Tema 5. DIAGONALIZACIÓN

Arturo Santamaría

Grado en Ingeniería Informática del Software
Universidad de Oviedo. Departamento de Matemáticas

PRIMER SEMESTRE

Planteamiento del problema

Un **operador lineal** o **endomorfismo** de un $\mathbb{K}$-espacio vectorial V es una aplicación lineal de V en sí mismo, es decir, $f : V \longrightarrow V$ lineal.

Nos preguntamos:

- ¿Cómo encontrar la matriz más sencilla que represente a un endomorfismo?
- ¿De qué forma se puede construir una base en la que la representación matricial del operador sea lo más sencilla posible?
- ¿En qué casos se puede encontrar una representación matricial diagonal del operador?

Particularidades de los endomorfismos

Sea $f : V \longrightarrow V$ un operador lineal.

- Todas las matrices que representan a un operador lineal son cuadradas y semejantes entre sí.
- En general, se toma la misma base de trabajo en V como espacio inicial y final.
- Dado que $Ker(f)$ e $Im(f)$ están en el mismo espacio vectorial, se pueden sumar o intersecar, puede estar contenido uno en otro, etc.
- Como el espacio inicial y el final coinciden, puede considerarse la composición $f^2 = f \circ f$ o la función compuesta $f^p = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{p \ veces}$ de tal forma que:

$$A = M(f; B) \quad \Longrightarrow \quad M(f^2; B) = A^2 \quad \text{y} \quad M(f^p; B) = A^p$$

Definición

- Un endomorfismo $f \in L(V)$ es **diagonalizable** si admite una representación matricial diagonal.
- Una matriz cuadrada $A \in M_n(\mathbb{K})$ es **diagonalizable** si existe una matriz $P \in GL_n(\mathbb{K})$ tal que $D = P^{-1}AP$ es diagonal, esto es, si podemos encontrar una matriz diagonal semejante a A.

- La diagonalización de un endomorfismo y la de una matriz cuadrada son, en realidad, un mismo problema.
- Diagonalizar un operador $f \in L(V)$ supone hacerlo con una cualquiera de las matrices que lo representan.
- Diagonalizar una matriz cuadrada A es lo mismo que hacerlo con un operador cuya matriz, en una cierta base del espacio, sea A.

Sea V un $\mathbb{K}-$espacio vectorial de dimensión finita, $\dim V = n$, y sea $f : V \longrightarrow V$ un endomorfismo.
Buscamos una base $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ de V respecto a la que la matriz del endomorfismo sea diagonal. En ese caso:

$$M(f; B) = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix}$$

para ciertos $d_1, d_2, \ldots, d_n \in \mathbb{K}$.

En virtud de cómo se define la matriz de una aplicación lineal:

$$f(\vec{v}_1) = d_1\,\vec{v}_1 \qquad f(\vec{v}_2) = d_2\,\vec{v}_2 \qquad \ldots \qquad f(\vec{v}_n) = d_n\,\vec{v}_n$$

Todos los vectores de la base buscada comparten una propiedad común: sus imágenes son proporcionales a ellos mismos. Asignaremos un nombre a este tipo de vectores.

Autovectores y autovalores de un endomorfismo

Sea $f : V \longrightarrow V$ un endomorfismo de un $\mathbb{K}-$espacio vectorial de dimensión finita V.

- Un escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ es un **valor propio** o **autovalor** de f si:

$$\exists \vec{v} \in V,\ \vec{v} \neq \vec{0}_V \quad / \quad f(\vec{v}) = \lambda\,\vec{v}$$

- Dado un autovalor λ de f, se dice que un vector $\vec{v} \in V$ es un **vector propio** o **autovector** de f asociado a λ si:

$$f(\vec{v}) = \lambda\,\vec{v}$$

Espectro y subespacios propios de un endomorfismo

- El conjunto de todos los autovalores de f:

$$\sigma(f) = \left\{\lambda \in \mathbb{K} \,/\, \exists \vec{v} \neq \vec{0}_V \text{ tal que } f(\vec{v}) = \lambda\vec{v}\right\}$$

recibe el nombre de **espectro** de f.

- Dado un autovalor λ de f, consideremos el conjunto de autovectores asociados a él:

$$S(\lambda) = \{\vec{v} \in V \,/\, f(\vec{v}) = \lambda\,\vec{v}\}$$

$S(\lambda)$ es un subespacio vectorial de V que llamamos **subespacio propio** de f asociado al autovalor λ.

- Nótese que $S(\lambda) = Ker\,(f - \lambda\,id_V)$.

Autovectores y autovalores de una matriz

Sea $A \in M_n(\mathbb{K})$.

- Un escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ es un **valor propio** o **autovalor** de A si:

$$\exists X \in M_{n\times 1}(\mathbb{K}),\ X \neq 0 \quad / \quad A\,X = \lambda\,X$$

- Dado un autovalor λ de A, se dice que $X \in M_{n\times 1}(\mathbb{K})$ es un **vector propio** o **autovector** de A asociado a λ si:

$$A\,X = \lambda\,X$$

Espectro y subespacios propios de una matriz

- El conjunto de todos los autovalores de A:

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{K} \,/\, \exists X \in M_{n\times 1}(\mathbb{K}) \text{ tal que } A\,X = \lambda\,X\}$$

recibe el nombre de **espectro** de A.

- Dado un autovalor λ de A, consideremos el conjunto de autovectores asociados a él:

$$S(\lambda) = \{X \in M_{n\times 1}(\mathbb{K}) \,/\, A\,X = \lambda\,X\}$$

$S(\lambda)$ es un subespacio vectorial que llamamos **subespacio propio** de A asociado al autovalor λ.

Condición necesaria y suficiente de diagonalización

- Un endomorfismo $f \in L(V)$ es diagonalizable si, y sólo si existe una base de V formada por vectores propios de f.

Polinomio característico

Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial n-dimensional y A una representación matricial de $f \in L(V)$.

Se llama **polinomio característico** de f o **polinomio característico** de A al polinomio de grado n:

$$p_f(x) = p_A(x) = |A - xI_n|$$

La definición anterior es consistente, pues todas las matrices que representan a f son semejantes y, por ello, comparten polinomio característico.

Si A y A' son dos matrices semejantes tienen el mismo polinomio característico. En efecto:

$$A' = P^{-1}AP, \text{ siendo } P \in GL_n(\mathbb{K}) \implies$$

$$\implies p_{A'}(x) = |A' - xI_n| = |P^{-1}AP - xI_n| =$$

$$= |P^{-1}AP - x(P^{-1}I_nP)| = |P^{-1}AP - P^{-1}xI_nP| =$$

$$= |P^{-1}(A - xI_n)P| = |P^{-1}|\,|A - xI_n|\,|P| = |A - xI_n|\,|P^{-1}|\,|P| =$$

$$= |A - xI_n|\,|P|^{-1}\,|P| = |A - xI_n| = p_A(x)$$

Cálculo de autovalores

- Sea $f \in L(V)$. Se tiene que:

  λ es valor propio de f $\iff$ λ es raíz de $p_f(x)$

- Equivalentemente, sea $A \in M_n(\mathbb{R})$. Se tiene que:

  λ es valor propio de A $\iff$ λ es raíz de $p_A(x)$

  En efecto:

  $$\lambda \text{ es valor propio de } A \iff$$
  $$\iff \exists X \in M_{n\times 1}(\mathbb{K}),\ X \neq 0 \ / \ A\,X = \lambda\,X \iff$$
  $$\iff \exists X \in M_{n\times 1}(\mathbb{K}),\ X \neq 0 \ / \ (A - \lambda\,I_n)X = 0 \iff$$
  $$\iff |A - \lambda I_n| = 0 \iff p_A(\lambda) = 0$$

INTRODUCCIÓN
VALORES Y VECTORES PROPIOS
DIAGONALIZACIÓN DE ENDOMORFISMOS Y MATRICES
APLICACIÓN A LOS SISTEMAS DE EC. DIF. LINEALES
Cálculo de autovalores
Condiciones necesarias y suficientes de diagonalización
Metodología para la diagonalización

Condiciones necesarias y suficientes

Sea V un $\mathbb{K}-$espacio vectorial de dimensión finita y $f \in L(V)$.

- Si λ es un autovalor de f con multiplicidad α como raíz de $p_f(x)$, entonces: $1 \leq dim(S(\lambda)) \leq \alpha$.
- Para que f sea diagonalizable es necesario y suficiente que se verifiquen las siguientes condiciones:
  - El polinomio característico tiene todas sus raíces en $\mathbb{K}$.
  - La multiplicidad de cada autovalor como raíz de $p_f(x)$, coincide con la dimensión de su subespacio propio asociado.
- Si todos los valores propios de un endomorfismo son reales y distintos, es diagonalizable en $\mathbb{R}$.

Arturo Santamaría ÁLGEBRA LINEAL

INTRODUCCIÓN
VALORES Y VECTORES PROPIOS
DIAGONALIZACIÓN DE ENDOMORFISMOS Y MATRICES
APLICACIÓN A LOS SISTEMAS DE EC. DIF. LINEALES
Cálculo de autovalores
Condiciones necesarias y suficientes de diagonalización
Metodología para la diagonalización

¿Cómo se realiza, en la práctica, la diagonalización?

En la práctica, si un operador $f \in L(V)$ (o una matriz A que lo represente) es diagonalizable, la forma de obtener la base de vectores propios deseada consiste en:

- Calcular todos los autovalores distintos, digamos $\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_r$, como raíces del polinomio característico.
- Para cada autovalor λ_i $(i = 1, 2, ..., r)$, obtener una base B_i del subespacio propio asociado $S(\lambda_i)$, resolviendo para ello el sistema de ecuaciones: $(A - \lambda_i I_n)\,X = 0$
- Unir todas esas bases, formando: $B = \bigcup_{i=1}^{r} B_i$.

  El sistema de vectores B es libre y, si el operador (o la matriz) es diagonalizable, constituirá una base del espacio formada por vectores propios que resolverá el problema.

Arturo Santamaría ÁLGEBRA LINEAL

INTRODUCCIÓN
VALORES Y VECTORES PROPIOS
DIAGONALIZACIÓN DE ENDOMORFISMOS Y MATRICES
APLICACIÓN A LOS SISTEMAS DE EC. DIF. LINEALES
Cálculo de autovalores
Condiciones necesarias y suficientes de diagonalización
Metodología para la diagonalización

Ejemplo 5.1

- En $\mathbb{R}_3[x]$ se define el endomorfismo f por:

  $$f(ax^3 + bx^2 + cx + d) = dx^3 + cx^2 + bx + a, \quad \forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

  - Determinar la matriz de f en la base $B = \{1, x, x^2, x^3\}$.
  - Hallar una base donde la matriz asociada a f sea diagonal y calcular dicha matriz.

Arturo Santamaría ÁLGEBRA LINEAL

Ejemplo 5.2

- Diagonalizar la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Utilizar el resultado para obtener la potencia n-ésima de A.

Ejemplo 5.3

- Dado el endomorfismo $f_\alpha : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, cuya matriz asociada en la base canónica es:

$$A = \begin{pmatrix} 2\alpha - 1 & 0 & 2\alpha - 2 \\ 1 & \alpha & 2 \\ 1 - \alpha & 0 & 2 - \alpha \end{pmatrix}$$

¿Para qué valores de α es f_α diagonalizable?

Ejemplos 5.4

- Diagonalizar en $\mathbb{C}$ las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \frac{i}{2} & -\frac{i}{2} \\ \frac{i}{2} & \frac{i}{2} \end{pmatrix}$$

El interés por estudiar las ecuaciones diferenciales está justificado por la multitud de aplicaciones que de ellas podemos encontrar a problemas concretos, como por ejemplo:

- Oscilaciones de tipo mecánico.
- Circuitos eléctricos.
- Ley de enfriamiento de Newton.
- Desintegración radiactiva.
- Estudios de crecimiento poblaciones.
- Mezclas, ...

Definición

- Se llama **ecuación diferencial de orden** n a aquella en la que intervienen una variable dependiente, como incógnita, y una o varias de sus derivadas.

  Podemos expresarla, en general, de la forma:

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$$

siendo:

x	:	variable independiente.
y	:	variable dependiente (incógnita).
F	:	función cualquiera de $n + 2$ variables.

Orden

- Se llama **orden** de una ecuación diferencial al de la derivada de orden superior de la función incógnita que aparece en ella.

NOTA:
Si la incógnita es una función de varias variables, y aparecen las derivadas con respecto a una o varias de ellas, se dice que es una **ecuación en derivadas parciales**.

Ejemplos 5.5

- Ecuación diferencial de primer orden:

$$\frac{dy}{dx} = 2\,x^2 - x$$

  (variable independiente x, variable dependiente y)

- Ecuación diferencial de cuarto orden:

$$\frac{d^4x}{dt^4} + 5\,\frac{d^2x}{dt^2} + 3x = \operatorname{sen} t$$

  (variable independiente t, variable dependiente x)

- Ecuación en derivadas parciales:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

  (variables independientes x e y, variable dependiente T)

Solución particular

- Diremos que una función φ es una **integral o solución particular** de $F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$ sobre el conjunto D si satisface la igualdad, esto es:

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x), ..., \varphi^{(n)}(x)\,) = 0 \qquad \forall x \in D$$

- Una ecuación diferencial no tiene, en general, una única solución.

  Por ejemplo, la ecuación diferencial de primer orden:

$$y' - y = 0$$

  tiene como solución particular $\varphi_1(x) = e^x$, pero también lo es $\varphi_2(x) = 3\,e^x$.

Resolución. Solución general

Llamaremos **resolver** una ecuación diferencial a encontrar todas sus posibles soluciones particulares.

Se llama **solución general** de $F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$ a una familia de funciones dependiente de n parámetros independientes de la forma:

$$y = \varphi(x, C_1, ..., C_n)$$

tal que, para cada elección de los parámetros $C_1, ..., C_n$, se obtiene una de sus soluciones particulares.

Ejemplo 5.6

- Dada la ecuación diferencial de primer orden:

$$y'(x) = k\, y(x) \quad \text{, con } k \in \mathbb{R}$$

su solución general es de la forma:

$$y(x) = C\, e^{k\,x} \qquad (C \in \mathbb{R})$$

Problema de valores iniciales

Llamamos **problema de Cauchy o problema de valores iniciales** a un sistema de ecuaciones del tipo:

$$\left\{\begin{array}{rcl} F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) & = & 0 \\ y(x_0) & = & y_0 \\ y'(x_0) & = & y_1 \\ & \vdots & \\ y^{(n-1)}(x_0) & = & y_{n-1} \end{array}\right.$$

Solucionar este tipo de problemas, supone encontrar una solución particular de la ecuación diferencial que, además, cumple las otras n igualdades.

Problema de valores iniciales

El nombre de problema de valores iniciales, proviene de la Física, donde las ecuaciones diferenciales que se presentan tienen con frecuencia como variable independiente el tiempo.

En ese caso, se suelen conocer los valores en el instante inicial, $t = 0$, de la función incógnita y sus derivadas:

$$\left\{\begin{array}{rcl} F(t, x(t), x'(t), x''(t)) & = & 0 \\ x(0) & = & a_0 \\ x'(0) & = & a_1 \end{array}\right.$$

Ejemplo 5.7

- Resolver el problema de valores iniciales:

$$\begin{cases} x''(t) = cos(t) \\ x(0) = 0 \\ x(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden

Un sistema de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden, puede expresarse en forma general:

$$\begin{cases} x'_1(t) = a_{11}(t)\,x_1(t) + a_{12}(t)\,x_2(t) + ... + a_{1n}(t)\,x_n(t) + f_1(t) \\ x'_2(t) = a_{21}(t)\,x_1(t) + a_{22}(t)\,x_2(t) + ... + a_{2n}(t)\,x_n(t) + f_2(t) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x'_n(t) = a_{n1}(t)\,x_1(t) + a_{n2}(t)\,x_2(t) + ... + a_{nn}(t)\,x_n(t) + f_n(t) \end{cases}$$

donde:

t : variable independiente.

$x_i(t)\ (i = 1, \dots, n)$: funciones incógnita.

$a_{ij}(t),\ f_i(t)\ (i, j = 1, \dots, n)$: funciones conocidas.

Sistemas lineales de primer orden homogéneos con coeficientes constantes

Nos ceñiremos al caso homogéneo y con coeficientes constantes, es decir, con $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$ funciones nulas y $a_1(t), a_2(t), \dots, a_n(t)$ funciones constantes:

$$\begin{cases} x'_1(t) = a_{11}\,x_1(t) + a_{12}\,x_2(t) + ... + a_{1n}\,x_n(t) \\ x'_2(t) = a_{21}\,x_1(t) + a_{22}\,x_2(t) + ... + a_{2n}\,x_n(t) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x'_n(t) = a_{n1}\,x_1(t) + a_{n2}\,x_2(t) + ... + a_{nn}\,x_n(t) \end{cases}$$

siendo $a_{ij} \in \mathbb{K}, \forall i, j = 1, ..., n.$

Matricialmente podemos expresarlo:

$$\begin{pmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \\ \vdots \\ x'_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

o abreviadamente:

$$X'(t) = A\,X(t)$$

Conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales lineales homogéneo

El conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales lineales homogéneo $X'(t) = A\,X(t)$ tiene estructura de $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión n.
Se llama **sistema fundamental de soluciones** a una base $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$ de dicho espacio vectorial.
En estas condiciones, podemos expresar la **solución general** del sistema de la forma:

$$X(t) = C_1\,\varphi_1(t) + C_2\,\varphi_2(t) + \cdots + C_n\,\varphi_n(t) \qquad (C_1, C_2, \ldots, C_n \in \mathbb{R})$$

Resolver un sistema $X'(t) = A\,X(t)$ equivale a determinar un sistema fundamental de soluciones del mismo.

Derivación de matrices

NOTA: Estamos considerando matrices cuyos elementos son funciones de t. Como tales pueden ser derivadas (elemento a elemento) y, en este sentido, pueden destacarse algunas propiedades heredadas de las de la derivación de funciones, como son:

- $\dfrac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \\ \vdots \\ x'_n(t) \end{pmatrix}$
- $(X(t) + Y(t))' = X'(t) + Y'(t)$
- $(\alpha X(t))' = \alpha X'(t), \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$
- $(X(t) \cdot Y(t))' = X'(t) \cdot Y(t) + X(t) \cdot Y'(t)$

Resolución del sistema

Limitaremos nuestro estudio al caso en el que la matriz A sea diagonalizable. Por tanto, podemos encontrar una matriz regular P, de manera que la matriz $D = P^{-1}AP$ es diagonal.

En ese caso, sea $Y(t)$ tal que $X(t) = P\,Y(t)$. Se tiene que:

$$X'(t) = A\,X(t) \iff (P\,Y(t))' = (P\,D\,P^{-1})\,(P\,Y(t)) \iff$$

$$\iff P\,Y'(t) = P\,D\,Y(t) \iff Y'(t) = DY(t)$$

De este modo, solucionar nuestro sistema de ecuaciones equivale a resolver otro con matriz diagonal, lo que resulta especialmente sencillo.

En efecto:

$$Y'(t) = D\,Y(t) \iff \begin{pmatrix} y'_1(t) \\ y'_2(t) \\ \vdots \\ y'_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} y'_1(t) = d_1\,y_1(t) \\ y'_2(t) = d_2\,y_2(t) \\ \qquad \vdots \\ y'_n(t) = d_n\,y_n(t) \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{ll} y_1(t) = C_1\,e^{d_1 t} & (C_1 \in \mathbb{R}) \\ y_2(t) = C_2\,e^{d_2 t} & (C_2 \in \mathbb{R}) \\ \qquad \vdots & \\ y_n(t) = C_n\,e^{d_n t} & (C_n \in \mathbb{R}) \end{array} \right.$$

Con lo cual:

$$X(t) = P\,Y(t) \iff$$

$$\iff \quad X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & P & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} \iff$$

$$\iff \quad X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & P & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 e^{d_1 t} \\ C_2 e^{d_2 t} \\ \vdots \\ C_n e^{d_n t} \end{pmatrix}$$

donde P tiene, en sus columnas, una base de autovectores, digamos $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$, de A.

Así, podemos expresar la solución general del sistema de ecuaciones diferenciales como:

$$X(t) = C_1\,\vec{v}_1\,e^{d_1 t} + C_2\,\vec{v}_2\,e^{d_2 t} + \ldots + C_n\,\vec{v}_n\,e^{d_n t} \quad (C_1, C_2, \ldots, C_n \in \mathbb{R})$$

donde el conjunto $\{\vec{v}_1\,e^{d_1 t}, \vec{v}_2\,e^{d_2 t}, \ldots, \vec{v}_n\,e^{d_n t}\}$ es un sistema fundamental de soluciones.

Ejemplo 5.8

- Determinar la solución del sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} x'(t) = y(t) + z(t) \\ y'(t) = x(t) + z(t) \\ z'(t) = x(t) + y(t) \end{cases}$$

que verifique las condiciones iniciales:

$$x(0) = 1; \quad y(0) = -2; \quad z(0) = 1$$