Tema 1. NUMEROS REALES Y COMPLEJOS

Arturo Santamaría

Grado en Ingeniería Informática del Software
Universidad de Oviedo. Departamento de Matemáticas

PRIMER SEMESTRE

Leyes de composición

Dado un conjunto A, no vacío, se llama **ley de composición interna** en A a toda aplicación $*$, del tipo:

$$* : \begin{array}{ccc} A \times A & \longrightarrow & A \\ (x, y) & \to & x * y \end{array}$$

Dados tres conjuntos A, B y C, no vacíos, se llama **ley de composición externa** a toda aplicación $\diamond$, del tipo:

$$\diamond : \begin{array}{ccc} A \times B & \longrightarrow & C \\ (x, y) & \to & x \diamond y \end{array}$$

- La suma y el producto de números naturales son leyes de composición interna.
- No lo es el cociente de números naturales.

- Dentro de las leyes de composición externa, tienen especial interés las del tipo $A \times A \longrightarrow B$ y las del tipo $A \times B \longrightarrow B$.
- Son leyes de composición externa:
  - $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (x, z) & \to & x \cdot z \end{array}$
  - El producto de un escalar por un vector.

Grupo

Sea G un conjunto no vacío dotado de una ley de composición interna $*$. Se dice que $(G, *)$ tiene una estructura algebraica de **grupo** si verifica las siguientes propiedades:

- **Asociativa**: $a * (b * c) = (a * b) * c, \quad \forall a, b, c \in G$
- **Elemento neutro**: $\exists e \in G \ / \ a * e = e * a = a, \quad \forall a \in G$
- **Elemento simétrico**: $\forall a \in G, \ \exists a' \in G \ / \ a * a' = a' * a = e$

Si, además, se verifica la propiedad **conmutativa**, es decir $a * b = b * a, \quad \forall a, b \in G$, entonces diremos que se trata de un **grupo conmutativo o abeliano**.

- Tienen estructura de grupo: $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$, etc.

Cuerpo

Sea $\mathbb{K}$ un conjunto no vacío dotado de dos leyes de composición interna $*$ y $\diamond$. Se dice que $(\mathbb{K}, *, \diamond)$ tiene una estructura algebraica de **cuerpo** si verifica las siguientes propiedades:

- $(\mathbb{K}, *)$ tiene estructura de grupo conmutativo.
- $(\mathbb{K} \setminus \{e\}, \diamond)$ tiene estructura de grupo conmutativo. (siendo e el elemento neutro de $(\mathbb{K}, *)$)
- La segunda ley es distributiva respecto de la primera:
$$(a * b) \diamond c = (a \diamond c) * (b \diamond c), \quad \forall a, b, c \in \mathbb{K}$$
- Son ejemplos de cuerpo $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ y $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.

Definición

Consideremos el conjunto $\mathbb{R}^2$ dotado de las siguientes leyes de composición internas (que denominaremos suma y producto):

- $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d), \quad \forall a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{R}.$
- $(a, b) \cdot (c, d) = (a \cdot c - b \cdot d, a \cdot d + b \cdot c), \quad \forall a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{R}.$

A la estructura así definida, la denominaremos el conjunto de los **números complejos** y la denotaremos por $\mathbb{C}$.

$(\mathbb{C}, +, \cdot)$ tiene una estructura de cuerpo.

Extensión de los números reales

Podemos considerar $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

El conjunto $\mathbb{R} \times \{0\}$, con las dos leyes de composición anteriores, es un subconjunto de $\mathbb{C}$ que podemos identificar con $\mathbb{R}$, de manera que dichas operaciones se corresponden con la suma y el producto ordinarios en $\mathbb{R}$.

Forma binómica

- Se llama **unidad imaginaria**, y la denotaremos por **i**, al número complejo $i = (0, 1)$.
- Podemos expresar un número complejo:
$$(a, b) = (a, 0) + (b, 0)(0, 1)$$
lo que se suele escribir como:
$$(a, b) = a + bi, \quad \forall a,\ b \in \mathbb{R}$$
Esta forma de representar los números complejos se denomina **forma binómica**.

- Obsérvese que $i^2 = i \cdot i = (0,1)\cdot(0,1) = (-1,0)$, que en forma binomica sería $i^2 = -1$. Esta propiedad de que su cuadrado sea -1 no la satisface ningún número real y, gracias a ella, en $\mathbb{C}$ se pueden calcular raíces cuadradas de números negativos.
- Las potencias de **i** se van repitiendo de forma cíclica:

$i^0 = 1$	$i^4 = i^3 \cdot i = -i^2 = 1$
$i^1 = i$	$i^5 = i^4 \cdot i = i$
$i^2 = i \cdot i = -1$	$i^6 = i^5 \cdot i = i^2 = -1$
$i^3 = i^2 \cdot i = -i$	$i^7 = i^6 \cdot i = -i \quad \ldots$

Operaciones en forma binómica

Para cualesquiera $z = x + yi,\ z' = a + bi \in \mathbb{C}$ se verifica:

- **Suma**:

$$z + z' = (x+yi) + (a+bi) = (x+a) + (y+b)i$$

- **Producto**:

$$z \cdot z' = (x+yi)\cdot(a+bi) = xa + xbi + yai + ybi^2 = (xa - yb) + (xb + ya)i$$

- **Cociente**:

$$\frac{z}{z'} = \frac{x+yi}{a+bi} = \frac{(x+yi)\cdot(a-bi)}{(a+bi)\cdot(a-bi)} = \frac{xa+yb}{a^2+b^2} + \frac{ya-xb}{a^2+b^2}i$$

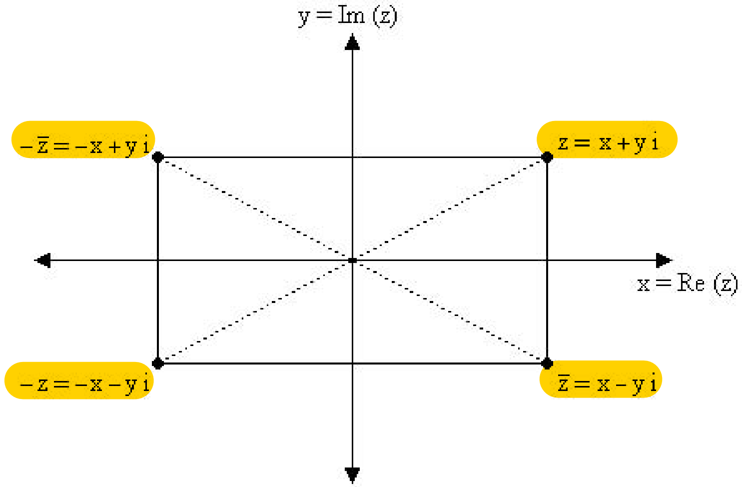
Ejemplo 3.1

- Dados $z_1 = 5 + 3i$, $z_2 = 2 - i$, determinar:
  - $z_1 + z_2$.
  - $z_1 - z_2$.
  - $z_1 \cdot z_2$.
  - $\dfrac{z_1}{z_2}$.
- Calcular $Im(1 + (3\,i)\,i)$.
- Obtener $Re(\,(1-i)\,(2+3\,i)\,(1+i)\,)$.

El plano complejo

- Dado $z = a + bi \in \mathbb{C}$, diremos que a es su **parte real**, $Re(z) = a$, y que b es su **parte imaginaria**, $Im(z) = b$.
- El par (a, b) se llama **afijo** de z. Utilizaremos los afijos de los números complejos para representarlos gráficamente en el **plano complejo**, de manera que el eje de abscisas se llama **eje real** y el de ordenadas **eje imaginario**.

El plano complejo



Conjugación

Se llama **conjugado** de $z = a + bi$ al número complejo $\overline{z} = a - bi$. Gráficamente, el afijo de $\overline{z} = a - bi$ es el simétrico del de z respecto del eje real.

Propiedades

Para cualesquiera $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ se verifica:

- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.
- $\overline{\overline{z}} = z$
- $z = \overline{z} \iff z \in \mathbb{R}$
- $Re(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$; $Im(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$

Módulo y argumento

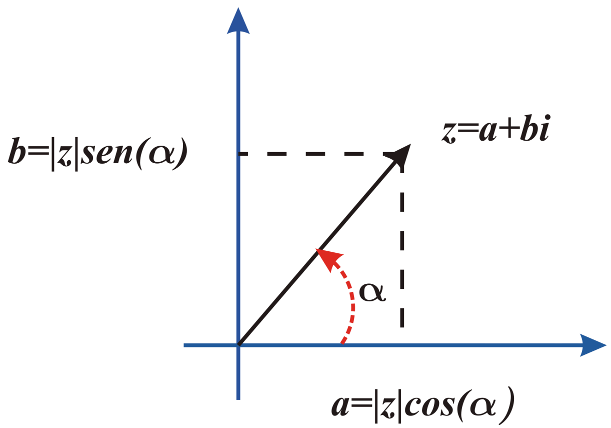
- Se denomina **módulo** de $z = a + bi \in \mathbb{C}$ al número real no negativo:
$$|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$$
- Se llama **argumento principal** de un complejo no nulo $z = a + bi \in \mathbb{C}$ al único número real $\alpha \in (-\pi, \pi]$ tal que:

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{Re(z)}{|z|} \quad y \quad \operatorname{sen}\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{Im(z)}{|z|}$$

Se llama, en general, **argumento** de z a cualquier ángulo de la forma $\alpha + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.

Lo denotaremos $Arg(z) = \alpha$.

Gráficamente:



Formas trigonométrica y módulo-argumental

Dado un número complejo $z \in \mathbb{C}$, tal que $r = |z|$ y $\theta = Arg(z)$ se consideran:

- **Forma trigonométrica**:

$$z = r\cos\theta + (r\,\mathrm{sen}\,\theta)i = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$$

- **Forma polar o módulo-argumental**:

$$z = r_\theta$$

Trabajando en forma módulo-argumental:

$$r_\theta = r'_{\theta'} \quad \Longleftrightarrow \quad r = r' \quad \text{y} \quad \theta - \theta' = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Sean $z = r_\theta = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$ y $z' = r'_{\theta'} = r'(\cos\theta' + i\,\mathrm{sen}\,\theta')$.

Entonces:

$$z \cdot z' = rr'_{(\theta+\theta')} = rr'(\cos(\theta+\theta') + i\,\mathrm{sen}(\theta+\theta'))$$

$$\frac{z}{z'} = \left(\frac{r}{r'}\right)_{(\theta-\theta')} = \frac{r}{r'}(\cos(\theta-\theta') + i\,\mathrm{sen}(\theta-\theta'))$$

Ejemplo 3.2

- Representar en el plano complejo el conjunto:

$$\{z \in \mathbb{C} \;/\; |z - i| = |z + i|\}$$

- Escribir en forma módulo-argumental los siguientes números complejos:
  - 3.
  - -2.
  - $-7i$.
  - $1 - i$.
  - $1 + \sqrt{3}\,i$.
  - $-1 + \sqrt{3}\,i$.

Potencia entera

Sea $z = r_\theta = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta) \in \mathbb{C}$.

- $z^n = (r^n)_{n\theta} = r^n(\cos n\theta + i\,\mathrm{sen}\,n\theta) \quad (n \in \mathbb{Z})$
- **Fórmula de De Moivre**:

$$(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)^n = \cos n\theta + i\,\mathrm{sen}\,n\theta \quad (n \in \mathbb{Z})$$

Exponencial compleja

- Dado $z = a + bi \in \mathbb{C}$, se define su exponencial compleja:

$$e^z = e^{a+bi} = e^a(\cos b + i \operatorname{sen} b) = (e^a)_b$$

donde e^a es la exponencial real actuando sobre a.
  - $|e^z| = e^a$.
  - $Arg(e^z) = b$.
- **Fórmula de Euler**:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta \quad (\theta \in \mathbb{R})$$

- **Forma exponencial**:
Sea $z = r_\theta \in \mathbb{C}$. Entonces:

$$z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) = r \cdot e^{i\theta}$$

Raíz n-ésima

Dados $z = r_\theta \in \mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{N}$, se llama **raíz n-ésima** de z a todo $w \in \mathbb{C}$ tal que $w^n = z$. Dichos números complejos son:

$$w = \sqrt[n]{r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)} =$$

$$= \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right), \text{ para } k = 0, 1, \ldots, n-1$$

Geométricamente, los afijos de las n raíces n-ésimas de z son los vértices de un polígono regular de n lados inscrito en la circunferencia de centro el origen y radio $\sqrt[n]{r}$.

Ejemplo 3.3

Calcular:

- $(-1 + \sqrt{3}\, i)^4$.
- $\sqrt[3]{\left(\frac{-8\sqrt{2}\, i}{-1+i}\right)^2}$.

Ejemplo 3.4

Representación gráfica de las raíces octavas de $i = 1_{\frac{\pi}{2}}$:

- $z_1 = 1_{\frac{\pi}{16}}$.
- $z_2 = 1_{\frac{5\pi}{16}}$.
- $z_3 = 1_{\frac{9\pi}{16}}$.
- $z_4 = 1_{\frac{13\pi}{16}}$.
- $z_5 = 1_{\frac{17\pi}{16}}$.
- $z_6 = 1_{\frac{21\pi}{16}}$.
- $z_7 = 1_{\frac{25\pi}{16}}$.
- $z_8 = 1_{\frac{29\pi}{16}}$.