Tema 6. GEOMETRÍA EUCLÍDEA

Arturo Santamaría

Grado en Ingeniería Informática del Software
Universidad de Oviedo. Departamento de Matemáticas

PRIMER SEMESTRE

Definición

Sea E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión n.
Un **producto escalar** definido sobre E es una aplicación

$$\begin{array}{cccc} \cdot\ : & E\times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (\vec{x},\vec{y}) & \mapsto & \vec{x}\cdot\vec{y} \end{array}$$

que verifica las siguientes propiedades:

- $\vec{x}\cdot\vec{y}=\vec{y}\cdot\vec{x}$, $\forall\,\vec{x},\vec{y}\in E$.
- $(\lambda\vec{x}+\mu\vec{y})\cdot\vec{z}=\lambda\,(\vec{x}\cdot\vec{z})+\mu\,(\vec{y}\cdot\vec{z})$, $\forall\,\vec{x},\vec{y},\vec{z}\in E$, $\forall\,\lambda,\mu\in\mathbb{R}$.
- $\vec{x}\cdot\vec{x}\geq 0$, $\forall\,\vec{x}\in E$.
- $\vec{x}\cdot\vec{x}=0 \iff \vec{x}=\vec{0}_E$.

Un **espacio euclídeo** es un espacio vectorial real en el que hay definido un producto escalar.

Ejemplos 6.1

- $(x_1,x_2)\cdot(y_1,y_2)=2x_1y_1+x_2y_1+x_1y_2+x_2y_2$ define un producto escalar en $\mathbb{R}^2$.
- En $\mathbb{R}^n$, trabajando en coordenadas en la base canónica, se tiene que:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (\vec{x},\vec{y}) & \mapsto & \vec{x}\cdot\vec{y}=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n \end{array}$$

siendo $\vec{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ e $\vec{y}=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$, es un producto escalar que denominaremos **producto escalar ordinario o canónico**. Con él, $\mathbb{R}^n$ es un espacio vectorial euclídeo llamado **espacio vectorial euclídeo usual**.

NOTA:

- Sobre un mismo espacio vectorial real pueden definirse diversas estructuras euclídeas, dependiendo del producto escalar que se considere.
- En un espacio euclídeo E, la aplicación:

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \vec{v} & \mapsto & \vec{v}\cdot\vec{v} \end{array}$$

se llama **cuadrado escalar**, y se denota $\vec{v}^{\,2}=\vec{v}\cdot\vec{v}$

Expresión matricial del producto escalar

Sea E un espacio euclídeo de dimensión n y $B_E = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n\}$ una base de E. Dados $\vec{x}, \vec{y} \in E$ cualesquiera tales que:

$$\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)_{B_E} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + ... + x_n\vec{e}_n$$

$$\vec{y} = (y_1, y_2, ..., y_n)_{B_E} = y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + ... + y_n\vec{e}_n$$

Tenemos que:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = (x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + ... + x_n\vec{e}_n) \cdot (y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + ... + y_n\vec{e}_n) =$$

$$= (x_1\vec{e}_1) \cdot (y_1\vec{e}_1) + (x_1\vec{e}_1) \cdot (y_2\vec{e}_2) + \cdots + (x_1\vec{e}_1) \cdot (y_n\vec{e}_n) +$$
$$+ (x_2\vec{e}_2) \cdot (y_1\vec{e}_1) + (x_2\vec{e}_2) \cdot (y_2\vec{e}_2) + \cdots + (x_2\vec{e}_2) \cdot (y_n\vec{e}_n) + \cdots +$$
$$+ (x_n\vec{e}_n) \cdot (y_1\vec{e}_1) + (x_n\vec{e}_n) \cdot (y_2\vec{e}_2) + \cdots + (x_n\vec{e}_n) \cdot (y_n\vec{e}_n) =$$

$$= x_1y_1(\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1) + x_1y_2(\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2) + \cdots + x_1y_n(\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_n) +$$
$$+ x_2y_1(\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1) + x_2y_2(\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2) + \cdots + x_2y_n(\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_n) + \cdots +$$
$$+ x_ny_1(\vec{e}_n \cdot \vec{e}_1) + x_ny_2(\vec{e}_n \cdot \vec{e}_2) + \cdots + x_ny_n(\vec{e}_n \cdot \vec{e}_n) =$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 & \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 & \cdots & \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_n \\ \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1 & \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 & \cdots & \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vec{e}_n \cdot \vec{e}_1 & \vec{e}_n \cdot \vec{e}_2 & \cdots & \vec{e}_n \cdot \vec{e}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} =$$

$$= X^tGY$$

La matriz G se llama **matriz del producto escalar** o **matriz de Gram** respecto a la base B_E.

Propiedades de la matriz de Gram

- El elemento (i, j) es el producto escalar $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j$.

En virtud de las propiedades del producto escalar:

- La matriz es simétrica.
- Los elementos de la diagonal principal deben ser estrictamente positivos.
- **Criterio de Sylvester**:

  Una condición necesaria y suficiente para que una matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ simétrica pueda ser una matriz de Gram es:

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1i} & a_{2i} & \dots & a_{ii} \end{vmatrix} > 0 \qquad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

Cambio de representación matricial del producto escalar

Consideremos en el espacio euclídeo E una nueva base $\widetilde{B}_E$, además de la base B_E utilizada anteriormente.

Dados dos vectores cualesquiera $\vec{x}, \vec{y} \in E$, sean:

G : matriz del producto escalar respecto a la base B_E.

$\widetilde{G}$: matriz del producto escalar respecto a la base $\widetilde{B}_E$.

X : matriz columna con las coordenadas de $\vec{x}$ en la base B_E.

$\widetilde{X}$: matriz columna con las coordenadas de $\vec{x}$ en la base $\widetilde{B}_E$.

Y : matriz columna con las coordenadas de $\vec{y}$ en la base B_E.

$\widetilde{Y}$: matriz columna con las coordenadas de $\vec{y}$ en la base $\widetilde{B}_E$.

¿Cuál es la relación existente entre dos matrices que representan a un producto escalar respecto a dos bases distintas, en este caso G y $\widetilde{G}$?

Sea P la matriz de paso de B_E a $\widetilde{B}_E$. Tenemos que:

$$X = P\widetilde{X}$$
$$Y = P\widetilde{Y}$$
$$X^tGY = \vec{x}\cdot\vec{y} = \widetilde{X}^t\widetilde{G}\widetilde{Y}$$

con lo cual:

$$\widetilde{X}^t\widetilde{G}\widetilde{Y} = \vec{x}\cdot\vec{y} = X^tGY = (P\widetilde{X})^tGP\widetilde{Y} = (\widetilde{X}^tP^t)GP\widetilde{Y} = \widetilde{X}^t(P^tGP)\widetilde{Y} \implies$$

$$\implies \widetilde{X}^t\widetilde{G}\widetilde{Y} = \widetilde{X}^t(P^tGP)\widetilde{Y}\,, \quad \forall\, \widetilde{X}, \widetilde{Y} \in M_{n\times 1}(\mathbb{R}) \implies$$
$$\widetilde{G} = P^tGP$$

Se dice que G y $\widetilde{G}$ son dos matrices **congruentes**, con $P \in GL_n(\mathbb{R})$ como matriz de congruencia.

NOTA:

- Dada una matriz G del producto escalar definido sobre E, respecto a una base B_E, todas las demás matrices que representan a dicho producto escalar en distintas bases son congruentes con G.
- Recíprocamente, toda matriz congruente con G, pongamos $\widetilde{G} = P^tGP$ con $P \in GL_n(\mathbb{R})$, representa al producto escalar en una cierta base que está relacionada con B_E mediante la matriz P como matriz de paso.

Ejemplo 6.2

- Determinar la matriz del siguiente producto escalar definido en $\mathbb{R}^2$ con respecto a la base canónica B_c:

$$(x_1, x_2)\cdot(y_1, y_2) = 2x_1y_1 + x_2y_1 + x_1y_2 + x_2y_2$$

- Calcular la matriz asociada a dicho producto escalar en la base $B = \{(1,1), (-1,1)\}$.

Norma de un vector

Se denomina **longitud** o **norma** de un vector $\vec{x}$ al número real:

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\vec{x}\cdot\vec{x}} = \sqrt{\vec{x}^{\,2}}.$$

Se dice que un vector $\vec{x}$ es **unitario** si tiene norma 1.

El llamado proceso de **normalización** permite siempre obtener, a partir de un vector $\vec{x}$ no nulo, otro vector $\vec{u}$ unitario y proporcional a él:

$$\vec{u} = \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}$$

Propiedades de la norma

- $\vec{x} \cdot \vec{x} \geq 0, \quad \forall \vec{x} \in E.$
- $\|\vec{x}\| = 0 \iff \vec{x} = \vec{0}_E.$
- $\|\lambda \vec{x}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{x}\|, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \vec{x} \in E.$
- Desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$|\vec{x} \cdot \vec{y}| \leq \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|, \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in E$$

  (la igualdad se da cuando $\vec{x}$ e $\vec{y}$ son proporcionales)
- Desigualdad triangular o de Minkowski:

$$\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|, \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in E$$

Ángulo entre vectores

Sean $\vec{x}$ e $\vec{y}$ dos vectores no nulos de un espacio euclídeo E. A partir de la desigualdad de Cauchy-Schwarz, se deduce que:

$$-1 \leq \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\|\vec{x}\| \, \|\vec{y}\|} \leq 1$$

de donde se concluye que existe un único $\alpha \in [0, \pi]$ tal que:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\|\vec{x}\| \, \|\vec{y}\|}$$

Se dice que α es el **ángulo** formado por los vectores $\vec{x}$ e $\vec{y}$.

De esta forma se puede definir el producto escalar de dos vectores a partir de sus normas y del ángulo que determinan:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \|\vec{x}\| \, \|\vec{y}\| \cos \alpha$$

Ejemplo 6.3

Se considera en $\mathbb{R}^3$ el producto escalar que en la base canónica $B_c = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ tiene asociada la matriz

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcular las normas de los vectores de B_c y los ángulos que forman, dos a dos, entre ellos.

(de este ejemplo se infiere que la métrica depende del producto escalar elegido)

Vectores ortogonales

Dos vectores $\vec{x}, \vec{y} \in E$ son **ortogonales** si $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$.

Se escribe $\vec{x} \perp \vec{y}$.

- Si dos vectores no nulos $\vec{x}, \vec{y} \in E$ son ortogonales, determinan un ángulo de $\frac{\pi}{2}$ radianes.
- Cualquier sistema de vectores no nulos y ortogonales dos a dos de un espacio euclídeo es un sistema libre.

Bases ortogonales y ortonormales

Nos planteamos la existencia de una base donde la matriz asociada al producto escalar la más sencilla. Si es posible diagonal o, mejor aún, la identidad.

Sea $B_E = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n\}$ una base de un espacio euclídeo E. Se dice que B_E es una **base ortogonal** cuando está formada por vectores ortogonales dos a dos.

Diremos que B_E es una **base ortonormal** si, además de ser ortogonal, todos sus vectores son unitarios. En este caso:

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = j \\ 0 & \text{si} \quad i \neq j \end{cases} \qquad \forall i, j = 1, 2, ..., n$$

- Si B_E es una base ortogonal, la matriz del producto escalar en B_E será diagonal.
- Si B_E es una base ortonormal, la matriz del producto escalar en B_E será la matriz unidad.
- La base canónica de $\mathbb{R}^n$ es ortonormal respecto al producto escalar usual.

Matrices ortogonales

$P \in GL_n(\mathbb{R})$ se dice que es una **matriz ortogonal** si $P^{-1} = P^t$.

Si P es una matriz ortogonal, $|P| = \pm 1$. En efecto:

$$P \text{ ortogonal} \implies P^tP = I \implies |P^tP| = |I| \implies$$
$$\implies |P^t||P| = 1 \implies |P|^2 = 1 \implies |P| = \pm 1$$

Bases ortonormales y matrices ortogonales

TEOREMA

La matriz de paso entre dos bases ortonormales es una matriz ortogonal.

En efecto:

Consideremos dos bases ortonormales B y B' del espacio euclídeo E y P la matriz de paso entre ellas. Sean G y G' las matrices del producto escalar en B y B' respectivamente.

$$\left.\begin{array}{l} G' = P^tGP \\ G = G' = I_n \end{array}\right\} \implies I_n = P^tI_nP \implies I_n = P^tP \implies$$
$$\implies P^{-1} = P^t \implies P \text{ es una matriz ortogonal}$$

El recíproco del teorema anterior también es cierto, es decir, una matriz ortogonal pasa de una base B ortonormal a otra B' que también lo es.

En efecto:

$$\left.\begin{array}{c} G' = P^t G P \\ G = I_n \\ P^{-1} = P^t \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad G' = P^t I_n P = P^t P = P^{-1} P = I_n \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad B' \text{ es una base ortonormal}$$

Ejemplo 6.4

- Construir una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ para el producto escalar que tiene por matriz en la base $B = \{\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3\}$:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Subespacios ortogonales

Sean S y T subespacios de un espacio euclídeo E y $\vec{x} \in E$.

- Se dice que $\vec{x}$ **es ortogonal a** S si lo es a todos los vectores de S. Se escribe $\vec{x} \perp S$.

$$\vec{x} \perp S \iff \vec{x} \cdot \vec{s} = 0\,, \quad \forall \vec{s} \in S$$

Para ello es condición necesaria y suficiente que lo sea con todos los vectores de una base cualquiera de S.

- Diremos que S **y** T **son ortogonales** si todos los vectores de S son ortogonales a todos los de T. Se expresa $S \perp T$.

$$S \perp T \iff \vec{s} \cdot \vec{t} = 0\,, \quad \forall \vec{s} \in S\,, \forall \vec{t} \in T$$

Es condición necesaria y suficiente que lo sean entre sí los vectores de dos bases cualesquiera de S y T.

Subespacio suplementario ortogonal

Dado un subespacio S de un espacio euclídeo E, el conjunto:

$$S^{\perp} = \{\vec{x} \in E \;/\; \vec{x} \cdot \vec{s} = 0\,, \forall \vec{s} \in S\}$$

se llama **subespacio suplementario ortogonal** de S en E y verifica:

- Existe y es único.
- Es el mayor subespacio de E que es ortogonal a S.
- $E = S \oplus S^{\perp}$.
- $S \perp S^{\perp}$.
- $(S^{\perp})^{\perp} = S$.

Ejemplos 6.5

- En $\mathbb{R}^3$, con el producto escalar usual, determinar el subespacio suplementario ortogonal de:

$$S = \langle (1,1,-1),\ (0,2,1),\ (2,0,-3) \rangle$$

- En $\mathbb{R}^2$, si S es una recta que pasa por el origen, $S^\perp$ es la recta perpendicular a S que pasa por el origen.
- En $\mathbb{R}^3$, si S es una recta que pasa por el origen, $S^\perp$ es el plano perpendicular a S que pasa por el origen.
- En $\mathbb{R}^3$, si S es un plano que pasa por el origen, $S^\perp$ es la recta perpendicular a S que pasa por el origen.

Proyección ortogonal entre vectores

<u>TEOREMA</u> (Proyección ortogonal entre vectores)

Dado un vector no nulo $\vec{x} \in E$, cualquier vector $\vec{u} \in E$ se puede expresar, de forma única, como suma de un vector proporcional a $\vec{x}$ y otro ortogonal a $\vec{x}$.

En efecto, sea $\vec{x} \in E$, $\vec{x} \neq \vec{0}_E$.

$$\vec{u} = \lambda\,\vec{x} + \vec{v} \text{ (siendo } \lambda \in \mathbb{R} \text{ y } \vec{v} \perp \vec{x}) \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \vec{x}\cdot\vec{u} = \vec{x}\cdot(\lambda\,\vec{x} + \vec{v}) = \lambda\,(\vec{x}\cdot\vec{x}) + \vec{x}\cdot\vec{v} = \lambda\,(\vec{x}\cdot\vec{x}) \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \lambda = \frac{\vec{x}\cdot\vec{u}}{\vec{x}\cdot\vec{x}} = \frac{\vec{x}\cdot\vec{u}}{\|\vec{x}\|^2} \quad \text{y} \quad \vec{v} = \vec{u} - \lambda\,\vec{x} = \vec{u} - \frac{\vec{x}\cdot\vec{u}}{\|\vec{x}\|^2}\,\vec{x}$$

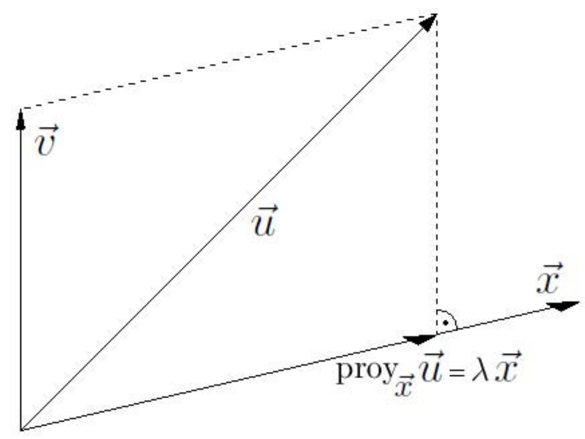
De este modo:

$$\vec{u} = \lambda\,\vec{x} + \vec{v} = \underbrace{\frac{\vec{x}\cdot\vec{u}}{\vec{x}\cdot\vec{x}}\,\vec{x}}_{\text{proporcional a } \vec{x}} + \underbrace{\left(\vec{u} - \frac{\vec{x}\cdot\vec{u}}{\vec{x}\cdot\vec{x}}\,\vec{x}\right)}_{\text{ortogonal a } \vec{x}}$$

El vector $\lambda\,\vec{x}$ se llama **proyección ortogonal** del vector $\vec{u}$ sobre el vector $\vec{x}$. Se denota:

$$\text{proy}_{\vec{x}}\,\vec{u} = \frac{\vec{x}\cdot\vec{u}}{\vec{x}\cdot\vec{x}}\,\vec{x} = \frac{\vec{x}\cdot\vec{u}}{\|\vec{x}\|^{2}}\,\vec{x}$$

Gráficamente:



Ejemplo 6.6

- Se considera $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual.

  Expresar el vector $\vec{u} = (1, 3, 5)$ como suma de dos vectores, uno proporcional a $\vec{x} = (2, -3, 1)$ y otro ortogonal a $\vec{x}$.

DEFINICIÓN DE ESPACIO VECTORIAL EUCLÍDEO
MATRIZ ASOCIADA AL PRODUCTO ESCALAR
PROPIEDADES MÉTRICAS
ORTOGONALIDAD
Vectores ortogonales
Bases ortogonales y ortonormales
Subespacios ortogonales
Proyección ortogonal

Proyección ortogonal

Consideremos en el espacio euclídeo E (no necesariamente de dimensión finita) un subespacio vectorial S de dimensión m y un vector $\vec{u} \in E, \vec{u} \notin S$.

Se llama **proyección ortogonal** de $\vec{u}$ sobre S a un vector $\vec{x} \in S$ tal que $\vec{u} - \vec{x}$ es ortogonal a S, es decir, $\vec{u} - \vec{x} \in S^{\perp}$.

Se denota $\vec{x} = proy_S(\vec{u})$.

$$\vec{x} = proy_S(\vec{u}) \quad \Longrightarrow \quad \|\vec{u} - \vec{x}\| < \|\vec{u} - \vec{s}\| \quad \forall \vec{s} \in S\,,\ \vec{s} \neq \vec{x}$$

Arturo Santamaría ÁLGEBRA LINEAL

DEFINICIÓN DE ESPACIO VECTORIAL EUCLÍDEO
MATRIZ ASOCIADA AL PRODUCTO ESCALAR
PROPIEDADES MÉTRICAS
ORTOGONALIDAD
Vectores ortogonales
Bases ortogonales y ortonormales
Subespacios ortogonales
Proyección ortogonal

Cálculo de la proyección ortogonal

Supongamos que conocemos una base $B_S = \{\vec{s}_1, \vec{s}_2, \ldots, \vec{s}_m\}$ del subespacio S.

Buscamos $\vec{x} = x_1\vec{s}_1 + x_2\vec{s}_2 + \cdots + x_m\vec{s}_m \in S$, tal que:

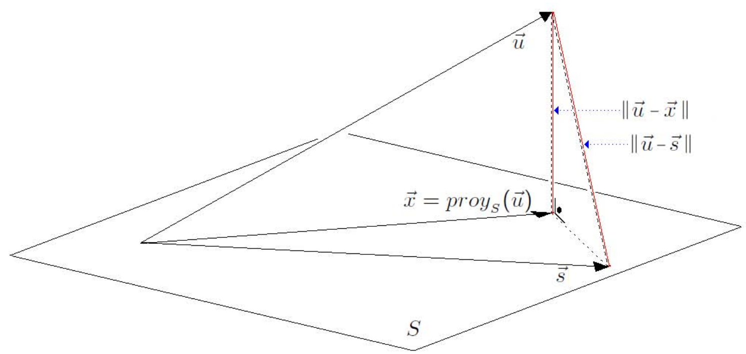
$$\vec{u} - (x_1\vec{s}_1 + x_2\vec{s}_2 + \cdots + x_m\vec{s}_m) \in S^{\perp}$$

Para determinar $\vec{x} = proy_S(\vec{u})$, basta descomponer $\vec{u}$ en suma de un vector de S y otro de $S^{\perp}$.
El primero de ellos será la proyección buscada.

Arturo Santamaría ÁLGEBRA LINEAL

DEFINICIÓN DE ESPACIO VECTORIAL EUCLÍDEO
MATRIZ ASOCIADA AL PRODUCTO ESCALAR
PROPIEDADES MÉTRICAS
ORTOGONALIDAD
Vectores ortogonales
Bases ortogonales y ortonormales
Subespacios ortogonales
Proyección ortogonal

Ejemplo 6.7 (Proyección ortogonal sobre un subespacio)



Arturo Santamaría ÁLGEBRA LINEAL