5) Menyelesaikan Persamaan dan Sistem Persamaan

Dalam subtopik ini, akan dibahas mengenai cara menyelesaikan persamaan dan sistem persamaan.

Persamaan

Persamaan adalah pernyataan bahwa dua ekspresi adalah sama. Persamaan ditulis dengan tanda sama dengan (=).
Persamaan linear adalah persamaan yang tidak melibatkan sesuatu hasil kali atau akar peubah. Semua peubah hanya terdapat sampai dengan angka pertama dan tidak muncul sebagai argumen untuk fungsi trigonometrik, fungsi logaritmik, atau untuk fungsi eksponensial.
Persamaan non-linier dapat diartikan sebagai persamaan yang tidak mengandung syarat seperti persamaan linier, sehingga persamaan non-linier dapat merupakan:
a. Persamaan yang memiliki pangkat selain satu (misal: x^2)
b. Persamaan yang mempunyai produk dua variabel (misal: xy)
Dalam penyelesaian persamaan non-linier diperlukan akar-akar persamaan non-linier, dimana akar sebuah persamaan non-linier f(x) = 0 merupakan nilai x yang menyebabkan nilai f(x) sama dengan nol.

Persamaan Linear

Persamaan linear dengan satu variabel (PLSV) adalah suatu persamaan
yang memiliki satu variabel (peubah) dan pangkat tertingginya satu.
Persamaan linier satu variabel adalah persamaan yang ekuivalen dengan salah satu bentuk

$$\boxed{ax + b = 0}$$

dengan a dan b adalah bilangan real dan $a \neq 0$

Penyelesaian (solusi) dari suatu PLSV adalah bilangan real yang
menggantikan variabel sehingga persamaan tersebut menjadi bernilai benar.

Persamaan linear dengan dua variabel (PLDV) adalah persamaan yang
memiliki dua peubah dan pangkat tertingginya satu.
Bentuk umumnya:

$$\boxed{ax + by = c; a \neq 0; b \neq 0}$$

Penyelesaian (solusi) dari PLDV ax+by=c adalah bilangan terurut (x1, y1) sedemikian hingga jika disubstitusikan x1 untuk x dan y1 untuk y
mengakibatkan persamaan menjadi bernilai benar.
Himpunan penyelesaian (HP) dari PLDV adalah himpunan semua bilangan
terurut (x1, y1) yang merupakan solusi dari PLDV tersebut.

Secara lebih umum, persamaan linear didefinisikan dalam n peubah x1, x2, ..., xn sebagai persamaan yang dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\boxed{a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b}$$

di mana a1, a2, ..., an dan b adalah konstanta-konstanta riil.
Pemecahan persamaan linear a1x1 + a1x2 + ... + anxn = b adalah urutan dari n bilangan s1, s2, ..., sn sehingga persamaan tersebut dipenuhi bila kita mensubstitusikannya terhadap x1=s1, x2=s2, ..., xn=sn. Himpunan semua pemecahan persamaan tersebut dinamakan himpunan pemecahan.

Soal dan Penyelesaian Persamaan Linear

Soal No 1
Selesaikan persamaan berikut.

$$7(3x+6)=11-(x+2)$$

Penyelesaian :
Mendefinisikan persamaan

```
>pl1 &= 7*(3*x+6)=11-(x+2); $&pl1
```

$$7\,\left(3\,x+6\right)=9-x$$

Menyelesaikan persamaan menggunakan fungsi solve(<expr>)

```
>s1 &= solve(pl1); $&s1
```

$$\left[x=-\frac{3}{2} \right]$$

Function: solve

```
solve (<expr>, <x>)
solve (<expr>)
solve ([<eqn_1>, ..., <eqn_n>], [<x_1>, ..., <x_n>])
```

Menyelesaikan persamaan aljabar <expr> untuk variabel <x> dan mengembalikan daftar persamaan solusi di <x>. Jika <expr> bukan persamaan, persamaan '<expr> = 0' diasumsikan sebagai gantinya. <x> dapat dihilangkan jika <expr> berisi hanya satu variabel.
Mengecek penyelesaian dengan mensubstitusikannya ke persamaan

```
>$&subst(s1, pl1)
```

$$\frac{21}{2}=\frac{21}{2}$$

Karena hasil substitusi s1 ke pl1 adalah 21/2 = 21/2, maka benar bahwa x = -1.5 adalah solusi/penyelesaian untuk persamaan 7(3x+6) = 11-(x+2).
Penjelasan :

$$7(3x+6)=11-(x+2)$$

$$21x+42=9-x$$

$$22x + 33 = 0$$

$$x = -\frac{33}{22} = -\frac{3}{2}$$

Soal No 2
Selesaikan persamaan berikut untuk y.

$$3x + 4y = 12$$

Penyelesaian :

```
>pl2 &= 3*x+4*y = 12; &powerdisp:true; $&pl2 // mendefinisikan persamaan
```

$$3\,x + 4\,y = 12$$

```
>s2 &= solve(pl2, y); $&s2 // menyelesaikan persamaan
```

$$\left[y = \frac{12 - 3\,x}{4}\right]$$

```
>$&subst(s2, pl2) // mengecek penyelesaian
```

$$12 = 12$$

Penjelasan :

$$3x + 4y = 12$$

$$4y = 12 - 3x$$

$$y = \frac{12 - 3x}{4}$$

Jadi, penyelesaian dari 3x+4y = 12, untuk y adalah

$$y = \frac{12 - 3x}{4}.$$

Soal No 3
Carilah himpunan penyelesaian untuk persamaan berikut.

$$x_1 - 4x_2 + 7x_3 = 5$$

Penyelesaian :
Untuk mencari himpunan penyelesaian persamaan tersebut kita dapat menetapkan sebarang nilai untuk setiap dua peubah dan menyelesaikan persamaan tersebut untuk mencari peubah ketiga. Khususnya, jika kita menetapkan nilai sebarang s dan t berturut-turut untuk x2 dan x3 dan menyelesaikan persamaan tersebut untuk mencari x1, maka

```
>x2 &= s; x3 &= t; pl3 &= x1-4*x2+7*x3=5; $&pl3 // mendefinisikan persamaan
```

$$-4\,s+7\,t+x_1=5$$

```
>s3 &= solve(pl3, x1); $&s3 // menyelesaikan persamaan
```

$$[x_1=5+4\,s-7\,t]$$

```
>$&subst(s3, pl3) // mengecek penyelesaian
```

$$5=5$$

Jadi, himpunan penyelesaian dari persamaan tersebut adalah

$$\text{HS }=\left\{(5+4s-7t,s,t)/s,t\in\mathbb{R}\right\}.$$

Persamaan Kuadrat

Persamaan kuadrat merupakan persamaan matematika yang memuat variabel dengan pangkat tertinggi dua. Persamaan kuadrat memiliki bentuk umum :

$$\boxed{ax^2+bx+c=0}$$

dengan $a,b,$ dan c adalah bilangan real dan $a\neq 0$

Penyelesaian dari persamaan kuadrat disebut sebagai akar-akar persamaan kuadrat. Macam akar persamaan kuadrat dapat diketahui dengan mudah menggunakan rumus umum

$$\boxed{D=b^2-4ac}$$

dari persamaan umum kuadrat.
Macam-macam akar persamaan kuadrat, yaitu :
1. Akar Real (D > 0)
Jika nilai D > 0 dari suatu persamaan kuadrat, maka akar-akar persamaan kuadrat bernilai real namun memiliki akar-akar yang berlainan. Dengan kata lain x1 tidak sama dengan x2.
2. Akar real sama, x1 = x2 (D = 0)
Merupakan jenis akar persamaan kuadrat yang menghasilkan akar-akar bernilai sama.
3. Akar Imajiner / Tidak Real (D < 0)
Jika nilai D < 0 , maka akar dari persamaan kuadrat akan berbentuk imajiner/ tidak real.
Untuk mencari penyelesaian persamaan kuadrat, terdapat beberapa metode yang dapat digunakan, diantaranya yaitu faktorisasi, kuadrat sempurna, dan menggunakan rumus ABC.
Berikut penjelasan mengenai beberapa metode untuk mencari penyelesaian persamaan kuadrat.

1. Faktorisasi
Faktorisasi/pemfaktoran adalah suatu metode dalam menentukan akar-akar dengan mencari nilai yang jika dikalikan maka akan menghasilkan nilai lain.
Bentuk

$$x^2 + bx + c = 0$$

diubah kebentuk

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0$$

Contoh:

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$

$$(x + 3)(x + 2) = 0$$

$$x + 3 = 0 \vee x + 2 = 0$$

$$x = -3 \vee x = -2$$

2. Kuadrat Sempurna
Bentuk kuadrat sempurna merupakan bentuk persamaan kuadrat yang menghasilkan bilangan rasional.
Bentuk

$$x^2 + bx + c = 0$$

diubah kebentuk

$$(x + p)^2 = q$$

Contoh:

$$x^2 + 4x + 4 = 0$$

$$(x + 2)^2 = 0$$

$$x + 2 = 0$$

$$x = -2$$

3. Rumus Kuadrat ABC
Rumus abc merupakan alternatif pilihan ketika persamaan kuadrat sudah tidak bisa diselesaikan dengan metode faktorisasi maupun kuadrat sempurna.
Rumus :

$$\boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Soal dan Penyelesaian Persamaan Kuadrat

Soal No 1
Selesaikan

$$x^2 + 3x - 28 = 0$$

Penyelesaian :

```
>pk1 &= x^2+3*x-28=0; &powerdisp:false; $&pk1 // mendefinisikan persamaan
```

$$x^2 + 3\,x - 28 = 0$$

```
>$&factor(pk1) // memfaktorkan persamaan
```

$$(x-4)\;(x+7) = 0$$

```
>$&solve(pk1) // menyelesaikan persamaan
```

$$[x = 4, x = -7]$$

Penjelasan :

$$x^2 + 3x - 28 = 0$$

$$(x-4)(x+7) = 0$$

$$x - 4 = 0 \vee x + 7 = 0$$

$$x = 4 \vee x = -7$$

Jadi, persamaan memiliki akar-akar persamaan kuadrat bernilai real namun memiliki akar-akar yang berlainan, yaitu x = 4 atau x = -7.

```
>a=1; b=3; c=-28; D = b^2 - 4*a*c // mengecek diskriminan
```

```
121
```

D = 121 > 0
maka benar persamaan akan memiliki akar-akar persamaan kuadrat bernilai real namun memiliki akar-akar yang berlainan.

```
>$&pk1 with x=4, $&pk1 with x=-7 // mengecek hasil penyelesaian
```

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

Soal No 2
Selesaikan

$$x^2 + 100 = 20x$$

Penyelesaian :

```
>pk2 &= x^2+100-20*x=0; $&pk2 // mendefinisikan persamaan
```

$$x^2 - 20\,x + 100 = 0$$

```
>$&factor(pk2) // memfaktorkan persamaan
```

$$(x - 10)^2 = 0$$

```
>$&solve(pk2) // menyelesaikan persamaan
```

$$[x = 10]$$

```
>a=1; b=20; c=100; D = b^2 - 4*a*c // mengecek diskriminan
```

```
0
```

Karena diskriminan = 0 maka akar-akar bernilai sama.

```
>$&pk2 with x=10 // mengecek hasil penyelesaian
```

$$0 = 0$$

Penjelasan :

$$x^2 + 100 = 20x$$

$$x^2 - 20x + 100 = 0$$

$$(x - 10)^2 = 0$$

$$x - 10 = 0 \vee x - 10 = 0$$

$$x = 10$$

Soal No 3
Selesaikan

$$x^2 + 2x + 2 = 0$$

Penyelesaian :

```
>pk3 &= x^2+2*x+2=0; $&pk3 // mendefinisikan persamaan
```

$$x^2 + 2\,x + 2 = 0$$

```
>$&factor(pk3) // memfaktorkan persamaan
```

$$x^2 + 2\,x + 2 = 0$$

```
>spk3 &= solve(pk3); $&spk3 // menyelesaikan persamaan
```

$$[x = -i - 1, x = i - 1]$$

```
>$&allroots(pk3) // menyelesaikan persamaan
```

$$[x = 1.0\,i - 1.0, x = -1.0\,i - 1.0]$$

```
>a=1; b=2; c=2; D = b^2 - 4*a*c // mengecek diskriminan
```

```
-4
```

Karena diskriminan < 0 maka akar imajiner/tidak real.
Penjelasan :

$$x^2 + 2x + 2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4.1.2}}{2.1}$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm 2i}{2}$$

$$x_1 = -1 + i$$

$$x_2 = -1 - i$$

Persamaan Nilai Mutlak

Persamaan nilai mutlak adalah persamaan yang memuat variabel di dalam tanda mutlak. Nilai mutlak biasa dituliskan dalam tanda mutlak |. . . |. Misalnya, |4|, |5|, dan seterusnya. Jika suatu bilangan berada di dalam tanda |...|, nilai bilangan itu bisa positif dan bisa juga negatif. Namun, pemberian tanda mutlak menganggap bahwa nilainya selalu positif. Contoh |x|=12 bisa bernilai x = -12 atau x = 12. Pada persamaan nilai mutlak, ada dua kemungkinan persamaan yang memenuhi, yaitu persamaan yang memuat tanda negatif maupun persamaan yang tidak memuat tanda negatif.

Untuk $a > 0$ dan ekspresi aljabar X :

$$\boxed{|X| = a \text{ ekuivalen dengan } X = -a \text{ atau } X = a.}$$

Soal dan Penyelesaian Persamaan Nilai Mutlak

Soal No 1
Selesaikan

$$|4x - 3| + 1 = 7$$

Penyelesaian :

```
>pnm1 &= abs(4*x-3)+1=7; $&pnm1 // mendefinisikan persamaan
```

$$|4\,x - 3| + 1 = 7$$

```
>$&solve(pnm1) // menyelesaikan persamaan
```

$$[|4\,x - 3| = 6]$$

```
>$&solve(4*x-3=6), $&solve(4*x-3=-6) // menyelesaikan persamaan
```

$$\left[x = \frac{9}{4}\right]$$

$$\left[x = -\frac{3}{4}\right]$$

```
>$&pnm1 with x=9/4, $&pnm1 with x=-3/4 // mengecek penyelesaian
```

$$7 = 7$$

$$7 = 7$$

Penjelasan :

$$|4x - 3| + 1 = 7$$

$$|4x - 3| = 7 - 1$$

$$|4x-3|=6$$

Karena untuk a>0 dan ekspresi aljabar X

$|X|=a$ ekuivalen dengan $X=-a$ atau $X=a$

maka

$$4x-3=6 \vee 4x-3=-6$$

$$4x=9 \vee 4x=-3$$

$$x=\frac{9}{4} \vee x=\frac{-3}{4}$$

Soal No 2
Selesaikan

$$12-|x+6|=5$$

Penyelesaian :

```
>pnm2 &= 12-abs(x+6)=5; $&pnm2 // mendefinisikan persamaan
```

$$12-|x+6|=5$$

```
>$&solve(pnm2) // menyelesaikan persamaan
```

$$[|x+6|=7]$$

```
>$&solve(x+6=7), $&solve(x+6=-7) // menyelesaikan persamaan
```

$$[x=1]$$

$$[x=-13]$$

```
>$&pnm2 with x=1, $&pnm2 with x=-13 // mengecek penyelesaian
```

$$5=5$$

$$5=5$$

Penjelasan :

$$12 - |x+6| = 5$$

$$-|x+6| = 5 - 12$$

$$|x+6| = 7$$

Karena untuk a>0 dan ekspresi aljabar X

$|X| = a$ ekuivalen dengan $X = -a$ atau $X = a$

maka

$$x+6 = 7 \vee x+6 = -7$$

$$x = 1 \vee x = -13$$

Soal No 3
Selesaikan

$$7 - |2x - 1| = 6$$

Penyelesaian :

```
>pnm3 &= 7-abs(2*x-1)=6; $&pnm3 // mendefinisikan persamaan
```

$$7 - |2\,x - 1| = 6$$

```
>$&solve(pnm3) // menyelesaikan persamaan
```

$$[|2\,x - 1| = 1]$$

```
>$&solve(2*x-1=1), $&solve(2*x-1=-1) // menyelesaikan persamaan
```

$$[x = 1]$$

$$[x = 0]$$

```
>$&pnm3 with x=1, $&pnm3 with x=0 // mengecek penyelesaian
```

$$6 = 6$$

$$6 = 6$$

Penjelasan :

$$7-|2x-1|=6$$

$$-|2x-1|=6-7$$

$$|2x-1|=1$$

Karena untuk a>0 dan ekspresi aljabar X

$|X|=a$ ekuivalen dengan $X=-a$ atau $X=a$

maka

$$2x-1=1 \vee 2x-1=-1$$

$$2x=2 \vee 2x=0$$

$$x=1 \vee x=0$$

Persamaan Eksponen

Persamaan eksponen adalah persamaan yang pangkatnya atau bilangan pokok (basis) dan pangkatnya memuat suatu variabel.
Penyelesaian persamaan eksponen merupakan himpunan semua nilai x yang memenuhi persamaan eksponen tersebut, atau bisa juga kita sebut sebagai himpunan penyelesaian.
Bentuk-Bentuk Persamaan Eksponen
Persamaan Eksponen Sederhana

1. Jika $a^{f(x)}=1$, maka $f(x)=0$ dengan $a>0$ dan $a\neq 1$

2. Jika $a^{f(x)}=a^{b}$, maka $f(x)=b$ dengan $a>0$ dan $a\neq 1$

3. Jika $a^{f(x)}=a^{g(x)}$, maka $f(x)=g(x)$ dengan $a>0$ dan $a\neq 1$

4. Jika $a^{f(x)}=b^{f(x)}$, maka $f(x)=0$ dengan $a,b>0$ dan $a,b\neq 1$

5. Jika $a^{f(x)}=b^{g(x)}$, maka $\log a^{f(x)}=\log b^{g(x)}$ dengan $a,b>0$ dan $a,b\neq 1$

6. Jika $f(x)^{g(x)}=1$, maka ada tiga langkah penyelesaian, yaitu:

a. $f(x)=1$

b. $f(x)=-1$, syarat $g(x)$ genap

c. $g(x)=0$, syarat $f(x)\neq 0$

7. Jika $f(x)^{h(x)}=g(x)^{h(x)}$, maka ada tiga langkah penyelesaian, yaitu:

a. $f(x)=g(x)$

b. $f(x)=-g(x)$, syarat $h(x)$ genap

c. $h(x) = 0$, syarat $f(x), g(x) \neq 0$

8. Jika $f(x)^{g(x)} = f(x)^{h(x)}$, maka ada empat langkah penyelesaian, yaitu:

a. $g(x) = h(x)$

b. $f(x) = 1$

c. $f(x) = -1$, syarat $g(x)$ dan $h(x)$ genap atau ganjil

d. $f(x) = 0$, syarat $g(x)$ dan $h(x)$ positif

Persamaan Eksponen Tak Sederhana

1. Jika $p(a^x)^2 + q(a^x) + r = 0$, maka ada dua langkah penyelesaian, yaitu:

a. Misalkan a^x dengan variabel lain (selain variabel pada soal)

b. Faktorkan persamaan

Soal dan Penyelesaian Persamaan Eksponen

Soal No 1
Selesaikan

$$3^x = 81$$

Penyelesaian :

```
>pe1 &= 3^x=81; $&pe1 // mendefinisikan persamaan
```

$$3^x = 81$$

```
>$&solve(pe1) // menyelesaikan persamaan
```

$$\left[x = \frac{\log 81}{\log 3}\right]$$

```
>x=log(81)/log(3) // menyelesaikan persamaan
```

```
4
```

Menggunakan solve tidak langsung menemukan hasil akhir sehingga kita bisa menggunakan find_root

```
>$&find_root(pe1,x,0,10) // menyelesaikan persamaan
```

$$4.0$$

```
>$&pe1 with x=4 // mengecek penyelesaian
```

$$81 = 81$$

Penjelasan :

$$3^x = 81$$

$$3^x = 3^4$$

$$x = 4$$

Soal No 2
Selesaikan

$$4^{3x-5} = 16$$

Penyelesaian :

```
>pe2 &= 4^(3*x-5)=16; $&pe2 // mendefinisikan persamaan
```

$$4^{3\,x-5} = 16$$

```
>$&solve(pe2) // menyelesaikan persamaan
```

$$\left[x = \frac{\log 16 + 5\,\log 4}{3\,\log 4}\right]$$

```
>x=(logbase(16, 4)+5*logbase(4, 4))/3*logbase(4, 4), frac(x) // menyelesaikan persamaan
```

```
2.33333333333
7/3
```

Menggunakan solve tidak langsung menemukan hasil akhir sehingga kita bisa menggunakan find_root

```
>$&find_root(pe2,x,0,10) // menyelesaikan persamaan
```

$$2.333333333333333$$

```
>$&pe2 with x=7/3 // mengecek penyelesaian
```

$$16 = 16$$

Penjelasan :

$$4^{3x-5} = 16$$

$$4^{3x-5} = 4^2$$

$$3x - 5 = 2$$

$$3x = 7$$

$$x = \frac{7}{3}$$

cara lain :

$$4^{3x-5} = 16$$

$$(3x - 5)\log_4 4 = \log_4 16$$

$$x = \frac{\log_4 16 + 5\log_4 4}{3\log_4 4}$$

$$x = \frac{2+5}{3}$$

$$x = \frac{7}{3}$$

Soal No 3
Selesaikan

$$5^{x+2} = 4^{1-x}$$

Penyelesaian :

```
>pe3 &= 5^(x+2)= 4^(1-x); $&pe3 // mendefinisikan persamaan
```

$$5^{x+2} = 4^{1-x}$$

```
>$&solve(pe3) // menyelesaikan persamaan
```

$$\left[5^{x+2} = 4^{1-x}\right]$$

Karena tidak terselesaikan, kita ubah menjadi bentuk logaritma.

```
>$&solve(log(5^(x+2))=log(4^(1-x))) // menyelesaikan persamaan
```

$$\left[x = \frac{\log 4 - 2\,\log 5}{\log 5 + \log 4}\right]$$

```
>x = (log(4)-2*log(5))/(log(5)+log(4)) // menyelesaikan persamaan
```

```
-0.611730721041
```

Menggunakan solve tidak langsung menemukan hasil akhir sehingga kita bisa menggunakan find_root

```
>$&find_root(pe3,x,-0.7,10) // menyelesaikan persamaan
```

$$-0.611730721041445$$

```
>$&pe3 with x=-0.611730721041445 // mengecek penyelesaian
```

$$9.340251790952284 = 9.340251790952284$$

Penjelasan :

$$5^{x+2} = 4^{1-x}$$

$$\log_5 5^{x+2} = \log_5 4^{1-x}$$

$$x + 2 = \log_5 2^{2-2x}$$

$$x + 2 = (2 - 2x) \log_5 2$$

$$x + 2 = 2 \log_5 2 - 2 \log_5 2x$$

$$x + 2 \log_5 2x = 2 \log_5 2 - 2$$

$$x(1 + 2 \log_5 2) = 2 \log_5 2 - 2$$

$$x = \frac{2 \log_5 2 - 2}{1 + 2 \log_5 2}$$

$$x = \frac{\log_5 2^2 + \log_5 5^{-2}}{\log_5 5 + \log_5 2^2}$$

$$x = \frac{\log_5 (2^2 .5^{-2})}{\log_5 (5.2^2)}$$

$$x = \frac{\log_5 (\frac{4}{25})}{\log_5 20}$$

$$x = \log_{20} (\frac{4}{25})$$

$$x = \log_{20} (\frac{2}{5})^2$$

$$x = 2 \log_{20} (\frac{2}{5}) = -0,611731$$

Persamaan Logaritma

Persamaan logaritma adalah persamaan yang memuat bentuk logaritma dengan basis atau numerus, atau keduanya memuat variabel. Hal tersebut berarti ada dua bentuk logaritma (di ruas kiri dan kanan) dimana basis atau numerus atau keduanya memuat variabel, kemudian kedua ruas ini dihubungan dengan tanda sama dengan. Nilai x yang memenuhi persamaan ini disebut dengan penyelesaian dari persamaan tersebut.
Bentuk umum logaritma :

$$\boxed{\log_a x = n}$$

a = basis atau bilangan pokok, dengan syarat $a > 0$ dan $a \neq 1$

x = numerus, dengan syarat $x > 0$

n = nilai logaritma

Bentuk-bentuk persamaan logaritma :
Bentuk Pertama

$$\log_a f(x) = \log_a n \Leftrightarrow f(x) = n$$

dengan syaratnya : $a, n, f(x) > 0$ dan $a \neq 1$

Bentuk Kedua

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x)$$

dengan syaratnya : $a, f(x), g(x) > 0$ dan $a \neq 1$

Bentuk Ketiga

$$\log_a f(x) = \log_b f(x) \Leftrightarrow f(x) = 1$$

dengan syaratnya : $a, b, f(x) > 0$, $a, b \neq 1$, dan $a \neq b$

Bentuk Keempat

$$\log_{f(x)} g(x) = \log_{f(x)} h(x) \Leftrightarrow g(x) = h(x)$$

dengan syaratnya : $f(x), g(x), h(x) > 0$ dan $f(x) \neq 1$

Bentuk Kelima

$$\log_{f(x)} h(x) = \log_{g(x)} h(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x)$$

dengan syaratnya : $f(x), g(x), h(x) > 0$ dan $f(x), g(x) \neq 1$

Bentuk Keenam

$$A(\log_a f(x))^2 + B(\log_a f(x)) + C = 0$$

dengan syaratnya : $a, f(x) > 0$ dan $a \neq 1$

Soal dan Penyelesaian Persamaan Logaritma

Soal No 1
Selesaikan

$$\log x = -4$$

Penyelesaian :

```
>plog1 &= log(x)=-4; $&plog1 // mendefinisikan persamaan
```

$$\log x = -4$$

```
>slog1 &= solve(plog1); $&slog1 // menyelesaikan persamaan
```

$$\left[x = e^{-4}\right]$$

```
>$&subst(slog1,plog1) // mengecek penyelesaian
```

$$-4 = -4$$

Penjelasan :
Logaritma memiliki basis e (menggunakan bilangan Euler), maka :

$$\log x = -4$$

karena

$$\log_a x = n \Leftrightarrow a^n = x$$

maka :

$$x = e^{-4}$$

Soal No 2
Selesaikan

$$\log_5 x = 4$$

Penyelesaian :

```
>plog2 &= log(x)/log(5) = 4; $&plog2 // mendefinisikan persamaan
```

$$\frac{\log x}{\log 5} = 4$$

Karena fungsi: log (<x>) mewakili logaritma natural (basis e) dari <x> dan Maxima tidak memiliki fungsi bawaan untuk logaritma basis 10 atau pangkalan lainnya, maka logaritma basis 10 dapat ditulis :
'log10(x) := log(x) / log(10)'
begitu juga pangkalan lainnya.

```
>$&solve(plog2) // menyelesaikan persamaan
```

$$[x = 625]$$

Mengecek penyelesaian

```
>log(625)/log(5)
```

```
4
```

Penjelasan :

$$\log_5 x = 4$$

$$\frac{\log x}{\log 5} = 4$$

$$\log x = 4 \log 5$$

$$\log x = \log 5^4$$

$$x = 5^4$$

$$x = 625$$

Persamaan Trigonometri

Jika suatu persamaan berisi ekspresi trigonometri dengan variabel, seperti cos(x), itu disebut sebagai persamaan trigonometri. Beberapa persamaan trigonometri adalah identitas, seperti

$$sin^2x + cos^2x = 1$$

Seperti jenis persamaan lainnya, persamaan trigonometri diselesaikan dengan mencari semua nilai x yang membuat persamaan tersebut benar.
Jenis Persamaan Trigonometri
1. Persamaan sinus

$$\sin(x) = \sin(a)$$

$$x = a + 2\pi k$$

$$x = (\pi - a) + 2\pi k$$

Untuk k merupakan konstanta bilangan bulat.
2. Persamaan Cosinus

$$\cos(x)=\cos(a)$$

$$x=\pm a+2\pi k$$

Untuk k merupakan konstanta bilangan bulat.
3. Persamaan Tangen

$$\tan(x)=\tan(a)$$

$$x=a+2\pi k$$

Untuk k merupakan konstanta bilangan bulat.

Soal dan Penyelesaian Persamaan Trigonometri

Soal No 1
Selesaikan dan temukan semua solusi di [0,2pi)

$$2\cos(x)^2=1$$

Penyelesaian :

```
>&load(to_poly_solve)
```

```
        D:/SOFTWARE APKOM/Euler x64/maxima/share/maxima/5.35.1/share/\
  to_poly_solve/to_poly_solve.mac
```

Function: load (<filename>)
Mengevaluasi ekspresi dalam <filename>, sehingga membawa variabel, fungsi, dan objek lain ke dalam Maxima.

```
>pt1 &= 2*cos(x)^2=1; $&pt1 // mendefinisikan persamaan
```

$$2\,\cos^2x=1$$

```
>spt1 &= nicedummies(to_poly_solve(pt1, x)); $&spt1 // menyelesaikan persamaan
```

$$\left[x=\frac{2\,\pi\,\%z_0-\frac{\pi}{2}}{2}\right]\cup\left(\left[x=\frac{2\,\pi\,\%z_1+\frac{\pi}{2}}{2}\right]\right)$$

```
>$&sublis([%z0=0, %z1=0],spt1), $&sublis([%z0=1, %z1=1],spt1), ...
>$&sublis([%z0=2, %z1=2],spt1) // menyelesaikan persamaan dengan mensubstitusikan bilangan
```

$$\left[x=-\frac{\pi}{4}\right]\cup\left(\left[x=\frac{\pi}{4}\right]\right)$$

$$\left[x=\frac{3\,\pi}{4}\right]\cup\left(\left[x=\frac{5\,\pi}{4}\right]\right)$$

$$\left[x = \frac{7\,\pi}{4}\right] \cup \left(\left[x = \frac{9\,\pi}{4}\right]\right)$$

Penjelasan :

$$2\cos(x)^2 = 1$$

$$\cos(x)^2 = \frac{1}{2}$$

$$\cos(x) = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k \vee x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$$

Karena solusi di [0,2pi) maka solusi/penyelesaiannya:

$$x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$$

Sistem Persamaan

Sistem persamaan adalah dua atau lebih persamaan yang mengandung variabel yang sama. Dalam sistem persamaan, penyelesaiannya harus memenuhi semua persamaan dalam sistem.

Sistem Persamaan Linear

Sistem persamaan linear adalah persamaan-persamaan linear yang dikorelasikan untuk membentuk suatu sistem. Sistem Persamaan Linier (SPL) dengan n variabel x1, x2, . . . , xn dan m persamaan adalah suatu sistem persamaan yang berbentuk

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ...a_{1j}x_j + ... + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ...a_{2j}x_j + ... + a_{2n}x_n = b_2$$

$$.$$

$$.$$

$$.$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ...a_{mj}x_j + ... + a_{mn}x_n = b_m$$

dengan $a_{ij} \in \mathbb{R}, i = 1, 2, ..., m$ dan $j = 1, 2, ..., n.$

Selesaian (solusi) dari System Persamaan Linear diatas adalah pasangan n-bilangan terurut (s1, s2, . . . , sn) yang jika s1 disubstitusikan ke x1, s2 disubstitusikan ke x2, . . . , sn disubstitusikan ke xn maka berlaku ai1.s1 + ai2.s2 + . . . + ain.sn = bi, i=1,2, . . . , m

Secara lengkap, jika (s1, s2, . . . , sn) dari SPL diatas maka (s1, s2, . . . , sn) merupakan solusi dari setiap persamaan dalam SPL diatas. Artinya
berlaku

$$a_{11}s_1 + a_{12}s_2 + ...a_{1j}s_j + ... + a_{1n}s_n = b_1$$

$$a_{21}s_1 + a_{22}s_2 + ...a_{2j}s_j + ... + a_{2n}s_n = b_2$$

.

.

.

$$a_{m1}s_1 + a_{m2}s_2 + ...a_{mj}s_j + ... + a_{mn}s_n = b_m$$

Himpunan semua selesaian dari Sistem Persamaan Linier disebut Himpunan Solusi (Notasinya HS).
Sistem Persamaan Linier yang mempunyai selesaian disebut Konsisten dan Sistem yang tidak mempunyai selesaian disebut tidak konsisten.

Untuk melihat tafsiran geometri dari selesaian suatu SPL,
diberikan SPL dengan 2 persamaan dan 2 variabel, sebagai berikut :

$$a_1x + b_1y = c_1,$$

$$a_2x + b_2y = c_2,$$

dengan a1, a2, b1, dan b2 konstanta riil tidak nol.
Grafik persamaan-persamaan ini merupakan garis, misal garis l1
dan garis l2. Karena titik (x,y) terletak pada sebuah garis jika dan
hanya jika bilangan-bilangan x dan y memenuhi persamaan tersebut,
maka selesaian SPL tersebut akan bersesuaian dengan titik perpotongan dari garis l1 dan garis l2. Terdapat 3 (tiga) kemungkinan, yaitu :
a. garis l1 dan garis l2 sejajar, yaitu jika tidak terdapat titik
perpotongan sehingga sistem tidak mempunyai selesaian.
b. garis l1 dan garis l2 berpotongan pada satu titik, sehingga sistem hanya mempunyai satu (tunggal) selesaian.
c. garis l1 dan garis l2 berimpit artinya terdapat takterhingga banyak titik perpotongan. Dalam hal ini sistem mempunyai takterhingga banyak selesaian. Biasa dikatakan SPL mempunyai banyak solusi.
Berdasarkan ilustrasi kasus di atas, maka SPL mempunyai tiga kemungkinan yang berkaitan dengan selesaian, yaitu tidak mempunyai selesaian, mempunyai satu selesaian dan mempunyai takterhingga banyak selesaian.

Metode Penyelesaian Sistem Persamaan Linear
1) Operasi Persamaan Linier (OPL)
Metode dasar untuk menyelesaikan suatu SPL adalah mengganti sistem yang diberikan dengan sistem baru. Sistem baru yang mempunyai himpunan selesaian (HS) sama, dengan pemecahan yang lebih mudah. Sistem baru ini diperoleh dari suatu tahapan dengan menerapkan suatu langkah operasi. Operasi-operasi yang dilakukan dimaksudkan untuk menghilangkan variabel-variabel secara sistematis.
Operasi Persamaan Linier (OPL) tersebut adalah
1.mengalikan suatu persamaan dengan skalar riil tidak nol, k
2.menukar letak dua persamaan
3.mengganti suatu pers. dengan pers. tsb + k kali pers. lain
2) Operasi Baris Elementer (OBE)
Operasi-operasi yang digunakan untuk menyelesaikan SPL melalui [A|B] adalah Operasi Baris Elementer (OBE). OBE adalah suatu operasi yang hanya melibatkan unsure (bilangan) dalam suatu matriks.
3) Eliminasi Gauss dan Eliminasi Gauss-Jordan
Telah diketahui bahwa setiap SPL dapat diselesaikan dengan mengubah matriks lengkapnya menjadi suatu matriks tertentu sehingga selesaiannya dapat segera diperoleh. Maka kecepatan dalam menyelesaikan SPL tergantung pada proses pengubahan matriks lengkap ke bentuk matriks yang spesifik. Matriks spesifik yang

dimaksud adalah MEB atau MEBT.
Proses perubahan matriks lengkap [A | B] ke bentuk MEB dengan OBE disebut Eliminasi Gauss. Sedangkan proses perubahan matriks lengkap [A | B] ke bentuk MEBT melalui OBE dinamakan Eliminasi Gauss-Jordan.
4) Metode Invers Matriks
Metode Invers menggunakan matriks balikan dari A. Sistem Persamaan Linier Ax = b dapat diselesaikan dengan cara x = (A invers) dikalikan b dengan syarat (A invers) ada.
5) Metode Dekomposisi LU
Jika matriks A persegi non-singular maka ia dapat difaktorkan (di dekomposisi) menjadi matriks segitiga bawah L (lower) dan matriks segitiga atas U (upper).

Soal dan Penyelesaian Sistem Persamaan Linear

Soal No 1
Selesaikan sistem persamaan linear berikut.

$$4x + 2y = 11,$$

$$3x - y = 2$$

Penyelesaian :

```
>spl1a &= 4*x+2*y = 11; spl1b &= 3*x-y=2; $&spl1a, $&spl1b // mendefinisikan SPL
```

$$2\,y+4\,x=11$$

$$3\,x-y=2$$

```
>sspl1 &= solve([spl1a,spl1b],[x,y]); $&sspl1 // menyelesaikan SPL
```

$$\left[\left[x=\frac{3}{2},y=\frac{5}{2}\right]\right]$$

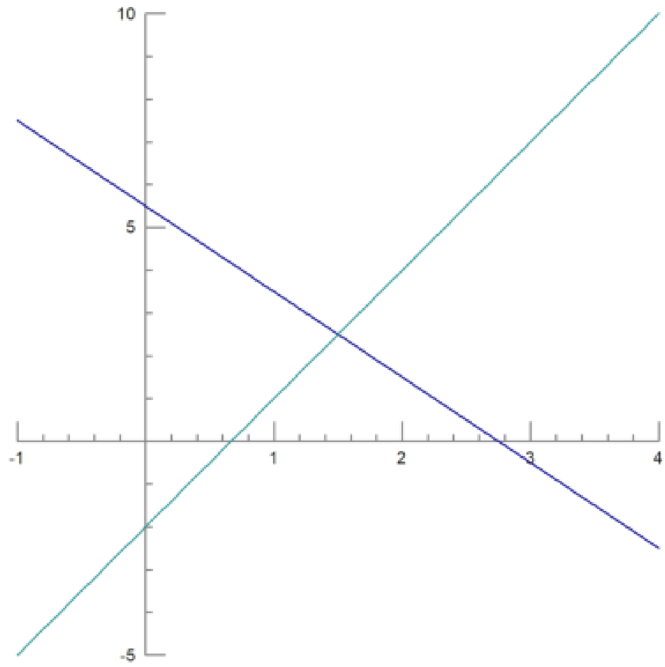
```
>$&subst(sspl1,spl1a), $&subst(sspl1,spl1b) // mengecek penyelesaian
```

$$11=11$$

$$2=2$$

Metode grafik :

```
>plot2d(["(11-4*x)/2", "-2+3x"], -1, 4, grid = 8, color=4:5):
```



Karena garis persamaan 4x + 2y = 11 dan 3x - y = 2 berpotongan pada satu titik, maka sistem hanya mempunyai satu penyelesaian.

```
>A1 = [4,2;3,-1]
```

```
             4            2
             3           -1
```

```
>b1 = [11;2]
```

```
            11
             2
```

```
>M1 = A1|b1
```

```
             4            2           11
             3           -1            2
```

Metode matriks dengan Eliminasi Gauss-Jordan :

```
>echelon(M1)
```

```
             1            0          1.5
             0            1          2.5
```

Metode invers :

```
>inv(A1).b1
```

```
            1.5
            2.5
```

Metode LU Decomposition :

```
>ASPL1 &= matrix([4,2],[3,-1]); bspl1 &= matrix([11],[2]); $&ASPL1, $&bspl1, ...
>$&linsolve_by_lu(ASPL1, bspl1)
```

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 11 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}, \mathbf{false}\right]$$

Dari berbagai metode penyelesaian yang sudah dilakukan dapat dilihat bahwa SPL tersebut memiliki satu penyelesaian, yaitu x = 1.5 dan y = 2.5

Soal No 2
Selesaikan sistem persamaan linear berikut.

$$3x + 2y + 2z = 3,$$

$$x + 2y - z = 5,$$

$$2x - 4y + z = 0$$

Penyelesaian :

```
>spl2a &= 3*x+2*y+2*z=3; spl2b &= x+2*y-z=5; spl2c &= 2*x-4*y+z=0; // mendefinisikan SPL
>&powerdisp:true; $&spl2a, $&spl2b, $&spl2c // mendefinisikan SPL
```

$$3\,x + 2\,y + 2\,z = 3$$

$$x + 2\,y - z = 5$$

$$2\,x - 4\,y + z = 0$$

```
>sspl2 &= solve([spl2a,spl2b,spl2c],[x,y,z]); $&sspl2 // menyelesaikan SPL
```

$$\left[\left[x = 2, y = \frac{1}{2}, z = -2\right]\right]$$

```
>$&subst(sspl2,spl2a), $&subst(sspl2,spl2b), $&subst(sspl2,spl2c) // mengecek penyelesaian
```

$$3 = 3$$

$$5 = 5$$

$$0 = 0$$

```
>A2 = [3,2,2;1,2,-1;2,-4,1]
```

```
              3             2             2
              1             2            -1
              2            -4             1
```

```
>b2 = [3;5;0]
```

```
              3
              5
              0
```

```
>M2 = A2|b2
```

```
              3             2             2             3
              1             2            -1             5
              2            -4             1             0
```

Metode matriks dengan Eliminasi Gauss-Jordan :

```
>echelon(M2)
```

```
              1             0             0             2
              0             1             0           0.5
              0             0             1            -2
```

Metode invers :

```
>inv(A2).b2
```

```
              2
            0.5
             -2
```

Metode LU Decomposition :

```
>ASPL2 &= matrix([3,2,2],[1,2,-1],[2,-4,1]); bspl2 &= matrix([3],[5],[0]); $&ASPL2, $&bspl
>$&linsolve_by_lu(ASPL2, bspl2)
```

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{2} \\ -2 \end{pmatrix}, \mathbf{false}\right]$$

Dari berbagai metode penyelesaian yang sudah dilakukan dapat dilihat bahwa SPL tersebut memiliki satu penyelesaian, yaitu x = 2, y = 0.5, dan z = -2

Soal No 3
Selesaikan sistem persamaan linear berikut

$$3x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 10,$$

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 6,$$

$$x_1 - 5x_2 + 4x_3 + x_4 = 4$$

Penyelesaian :

```
>remvalue x3,x2
>spl3a &= 3*x1-2*x2+3*x3+2*x4=10; spl3b &= 2*x1+3*x2-x3+x4=6; ...
>spl3c &= x1-5*x2+4*x3+x4=4; $&spl3a, $&spl3b, $&spl3c // mendefinisikan SPL
```

$$3\,x_1 - 2\,x_2 + 3\,x_3 + 2\,x_4 = 10$$

$$2\,x_1 + 3\,x_2 - x_3 + x_4 = 6$$

$$x_1 - 5\,x_2 + 4\,x_3 + x_4 = 4$$

```
>$&solve([spl3a,spl3b,spl3c], [x1,x2,x3,x4]) // menyelesaikan SPL
```

$$\left[\left[x_1 = \frac{42 - 8\,\%r_3 - 7\,\%r_4}{13}, x_2 = \frac{-2 + \%r_3 + 9\,\%r_4}{13}, x_3 = \%r_4, x_4 = \%r_3\right]\right]$$

```
>A3 = [3,-2,3,2;2,3,-1,1;1,-5,4,1]
```

```
          3          -2           3           2
          2           3          -1           1
          1          -5           4           1
```

```
>b3 = [10;6;4]
```

```
10
 6
 4
```

```
>M3 = A3|b3
```

```
3        -2        3        2        10
2         3       -1        1         6
1        -5        4        1         4
```

Metode matriks dengan Eliminasi Gauss-Jordan :

```
>echelon(M3)
```

```
1         0     0.538462     0.615385     3.23077
0         1    -0.692308   -0.0769231   -0.153846
```

Karena ada satu baris dengan semua elemen nol di sisi kiri (koefisien variabel) dan elemen paling kanan (hasil) juga nol, maka sistem memiliki solusi tak tentu dengan banyak solusi. Ini berarti terdapat variabel bebas yang dapat diatur secara bebas.
Jika dimisalkan x3 = s dan x4 = t dengan s, t bilangan riil, maka:

$$x_1 = \frac{42 - 7s - 8t}{13}$$

$$x_2 = \frac{-2 + 9s + t}{13}$$

$$x_3 = s$$

$$x_4 = t$$

Jadi,

$$HS = \left\{ \left(\frac{42-7s-8t}{13}, \frac{-2+9s+t}{13}, s, t\right) / s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

Soal No 4
Selesaikan SPL berikut

$$4x - 3y = 10,$$

$$-x + 3y = -3,$$

$$3x = 10$$

Penyelesaian :

```
>spl4a &= 4*x-3*y=10; spl4b &= -x+3*y=-3; spl4c &= 3*x=10;  ...
>$&spl4a, $&spl4b, $&spl4c // mendefinisikan SPL
```

$$4\,x - 3\,y = 10$$

$$-x+3\,y=-3$$

$$3\,x=10$$

```
>$&solve([spl4a,spl4b,spl4c], [x,y]) // menyelesaikan SPL
```

$$[]$$

Tidak ada solusi yang memenuhi

```
>A4 = [4,-3;-1,3;3,0]
```

```
              4             -3
             -1              3
              3              0
```

```
>b4 = [10;-3;10]
```

```
             10
             -3
             10
```

```
>M4 = A4|b4
```

```
              4             -3             10
             -1              3             -3
              3              0             10
```

Metode matriks dengan Eliminasi Gauss-Jordan :

```
>echelon(M4)
```

```
              1              0              0
              0              1              0
              0              0              1
```

Karena ada baris yang memiliki semua elemen nol kecuali elemen paling kanan, seperti [0 0 | k], di mana k bukan nol, maka sistem tidak memiliki solusi. Ini berarti sistem persamaan tidak konsisten dan tidak memiliki solusi yang memenuhi semua persamaan.

Sistem Persamaan Non Linear

Sistem persamaan nonlinier adalah sistem yang terdiri dari dua atau lebih persamaan dalam dua variabel atau lebih yang mengandung paling sedikit satu persamaan yang tidak linier.

Menyelesaikan Sistem Persamaan Nonlinier Menggunakan Substitusi

Metode substitusi yang kita gunakan untuk sistem linier adalah metode yang sama yang akan kita gunakan untuk sistem nonlinier. Kita menyelesaikan satu persamaan untuk satu variabel dan kemudian mensubstitusikan hasilnya ke persamaan kedua untuk menyelesaikan variabel lain, dan seterusnya. Namun, terdapat variasi dalam hasil yang mungkin terjadi.

Menyelesaikan Sistem Persamaan Nonlinier Menggunakan Eliminasi

Substitusi sering kali merupakan metode yang disukai ketika sistem persamaan mencakup persamaan linier dan persamaan nonlinier. Namun, jika kedua persamaan dalam sistem mempunyai variabel derajat kedua yang serupa, penyelesaiannya menggunakan eliminasi dengan penjumlahan seringkali lebih mudah daripada substitusi. Secara umum, eliminasi adalah metode yang jauh lebih sederhana ketika sistem hanya melibatkan dua persamaan dalam dua variabel (sistem dua-dua), dibandingkan sistem tiga-tiga, karena langkah-langkahnya lebih sedikit.

Soal dan Penyelesaian Sistem Persamaan Non Linear

Soal No 1

Selesaikan sistem persamaan non linear berikut.

$$3x - y = -2,$$

$$2x^2 - y = 0$$

Penyelesaian :

```
>spnl1a &= 3*x-y=-2; spnl1b &= 2*x^2-y=0; $&spnl1a, $&spnl1b // mendefinisikan SPNL
```

$$3\,x - y = -2$$

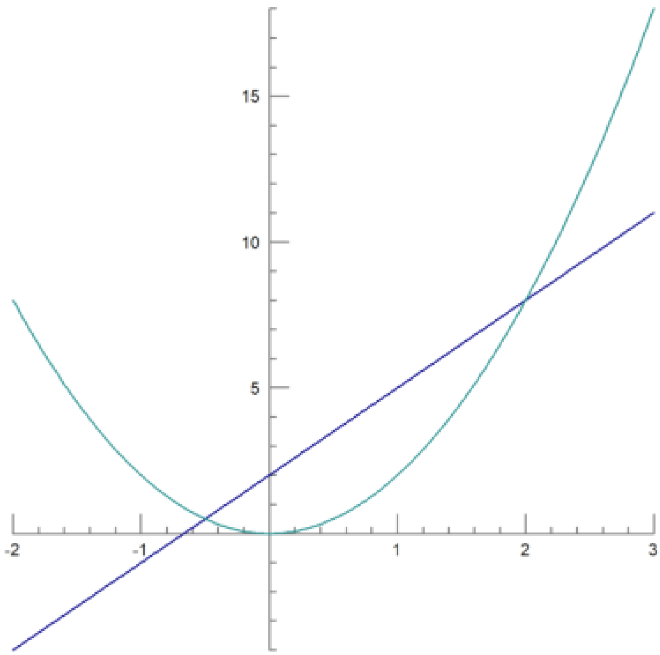
$$2\,x^2 - y = 0$$

```
>$&solve([spnl1a,spnl1b],[x,y]) // menyelesaikan SPNL
```

$$\left[[x = 2, y = 8]\,, \left[x = -\frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}\right]\right]$$

Metode grafik :

```
>plot2d(["3*x+2", "2*x^2"], -2, 3, grid = 8, color=4:5):
```



Berpotongan di dua titik berarti memiliki dua penyelesaian.
Jadi, SPNL tersebut memiliki dua penyelesaian, yaitu (2,8) dan (-0.5,0.5)

Soal No 2
Selesaikan sistem persamaan non linear berikut.

$$2x^2 + y = 3,$$

$$3x^2 + y = 4$$

Penyelesaian :

```
>spnl2a&= 2*x^2+y=3; spnl2b &= 3*x^2+y=4; $&spnl2a, $&spnl2b // mendefinisikan SPNL
```

$$2\,x^2 + y = 3$$

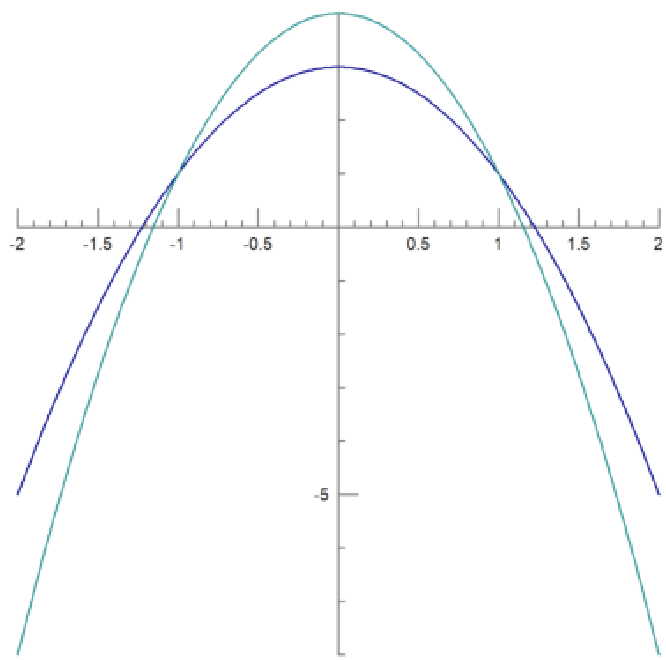
$$3\,x^2 + y = 4$$

```
>$&solve([spnl2a,spnl2b], [x,y]) // menyelesaikan SPNL
```

$$[[x = -1, y = 1], [x = 1, y = 1]]$$

Metode grafik :

```
>plot2d(["-2*x^2+3", "-3*x^2+4"], -2, 2, grid = 8, color=4:5):
```



Berpotongan di dua titik berarti memiliki dua penyelesaian.
Jadi, SPNL tersebut memiliki dua penyelesaian, yaitu (-1,1) dan (1,1).