Tema 2. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES Y MATRICES

Arturo Santamaría

Grado en Ingeniería Informática del Software
Universidad de Oviedo. Departamento de Matemáticas

PRIMER SEMESTRE

Concepto de matriz

- **Matriz** de orden $m \times n$ con coeficientes en un cuerpo $\mathbb{K}$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{m \times n}$$

  donde $a_{ij} \in \mathbb{K}$, $\forall i = 1, ..., m, \ \forall j = 1, ..., n.$
- $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$: conjunto de todas las matrices de orden $m \times n$ con coeficientes en $\mathbb{K}$. Se denota $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- **Igualdad entre matrices**
  $A = B$ si, y sólo si, tienen el mismo orden y coinciden elemento a elemento.

Tipos de matrices

- **Matriz fila**: una sola fila.
- **Matriz columna**: una sola columna.
- **Matriz nula**: todos sus elementos nulos. Se denota $0_{m \times n}$.
- **Matriz escalonada**: cada una de sus filas comienza con una sucesión de ceros que tiene, al menos, un cero más que la de la fila anterior. El primer elemento no nulo de cada fila se llama pivote. Las filas de ceros, caso de existir, ocupan los últimos lugares.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- **Matriz escalonada reducida**: además de ser escalonada:
  - ∗ Todos sus pivotes son 1.
  - ∗ En las columnas en las que están cada uno de los pivotes, todos los elementos (salvo el pivote) son nulos.
- **Matriz cuadrada**: tiene igual número de filas y columnas $(m = n)$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}_{n \times n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

Matrices cuadradas

- Dentro de las matrices cuadradas:
  - **Diagonal principal**: elementos que tienen igual subíndice de fila y de columna, es decir:
  $$\{a_{ii} \;/\; i = 1, ..., n\}$$
  - **Traza de una matriz**: suma de los elementos de su diagonal principal.
  - **Matriz triangular inferior**: todos sus elementos situados por encima de la diagonal principal son nulos.
  - **Matriz triangular superior**: todos sus elementos situados por debajo de la diagonal principal son nulos.
  - **Matriz diagonal**: todos sus elementos salvo, acaso, los de la diagonal principal son nulos.
  - **Matriz unidad**: matriz diagonal cuya diagonal principal está formada exclusivamente por unos. Se designa I_n a la de orden n.

Suma

Dadas dos matrices $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, su suma se realiza elemento a elemento, es decir:

$$A+B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

Propiedades de la suma

(1) $A+B = B+A, \quad \forall A,\, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}).$

(2) $A+(B+C) = (A+B)+C, \quad \forall A,\, B,\, C \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}).$

(3) $A+0_{m\times n} = A, \quad \forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}).$

(4) $\forall A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$:
$\exists\ -A = (-a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) \;/\; A+(-A) = 0_{m\times n}.$

Producto por un escalar

Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ y un escalar $\lambda \in \mathbb{K}$, se define la matriz $\lambda \cdot A$ multiplicando todos los elementos de A por λ, es decir:

$$\lambda \cdot A = \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda\cdot a_{11} & \lambda\cdot a_{12} & \dots & \lambda\cdot a_{1n} \\ \lambda\cdot a_{21} & \lambda\cdot a_{22} & \dots & \lambda\cdot a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda\cdot a_{m1} & \lambda\cdot a_{m2} & \dots & \lambda\cdot a_{mn} \end{pmatrix}$$

Propiedades del producto por un escalar

(1) $\lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall A,\ B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}).$

(2) $(\lambda + \mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A, \quad \forall \lambda,\ \mu \in \mathbb{K},\ \forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}).$

(3) $\lambda \cdot (\mu \cdot A) = (\lambda \cdot \mu) \cdot A, \quad \forall \lambda,\ \mu \in \mathbb{K},\ \forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}).$

(4) $1_{\mathbb{K}} \cdot A = A, \quad \forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}).$

Producto de matrices

Se define el producto de dos matrices $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ y $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$, de manera que:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2j} & \dots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nj} & \dots & b_{np} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mp} \end{pmatrix} = (c_{ij}) = C \in \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{K})$$

siendo:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}\ , \quad \forall i = 1, ..., m;\ \forall j = 1, ..., p.$$

El elemento (i,j) de la matriz $C = A \cdot B$ se obtiene multiplicando elemento a elemento la fila i-ésima de A por la columna j-ésima de B y sumando todos esos productos.

Propiedades del producto de matrices

(1) $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C,$
$\forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}),\ \forall B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K}),\ \forall C \in \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{K}).$

(2) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C,$
$\forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}),\ \forall B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K}),\ \forall C \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K}).$

(3) $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C,$
$\forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}),\ \forall B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}),\ \forall C \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K}).$

(4) En general, $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Potencia de matrices cuadradas

Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, se define su potencia k-ésima como:

$$A^k = A \cdot \cdots \cdot A \quad (k \; veces)$$

Trasposición de matrices

Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Su matriz traspuesta es la matriz de $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ cuyas filas son las columnas de A, y se denota A^t.

El elemento (i,j) de A^t es el (j,i) de A, $\forall i,j = 1,...,n$.

- $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ es simétrica $\iff A^t = A \iff$ $\iff a_{ij} = a_{ji} \quad \forall i,j = 1,...,n.$
- $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ es antisimétrica $\iff A^t = -A \iff$ $\iff a_{ij} = -a_{ji} \quad \forall i,j = 1,...,n.$

Propiedades de la trasposición de matrices

(1) $(A^t)^t = A, \quad \forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}).$

(2) $(\lambda \cdot A)^t = \lambda \cdot A^t, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}).$

(3) $(A+B)^t = A^t + B^t, \quad \forall A,\ B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}).$

(4) $(AB)^t = B^t A^t, \quad \forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}),\ \forall B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K}).$

Ejemplo 2.1

Se consideran las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcular, si es posible, $B + C,\ A \cdot B,\ B \cdot A,\ A^t$ y B^t.

Inversa de una matriz

Se dice que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ es **invertible**, **regular** o **no singular** si existe otra matriz, que denotaremos, $A^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tal que:

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I_n$$

Diremos que A^{-1} es la **matriz inversa** de A.

$\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$: conjunto de las matrices invertibles de orden n.

Propiedades de la matriz inversa

(1) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}, \quad \forall A, B \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$.

(2) $(A^{-1})^{-1} = A, \quad \forall A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$.

(3) $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t, \quad \forall A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$.

(4) $I_n^{-1} = I_n$.

Cálculo de la matriz inversa

Dada una matriz $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$, el cálculo de su matriz inversa es un proceso que requiere de un elevado número de operaciones. Se trata de resolver la ecuación matricial:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix} = I_n$$

que equivale a un sistema de n^2 ecuaciones con n^2 incógnitas (los n^2 elementos de A^{-1}):

Una alternativa inteligente es la basada en considerar que nuestras incógnitas son, en vez de los elementos de la matriz A^{-1}, sus filas. De esta forma:

$$A \cdot A^{-1} = I_n \iff \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \overline{f}_1 \\ \overline{f}_2 \\ \vdots \\ \overline{f}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{e}_1 \\ \overline{e}_2 \\ \vdots \\ \overline{e}_n \end{pmatrix}$$

donde $\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n,$ son las filas de la matriz I_n.

De este modo, pasamos de resolver un sistema de n^2 ecuaciones con n^2 incógnitas, a otro con n ecuaciones y n incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}\overline{f}_1 + a_{12}\overline{f}_2 + \cdots + a_{1n}\overline{f}_n = \overline{e}_1 \\ a_{21}\overline{f}_1 + a_{22}\overline{f}_2 + \cdots + a_{2n}\overline{f}_n = \overline{e}_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}\overline{f}_1 + a_{n2}\overline{f}_2 + \cdots + a_{nn}\overline{f}_n = \overline{e}_n \end{cases}$$

de donde se pueden obtener las filas de A^{-1}, $\overline{f}_1, \overline{f}_2, ..., \overline{f}_n$, en función de $\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n$.

Ejemplo 2.2

Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

demostrar que son inversa una de otra:

- mediante la definición de matriz inversa.
- calculando la matriz inversa de A.

Operaciones elementales

Llamamos **operaciones elementales** realizadas sobre las filas de una matriz a las siguientes:

- Cambiar el orden de las filas.
- Multiplicar todos los elementos de una de las filas por un escalar no nulo.
- Sumar a una de las filas otra cualquiera de ellas, elemento a elemento.
- La que resulte de la aplicación reiterada de las anteriores operaciones.

Rango de una matriz

Toda matriz se puede transformar, mediante operaciones elementales, en una matriz escalonada.
Todas las matrices escalonadas, obtenidas así a partir de una dada, tienen el mismo número de filas no nulas.

- Se llama **rango** de una matriz A, y se denota $rg(A)$, al número de filas no nulas que tiene una matriz escalonada obtenida a partir de A mediante operaciones elementales.
- **Teorema del rango**:
  El rango de una matriz coincide con el de su traspuesta.
- $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ es invertible si, y solo si, $rg(A) = n$.

Ejemplo 2.3

Determinar el rango de la matriz:

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Concepto de determinante

El determinante se puede considerar como una aplicación definida sobre $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$\begin{array}{rccc} det & : & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & & A & \hookrightarrow & det(A) = |A| \end{array}$$

- Se denomina **menor** (i, j) de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, digamos M_{ij}, al determinante de la matriz de orden $n-1$ resultante de eliminar en A la fila i-ésima y la columna j-ésima.
- Se denomina **adjunto** (i, j) de A, digamos A_{ij}, a:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}\,, \qquad \forall i, j = 1, ..., n.$$

- Se llama **matriz adjunta** de A, a aquella cuyos elementos son los adjuntos de la matriz A. Se denota A^+ ó adj(A).

Determinante de una matriz:

(1) Si $A \in \mathcal{M}_1(\mathbb{K})$, digamos $A = (a)$, entonces:

$$det(A) = a$$

(2) Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, con $n > 1$, entonces:

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} A_{1j} = a_{11} A_{11} + \cdots + a_{1n} A_{1n}$$

La anterior expresión de $det(A)$ es conocida como el desarrollo del determinante de A por los adjuntos de su primera fila.

Casos particulares

- Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$:

$$\begin{aligned} det(A) &= |A| = \sum_{j=1}^{2} a_{1j} A_{1j} = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} = \\ &= a_{11} M_{11} + a_{12}(-M_{12}) = a_{11} M_{11} - a_{12} M_{12} = \\ &= a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} \end{aligned}$$

- Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$:

$$det(A) = |A| = \sum_{j=1}^{3} a_{1j}A_{1j} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} =$$

$$= a_{11}M_{11} + a_{12}(-M_{12}) + a_{13}M_{13} =$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}) =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

- El determinante de una matriz triangular (en particular si es diagonal) es igual al producto de los elementos de la diagonal principal.
- El determinante de una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ puede calcularse mediante su desarrollo por los adjuntos de cualquiera de sus filas o columnas. Esto es:

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \qquad \forall i, j = 1, 2, ..., n$$

Propiedades de los determinantes

- El determinante de una matriz coincide con el de su traspuesta.
  (por ello, las propiedades posteriores son válidas tanto para las columnas como para las filas de un determinante)
- Al intercambiar dos columnas en un determinante, éste cambia de signo.
- El valor de un determinante con dos columnas iguales es cero.
- Si todos los elementos de una columna de un determinante se multiplican por un escalar, el valor del determinante queda multiplicado por dicho valor.
- Si un determinante tiene una columna con todos sus elementos nulos, vale cero.

- Si una columna de un determinante es combinación lineal de las demás, el determinante vale cero.
- Si a una columna se le suma una combinación lineal de las otras, el valor del determinante no varía.
- El determinante del producto de dos matrices es igual al producto de sus determinantes.
- Caracterización de matriz invertible:

$$A \text{ es regular} \iff det(A) \neq 0$$

Cálculo efectivo de determinantes

- Para determinantes de orden superior a tres, el método más aconsejable se basa en la aplicación de operaciones elementales a las filas y columnas que transformen el determinante en otro de cálculo más sencillo.
- En general, se intentará llegar a un determinante que en una de sus filas o columnas tenga todos (o casi todos) los elementos nulos salvo uno para, posteriormente, desarrollar el determinante por los adjuntos de dicha línea. Esto permite reducir la complejidad del problema, en cuanto al orden del determinante a calcular.
- Otra opción es, por ejemplo, llegar a obtener el determinante de una matriz triangular.

Ejemplo 2.4

Calcular:

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

Aplicación al cálculo de la matriz inversa

- Sea $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$. Entonces: $A^{-1} = \dfrac{(adj(A))^t}{det(A)}$.

NOTA:

Aplicarlo a la matriz A del ejemplo 2.2 .

Concepto de sistema de ecuaciones lineales

- Se denomina sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas a:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

donde $a_{ij}, b_i \in \mathbb{K}, \ \forall i = 1, \ldots, m; \ \forall j = 1, \ldots, n.$

- $x_1, x_2, ..., x_n$ reciben el nombre de **incógnitas** del sistema.
- a_{ij} son los **coeficientes**.
- $b_1, b_2, ..., b_m$ son los **términos independientes**.
- **Resolver** un sistema es encontrar todas las posibles elecciones de $x_1, x_2, ..., x_n$ que verifican las m ecuaciones simultáneamente.
- Un sistema se dice **incompatible** si no admite ninguna solución y **compatible** si tiene alguna solución.
- Un sistema es **compatible determinado ó de Cramer** si tiene una única solución y **compatible indeterminado** si tiene más de una solución (entonces tendrá infinitas).
- Un sistema **homogéneo** es aquel cuyos términos independientes son todos nulos.

Interpretación matricial

El sistema anterior puede escribirse matricialmente:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \iff AX = b$$

donde $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, $X \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$ y $B \in \mathcal{M}_{m\times 1}(\mathbb{K})$.

Matriz de coeficientes y matriz ampliada

- La matriz A se denomina **matriz de coeficientes** del sistema.
- La matriz $$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

  se llama **matriz ampliada** del sistema.

Teorema de Rouche-Frobenius

- Si $rg(A) = r = rg(A|B)$, el sistema es compatible. En este caso:
  - Si $rg(A) = r = rg(A|B) = n$, el sistema es compatible determinado.
  - Si $rg(A) = r = rg(A|B) < n$, el sistema es compatible indeterminado (existen infinitas soluciones dependientes de $n - r$ parámetros).
- Si $rg(A) \neq rg(A|B)$, el sistema es incompatible.

- Si A es una matriz cuadrada regular, el sistema $Ax = b$ es compatible determinado y además:

$$AX = b \implies A^{-1}AX = A^{-1}b \implies X = A^{-1}b$$

- Toda solución de un sistema de ecuaciones lineales compatible $Ax = b$ se puede expresar como suma de una solución cualquiera del mismo y una cierta solución del sistema homogéneo asociado $Ax = 0$.

Sistemas equivalentes

- Dos sistemas de ecuaciones se dicen **equivalentes** si tienen las mismas soluciones.
- Si la matriz ampliada de una sistema se ha obtenido realizando operaciones elementales sobre las filas de la matriz ampliada de otro, entonces ambos sistemas son equivalentes.

Resolución de sistemas

- El **método de Gauss** se basa en realizar operaciones elementales sobre las filas de la matriz ampliada del sistema hasta llegar a obtener una matriz escalonada, que representará la matriz ampliada de otro sistema equivalente al de partida. El carácter de dicho sistema es inmediato verificar y resulta sencillo obtener explícitamente sus soluciones, caso de que tenerlas.
- El **método de Gauss-Jordan** es una variante del anterior con especial interés en sistemas de Cramer. En este caso, el proceso transforma, análogamente, la matriz ampliada de manera que en la parte correspondiente a la matriz de coeficientes nos quede la matriz unidad. Es la llamada **reducida de Gauss–Jordan**.

Ejemplo 2.5

Resolver el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & 2y & + & z & = & 1 \\ 5x & + & 3y & + & 3z & = & 1 \\ x & + & y & - & z & = & 1 \end{array}\right.$$

mediante el método de Gauss.

Resolución simultánea de sistemas

Consideremos dos sistemas de ecuaciones (análogamente si son más de dos) que sólo difieran en sus términos independientes, digamos:

$$(1)\quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b'_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b'_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b'_n \end{cases}$$

MATRICES
DETERMINANTES
SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES
Concepto de sistema de ecuaciones lineales
Interpretación matricial
Resolución de sistemas. Método de Gauss.
Resolución simultánea de sistemas. Cálculo de la matriz inversa.
Aplicación de los determinantes.

Resolución simultánea de sistemas

Aplicando Gauss–Jordan a la matriz:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|cc} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 & b'_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 & b'_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & b_n & b'_n \end{array}\right)$$

obtendremos una matriz reducida de Gauss–Jordan:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & \ldots & 0 & z_1 & z'_1 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & z_2 & z'_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & z_n & z'_n \end{array}\right)$$

siendo $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ y $(z'_1, z'_2, \ldots, z'_n)$ las soluciones buscadas.

MATRICES
DETERMINANTES
SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES
Concepto de sistema de ecuaciones lineales
Interpretación matricial
Resolución de sistemas. Método de Gauss.
Resolución simultánea de sistemas. Cálculo de la matriz inversa.
Aplicación de los determinantes.

Cálculo de la matriz inversa

Vamos a aplicar el método anterior al cálculo de la inversa de una matriz. Dada una matriz $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$, se tiene que:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \ldots & x_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} = I_n$$

MATRICES
DETERMINANTES
SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES
Concepto de sistema de ecuaciones lineales
Interpretación matricial
Resolución de sistemas. Método de Gauss.
Resolución simultánea de sistemas. Cálculo de la matriz inversa.
Aplicación de los determinantes.

Cálculo de la matriz inversa

Igualando elemento a elemento en la ecuación anterior, se llegamos a n sistemas de ecuaciones lineales con n incógnitas de la forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_{11} + \cdots + a_{1n}x_{n1} = 1 \\ a_{21}x_{11} + \cdots + a_{2n}x_{n1} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_{11} + \cdots + a_{nn}x_{n1} = 0 \end{cases} \qquad \vdots$$

$$\begin{cases} a_{11}x_{12} + \cdots + a_{1n}x_{n2} = 0 \\ a_{21}x_{12} + \cdots + a_{2n}x_{n2} = 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_{12} + \cdots + a_{nn}x_{n2} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_{11}x_{1n} + \cdots + a_{1n}x_{nn} = 0 \\ a_{21}x_{1n} + \cdots + a_{2n}x_{nn} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_{1n} + \cdots + a_{nn}x_{nn} = 1 \end{cases}$$

$$\vdots$$

Cálculo de la matriz inversa

Todos esos sistemas tienen en común la matriz de coeficientes. Podemos, por tanto, resolverlos de forma simultánea mediante la reducida de Gauss–Jordan de la matriz:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right)$$

Cálculo de la matriz inversa

Al finalizar el proceso, obtendremos una matriz:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \dots & 0 & x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{array}\right)$$

donde:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2.6

Determinar la inversa de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

por medio del método de Gauss-Jordan.

Aplicación de los determinantes a la resolución de sistemas de Cramer

Dado un sistema de Cramer $AX = b$ de n de ecuaciones lineales con n incógnitas, consideremos:

- Δ: determinante de A.
- Δ_i: determinante de la matriz que resulta de sustituir en A, la columna i-ésima por b.
- $x_1, \dots, x_n$: soluciones del sistema.

En estas condiciones:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} \qquad \forall i = 1, 2, ..., n$$