Grundlagen

Einführung

- grundlegende Elemente,
- deren Repräsentationen und
- Operationen auf diesen Elementen

Basis: Skript von Oliver Karch, Uni Würzburg, s.

(Hier nicht mehr verfügbar: http://users.informatik.uni-halle.de/~schenzel/ss07/Uebung-D/vorlesung.pdf)

Aber hier noch zu finden… :

https://docplayer.org/45157580-Algorithmische-geometrie.html

Grundlagen

Punkte

$$p = (p_1, ..., p_d),\ q = (q_1, ..., q_d), \ldots \in \mathbb{R}^d$$

Vektoren

- Differenz zwischen Punkten
- Ortsvektor: Differenz zwischen Punkt und Nullpunkt
- Komponentenweise Addition:

  $p + q = (p_1, ..., p_d) + (q_1, ..., q_d) := (p_1 + q_1, ..., p_d + q_d)$
- Skalarmultiplikation: $\lambda \in \mathbb{R}$.

  $\lambda p = \lambda(p_1, ..., p_d) := (\lambda p_1, ..., \lambda p_d)$
- Skalarprodukt:

  $< p, q > := p_1 q_1 + \cdots + p_d q_d = \sum_{i=1}^{d} p_i q_i$

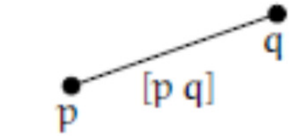
  Zwei Vektoren $p, q \in \mathbb{R}^d$ stehen senkrecht aufeinander, wenn gilt: $< p, q >= 0$.

Grundlagen

Strecken, Halbgeraden (Strahlen), Geraden

- *Das **Liniensegment** oder die **Strecke** zwischen den beiden Punkten ist die Menge*

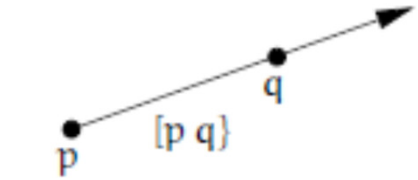
$$[\mathrm{p}\ \mathrm{q}] := \{\, \mathrm{p} + \lambda(\mathrm{q} - \mathrm{p}) \mid \lambda \in \mathbb{R} \ \mathit{mit}\ 0 \le \lambda \le 1 \,\}.$$



Liniensegment

- *Der **Halbstrahl** (oder kurz **Strahl**) von* p *aus in Richtung* q

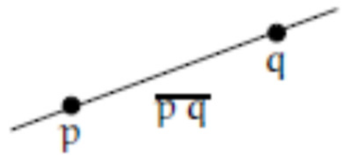
$$[\mathrm{p}\ \mathrm{q}\} := \{\, \mathrm{p} + \lambda(\mathrm{q} - \mathrm{p}) \mid \lambda \in \mathbb{R} \ \mathit{mit}\ \lambda \ge 0 \,\}.$$



Halbstrahl

- *Die **Gerade** durch die beiden Punkte ist die Menge*

$$\overline{\mathrm{p}\ \mathrm{q}} := \{\, \mathrm{p} + \lambda(\mathrm{q} - \mathrm{p}) \mid \lambda \in \mathbb{R} \,\}.$$



Gerade

Grundlagen

Skalarprodukt

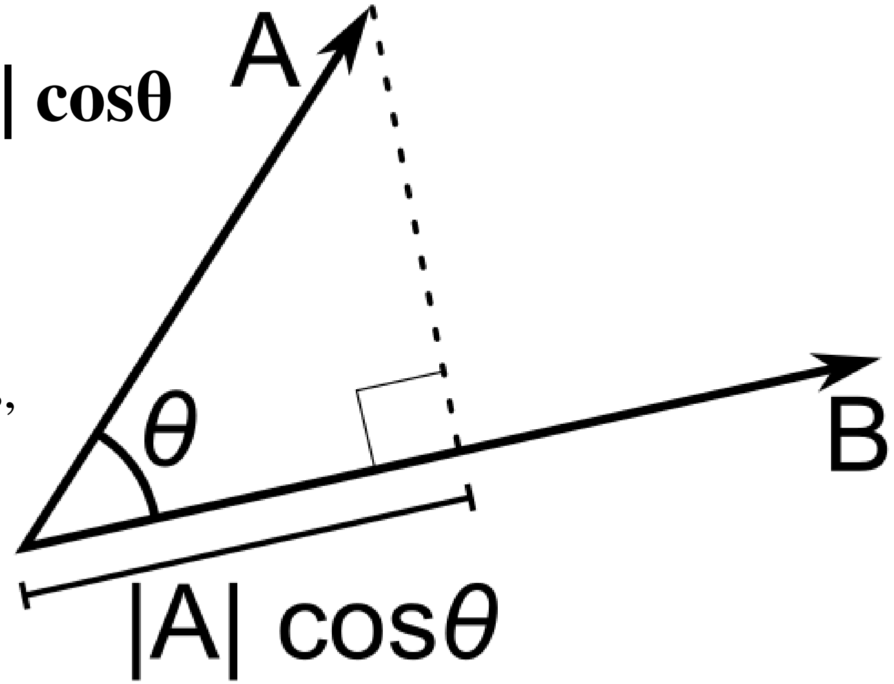
Bezeichnung: „inneres Produkt", „*dot product*", nicht verwechseln mit „skalarem Produkt": $B = \lambda A$

Geometrische Interpretation: Setzt Länge und Winkel zweier Vektoren in Bezug

$$\mathbf{\langle A,B\rangle = A \bullet B = A^T B = |A|\,|B| \cos\theta}$$

„*dot product*"   Matrix-Schreibweise

$|x| = \mathrm{sqrt}(\langle x,x\rangle)$: „Länge" eines Vektors,



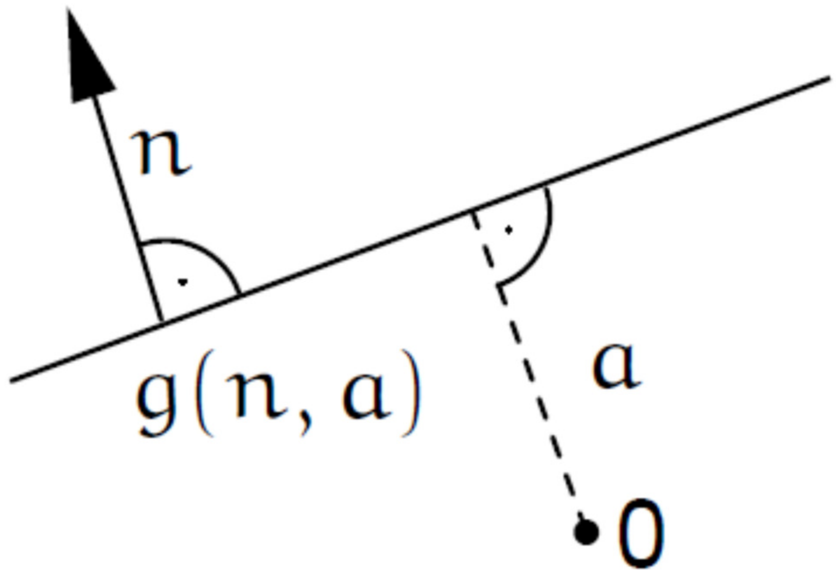
(http://mathinsight.org/applet/dot_product_projection)
https://www.falstad.com/dotproduct/

Grundlagen

Gerade in Normalenform

Alternative Darstellung einer Geraden g aus der Betrachtung des Skalarprodukts

$$g(n,a) := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid n^T x - a = 0\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \langle n, x \rangle = a\}.$$



Nicht eindeutig

- n unterschiedlich lang
- n in zwei Richtungen

Abhilfe: Hesse-Normalen-Form (HNF)

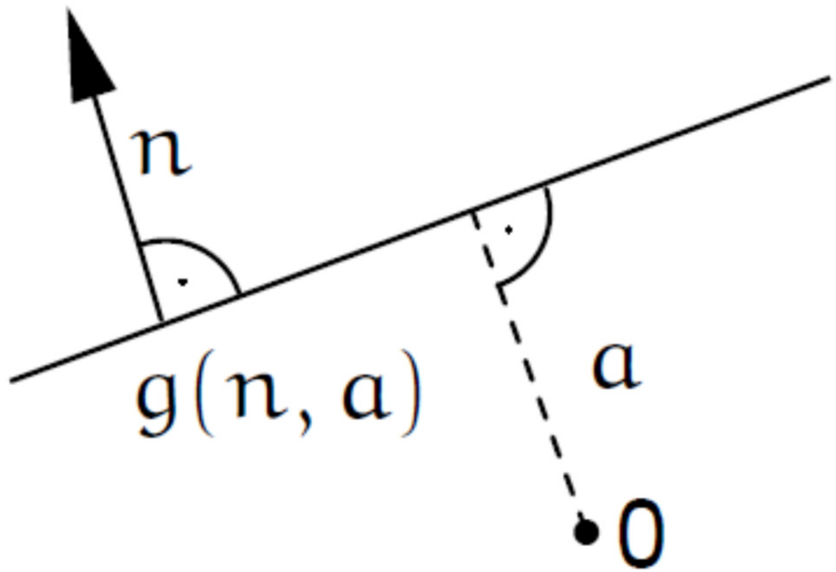
Grundlagen

Gerade in Hesse-Normalenform

- n hat Länge 1
- a ≥ 0

d.h.

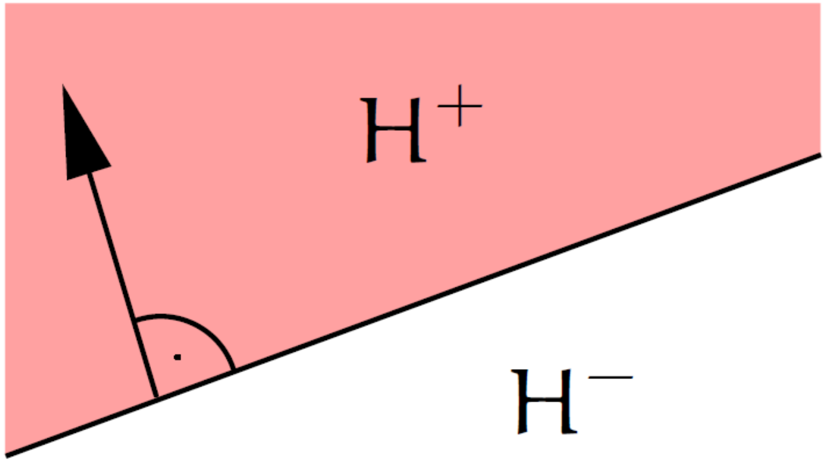
- g hat Abstand a vom Nullpunkt
- n zeigt in die Halbebene, in der der Nullpunkt <u>nicht</u> liegt



$$\mathrm{dist}(p, g) = \left| n^{\mathsf{T}} p - a \right| .$$

Grundlagen

Halbebenen



gegeben: Gerade g(n,a) in Normalenform

- $H^+(n, a) := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid n^T x - a \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \langle n, x \rangle \geq a\}$

  die (abgeschlossene) ***positive Halbebene*** *(engl.* positive half-plane*) zu* $g(n, a)$*,*

- $H^-(n, a) := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid n^T x - a \leq 0\} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \langle n, x \rangle \leq a\}$

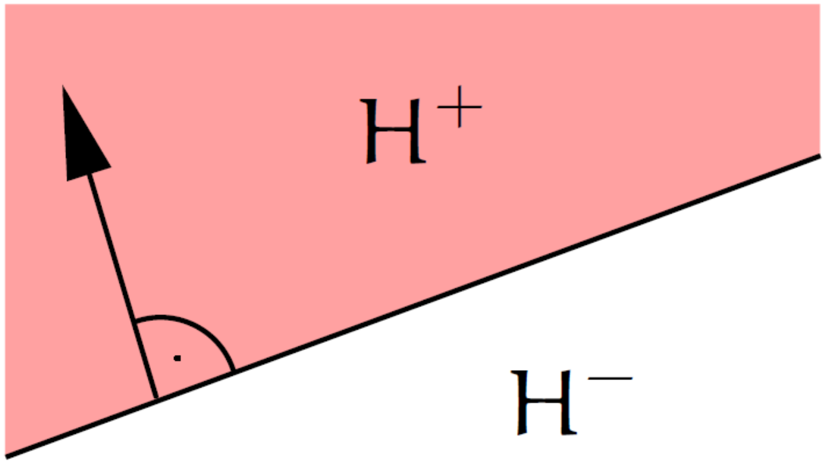
  die (abgeschlossene) ***negative Halbebene*** *(engl.* negative half-plane*) zu* $g(n, a)$.

Grundlagen, elementare Tests

In welcher Halbebene zu einer Geraden g liegt der Punkt p???

gegeben: Gerade g(n,a) in Normalenform

$p \in H^{+}(n,a) \Leftrightarrow n^T p - a \geq 0$



Grundlagen, elementare Tests

Verallgemeinerung in R^d :Hyperebene

Gegeben: $v \in I\!R^d,\ v \neq 0,\ \alpha \in I\!R$

Hyperebene h(v,α) $:= \{p \in I\!R^d \mid < p, v >= \alpha\}$

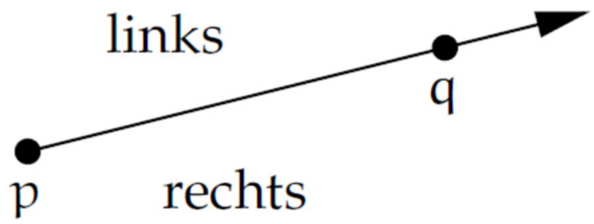
- (d-1)-dimensionaler (affiner, d.h. „um Vektor verschobener") Unterraum des R^d
- Menge aller Vektoren p, die auf v projiziert die Länge α haben

Grundlagen, elementare Tests

Liegt der Punkt r links oder rechts eines Strahls???

gegeben: Strahl mit Startpunkt p in Richtung q

$$p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \text{ und } q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$$



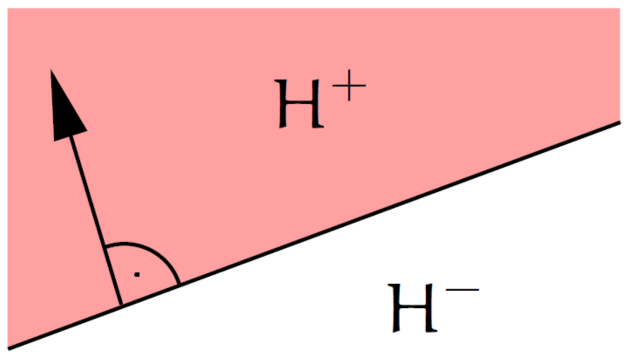
Idee: Umwandeln der Geraden durch p,q in Normalenform, dann Halbebenen-Test

- „Berechne" um π/2 gegen der Uhrzeigersinn gedrehten Normalenvektor n

$$n = \begin{pmatrix} p_2 - q_2 \\ q_1 - p_1 \end{pmatrix}$$

- Berechne a: $a = n^T p$

$$\begin{aligned} a &= n^T p \\ &= (p_2 - q_2)p_1 + (q_1 - p_1)p_2 \\ &= p_2 q_1 - p_1 q_2 \,. \end{aligned}$$



Grundlagen, elementare Tests

Liegt der Punkt r links oder rechts eines Strahls???

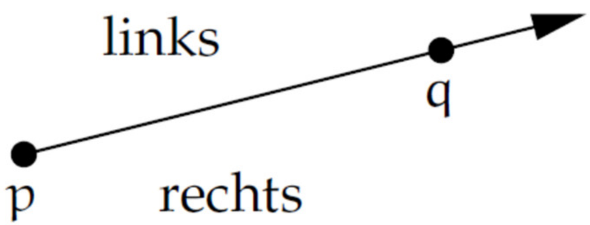
Test auf Halbebene:

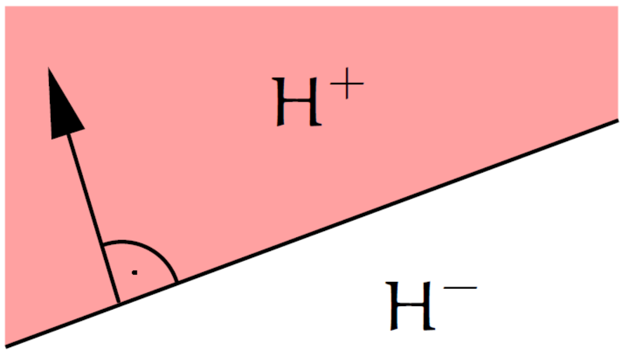
$\boxed{\text{r liegt links des Strahls p,q}} \Leftrightarrow r \in H^{+}(n,a) \Leftrightarrow n^T r - a > 0$

$$\begin{aligned} n^T r - a &= (p_2 - q_2)r_1 + (q_1 - p_1)r_2 - p_2 q_1 + p_1 q_2 \\ &= \boxed{p_2 r_1 - q_2 r_1 + q_1 r_2 - p_1 r_2 - p_2 q_1 + p_1 q_2 > 0} \end{aligned}$$

$$n = \begin{pmatrix} p_2 - q_2 \\ q_1 - p_1 \end{pmatrix}$$

$$a = p_2 q_1 - p_1 q_2 .$$





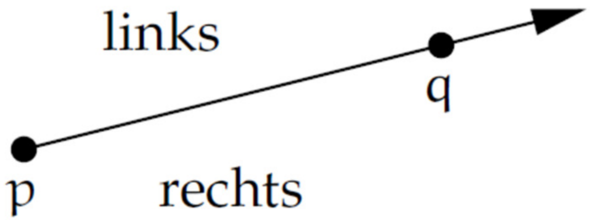
Grundlagen, elementare Tests

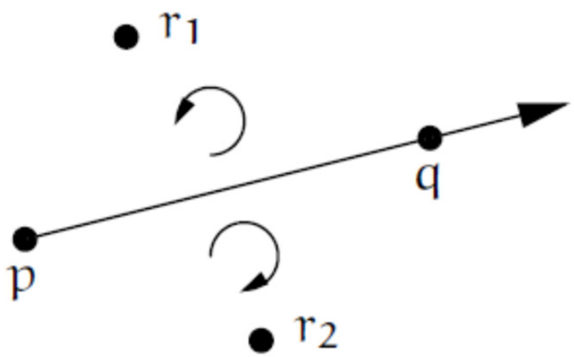
Liegt der Punkt r links oder rechts eines Strahls???

Gleichbedeutend, aber für die Zukunft wichtig:

r liegt links des Strahls p,q ⇔ p,q,r sind gegen den Uhrzeigersinn orientiert

„Gegen den Uhrzeigersinn“, *counterclockwise*, ccw





Grundlagen, elementare Tests

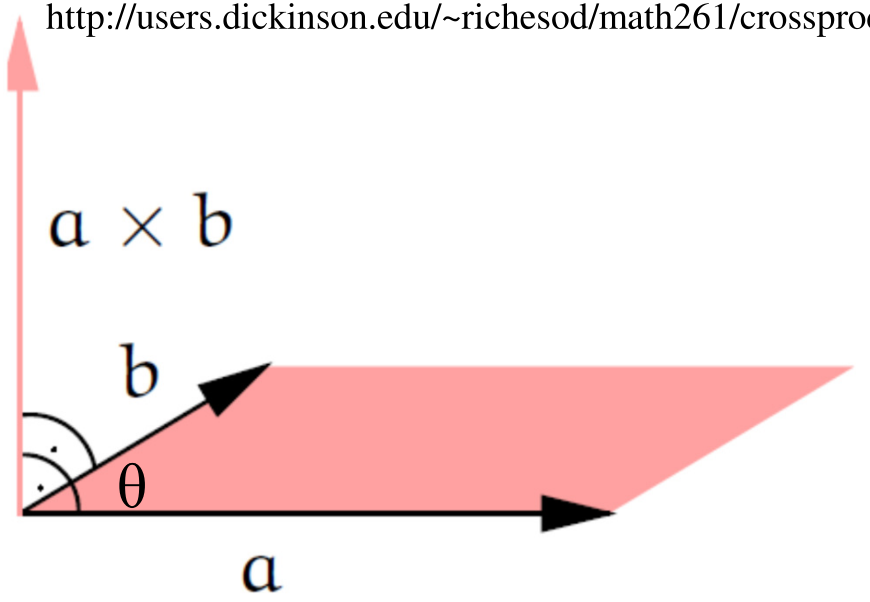
Liegt der Punkt r links oder rechts eines Strahls???

Exkurs: Vektorprodukt, Kreuzprodukt in 3D

zwei Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^3$

$$a \times b := \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

http://users.dickinson.edu/~richesod/math261/crossprod.html



- $(a \times b)$ steht senkrecht auf a und b
- a, b, $(a \times b)$ bilden ein *Rechtssystem* (Rechte-Hand-Regel)
- $|(a \times b)| = |a|\,|b|\,\sin(\theta)$ (Hat das was mit Fläche zu tun?)
- für beliebige Dimensionen verallgemeinerbar
- Wird 0, wenn a und b parallel (oder antiparallel)

Grundlagen, elementare Tests

Liegt der Punkt r links oder rechts eines Strahls???

Einbettung unseres Problems (Strahl p,q, Punkt r) in 3D

- Unsere 2D-Ebene wird x,y-Ebene
- p wird Nullpunkt
- a = q-p
- b = r-p

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

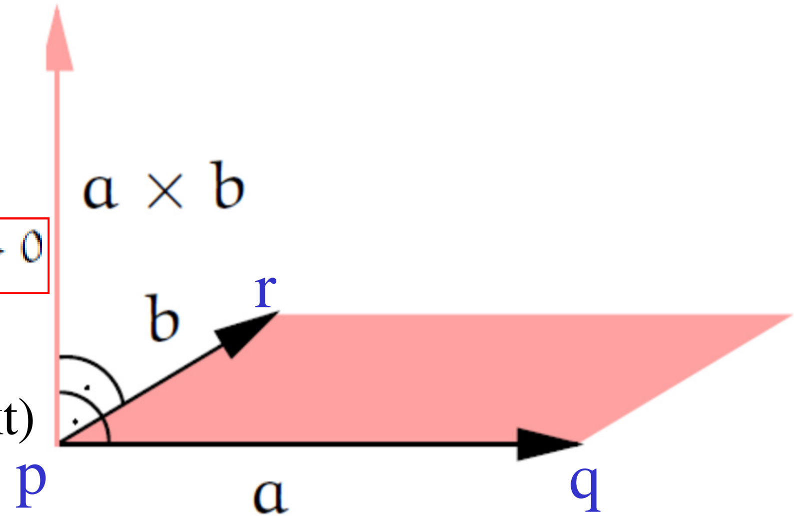
$\boxed{\text{r liegt links des Strahls p,q} \Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow$ (0,a,b) sind *ccw* orientiert $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ (a×b) hat positive z-Koordinate $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \; a_1 b_2 - a_2 b_1 > 0$

$\boxed{\Leftrightarrow \; (p_1 q_2 - p_2 q_1) + (q_1 r_2 - q_2 r_1) + (p_2 r_1 - p_1 r_2) > 0}$



s. Resultat ein paar Folien vorher
(Drehung um π/2 entspricht 2D-Vektorprodukt)

Grundlagen, elementare Tests

Exkurs: Vektorprodukt in R^n

Gegeben: $\vec{a}_i \in R^n$

$$\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 \times \cdots \times \vec{a}_{n-1} = \det \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & a_{11} & \cdots & a_{1(n-1)} \\ \vec{e}_2 & a_{21} & \cdots & a_{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vec{e}_n & a_{n1} & \ldots & a_{n(n-1)} \end{pmatrix}$$

- steht senkrecht auf allen a_i (Berechnung des Normalenvektors bei durch Vektoren gegebenen Hyperebenen!!!)

Grundlagen, elementare Tests

Exkurs: Vektorprodukt in R^n

~~Gegeben: $a_i \in R^n$~~

$$\cancel{\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 \times \cdots \times \vec{a}_{n-1} = \det \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & a_{11} & \cdots & a_{1(n-1)} \\ \vec{e}_2 & a_{21} & \cdots & a_{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vec{e}_n & a_{n1} & \cdots & a_{n(n-1)} \end{pmatrix}}$$

- steht senkrecht auf allen a_i (Berechnung des Normalenvektors bei durch Vektoren gegebenen Hyperebenen!!!)
- obige Schreibweise liefert ein Rechtssystem für cp, a_1 , …, a_{n-1}
- Schöner: Rechtssystem für a_1 , …, a_{n-1}, cp (aber bei Determinantenbildung nach rekursivem Schema nicht direkt nach den Einheitsvektoren faktorisiert)

$$\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 \times \cdots \times \vec{a}_{n-1} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(n-1)} & \vec{e}_1 \\ a_{21} & \cdots & a_{2(n-1)} & \vec{e}_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(n-1)} & \vec{e}_n \end{pmatrix}$$

Grundlagen, elementare Tests

Liegt der Punkt r links oder rechts eines Strahls???

Oder als Funktion (Determinante einer 3x3-Matrix) ausgedrückt:

$$\operatorname{ccw}(p, q, r) := \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & 1 \\ q_1 & q_2 & 1 \\ r_1 & r_2 & 1 \end{vmatrix} = \boxed{(p_1 q_2 - p_2 q_1) + (q_1 r_2 - q_2 r_1) + (p_2 r_1 - p_1 r_2)}$$

$$\operatorname{ccw}(p, q, r) \begin{cases} < 0 & \text{falls r (echt) } \textit{rechts} \text{ von } [p\ q\} \text{ liegt,} \\ = 0 & \text{falls r } \textit{auf } \overline{p\ q} \text{ liegt,} \\ > 0 & \text{falls r (echt) } \textit{links} \text{ von } [p\ q\} \text{ liegt.} \end{cases}$$

Grundlagen, elementare Tests

Ist das Dreieck p,q,r *counterclockwise (ccw)* oder *clockwise (cw)* orientiert???

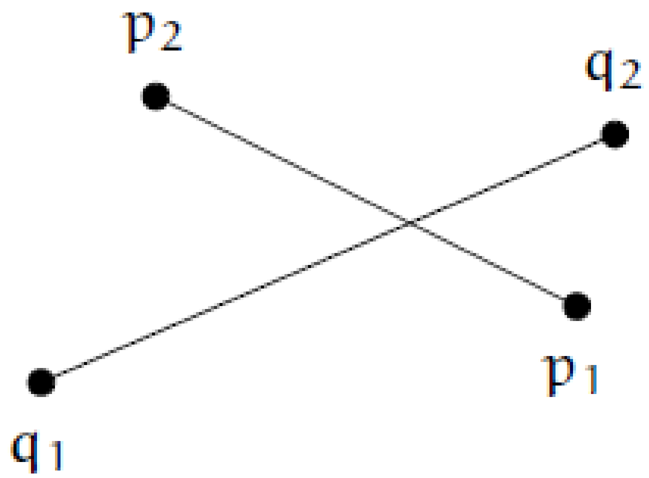
Das ist jetzt einfach: identisch zu „liegt r links oder rechts des Strahls p,q“ ???

$$\mathrm{ccw}(p, q, r) \begin{cases} < 0 & \text{falls p,q,r } \textit{clockwise} \\ = 0 & \text{falls p,q,r kollinear} \\ > 0 & \text{falls p,q,r } \textit{counterclockwise} \end{cases}$$

Grundlagen, elementare Tests

Schneiden sich zwei Strecken ???

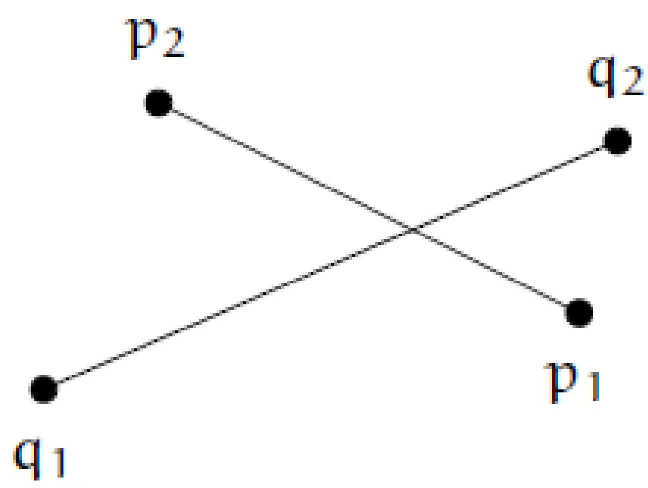
Gegeben zwei Strecken $p := [p_1\, p_2]$ und $q := [q_1\, q_2]$ im $\mathbb{R}^2$



Entweder: Lösen von $p_1 + \lambda(p_2 - p_1) = q_1 + \mu(q_2 - q_1)$

Grundlagen, elementare Tests

Schneiden sich zwei Strecken ???



Oder mit ccw:

Zwei Fälle mit Schnitt:

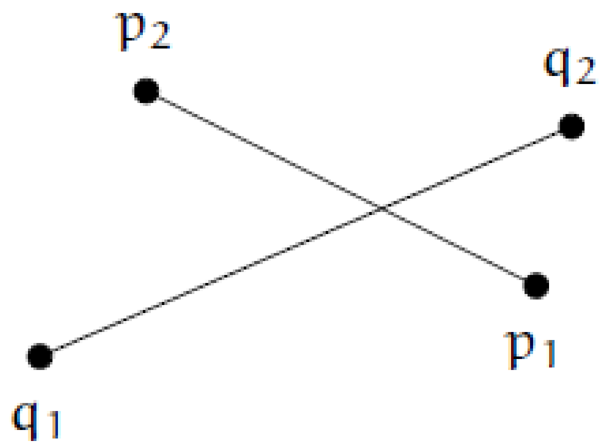
1) p,q kollinear und überlappend

$\mathrm{ccw}(p_1, p_2, q_1) = \mathrm{ccw}(p_1, p_2, q_2) = 0$

Überlappungstest durch Lösen der parametrischen Darstellung

$q_1 = p_1 + \lambda_1(p_2 - p_1) \qquad q_2 = p_1 + \lambda_2(p_2 - p_1)$

Grundlagen, elementare Tests

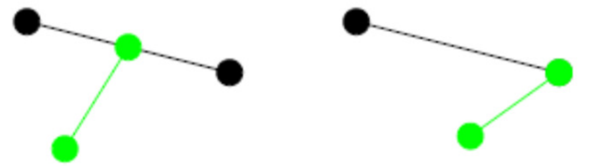


Schneiden sich zwei Strecken ???

2) p,q nicht kollinear und
p_1, p_2 liegen auf verschiedenen Seiten der Gerade q_1, q_2 und
q_1, q_2 liegen auf verschiedenen Seiten der Gerade p_1, p_2

$$\operatorname{ccw}(p_1, p_2, q_1) \cdot \operatorname{ccw}(p_1, p_2, q_2) \le 0$$
$$\wedge$$
$$\operatorname{ccw}(q_1, q_2, p_1) \cdot \operatorname{ccw}(q_1, q_2, p_2) \le 0$$

Durch Produkt und <= sind alle, auch die folgenden Fälle berücksichtigt



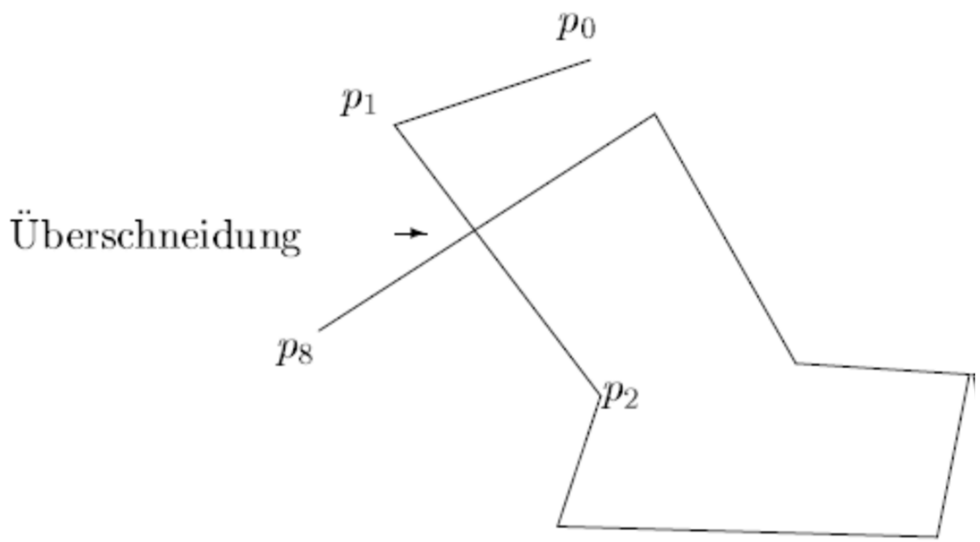
Grundlagen, Polygone

Polygonale Kette, Polygonzug

- besteht aus Liniensegmenten (p_0, p_1) ,(p_1, p_2),…, (p_{n-1}, p_n)

Einfacher Polygonzug

- hat keine Überschneidungen



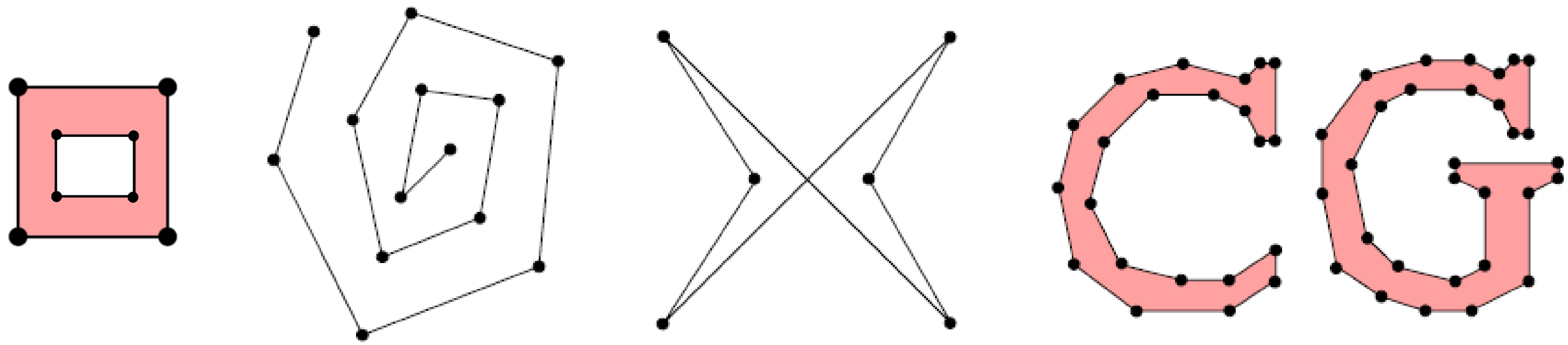
Grundlagen, Polygone

geschlossener Polygonzug

- $p_0 = p_n$ In der Folge: Indexrechnung grundsätzlich modulo n!!!

Einfacher, geschlossener Polygonzug mit dem von ihm umschlossenen Gebiet heißt **einfaches Polygon**

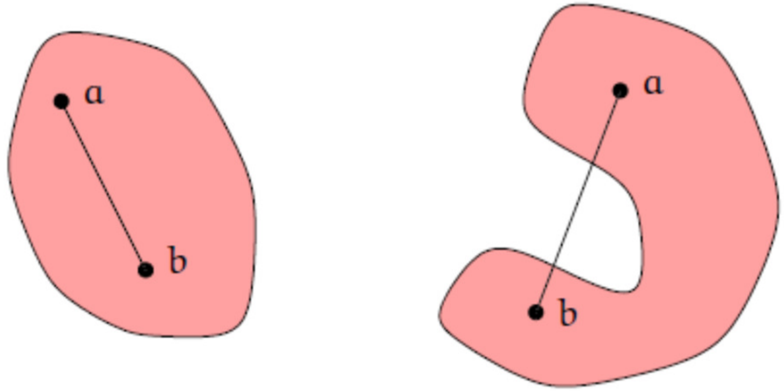
- hat keine Löcher
- Liniensegmente heißen **Kanten** des Polygons
- p_i heißen **Ecken** des Polygons
- Kanten sind *counterclockwise* orientiert, das Polygoninnere liegt links von einer Kante



Grundlagen, Polygone

Konvexe Menge

Menge A heißt konvex, wenn für je zwei Punkte a, b ∈ A jeder Punkt der Strecke (a,b) vollständig in A liegt



Konvexe Hülle einer Punktmenge A

Durchschnitt aller konvexen Mengen, die A enthalten, kleinste konvexe Menge, die A enthält

$$\mathrm{CH}(A) := \bigcap_{\substack{K \supseteq A \\ K \text{ } konvex}} K$$

Grundlagen, Polygone

Konvexe Polygone

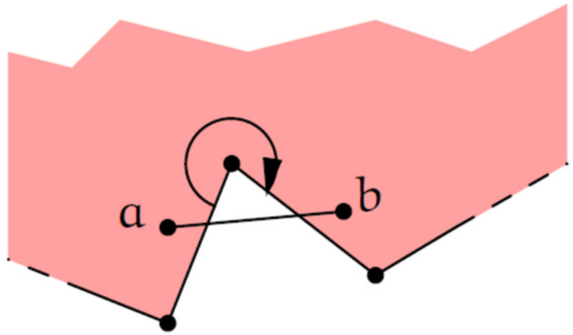
Eigenschaften

- Schnittmenge endlich vieler konvexer Mengen ist konvex
- Konvexes Polygon ist gleich der konvexen Hülle seiner Eckpunkte (und umgekehrt)
- Konvexes Polygon mit n Eckpunkten ist gleich dem Schnitt von n Halbebenen (und umgekehrt, Ausnahme: Schnitt beinhaltet einen Strahl, d.h. Schnitt ist „offen“)

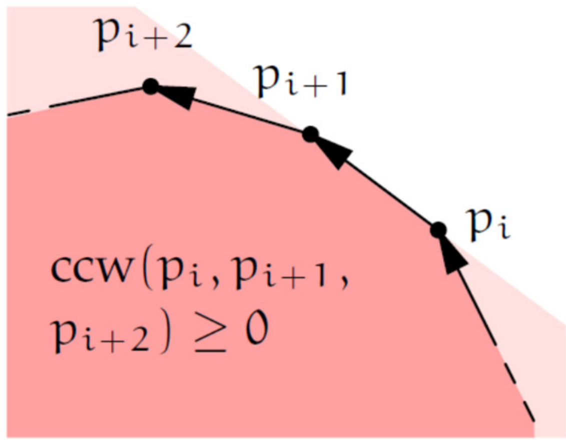
Grundlagen, Polygone

Konvexe Polygone, Test auf Konvexität

Knickwinkel ist positiv, p_{i+2} liegt links vom Strahl p_i, p_{i+1}



notw. Voraussetzung:
positiver Knickwinkel



$$\forall_{1 \leq i \leq n}\; p_{i+2} \text{ liegt links vom Strahl } [p_i\, p_{i+1}\}$$

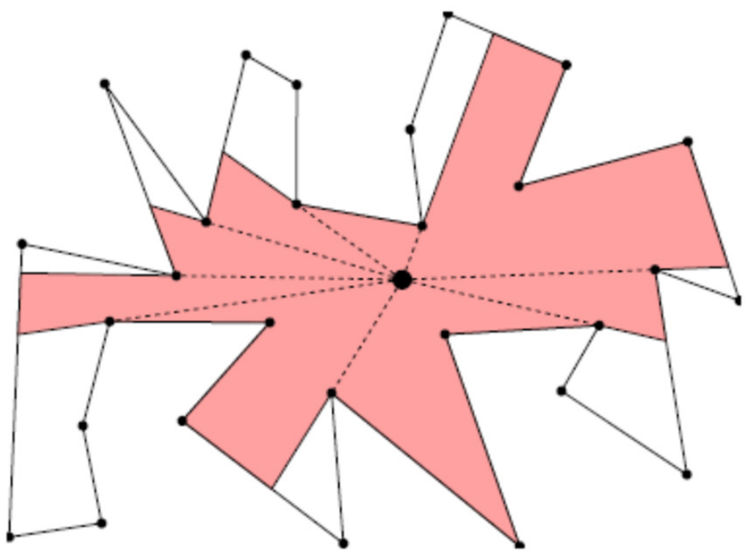
$$\Longleftrightarrow$$

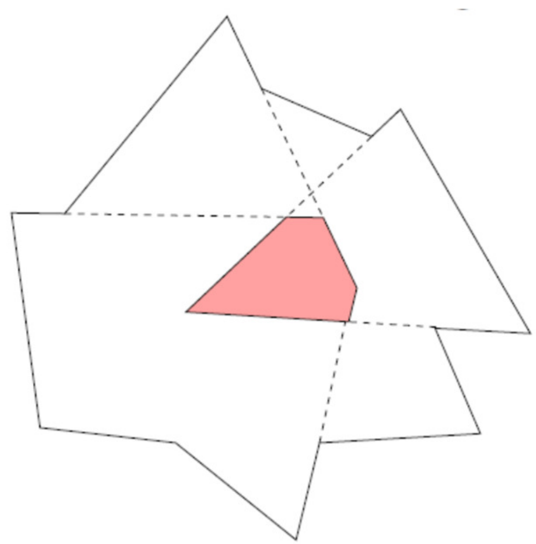
$$\forall_{1 \leq i \leq n}\; \mathrm{ccw}(p_i, p_{i+1}, p_{i+2}) \geq 0\,,$$

Grundlagen, Polygone

Sternförmige Polygone

Informell: Es gibt Punkte im Polygon, von denen aus jeder Punkt des Polygons sichtbar ist





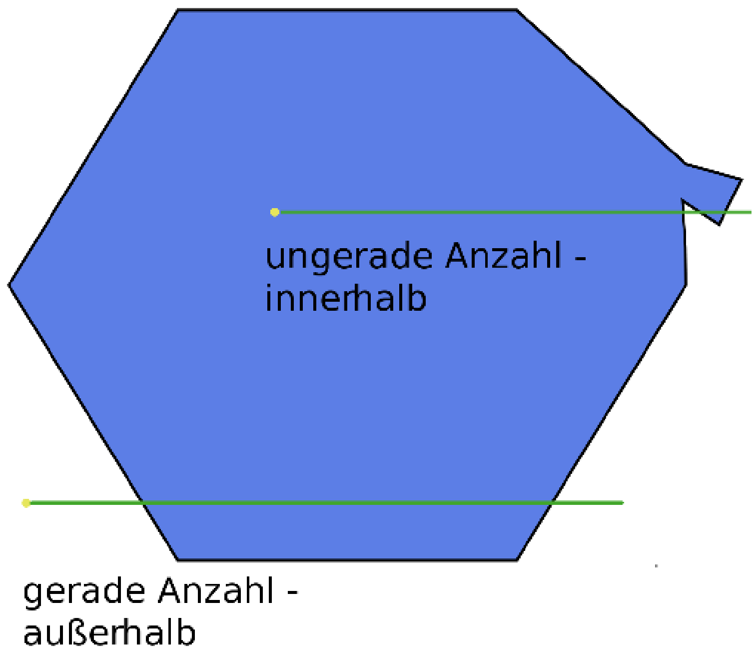
Grundlagen, Polygone

Test: Liegt ein Punkt q in einem Polygon?

Idee: Punkt p außerhalb suchen.

Wenn q außerhalb liegt, hat die Strecke p,q eine gerade Anzahl von Schnittpunkten mit Polygon P

Testen aller Kanten von P auf Schnitt mit p,q

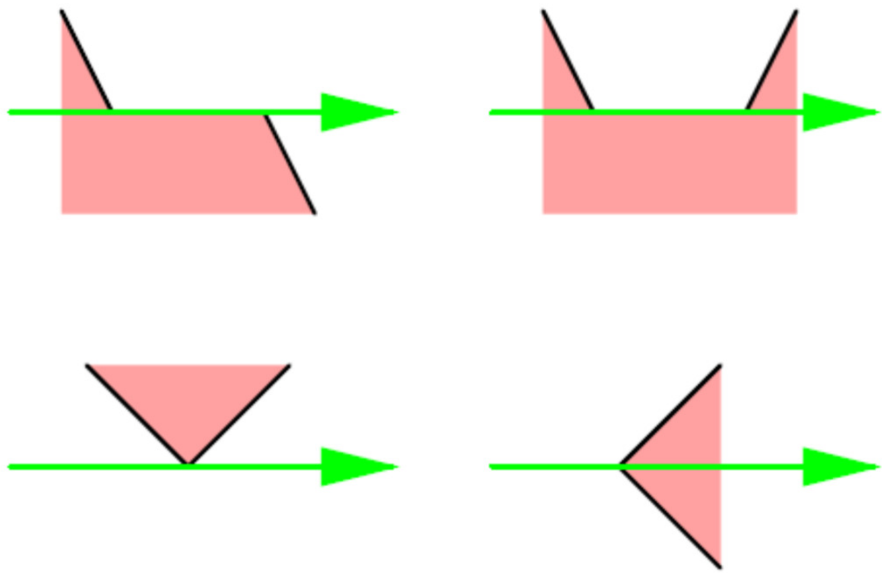


Grundlagen, Polygone

Test: Liegt ein Punkt q in einem Polygon?

Vorsicht, Sonderfälle!!!

Algorithmus für „echten“ Seitenwechsel auslegen



Alle Punkte durchlaufen -> O(n)   (n: Anzahl der Eckpunkte)

Grundlagen, Polygone

Test: Liegt ein Punkt q in einem Polygon?

Initialisierungsphase

PointInPolygon(q)

Input: Beliebiges Polygon $P = (p_1, \ldots, p_n) \subset \mathbb{E}^2$
Anfragepunkt q

Bestimme einen Punkt $\tilde{p}$ außerhalb von P (z. B. anhand der maximalen Koordinatenwerte der Eckpunkte)

{Suche einen Eckpunkt, der nicht auf $\overline{\tilde{p}\,q}$ liegt}

$i \leftarrow 1$

while $\text{ccw}(\tilde{p}, q, p_i) = 0$ **do**

  $i \leftarrow i + 1$

end while

Grundlagen, Polygone

Test: Liegt ein Punkt q in einem Polygon?

Hauptschleife

```
s ← 0                                 {s zählt die Anzahl der Schnitte von [p̃ q] mit ∂P}
lr ← sgn(ccw(p̃, q, p_i))                                          {lr ∈ {−1, 0, 1}}
for j ← i + 1, . . . , n ,…,i do
   lrnew ← sgn(ccw(p̃, q, p_j))
   if |lrnew − lr| = 2 then
      lr ← lrnew
      if ccw(p_{j−1}, p_j, p̃) · ccw(p_{j−1}, p_j, q) ≤ 0 then
         s ← s + 1       {p̃ und q liegen auf versch. Seiten von [p_{j−1} p_j]}
      end if
   end if
end for
```

Output: Ist s ungerade, befindet sich q innerhalb von P, sonst außerhalb