Manuel José Fernández, mjfg@uniovi.es

CALCULO
GRADO EN INGEN. INFORM. DEL SOFTWARE. 2020-21
TEMA 1. FUNCIONES REALES DE UNA VARIABLE REAL

1.3: Límites de funciones.

Límite finito en un punto.

Consideremos una función f definida en las "proximidades" de un punto c (por la izquierda y/o por la derecha), aunque no necesariamente en c, es decir, $f : D \subset R \to R$ y c punto de acumulación de D.
La función f tiene límite $l \in R$ en el punto c si "$f(x)$ está tan próximo a l como queramos siempre que x esté suficientemente próximo a c". La definición rigurosa es la siguiente:

$$\lim_{x\to c} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \;/\; \underset{x \in D}{0 < |x-c| < \delta} \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

δ depende, en general, de ε y del punto c.

El límite es independiente de que la función este o no definida en el punto c.

Ejemplo:

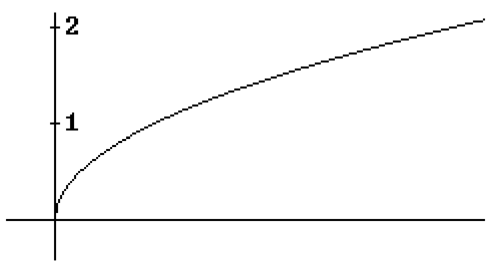
$$\lim_{x\to c} \sqrt{x} = \sqrt{c} \qquad \forall c > 0$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \;/\; \underset{x \geq 0}{0 < |x-c| < \delta} \;\Rightarrow\; \left|\sqrt{x} - \sqrt{c}\right| < \varepsilon$$

$$\left|\sqrt{x} - \sqrt{c}\right| = \left|\frac{x-c}{\sqrt{x}+\sqrt{c}}\right| = \frac{|x-c|}{\sqrt{x}+\sqrt{c}} \leq \frac{|x-c|}{\sqrt{c}} < \frac{\delta}{\sqrt{c}} = \varepsilon \quad ; \quad \delta = \sqrt{c}.\varepsilon$$

Nota.

$$\lim_{x\to 0} \sqrt{x} = 0$$



Ejercicio:

Sean $f(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{x-1}$, $g(x)=\begin{cases} f(x) & \text{si } x\neq 1 \\ 1 & \text{si } x=1 \end{cases}$

Obtener $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$

Límites laterales.

Consideremos una función f definida en las "proximidades" de un punto c (por la izquierda), aunque no necesariamente en c.

$$\lim_{x\to c^-} f(x)=l \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad / \quad c-\delta<x<c,\ x\in D \Rightarrow |f(x)-l|<\varepsilon$$

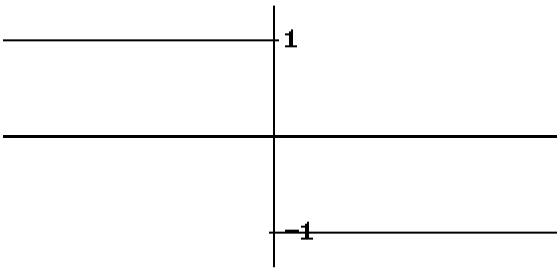
Consideremos una función f definida en las "proximidades" de un punto c (por la derecha), aunque no necesariamente en c.

$$\lim_{x\to c^+} f(x)=l \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad / \ c<x<c+\delta,\ x\in D \Rightarrow |f(x)-l|<\varepsilon$$

Ejemplo:

$$f(x)=\begin{cases} -1 & \text{si } x>0 \\ 1 & \text{si } x<0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=1 \qquad\qquad \lim_{z\to 0^+} f(x)=-1$$



No existe $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ en el ejemplo anterior ya que si f está definida en las "proximidades" de un punto c, tanto a la izquierda como a la derecha de c, se verifica:

$$\lim_{x\to c} f(x)=l \Leftrightarrow \lim_{x\to c^-} f(x)=\lim_{x\to c^+} f(x)=l$$

Ejercicio:

Sean $f(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{x-1}$, $g(x)=\begin{cases} f(x) & \text{si } x<1 \\ \log(x) & \text{si } x>1 \end{cases}$

Obtener $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$

Límites infinitos.

La función f tiene límite $+\infty$ (respectivamente $-\infty$) en el punto c si " $f(x)$ se puede hacer tan grande (resp. tan pequeña) como queramos, siempre que x esté suficientemente próximo a c. Análogamente se definen los límites laterales infinitos.

Ejemplos:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty \qquad \lim_{x\to 0}-\frac{1}{x^2}=-\infty \qquad \lim_{x\to 0}\log(x)=\lim_{x\to 0^+}\log(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty \qquad \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty \qquad \lim_{x\to 0^-}-\frac{1}{x}=+\infty \qquad \lim_{x\to 0^+}-\frac{1}{x}=-\infty$$

Límite finito en el infinito.

Consideremos una función f definida en un dominio no acotado superiormente. La función f tiene límite l cuando la variable x tiende a $+\infty$ si " $f(x)$ está tan próximo a l como queramos siempre que x sea suficientemente grande".

Consideremos una función f definida en un dominio no acotado inferiormente. La función f tiene límite l cuando la variable x tiende a $-\infty$ si " $f(x)$ está tan próximo a l como queramos siempre que x sea suficientemente pequeño".

Ejemplos:

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{1}{x}=0 \qquad \lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x}=0 \qquad \lim_{x\to -\infty}e^{x}=\lim_{x\to +\infty}e^{-x}=0$$

Ejercicio:

Sea $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ ¿tiene sentido plantearse el cálculo de $\lim_{x\to -\infty} f(x)$ y/o $\lim_{x\to +\infty} f(x)$?

Límite infinito en el infinito.

De manera análoga se pueden considerar límites infinitos cuando la variable x tiende a $+\infty$ ó $-\infty$.

Ejemplos:

$$\lim_{x\to +\infty}x^2=+\infty \qquad \lim_{x\to -\infty}x^2=+\infty$$

$$\lim_{x\to -\infty}e^{-x}=+\infty \qquad \lim_{x\to +\infty}e^{x}=+\infty \qquad \lim_{x\to +\infty}\log(x)=+\infty$$

Se verifica:

- Si una función tiene límite, finito o infinito, en un punto c ó en $+\infty$ ó en $-\infty$, entonces dicho límite es único.

- *Teorema de la función intermedia.* Sean f, g y h tres funciones reales definidas en las "proximidades" de un punto c y supongamos que $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ para todo x perteneciente a un entorno reducido de c, es decir, $\forall x \in (c-\delta, c+\delta) - \{c\}$. Si $\lim_{x \to c} g(x) = \lim_{x \to c} h(x) = l$, entonces $\lim_{x \to c} f(x) = l$.

- Si $\lim_{x \to c} f(x) = 0$ y g es una función acotada en un entorno reducido de c entonces se verifica que $\lim_{x \to c} f(x)g(x) = 0$.

  Ejemplo.

  $$\lim_{x \to 0} x.sen\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \quad \text{ya que} \quad \lim_{x \to 0} x = 0 \quad \text{y} \quad \left|sen\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq 1 \quad \forall x \neq 0$$

- $\lim_{x \to c} f(x) = l \in R \Leftrightarrow \lim_{x \to c}\big(f(x) - l\big) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \to c}\left|f(x) - l\right| = 0$

Operaciones con límites de funciones.

Si $\lim_{x \to c} f(x) = l \in R$ y $\lim_{x \to c} g(x) = m \in R$ siendo $c \in R$ ó $c = +\infty$ ó $c = -\infty$, se verifica:

$$\lim_{x \to c}\big[f(x) + g(x)\big] = l + m \qquad \lim_{x \to c}\big[f(x) - g(x)\big] = l - m \qquad \lim_{x \to c}\big[a.f(x)\big] = a.l \qquad \forall a \in R$$

$$\lim_{x \to c}\big[f(x)g(x)\big] = l.m \qquad \lim_{x \to c}\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{m} \quad \text{y} \quad \lim_{x \to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{m} \qquad \text{si} \quad m \neq 0$$

Si alguno o ambos de los límites l y m es infinito se verifica un resultado análogo, aunque se pueden presentar indeterminaciones. Veamos esto con más detalle.

Si $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \to c}\big[f(x) + g(x)\big] = \lim_{x \to c}\big[f(x)g(x)\big] = +\infty$

Si $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x \to c}\big[f(x) + g(x)\big] = -\infty$ y $\lim_{x \to c}\big[f(x)g(x)\big] = +\infty$

Si $\lim_{x\to c} f(x) = l > 0$ y $\lim_{x\to c} g(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to c}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to c}[f(x)g(x)] = +\infty$

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = 0^+$$

Si $\lim_{x\to c} f(x) = l < 0$ y $\lim_{x\to c} g(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to c}[f(x)+g(x)] = +\infty$, $\lim_{x\to c}[f(x)g(x)] = -\infty$

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = 0^-$$

Si $\lim_{x\to c} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to c} g(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to c}[f(x)+g(x)] = +\infty$ y $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = 0$

Si $\lim_{x\to c} f(x) = l > 0$ y $\lim_{x\to c} g(x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x\to c}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to c}[f(x)g(x)] = -\infty$

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = 0^-$$

Si $\lim_{x\to c} f(x) = l < 0$ y $\lim_{x\to c} g(x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x\to c}[f(x)+g(x)] = -\infty$, $\lim_{x\to c}[f(x)g(x)] = +\infty$

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = 0^+$$

Si $\lim_{x\to c} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to c} g(x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x\to c}[f(x)+g(x)] = -\infty$ y $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = 0$

Si $\lim_{x\to c} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x\to c} g(x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x\to c}[f(x)g(x)] = -\infty$

Si $\lim_{x\to c} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x\to c} g(x) = l < 0 \Rightarrow \lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$

Si $\lim_{x\to c} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x\to c} g(x) = l > 0 \Rightarrow \lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$

Si $\lim_{x\to c} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x\to c} g(x) = l < 0 \Rightarrow \lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$

Si $\lim_{x\to c} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x\to c} g(x) = l > 0 \Rightarrow \lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$

Indeterminaciones.

$\infty - \infty$ $\quad \frac{0}{0}$ $\quad \frac{\infty}{\infty}$ $\quad 0.\infty$ $\quad 0^0$ $\quad 1^\infty$ $\quad \infty^0$

Asíntotas verticales

La recta $x=a$ es una *asíntota vertical* por *la izquierda* de la función f $\Leftrightarrow$:

$$\lim_{x\to a^-} f(x)=+\infty \quad \text{ó} \quad \lim_{x\to a^-} f(x)=-\infty$$

La recta $x=a$ es una *asíntota vertical* por *la derecha* de la función f $\Leftrightarrow$:

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=+\infty \quad \text{ó} \quad \lim_{x\to a^+} f(x)=-\infty$$

Ejemplo:

$$f(x)=\frac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}} \qquad Dom\, f = R-\{0,1\}$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{1-x}=0^- \Rightarrow \lim_{x\to 0^-} e^{\frac{x}{1-x}}=1^- \Rightarrow \lim_{x\to 0^-} f(x)=\frac{1}{1-1^-}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{1-x}=0^+ \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{x}{1-x}}=1^+ \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} f(x)=\frac{1}{1-1^+}=\frac{1}{0^-}=-\infty$$

la recta $x=0$ es asíntota vertical por la izquierda y por la derecha de la función f

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x}{1-x}=\frac{1}{0^+}=+\infty \Rightarrow \lim_{x\to 1^-} e^{\frac{x}{1-x}}=e^{+\infty}=+\infty \Rightarrow \lim_{x\to 1^-} f(x)=\frac{1}{1-\infty}=0$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x}{1-x}=\frac{1}{0^-}=-\infty \Rightarrow \lim_{x\to 1^+} e^{\frac{x}{1-x}}=e^{-\infty}=0 \Rightarrow \lim_{x\to 1^+} f(x)=\frac{1}{1-0}=1$$

la recta $x=1$ no es asíntota vertical (ni por la izquierda ni por la derecha) de la función f

Ejercicio:
Razonar la certeza o falsedad de la afirmación siguiente: Si el dominio de la función f es todo R entonces f no tiene asíntotas verticales.

Asíntotas horizontales

La recta $y=b$ es una *asíntota horizontal en el* $-\infty$ de la función f $\Leftrightarrow$: $\lim_{x\to -\infty} f(x)=b$

La recta $y=b$ es una *asíntota horizontal en el* $+\infty$ de la función f $\Leftrightarrow$: $\lim_{x\to +\infty} f(x)=b$

En el caso de que ambos límites sean iguales a "b" la curva $y=f(x)$ se "pega" a la asíntota por los dos lados.

Ejemplo:

$$f(x)=\frac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{1-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{1}{x}-1}=\frac{1}{-1}=-1\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}f(x)=\frac{1}{1-e^{-1}}=\frac{e}{e-1}$$

Se obtienen los mismos resultados si $x\to-\infty$.

la recta $y=\frac{e}{e-1}$ es asíntota horizontal de f tanto en el $-\infty$ como en el $+\infty$

Ejercicio:

Comprobar que la función $f(x)=\frac{1}{e^x+1}$ tiene dos asíntotas horizontales distintas.

Asíntotas oblicuas

La recta $y=ax+b, a\neq 0,$ es una *asíntota oblicua en el* $-\infty$ de la función f $\Leftrightarrow$:

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$$

a y b se determinan de la siguiente manera: $a=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}\in \mathrm{R}-\{0\}$ $\quad$ $\mathrm{b}=\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-ax\right]\in R$

La recta $y=ax+b, a\neq 0,$ es una *asíntota oblicua en el* $+\infty$ de la función f $\Leftrightarrow$:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$$

a y b se determinan de la siguiente manera: $a=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}\in \mathrm{R}-\{0\}$ $\quad$ $\mathrm{b}=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-ax\right]\in R$

Una función puede tener una asíntota horizontal y una oblicua pero no en el mismo “lado “.

Ejemplo:

$f(x)=\frac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}$ no tiene asíntotas oblicuas(tiene asíntota horizontal en ambos “lados”)

Ejercicio.

Comprobar que la función $f(x)=\frac{x}{e^x+1}$ tiene una asíntota horizontal y otra oblicua.

Infinitésimos e infinitos.

La función f es un *infinitésimo* en el punto $c \in R$ $\Leftrightarrow$: $\lim_{x \to c} f(x) = 0$

La función f es un *infinito* en el punto $c \in R$ $\Leftrightarrow$: $\lim_{x \to c} |f(x)| = +\infty$

Las definiciones anteriores y las que siguen se pueden extender al caso $c = +\infty$, $c = -\infty$

Sean f y g dos infinitésimos en el punto c,

f es de *orden superior* a g $\Leftrightarrow$: $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

f es de *orden inferior a* g $\Leftrightarrow$: $\lim_{x \to c} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = +\infty$

f y g son del *mismo orden* $\Leftrightarrow$: $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = l \in R - \{0\}$

f y g son *equivalentes* $(f \approx g)$ $\Leftrightarrow$: $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

Ejemplos:

$f(x) = x^2$ es de orden superior a $g(x) = x$ cuando $x \to 0$.

$f(x) = x - 1$ es de orden inferior a $g(x) = 2(x-1)^2$ cuando $x \to 1$.

$2x\cos(x)$ es un infinitésimo del mismo orden que x cuando $x \to 0$.

$x\cos(x)$ es un infinitésimo equivalente a x cuando $x \to 0$.

Ejemplos de infinitésimos equivalentes.

$sen(x) \approx x \approx arcsen(x)$ si $x \to 0$

$tg(x) \approx x \approx arctg(x)$ si $x \to 0$

$1 - \cos(x) \approx \frac{x^2}{2}$ si $x \to 0$

$\log(1+x) \approx x$ si $x \to 0$; $\log(x) \approx x - 1$ si $x \to 1$

$a^x - 1 \approx x.\log(a)$ $a > 0$ si $x \to 0$; $e^x - 1 \approx x$ si $x \to 0$

Ejercicio:
Calcular, empleando infinitésimos equivalentes, los siguientes límites:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg(x)-sen(x)}{x^3} \qquad\qquad \lim_{x\to 0}\frac{x.sen^2(x)}{\log(1+x)}$$

Sean f y g dos infinitos en el punto c,

f es de *orden superior* a g $\Leftrightarrow$: $\lim_{x\to c}\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = +\infty$

f es de *orden inferior* a g $\Leftrightarrow$: $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Ejemplo:

$f(x)=\frac{1}{x^2}$ es un infinito de orden superior a $g(x)=\frac{1}{x}$ si $x\to 0$

Jerarquía de infinitos.

Si $x\to +\infty$ $\quad \log(x) << x^p << e^x$ $\quad$ ($p>0$, $<<$ significa orden inferior)

Ejercicio resuelto:
Calcular $\lim_{x\to 0} x.e^{1/x}$

$\lim_{x\to 0^-} x.e^{1/x} = 0.e^{-\infty} = 0.0 = 0$, $\lim_{x\to 0^+} x.e^{1/x} = 0.e^{+\infty} = 0.\infty$ indeterminación

$\lim_{x\to 0^+} x.e^{1/x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{e^{1/x}}{1/x} = \lim_{t\to +\infty}\frac{e^t}{t} = +\infty$, ya que si $t=\frac{1}{x}\to +\infty$ $\quad e^t >> t$

Por tanto, el límite no existe (no coinciden los límites laterales).