2. Sistemas de ecuaciones lineales y matrices

Ejercicio 1 *Dadas las matrices:*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Calcular, caso de ser posible, $A \cdot B$ *y* $B \cdot A$.

Ejercicio 2 *Determinar el rango de la matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 11 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Ejercicio 3 *Calcular, caso de existir, la inversa de:*

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & -5 & -3 \\ 1 & 4 & 10 \end{pmatrix} \qquad P_3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4 *Dada la matriz:*

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcular, caso de ser posible, A^2 *y* A^{-1}.

Ejercicio 5 *Demostrar los siguientes resultados:*

a) La suma de dos matrices simétricas es otra matriz simétrica.

b) AA^t *es simétrica,* $\forall A \in M_n(\mathbb{R})$.

c) Si A es simétrica, entonces BAB^t *también es simétrica,* $\forall A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Ejercicio 6

1. *Sean* $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. *Demostrar que si A y B son simétricas entonces:*

$$AB \text{ es simétrica} \Longleftrightarrow AB = BA$$

2. *Sea* $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ *regular. Demostrar que:* $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

Ejercicio 7 *Calcular el valor del determinante:*

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

Ejercicio 8 *Calcular el valor del determinante:*

$$\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-z \end{vmatrix}$$

Ejercicio 9 *Calcular el valor del determinante:*

$$\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & y & z \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix}$$

Ejercicio 10 *Resolver la ecuación:*

$$\begin{vmatrix} a+x & x & x & x \\ x & b+x & x & x \\ x & x & c+x & x \\ x & x & x & d+x \end{vmatrix} = 0 \qquad (a, b, c, d \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$$

Ejercicio 11 *Estudiar el carácter del sistema*

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 4x & - & 3y & + & 3z & = & 0 \\ 6x & + & y & - & 9z & = & 9 \\ 2x & - & 5y & - & 6z & = & 5 \end{array}\right.$$

y resolverlo, caso de ser compatible.

Ejercicio 12 *Resolver los siguientes sistemas lineales:*

$$a)\ \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x & - & 4y & & & & & = & -10 \\ x & - & 3y & & & + & t & = & -4 \\ x & & & - & z & + & 2t & = & 4 \\ 3x & - & 4y & + & 3z & - & t & = & -11 \end{array}\right. \qquad b)\ \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x & - & 4y & & & & & = & -8 \\ x & - & 3y & & & + & t & = & -2 \\ x & & & - & z & + & 2t & = & 9 \\ 3x & - & 4y & + & 3z & - & t & = & -15 \end{array}\right.$$

Ejercicio 13 *Resolver los siguientes sistemas lineales:*

$$a)\ \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & z & = & 7 \\ 2x & - & 5y & + & 2z & = & 6 \\ 3x & + & 2y & - & z & = & 1 \end{array}\right. \qquad b)\ \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 3y & - & z & + & t & = & 1 \\ -2x & + & y & + & 2z & & & = & 7 \\ & & y & & & - & t & = & 0 \end{array}\right.$$

mediante el método de Gauss-Jordan.

Ejercicio 14 *Se tienen tres lingotes de* $100\,g$*, cuya composición, en gramos, es la dada en la tabla siguiente:*

	Oro	*Plata*	*Cobre*
Lingote 1	*20*	*30*	*50*
Lingote 2	*30*	*40*	*30*
Lingote 3	*40*	*50*	*10*

¿Qué peso habrá de tomarse de cada uno de los tres lingotes para formar uno nuevo que contenga $42\,g$ *de oro,* $57\,g$ *de plata y* $51\,g$ *de cobre?*

Ejercicio 15 *Determinar los coeficientes de un polinomio* $p(x)$ *de grado* 3*, cuya gráfica pasa por los puntos* $(-1,0)$, $(1,4)$, $(2,3)$ *y* $(3,16)$.

Ejercicio 16 *Dada la matriz* $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$*. Determinar el conjunto de las matrices de* $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ *que conmutan con ella.*

Ejercicio 17 *Estudiar el sistema:*

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & - & z & = & -1 \\ & & y & + & z & = & 2 \\ x & - & \alpha y & + & z & = & 3 \\ 2x & - & y & - & \beta z & = & 0 \end{array}\right.$$

según los valores de los parámetros reales α *y* β*. Resolverlo cuando sea compatible.*

Ejercicio 18 *Estudiar el sistema:*

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & 2z & = & \alpha \\ -3x & + & (\alpha+3)y & + & (\beta-8)z & = & 1-3\alpha \\ 5x & + & (2\alpha-5)y & + & (\alpha+2\beta+6)z & = & 5\alpha+2 \end{array}\right.$$

según los valores de los parámetros reales α *y* β*. Resolverlo cuando sea compatible.*

Ejercicio 19 *Estudiar el sistema:*

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} (\alpha+3)x & - & y & + & z & = & 0 \\ 5x & + & (\alpha-3)y & + & z & = & 0 \\ 6x & - & 6y & + & (\alpha+4)z & = & 0 \end{array}\right.$$

según los valores del parámetro real α*. Resolverlo cuando sea compatible indeterminado.*