objekten





Linear Programming

Andere Beispiele

Travelling Salesman
Separierbarkeit von Punkten
Kleinster Umkreis von Punkten
Größter Inkreis eines konvexen Polygons
Operations Research: Kostenoptimierung

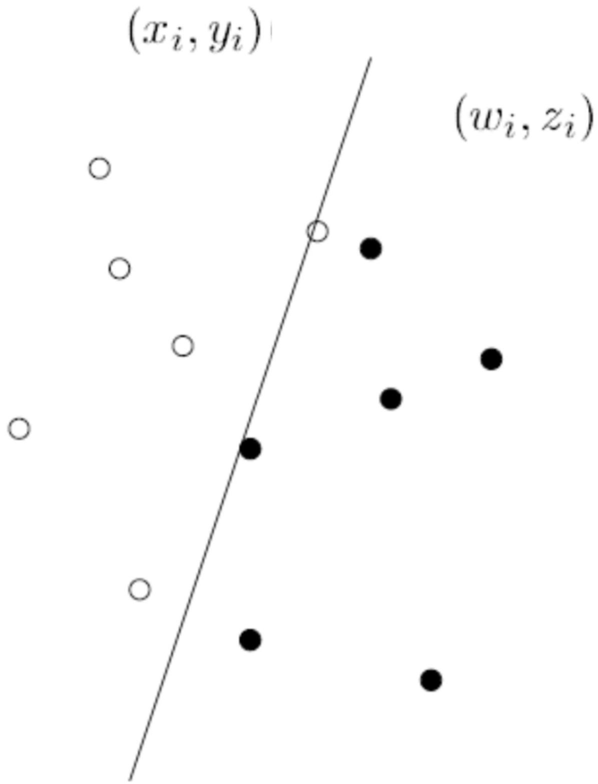
Linear Programming

Separierbarkeit von Punkten

g: ax + by = c

finde a, b, c mit

$$
\begin{aligned}
ax_i + by_i &\leq c, i = 1 \ldots n, \\
aw_i + bz_i &\geq c, i = 1 \ldots m,
\end{aligned}
$$



Linear Programming

Geometrische Interpretation

Randbedingungen definieren Halbräume

Schnittmenge ist entweder
- leer (keine Lösung)
- unbegrenzt (unendlich viele Lösungen, aber Maximum existiert nicht)
- konvexes Polytop (Maximum existiert, eine oder unendlich viele Lösungen)

Linear Programming

Simplex-Verfahren

Abbildung der Ungleichungen auf Gleichungen:
Pro Ungleichung wird eine zusätzliche Variable (Schlupf-Variable, *Slack-Variable*) eingeführt, die die positive Distanz zur Halbebene modelliert

$2x_1 + 4x_2 \leq 4$
wird zu
$2x_1 + 4x_2 + z_1 = 4$

Somit: Einbettung des Ungleichungssystems in ein Gleichungssystem in eine (um die Anzahl der Ungleichungen) höhere Dimension

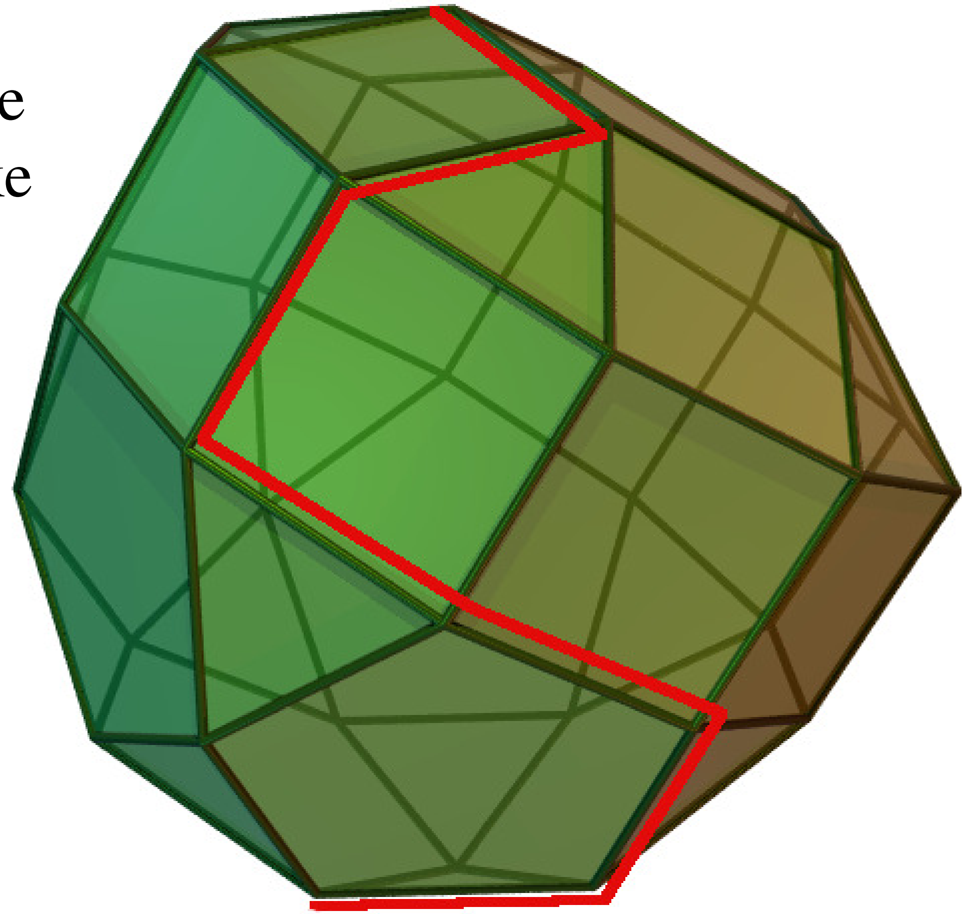
Linear Programming

Simplex-Verfahren

Zwei Phasen

I) Finden einer gültigen Startecke

II) Suche nach einer Nachbarecke
mit besserer Zielfunktion

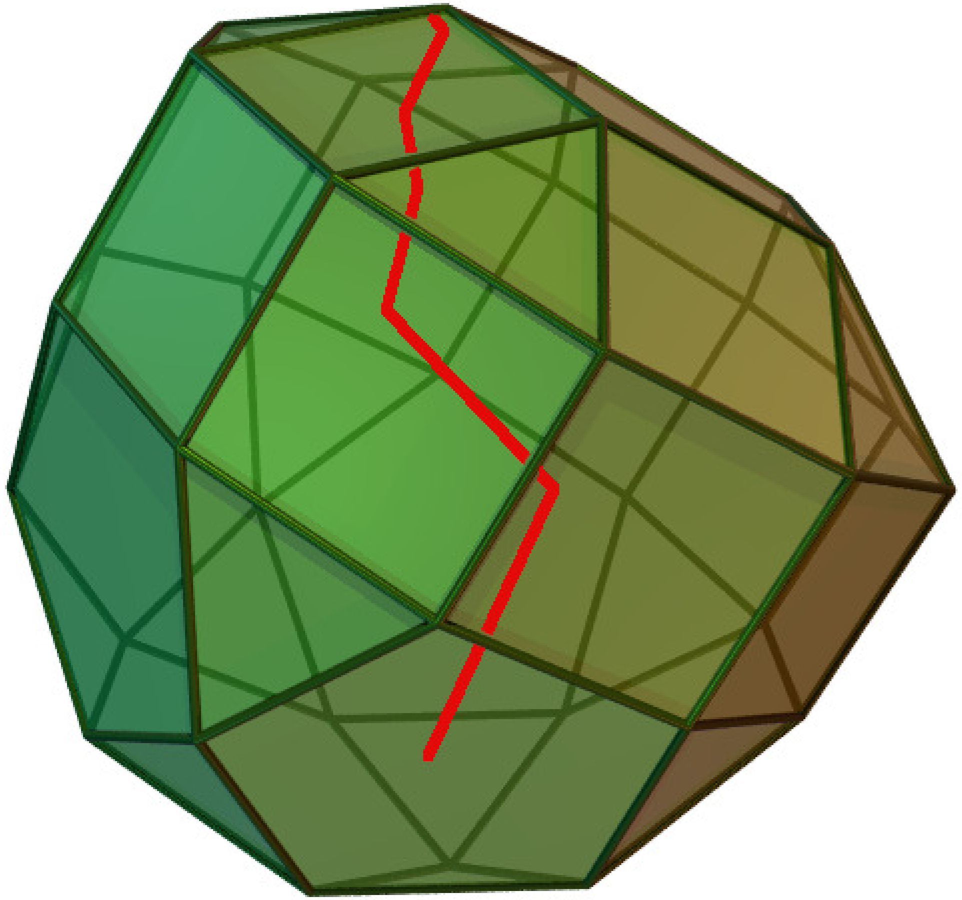


Komplexität:
Im schlimmsten Fall:
exponentiell in der Anzahl der Variablen!!!
Fast immer: linear in der Anzahl der Ungleichungen!!!

Linear Programming

Inner-Point-Verfahren

Strahl entlang des Gradienten,
Schnittpunkt mit Simplex,
dann jeweils entlang
des Gradienten je eine
Dimension tiefer (z.B.
Schnitt mit Ebene, dann
Kante, dann Ecke)



Linear Programming

Fertig…

Minkowski-Summe

Definition

Minkowski-Summe ist eine Mengensumme

$$A \oplus B = \{ a + b \mid a \in A, b \in B \}$$

Minkowski-Summe konvexer Mengen ist konvex

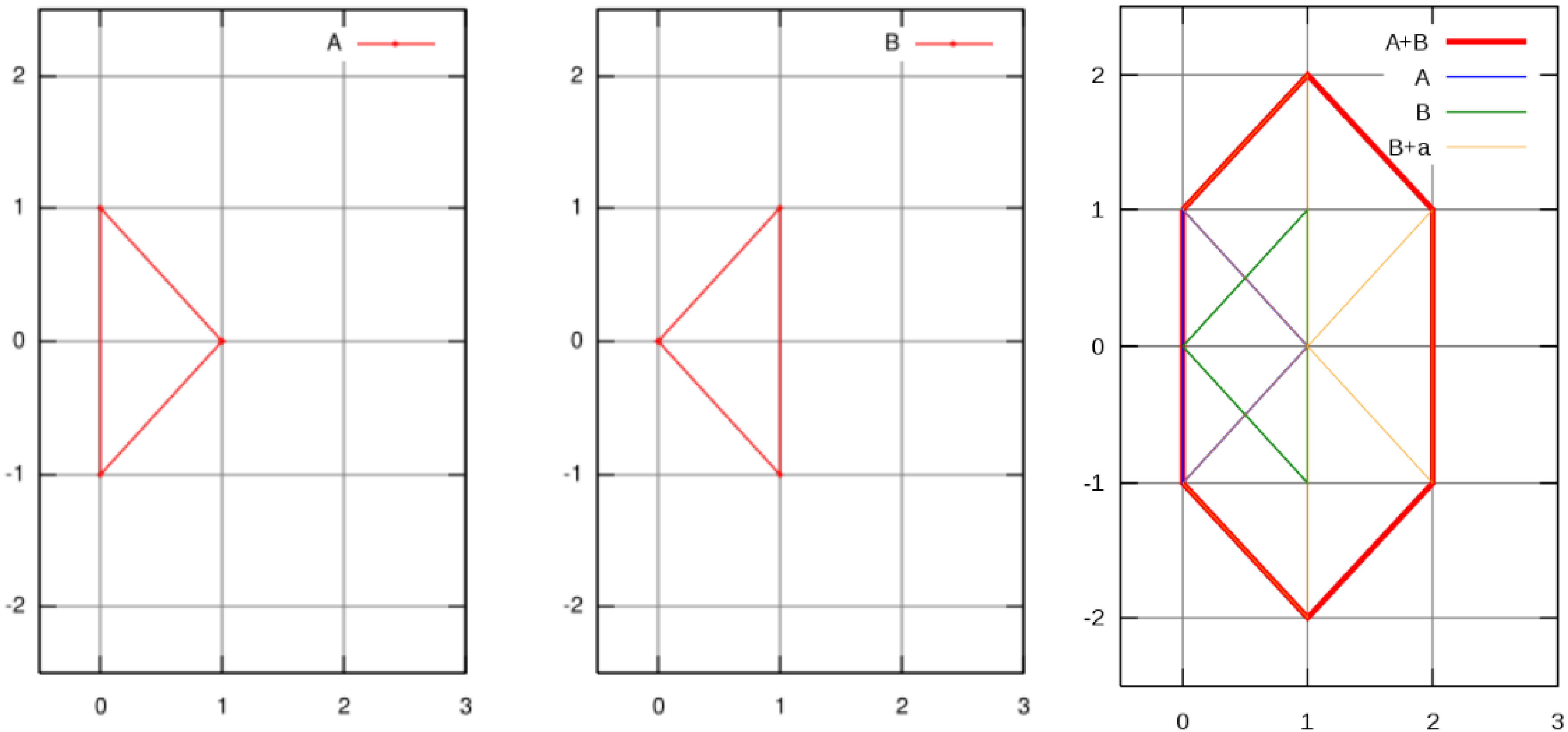
Minkowski-Summe der konvexen Hüllen zweier (endlicher) Punktmengen ist die konvexe Hülle der Minkowski-Summen der Eckpunkte der beiden Hüllen

Effizient berechenbar!!!

Minkowski-Summe

Ein Beispiel

A $\oplus$ B = A $\oplus$ B



Minkowski-Summe

Anwendungsbeispiele

Bildverarbeitung: Morphologische Operationen Dilatation und Erosion (Minkowski-Differenz)

Robotik: Bahnplanung für Fahrzeuge

Sowohl Fahrzeug als auch Hindernisse haben Ausdehnung, einfacher:
Fahrzeug -> Punkt, Hindernisse: Hindernisse $\oplus$ Fahrzeug