Manuel José Fernández, mjfg@uniovi.es

CALCULO
GRADO EN INGEN. INFORM. DEL SOFTWARE. 2020-21
TEMA 1. FUNCIONES REALES DE UNA VARIABLE REAL

1.7: Optimización

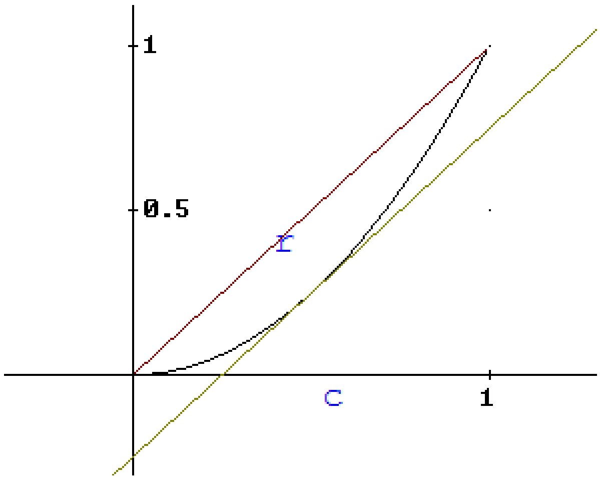
*Aplicaciones de la derivada. Estudio local de una función: Criterios de crecimiento y decrecimiento***.**

Teorema del valor medio de Lagrange.

Si f es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) entonces existe, al menos, un punto $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Interpretación geométrica.

$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ es la pendiente de la recta r que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$. Por tanto el teorema del valor medio afirma que existe al menos un punto $c \in (a,b)$ tal que la tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(c, f(c))$ es paralela a r.



Corolario.

Sea f derivable en un intervalo abierto I. Se verifica:

a) Si $f'(x) > 0$ $\forall x \in I \Rightarrow f$ es estrictamente creciente en I.
b) Si $f'(x) < 0$ $\forall x \in I \Rightarrow f$ es estrictamente decreciente en I.
c) Si $f'(x) = 0$ $\forall x \in I \Rightarrow f$ es constante en I.

Los recíprocos de a) y b) no son ciertos en general. Así, por ejemplo, la función $f(x) = x^3$ es estrictamente creciente en $(-1,1)$ y sin embargo $f'(0) = 0$.

Si dos funciones definidas en un intervalo abierto tienen la misma derivada, su diferencia es una constante.

Máximos y mínimos locales

Sea $f: D \subset R \to R$ y sea $x_0 \in D$

Definición.

La función f alcanza un máximo local (o relativo) en el punto $x_0 \Leftrightarrow: \exists \delta > 0 \ / \ f(x) \leq f(x_0)$ $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D$.

Definición.

La función f alcanza un mínimo local (o relativo) en el punto $x_0 \Leftrightarrow: \exists \delta > 0 \ / \ f(x) \geq f(x_0)$ $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D$.

Los máximos y mínimos relativos se llaman extremos relativos o locales.

Definición.

La función f alcanza el máximo absoluto en el punto $x_0 \Leftrightarrow: f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in D$.

Definición.

La función f alcanza el mínimo absoluto en el punto $x_0 \Leftrightarrow: f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in D$.

Al máximo y mínimo absoluto se les llama extremos absolutos. Lógicamente todo extremo absoluto también es relativo.

Condición necesaria de extremo.

Sea f definida en un abierto I. Si f alcanza un máximo o un mínimo relativo en un punto $x_0 \in I$, entonces $f'(x_0) = 0$ ó $f'(x_0)$ no existe.

Definición.

A los puntos $x_0 \in I$ tales que $f'(x_0) = 0$ ó $f'(x_0)$ no existe, se les llama *puntos críticos*.

Criterio de la derivada primera (Condición suficiente de extremo)

Sea x_0 un punto crítico de f y supongamos que f es continua en x_0. Si existe $\delta > 0$ tal que $f'(x) > 0 \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$ y $f'(x) < 0 \quad \forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$, entonces f alcanza un máximo relativo en x_0 (la función pasa de creciente a decreciente). Si ambas desigualdades se invierten, entonces f alcanza un mínimo relativo en x_0 (la función pasa de decreciente a creciente).

Ejercicio.

Determinar los puntos críticos, intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos y absolutos de la función $f(x)=\left|x^2-1\right|$.

Solución.

f es continua en R por ser composición de funciones continuas.

$$f(x)=\begin{cases} x^2-1 & \text{si} \quad x\geq 1 \quad \text{ó} \quad x\leq -1 \\ 1-x^2 & \text{si} \quad x\in[-1,1] \end{cases}$$

Se comprueba que no es derivable en $x=-1$ y en $x=1$.

$$f'(x)=\begin{cases} 2x & \text{si} \quad x>1 \quad \text{ó} \quad x<-1 \\ -2x & \text{si} \quad x\in(-1,\,1) \end{cases}$$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$

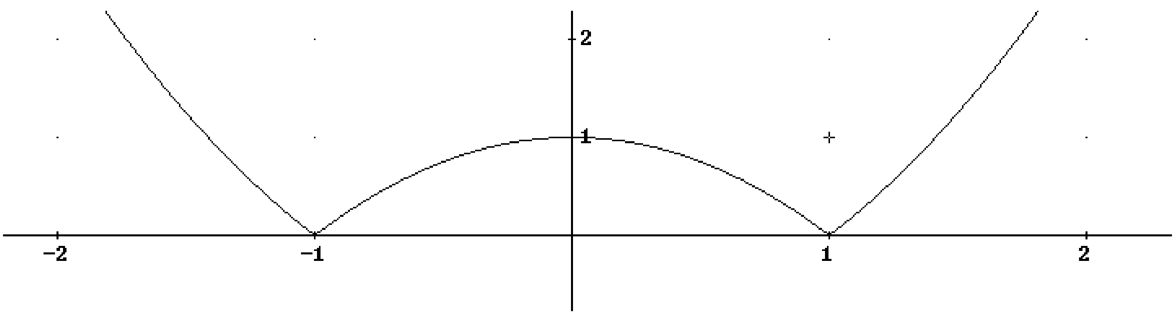
puntos críticos: $-1,0,1$

intervalos de monotonía: $(-\infty,-1)$, $(-1,0)$, $(0,1)$, $(1,\infty)$

$f'(x)>0 \quad \forall x\in(-1,0) \Rightarrow f$ es estrictamente creciente en $(-1,0)$. Análogamente en $(1,+\infty)$
$f'(x)<0 \quad \forall x\in(-\infty,-1) \Rightarrow f$ es estrictamente decreciente en $(-\infty,-1)$. Lo mismo en $(0,1)$.

En $x=-1$ se alcanza un mínimo local $\quad f(-1)=0$ mínimo local y absoluto.
En $x=0$ se alcanza un máximo local $\quad f(0)=1$ máximo local
En $x=1$ se alcanza un mínimo local $\quad f(1)=0$ mínimo local y absoluto.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$



$\operatorname{Im} f=[0,\infty)$

f no está acotada superiormente en R y por tanto no existe $\max_{x\in R} f(x)$, es decir, no existe el máximo absoluto.

Criterio de la derivada enésima.

Sea $f \in C^n(a,b)$ y $x_0 \in (a,b)$ / $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1}(x_0) = 0$, $f^{(n}(x_0) \neq 0$. Entonces, si n es par, f alcanza un mínimo relativo en x_0 si $f^{(n}(x_0) > 0$ y un máximo relativo si $f^{(n}(x_0) < 0$. Si n es impar, f no alcanza un extremo en x_0.

Corolario (*Criterio de la derivada segunda*).

Sea $f \in C^2(a,b)$ y $x_0 \in (a,b)$ / $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) \neq 0$. Si $f''(x_0) > 0$, f alcanza un mínimo relativo en x_0. Si $f''(x_0) < 0$, f alcanza un máximo relativo en x_0.

Ejercicio.

Determinar los extremos relativos de la función $f(x) = (x-3)^4.(x-1)$

Solución.
f es de clase infinito en R por ser un polinomio.

$$f'(x) = 4(x-3)^3(x-1) + (x-3)^4 = \ldots = (x-3)^3(5x-7)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3, x = 7/5$$

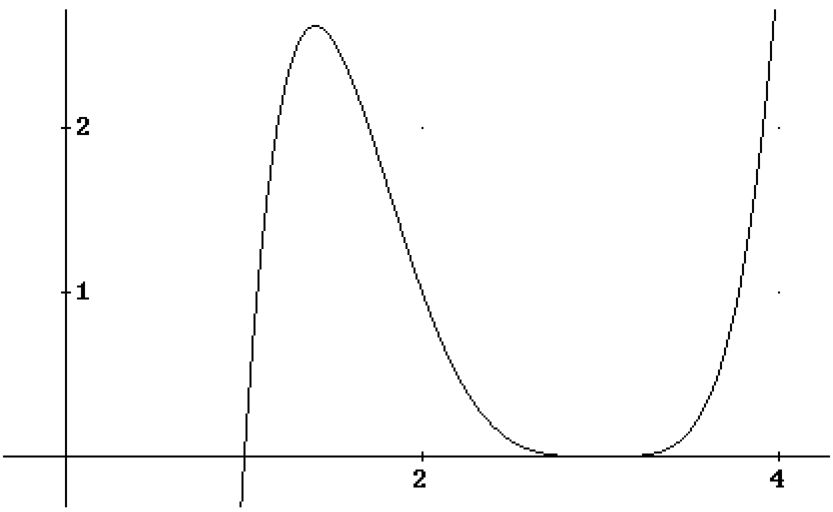
$$f''(x) = 3(x-3)^2(5x-7) + 5(x-3)^3 = (x-3)^2(20x-36)$$

$f''(3) = 0$ $\qquad$ $f''(7/5) < 0 \Rightarrow f(7/5) \cong 2.6$ máximo relativo

$f'''(x) = 2(x-3)(20x-36) + 20(x-3)^2 = (x-3)(60x-132)$ $\qquad$ $f'''(3) = 0$

$$f^{(4}(x) = 60x - 132 + 60(x-3) = 120x - 312$$

$f^{(4}(3) > 0 \Rightarrow f(3) = 0$ mínimo relativo.



Cálculo de extremos en intervalos cerrados: *máx. y mín. en los puntos frontera*.

Si el dominio es un intervalo cerrado $[a\,,b]$ entonces la continuidad de la función garantiza la existencia tanto del máximo absoluto como del mínimo absoluto. En este caso se consideran:

a) Los puntos interiores al intervalo en los que f no es derivable.
b) Los puntos $x_0 \in (a\,,b)$ tales que $f'(x_0)=0$.
c) Los puntos frontera, es decir, a y b.

Para funciones definidas sobre un conjunto abierto de R los puntos críticos son aquellos para los que la derivada es cero o no existe. Para funciones definidas sobre un conjunto cerrado los puntos frontera se llaman también puntos críticos.

Ejercicio.
Hallar los extremos absolutos y relativos de la función $f(x)=x^3-3x^2+7$ si $x\in[0\,,5]$

Solución.

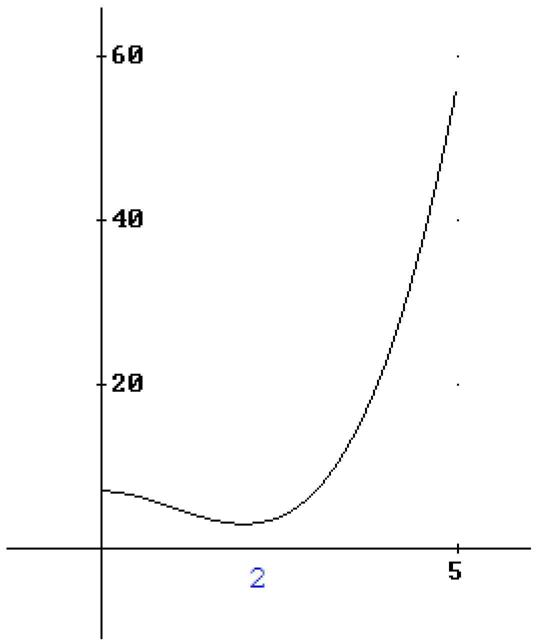
f es continua en $[0\,,5]$, Por tanto, la función alcanza el máximo (y el mínimo) absoluto en algún punto del intervalo.

$$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$$

$$\text{Si } x\in(0\,,5),\qquad f'(x)=0 \Leftrightarrow x=2$$

Los puntos críticos son: $0,\ 2$ y 5 $\qquad f(0)=7$, $f(2)=3$, $f(5)=57$

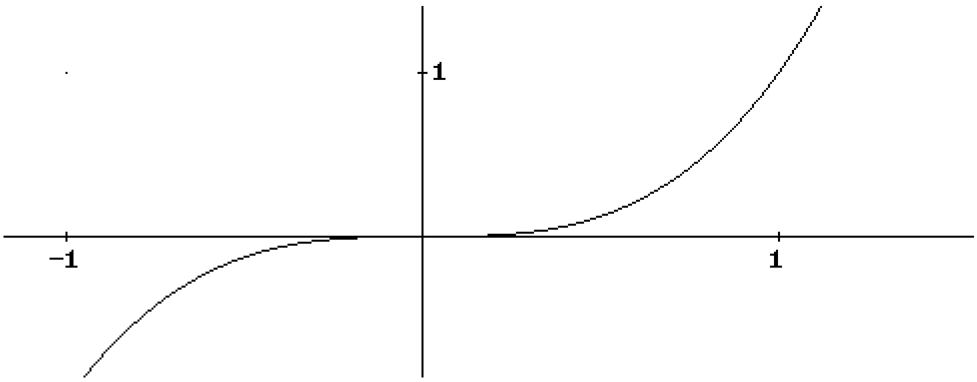
$\max\limits_{x\in[0\,,5]} f(x)=57$, $\quad \min\limits_{x\in[0\,,5]} f(x)=3 \qquad f(0)=7$ máximo relativo en la frontera.



Concavidad y puntos de inflexión.

La función f es cóncava hacia arriba en un intervalo I si para todo $a, b \in I$, el segmento que une $(a, f(a))$ con $(b, f(b))$ queda por encima de la gráfica de f correspondiente al intervalo $[a, b]$. Por ejemplo, $f(x) = x^2$ es cóncava hacia arriba en R.

La función f es cóncava hacia abajo en un intervalo I si para todo $a, b \in I$, el segmento que une $(a, f(a))$ con $(b, f(b))$ queda por debajo de la gráfica de f correspondiente al intervalo $[a, b]$ Por ejemplo, $f(x) = x^3$ es cóncava hacia abajo en $(-\infty, 0)$ y cóncava hacia arriba en $(0, \infty)$.



Teorema.

Si f tiene derivada segunda en I y $f''(x) > 0 \quad \forall x \in I \Rightarrow f$ es cóncava hacia arriba en I.

Si f tiene derivada segunda en I y $f''(x) < 0 \quad \forall x \in I \Rightarrow f$ es cóncava hacia abajo en I.

Definición.

Sea $x_0 \in Dom\ f$; se dice que el punto $(x_0, f(x_0))$ es un punto de inflexión $\Leftrightarrow: \exists \delta > 0$ tal que f es cóncava en un sentido en $(x_0 - \delta, x_0)$ y cóncava en el sentido opuesto en $(x_0, x_0 + \delta)$.

Teorema.

Se verifica que si f tiene un punto de inflexión en x_0 entonces $f''(x_0) = 0$ ó no existe $f''(x_0)$.

Teorema.

Sea $f \in C^n\ (a, b)$ y $x_0 \in (a, b)$ / $f''(x_0) = f'''(x_0) = ... = f^{(n-1}(x_0) = 0$ y $f^{(n}(x_0) \neq 0$ Entonces si n es impar, f tiene en x_0 un punto de inflexión.

Ejercicio.

Determinar los extremos relativos y los puntos de inflexión de la función $f(x) = x^3(x-1)$.