Manuel José Fernández, mjfg@uniovi.es

CALCULO
GRADO EN INGEN. INFORM. DEL SOFTWARE. 2020-21
TEMA 1. FUNCIONES REALES DE UNA VARIABLE REAL

1.2: Funciones reales de una variable real.

*Nociones preliminares***.**

Se llama función real de variable real a toda aplicación $f : D \subset R \to R$, donde D es un conjunto de números reales denominado *dominio* de la función. Designaremos por x a un elemento de D y por $y = f(x)$ a su *imagen* por la aplicación f .

$$Dom\, f = \{x \in R \,/\, f(x) \in R\} \quad , \quad \operatorname{Im} f = \{y \in R \,/\, \exists\, x \in D, f(x) = y\} = f(D)$$

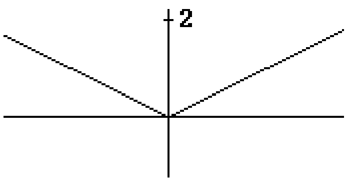
Ejemplos:

$$f(x) = x^2 \qquad Dom\, f = R \qquad \operatorname{Im} f = [0,+\infty)$$
$$f(x) = \sqrt{x+4} \qquad Dom\, f = [-4,+\infty) \qquad \operatorname{Im} f = [0,+\infty)$$
$$f(x) = \frac{1}{x-1} \qquad Dom\, f = R - \{1\} \qquad \operatorname{Im} f = R - \{0\}$$

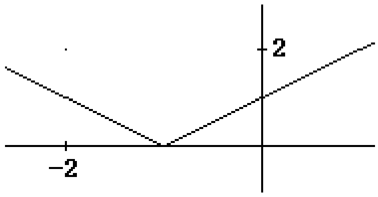
El conjunto de todos los puntos del plano $(x, f(x))$ con $x \in D$ forman la *gráfica* de f

Ejemplos:

$f(x) = |x|$



$f(x) = |x+1|$



Función monótona.

Sea $f : D \subset R \to R$ una función real de variable real, y $S \subset D$.

f es monótona creciente en S $\Leftrightarrow: \forall x_1, x_2 \in S \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$

f es monótona decreciente en S $\Leftrightarrow: \forall x_1, x_2 \in S \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$

f es estrictamente creciente en S $\Leftrightarrow: \forall x_1, x_2 \in S \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

f es estrictamente decreciente en S $\Leftrightarrow: \forall x_1, x_2 \in S \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Ejemplos:

$f(x) = x^2$ es estrictamente creciente en $[0,+\infty)$ y estrictamente decreciente en $(-\infty,0]$.

$f(x) = x^3$ es estrictamente creciente en todo R.

Función acotada.
Sea $f : D \subset R \to R$ una función real de variable real, y $S \subset D$.

f está acotada superiormente en $S \Leftrightarrow: \exists M \in R \,/\, f(x) \le M \quad \forall x \in S$, es decir, si el conjunto imagen $f(S) = \{f(x) \ / \ x \in S\}$ es un conjunto acotado superiormente.
f está acotada inferiormente en $S \Leftrightarrow: \exists m \in R \,/\, f(x) \ge m \quad \forall x \in S$, es decir, si el conjunto imagen $f(S) = \{f(x) \ / \ x \in S\}$ es un conjunto acotado inferiormente.

f está acotada en $S \Leftrightarrow: f$ está acotada superiormente e inferiormente en $S \Leftrightarrow$ $\exists K \in R^+ \,/\, |f(x)| \le K \quad \forall x \in S$, es decir, si el conjunto imagen $f(S) = \{f(x) \ / \ x \in S\}$ es un conjunto acotado.

Ejemplos:

$f(x) = x^2$ está acotada inferiormente en R y no está acotada superiormente en R ya que $\operatorname{Im} f = [0, +\infty)$. Por tanto $\inf\limits_{x \in R} f(x) = 0 = \min\limits_{x \in R} f(x)$, $\sup\limits_{x \in R} f(x)$ y $\max\limits_{x \in R} f(x)$ no existen.

$f(x) = x^2$ está acotada en el intervalo $[-5, 9]$ ya que $\operatorname{Im} f = [0, 81]$. Por tanto
$\inf\limits_{x \in [-5,9]} f(x) = 0 = \min\limits_{x \in [-5,9]} f(x)$, $\sup\limits_{x \in [-5,9]} f(x) = 81 = \max\limits_{x \in [-5,9]} f(x)$

$f(x) = x^2$ está acotada en el intervalo $(-5, 9)$ ya que $\operatorname{Im} f = [0, 81)$. Por tanto
$\inf\limits_{x \in (-5,9)} f(x) = 0 = \min\limits_{x \in (-5,9)} f(x)$, $\sup\limits_{x \in (-5,9)} f(x) = 81$, $\max\limits_{x \in (-5,9)} f(x)$ no existe.

Función par e impar: Simetrías.

Sea $f : D \subset R \to R$ tal que $-x \in D$ si $x \in D$

f es par $\Leftrightarrow: f(-x) = f(x) \quad \forall x \in D$
f es impar $\Leftrightarrow: f(-x) = - f(x) \quad \forall x \in D$

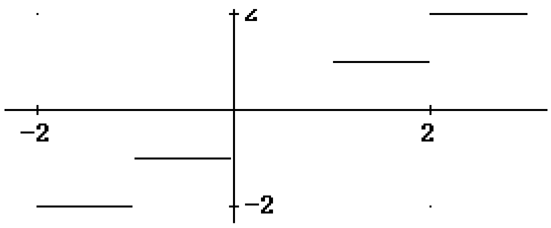
La gráfica de una función par es simétrica respecto al eje de ordenadas y la grafica de una función impar es simétrica respecto al origen de coordenadas.

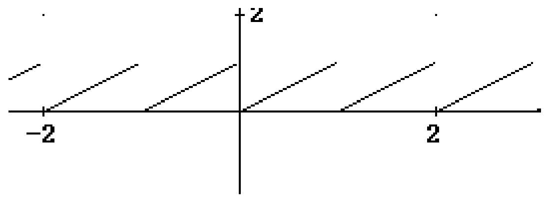
Ejemplos:
$f(x) = x^4$ es par , $f(x) = x^7$ es impar

Función periódica.
Sea $f : D \subset R \to R$ una función real de variable real.
f es periódica $\Leftrightarrow$: existe $h \in R^+$ tal que $f(x) = f(x + h) \quad \forall x \in D$
El período p de una función periódica es el valor más pequeño de h que verifica la igualdad anterior.

Ejercicio:

Sea $f(x)=[x]$ función parte entera de x, es decir, la función que a cada número real le asigna el mayor entero que sea menor o igual a él (función floor en Matlab). Comprobar que la función $g(x)=x-f(x)=x-[x]$ es periódica de período uno.





Operaciones con funciones.

Sean f y g dos funciones reales de variable real tales que $Dom\ f = Dom\ g = D$. Definimos la función suma de la forma siguiente:

$$f+g:\ D\subset R\rightarrow R \quad \text{tal que} \quad (f+g)(x)=:\ f(x)+g(x)\ \forall x\in D$$

La función nula $0_f : R \rightarrow R$ tal que $0_f(x)=0\ \forall x\in R$ verifica $f+0_f = f$

La función opuesta de f, $-f : D\subset R \rightarrow R$ tal que $(-f)(x)=:\ -f(x)\ \forall x\in D$ verifica $f+(-f)=0_f$

Definimos la función producto $fg:\ D\subset R\rightarrow R$ tal que $(fg)(x)=:\ f(x)g(x)\ \ \forall x\in D$

La función unidad $1_f : R \rightarrow R$ tal que $1_f(x)=1\ \forall x\in R$ verifica $f\,1_f = f$

La función reciproca de f, $\dfrac{1}{f}: D_1 \subset R \rightarrow R$ tal que $\left(\dfrac{1}{f}\right)(x)=:\ \dfrac{1}{f(x)}\ \forall x\in D_1$ siendo $D_1=\{x\in D\,/\,f(x)\neq 0\}$, verifica $f\,\dfrac{1}{f}=1_f$.

Definimos la función cociente $\dfrac{f}{g}:\mathrm{D}_2\subset R\rightarrow R$ tal que $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=:\dfrac{f(x)}{g(x)}\ \forall x\in D_2$ siendo $D_2=\{x\in D\ /\ g(x)\neq 0\}$.

Nota: Si $Dom\ f \neq Dom\ g$ con $Dom\ f\cap Dom\ \mathrm{g}\neq$ conjunto vacio, entonces:

$Dom(f+g)=Dom(fg)=Dom\ f\cap Dom\ g$
$Dom(f/g)=(Dom\ f\cap Dom\ g)\text{-}\{x\,/\,g(x)=0\}$

Ejemplos:

* $f(x)=x^2$ $\quad g(x)=\dfrac{x}{x-1}$ $\quad Dom\ f=R\ \ Dom\ g=R-\{1\}$

$$(f+g)(x)=x^2+\frac{x}{x-1}=\frac{x^3-x^2+x}{x-1} \qquad Dom(f+g)=R-\{1\}$$

$$(fg)x)=\frac{x^3}{x-1} \qquad Dom(fg)=R-\{1\}$$

* $f(x)=\begin{cases} x & \text{si } x\le 0 \\ -1 & \text{si } x>0 \end{cases}$ $\quad g(x)=\begin{cases} -x & \text{si } x<1 \\ x^2 & \text{si } x\ge 1 \end{cases}$

$$(f+g)(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x\le 0 \\ -1-x & \text{si } 0<x<1 \\ -1+x^2 & \text{si } x\ge 1 \end{cases} \qquad (fg)(x)=\begin{cases} x & \text{si } 0<x<1 \\ -x^2 & \text{si } x\le 0 \text{ ó } x\ge 1 \end{cases}$$

Composición de funciones y función inversa.

Sean dos funciones f y g tales que $\operatorname{Im} g \cap Dom\ f \ne$ conjunto vacío. Definimos la función "g compuesta con f" y se denota $f\circ g$ de la siguiente forma:

$$(f\circ g)(x)=: f(g(x)) \qquad \forall x\in Dom\ g\ /\ \ g(x)\in Dom\ f$$

Análogamente, si $\operatorname{Im} f \cap Dom\ g \ne$ conjunto vacío, se define la función "f compuesta con g" y se denota $g\circ f$ de la siguiente forma:

$$(g\circ f)(x)=: g(f(x)) \qquad \forall x\in Dom\ f\ /\ \ f(x)\in Dom\ g$$

La composición de funciones verifica la propiedad asociativa, es decir, $(f\circ g)\circ h=f\circ(g\circ h)$ No verifica, en general, la propiedad conmutativa, es decir, $f\circ g\ne g\circ f$. El elemento neutro de la composición es la función *identidad* I, es decir, $f\circ I=f=I\circ f$ siendo $I(x)=x$ $\forall x\in R$

Ejemplo:

$f(x)=x^2+x$ $\quad g(x)=\sqrt[3]{x}$ $\quad Dom\ f=Dom\ g=R$

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f\left(\sqrt[3]{x}\right)=\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+\sqrt[3]{x}$$
$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g\left(x^2+x\right)=\sqrt[3]{x^2+x}$$

Ejercicio.

Obtener $f\circ g$, $g\circ f$ y sus dominios respectivos en los casos siguientes:

a) $f(x)=x^2+1$, $g(x)=\sqrt{x}$

b) $f(x)=\sqrt{x-3}$, $g(x)=x^2+1$

$f: D \subset R \to R$ es *inyectiva* $\Leftrightarrow: \forall x_1, x_2 \in D \; / \; f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

Ejemplos:

$f(x) = x(x-1)$ no es inyectiva en R ya que $f(0) = f(1)$
$f(x) = x^3$ es inyectiva.
$f(x) = x^2$ no es inyectiva en R. Lo es en $[0, +\infty)$ y en $(-\infty, 0]$

Si f es una función inyectiva (en cierto dominio) entonces existe una única función g definida sobre la imagen de f, es decir, $g: \mathrm{Im}\, f \to R$ tal que $f(g(x)) = x$ $\forall x \in \mathrm{Im}\, f = Dom\; g$. Así pues, $\mathrm{Im}\, g = Dom\, f$. A esta función g se le llama inversa de la función f y se denota por f^{-1}. Por tanto

$$f(f^{-1}(x)) = x \quad \forall x \in \mathrm{Im}\, f \text{, es decir, } f \circ f^{-1} = I$$

Se verifica también que $f^{-1}(f(x)) = x \quad \forall x \in Dom\; f$, es decir, $f^{-1} \circ f = I$

Ejemplos:

$f(x) = x \qquad f^{-1}(x) = x$
$f(x) = \dfrac{1}{x} \qquad f^{-1}(x) = \dfrac{1}{x}$
$f(x) = \sqrt[3]{x} \qquad f^{-1}(x) = x^3$
$f(x) = 1 - (x - .2)^{1/3} \qquad f^{-1}(x) = (1-x)^3 + 2$

Veamos esto último, $f(f^{-1}(x)) = x \Leftrightarrow 1 - (f^{-1}(x) - 2)^{1/3} = x \Leftrightarrow (f^{-1}(x) - 2)^{1/3} = 1 - x \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow f^{-1}(x) = (1-x)^3 + 2$

Ejercicio.
Hallar la función inversa de $f(x) = x^2 - x, \quad x \in [0.5, \infty)$

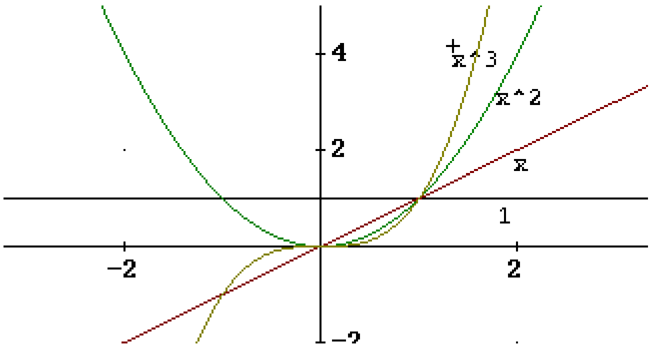
Funciones elementales

Función potencial entera

$f(x) = x^n \quad , \quad n \in N \cup \{0\}$

$Dom\ f = R$, $\operatorname{Im} f = R$ si n es impar, $\operatorname{Im} f = [0,+\infty)$ si $n > 0$ par, $\operatorname{Im} f = \{1\}$ si $n = 0$.

Si n es impar entonces f es estrictamente creciente en R.



Función polinomica.

$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n \qquad n \in N \cup \{0\} \qquad a_n \neq 0$

$Dom\ f = R$. Si $n = 1$ recta, si $n = 2$ parábola,...

Función racional.

Es cociente de dos funciones polinómicas

$$f(x) = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_m x^m} = \frac{P(x)}{Q(x)} \quad ; \quad Dom\ f = \{x \in R \,/\, Q(x) \neq 0\}$$

Ejemplo:

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + 5x - 1}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} \quad ; \quad Dom\ f = R - \{-1, 1\}$$

Funciones circulares y sus inversas.

$f(x) = sen(x)$ $\quad Dom\ f = R$ $\quad \operatorname{Im} f = [-1, 1]$

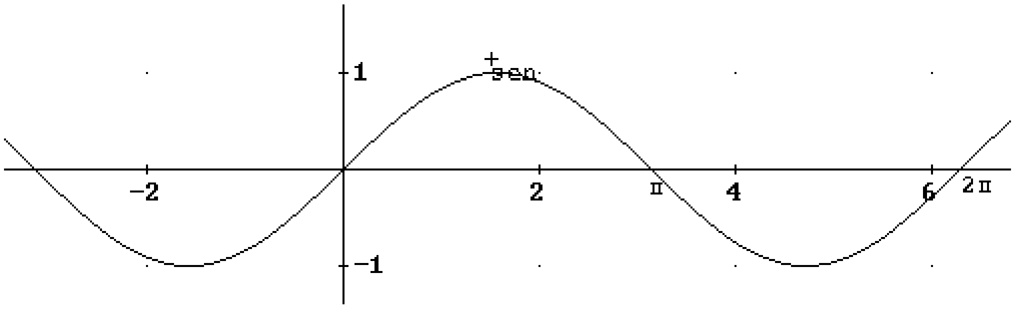
es acotada, impar y periódica de periodo 2π

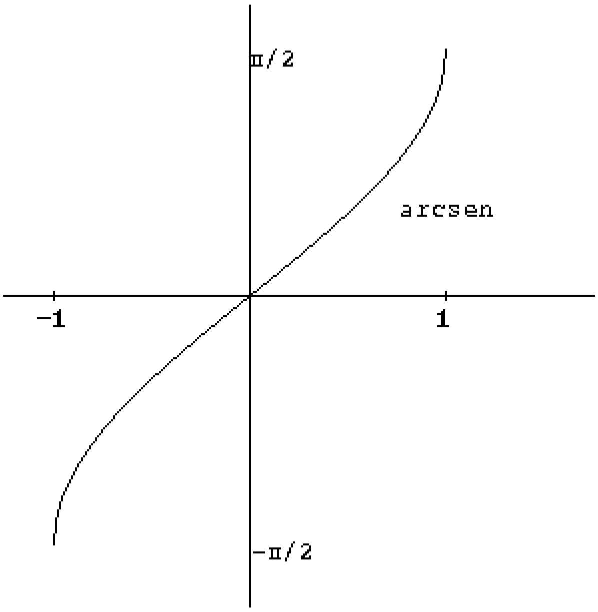
$f(x) = arcsen(x)$

Para definir la función inversa nos restringimos a un dominio donde la función seno sea inyectiva, $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to R$

Para cada $x \in [-1, 1]$ se define $arcsen(x)$ como el único $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ tal que $sen(y) = x$

$Dom = [-1, 1]$ $\quad \operatorname{Im} = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ es acotada, creciente e impar





$f(x) = \cos(x)$ $\quad Dom\ f = R$ $\quad \mathrm{Im}\, f = [-1\,,1]$

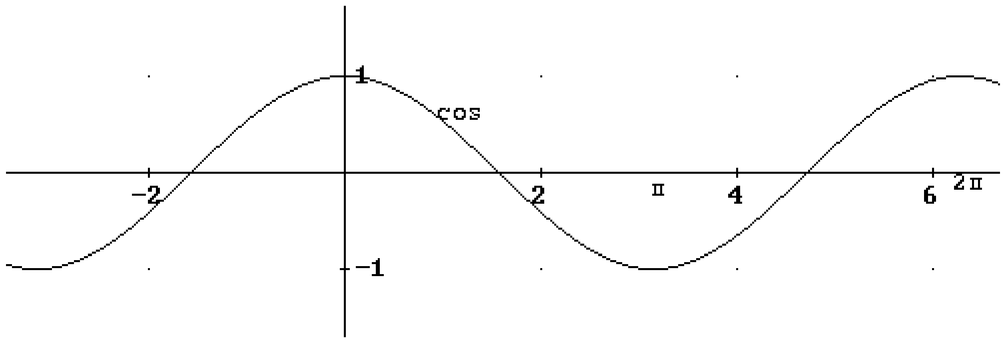
es acotada, par y periódica de periodo 2π

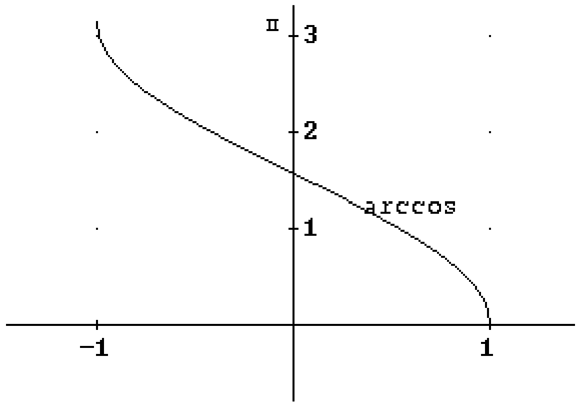
$f(x) = \arccos(x)$

Para definir la función inversa nos restringimos a un dominio donde la función coseno sea inyectiva, $[0\,,\pi] \to R$

Para cada $x \in [-1\,,1]$ se define $\arccos(x)$ como el único $y \in [0\,,\pi]$ tal que $\cos(y) = x$

$Dom = [-1\,,1]$ $\quad \mathrm{Im} = [0\,,\pi]$ $\quad$ es acotada y decreciente





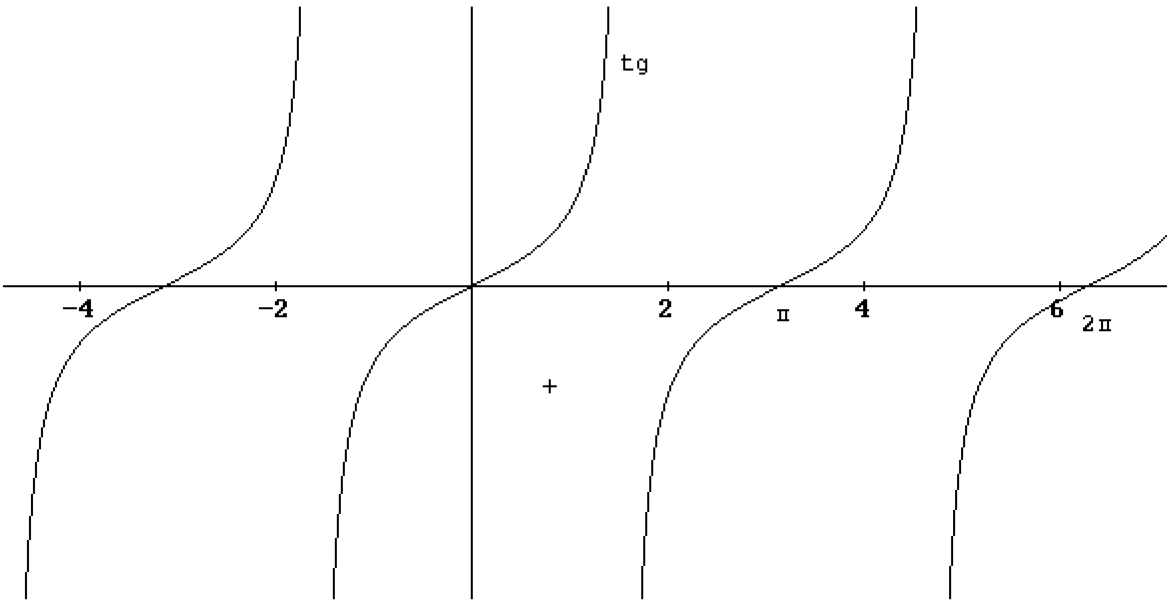
$$f(x) = tg(x) = \frac{sen(x)}{\cos(x)}$$

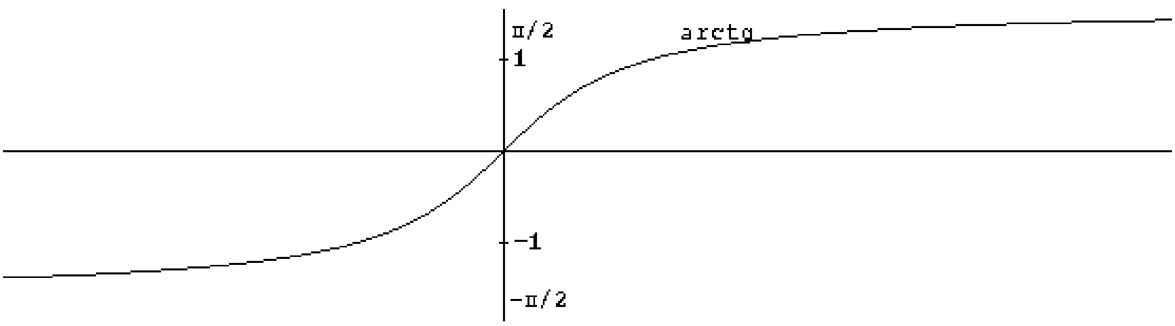
$$Dom\ f = \left\{ x \in \mathrm{R}\ /\ x \neq (2k-1)\frac{\pi}{2},\ \ k \in Z \right\} \qquad \mathrm{Im}\, f = R$$

No es acotada en su dominio. Es impar y periódica de periodo π

Para cada número real x se define $arctg(x)$ como el único $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ tal que $tg(y) = x$

$Dom = R$ $\qquad \mathrm{Im} = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ $\qquad$ es acotada, creciente e impar





$f(x)=\cot g(x)=\frac{\cos(x)}{sen(x)}=\frac{1}{tg(x)}$ $\qquad f(x)=\sec(x)=\frac{1}{\cos(x)}$ $\qquad f(x)=\cos ec(x)=\frac{1}{sen(x)}$

Se verifica:

$sen^2(x)+\cos^2(x)=1 \qquad sen(2x)=2sen(x)\cos(x) \qquad \cos(2x)=\cos^2(x)-sen^2(x)$

$sen^2(x)=\frac{1-\cos(2x)}{2} \qquad \cos^2(x)=\frac{1+\cos(2x)}{2}$

$\sec^2(x)=1+tg^2(x) \qquad \cos ec^2(x)=1+\cot g^2(x)$

$$\cos(x)=sen\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=sen\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$

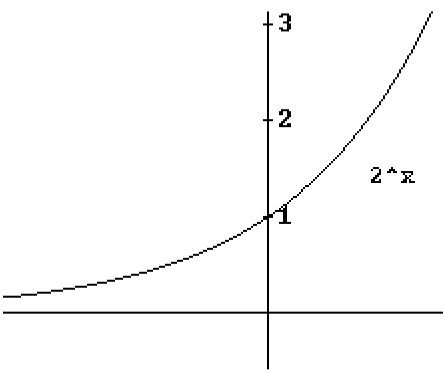
Función exponencial.

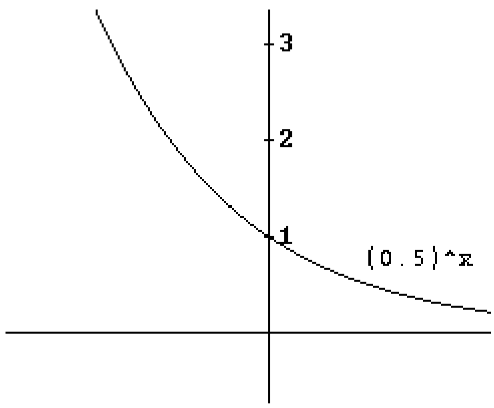
$f(x)=a^x \ , \quad a>0$

$Dom=R \qquad \mathrm{Im}=(0,\infty)$ si $a\neq 1$, $\mathrm{Im}=\{1\}$ si $a=1$

Es estrictamente creciente si $a>1$ y estrictamente decreciente si $0<a<1$

$a^0=1 \qquad a^x a^y=a^{x+y} \quad \forall x,y\in R \qquad a^{-x}=\frac{1}{a^x} \quad \forall x\in R$





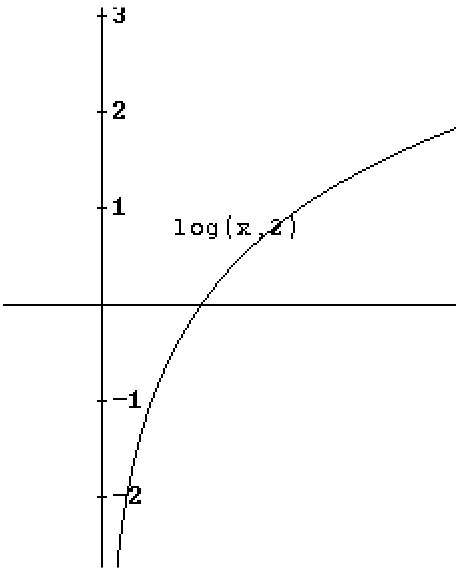
Manuel José Fernández, mjfg@uniovi.es

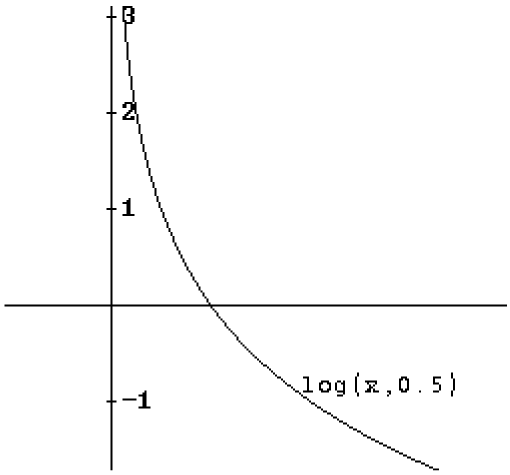
Función logarítmica.

Se llama función logarítmica de base $a > 0$ $(a \neq 1)$, $f(x) = \log_a(x)$, a la inversa de la función exponencial.

$Dom = (0, \infty)$ $\quad\quad$ $\text{Im} = R$

Es estrictamente creciente si $a > 1$ y estrictamente decreciente si $0 < a < 1$.





Si $a = e$, el logaritmo se llama neperiano o natural y se representa $\log(x)$ ó $l_n(x)$. Si $a = 10$ se llama decimal.

Se verifica:

$\log_a(x) = \dfrac{\log(x)}{\log(a)}$ $\quad\quad$ $a^x = e^{x.\log(a)}$ $\quad\quad$ $\log_a(1) = 0$ $\quad\quad$ $\log_a(x^n) = n.\log_a(x)$

$\log_a(x.y) = \log_a(x) + \log_a(y)$ $\quad\quad$ $\log_a(x / y) = \log_a(x) - \log_a(y)$