Mathe 1 Cheatsheet

Für erstes Mathemodul (Ganter, Noack)

LAG

Vollständige Induktion

Beweis erfolgt für $n \geq 1, n \in \mathbb{N}$ mittels vollständiger Induktion.
IV für $n = 1$: $\sum_{k=1}^{N}(4k-3) = n(2n-1) \iff (4*1-3) = 1*(2-1) \iff 1 = 1\checkmark$
IA für $n \geq 1$: $\sum_{k=1}^{N}(4k-3) = n(2n-1)$
IS für $n = n+1$:
$\sum_{k=1}^{N+1}(4k-3) = (n+1)(2(n+1)-1) \iff \sum_{k=1}^{N}(4k-3) + (4*(n+1)-3) = (n+1)(2n+1)$
nach IA gilt:
$n(2n-1) + (4*(n+1)-3) = (n+1)(2n+1) \iff 2n^2-n+4n+4-3 = (n+1)(2n+1) \iff (2n^2+3n+1 = 2n^2+n+2n+1 \iff 2n^2+3n+1 = 2n^2+3n+1\checkmark$

Ebenengleichungen

In $\mathbb{R}_3$ kann es Ebenen der folgenden Formen geben:

1. $E : \vec{x} = ToDo$

Lineare Gleichungssysteme

Lösen von linearem Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ mit Gauss durch elementare Zeilenumformungen (Addieren eines Vielfachen von anderen Gleichungen, Umtauschen von Gleichungen und Skalierung). Erw. Koeffizientenmatrix:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} & \vec{b}_1 \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & \vec{b}_2 \end{array}\right)$$

Inverse zu Matrizen

Es existiert ein A_{-1} zu einer Matrix A, wenn A quadratisch ist und das homogene LGS $A*\vec{x} = \vec{0}$ nur die triviale Lösung hat. Dann gilt $A_{-1} \times A = E$. *Pivotspalten* sind Spalten, in denen nur in einer Zeile eine 1 steht. Gibt es nach Vor- und Rückwärtsphase noch Nicht-Pivotspalten, hat das LGS unendlich viele Lösungen. Gibt es eine Zeile $(0,0,0,c)$ mit $c \neq 0$, gibt es keine Lösung.

LU-Faktorisierung

- Soll A als untere Dreieckecksmatrix L und obere Dreieckmatrix U faktorisiert werden, gilt $A = L \times U$
- U ist die erste durch elementare Zeilenumformungen erreichte Matrix in Zeilenstufenform (ZSF) (**nicht** reduziert). Vertauschungen und Skalierungen sind zwecks Eindeutigkeit **nicht** erlaubt!
- L ist das Produkt der invertierten Elementarmatrizen $L = E_1^{-1} \times E_2^{-1} \times E_n^{-1}$ bis zum Erreichen von U
- Lösung von $L \times U = \vec{b}$, wenn L und U bekannt sind durch $L \times \vec{y} = \vec{b}$. Dann $U \times \vec{x} = \vec{y}$ lösen.

Diskrete Strukturen

Begriffsverbände

- Formaler Kontext G, M, I in Tabelle: Merkmale oben, Gegenstände links.
- Lesen von Begriffsverband: Von oben nach unten

Kanonische Darstellung und Teiler

- Primfaktorzerlegung ist kanonische Darstellung, bswp. 22: $22 = 2^1 * 11^1$. 3 teilt $n \in \mathbb{N}$, wenn Quersumme durch 3 teilbar ist. 11 teilt $n \in \mathbb{N}$, wenn alternierende Quersumme durch 11 teilbar ist. Bspw. 61259: $6-1+2-5+9 = 11\checkmark$
- Anzahl Teiler von n: Summe der Exponenten der Primfaktoren, jeweils + 1, bspw. 22: $teilerzahl(22) = (1+1)*(1+1) = 4$ (nämlich 2, 11, 1, 22)
- Anzahl teilerfremder Zahlen zu n: Eulersche φ-Funktion. Für $n \in \mathbb{N}$ mit den Primfaktoren $p_1^a ... p_k^l$: $\varphi(n) = n*(1-\frac{1}{p_1})*(1-\frac{2}{p_2})*...*(1-\frac{k}{p_k})$ (p sind also immer die Basen)
- Primzahlen 1-100: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97

ggT und euklidischer Algorithmus

ggT wird mit euklidischem Algorithmus bestimmt. In erweiterter Form:

i	n_i	n_{i+1}	r	q_i	a_{i+1}	a_i
1.	238	154	84	1	2	-3
2.	154	84	70	1	-1	2
3.	84	70	14	1	1	-1
4.	70	14	0	5	0	1
5.	14	0	ggT: 14		1	0

$a_i = a_{i+2} - q_i * a_{i+1}$
$q_i = n_i div n_{i+1}$

Restklassenringe

- In $\mathbb{Z}_{22}$ sind 0-21 drin, negative Zahlen: Solange $22 \equiv 0 \pmod{n}$ addieren, bis Ergebnis in $\mathbb{Z}_n$ liegt
- Einheit: Zahl $a \in \mathbb{Z}_n$ ist Einheit, wenn $a*b \equiv 1 \pmod{n}$. Das gilt dann, wenn $ggT(a,n) = 1$.
- Nullteiler: Zahl $a \in \mathbb{Z}_n$ ist Nullteiler, wenn $a*b \equiv 0 \pmod{n}$
- Division nur für Einheiten. Ist a Einheit in $\mathbb{Z}_n$, dann wird inverses Element n^{-1} durch erw. euklidischen Algorithmus bestimmt (mit n als erstem Wert und a als zweitem). Inverses zu n ist dann der Wert, der als a_1 oben rechts rauskommt.
- Rechnen mit Potenzen: $a^m * a^n = a^{m+n}$, $a^n = a^{n \bmod (p-1)}$
- Lemma von Euler-Fermat: $a^{\varphi(n)} \bmod n = 1$, falls a zu n teilerfremd ist ($ggT(a,n) = 1$)

Gebaut mit LaTeX