Manuel José Fernández, mjfg@uniovi.es

CALCULO
GRADO EN INGEN. INFORM. DEL SOFTWARE. 2020-21
TEMA 1. FUNCIONES REALES DE UNA VARIABLE REAL

1.6: Polinomio de Taylor.

Derivadas sucesivas.

Dada $f : D \subset R \to R$, en los puntos en que f sea derivable, definimos la función derivada

$$\begin{array}{ll} f': D_1 \subset R \to R & \qquad D_1 \subset D \\ \quad x \to f'(x) & \end{array}$$

Si c es un punto interior del dominio de f', se dice que f' es derivable en c si existe y es finito el límite siguiente:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f'(c+h) - f'(c)}{h}$$

en cuyo caso, a dicho valor se le llama derivada segunda de f en el punto c, y se denota por $f''(c)$.

En los puntos en que f' sea derivable, definimos la función derivada segunda de f

$$\begin{array}{ll} f'': D_2 \subset R \to R & \qquad D_2 \subset D_1 \\ \quad x \to f''(x) & \end{array}$$

De forma análoga, se definen las derivadas tercera f''', cuarta $f^{(4}$ . . . y , en general, la derivada n-ésima $f^{(n}$.

Si $y = f(x)$, en la notación de Leibniz:

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} \qquad y'' = f''(x) = \frac{d^2 y}{dx^2} \quad \ldots \quad y^{(n} = f^{(n}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}$$

Definición.
Se dice que f es de clase n en (a,b) y escribiremos $f \in \mathrm{C}^n(a,b)$ si f es derivable hasta el orden n en todo punto de (a,b) de modo que $f^{(n}$ es continua en (a,b).

Se dice que f es de clase infinito en (a,b) y escribiremos $f \in \mathrm{C}^\infty(a,b)$ si f es derivable de cualquier orden en todos los puntos de (a,b). Así, por ejemplo, las funciones polinómicas, exponenciales, seno y coseno son de clase infinito en R.

Ejercicio.

Sea $f(x) = \begin{cases} x^2 sen(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Obtener la función derivada segunda de f en su dominio ¿Es f de clase uno en $(-1,1)$?

Solución.

Si $x \neq 0$, f es derivable, por ser producto y composición de funciones derivables.

Si $x \neq 0$, $f'(x) = 2x\, sen(1/x) + x^2 \cos(1/x)(-1/x^2) = 2x sen(1/x) - \cos(1/x)$

Si $x = 0$, $f'(0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h^2 sen(1/h)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} h\, sen(1/h) = 0$

El límite anterior es cero por ser producto de una función que tiende a cero por otra que es acotada.

f es derivable en R tal que $f'(x) = \begin{cases} 2x\, sen(1/x) - \cos(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Si $x \neq 0$, f' es derivable, por ser diferencia, producto y composición de funciones derivables.

Si $x \neq 0$, $f''(x) = 2\, sen(1/x) + 2x\cos(1/x)(-1/x^2) + sen(1/x)(-1/x^2) =$

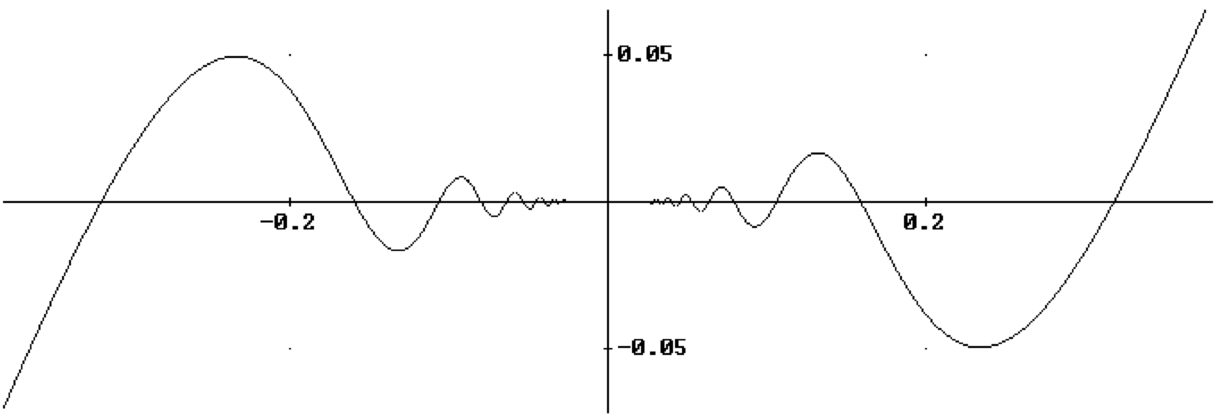
$$= 2sen(1/x) - 2\cos(1/x)/x - sen(1/x)/x^2$$

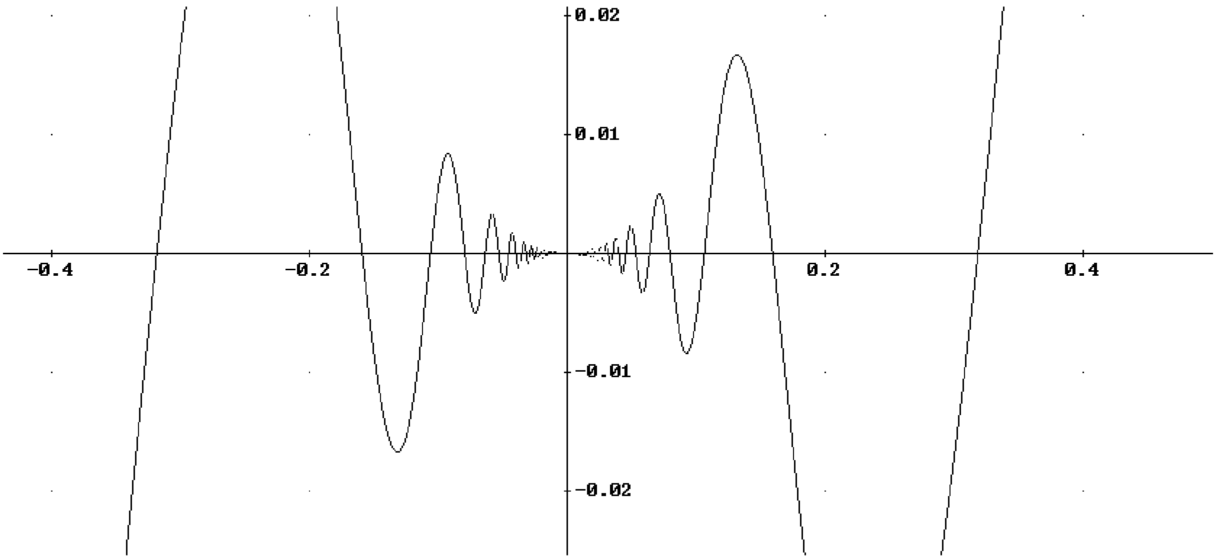
Si $x = 0$, f' presenta una discontinuidad esencial de 2ª especie. Nótese que

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0} 2x\, sen(1/x) - \cos(1/x) \qquad \text{no existe}$$

Por tanto, f' no es derivable en $x = 0$, es decir, no existe $f''(0)$

f no es de clase uno en $(-1,1)$ ya que f' no es continua en $x = 0$.





Polinomios de Taylor. Fórmula de Taylor con resto.

Los polinomios de Taylor aproximan a una función en un entorno de un punto, de tal manera que coinciden con la función y con algunas de sus derivadas en dicho punto.

Sea $f \in C^{n+1}(a,b)$ y sea $x_0 \in (a,b)$. Entonces, para cada $x \in (a,b)$ $x \neq x_0$, existe un punto c comprendido entre x y x_0 tal que:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

Definición.

Al polinomio $P(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ se le llama *polinomio de Taylor* de orden n asociado a la función f en el punto x_0, y se denota por $T_n(f, x_0)(x)$ o simplemente $T_n(x)$. Se verifica:

$$P(x_0) = f(x_0), \quad P'(x_0) = f'(x_0),\ P''(x_0) = f''(x_0), \ldots, P^{(n}(x_0) = f^{(n}(x_0)$$

Definición.

El término $\dfrac{f^{(n+1}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ se llama *resto* (en la forma de lagrange) de orden n de f en el punto x_0 y se denota $R_n(f\,,x_0)(x)$. Por tanto, se verifica:

$$\left| R_n(f\,,x_0)(x) \right| = \left| f(x) - T_n(f\,,x_0)(x) \right|$$

que nos mide el error cometido al tomar como valor de la función en un punto el valor del polinomio en dicho punto.

Formula de Mac-Laurin.

Es la fórmula de Taylor desarrollada en el punto $x_0 = 0$, es decir,

$$f(x) = f(0) + \frac{f\,'(0)}{1!}x + \frac{f\,''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1}(c)}{(n+1)!}x^{n+1} \quad , c \in (0,x) \quad \text{ó} \quad c \in (x,0)$$

Ejercicio.

Sea $f(x) = \sqrt{x+1}$

a) Hallar el polinomio de Taylor de orden 4 asociado a f en el punto $x_0 = 0$
b) Obtener un valor aproximado de $\sqrt{1.02}$ utilizando un polinomio de Taylor de segundo grado.

Solución.

a) $T_4(f\,,0)(x) = f(0) + \dfrac{f\,'(0)}{1!}x + \dfrac{f\,''(0)}{2!}x^2 + \dfrac{f\,'''(0)}{3!}x^3 + \dfrac{f^{(4}(0)}{4!}x^4$

$$f\,'(x) = \frac{1}{2}(x+1)^{-1/2} \Rightarrow f\,'(0) = 1/2 \qquad , \qquad f\,''(x) = -\frac{1}{4}(x+1)^{-3/2} \Rightarrow f\,''(0) = -1/4$$

$$f\,'''(x) = \frac{3}{8}(x+1)^{-5/2} \Rightarrow f\,'''(0) = 3/8 \quad ; \quad f^{(4}(x) = -\frac{15}{16}(x+1)^{-7/2} \Rightarrow f^{(4}(0) = -15/16$$

$$T_4(f\,,0)(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4$$

b)

$$T_2(f\,,0)(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2$$

$$\sqrt{1.02} = \sqrt{1+0.02} = f(0.02) \approx T_2(f\,,0)(0.02) = 1 + \frac{1}{2}0.02 - \frac{1}{8}(0.02)^2 = 1.00995$$

Ejercicio.

Obtener la expresión general del desarrollo de Mac-Laurin de la función $f(x)=\log(x+1)$ y utilizarlo para demostrar que $\log(2)<5/6$.

Solución.

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1}(c)}{(n+1)!}x^{n+1} \quad , c\in(0,x) \quad ó \quad c\in(x,0)$$

$$f'(x)=\frac{1}{x+1}\Rightarrow f'(0)=1 \qquad , \qquad f''(x)=-\frac{1}{(x+1)^2}\Rightarrow f''(0)=-1$$

$$f'''(x)=\frac{2}{(x+1)^3}\Rightarrow f'''(0)=2 \qquad , \qquad f^{(4}(x)=-\frac{6}{(x+1)^4}\Rightarrow f^{(4}(0)=-6$$

$$f^{(n}(x)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+1)^n} \qquad f^{(n}(0)=(-1)^{n-1}(n-1)! \qquad \frac{f^{(n}(0)}{n!}=(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$$

$$f^{(n+1}(c)=\frac{(-1)^n n!}{(c+1)^{n+1}} \qquad \frac{f^{(n+1}(c)}{(n+1)!}=\frac{(-1)^n}{(n+1)(c+1)^{n+1}}$$

$$\log(x+1)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n+\frac{(-1)^n}{(n+1)(c+1)^{n+1}}x^{n+1} \quad , \quad c\in(0,x)$$

$$\log(2)=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\frac{(-1)^n}{(n+1)(c+1)^{n+1}} \quad , \quad c\in(0,1)$$

$\frac{5}{6}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$. Por tanto, si $n=3$, $\log(2)=\frac{5}{6}+\frac{(-1)^3}{4(c+1)^4}=\frac{5}{6}-\frac{1}{4(c+1)^4}$

$$\frac{1}{4(c+1)^4}>0\Rightarrow\log(2)<\frac{5}{6}$$