Manuel José Fernández, mjfg@uniovi.es

CALCULO
GRADO EN INGEN. INFORM. DEL SOFTWARE. 2020-21
TEMA 1. FUNCIONES REALES DE UNA VARIABLE REAL

1.4: Continuidad de funciones.

Funciones contínuas. Tipos de discontinuidades.

Sea $f : D \subset R \to R$ y c punto de acumulación de D. f es continua en $c \Leftrightarrow$:

1) $c \in D$, es decir, f está definida en c.
2) $\exists \lim\limits_{x\to c} f(x) \in R$
3) $\lim\limits_{x\to c} f(x) = f(c)$

Si no se verifica alguna de estas condiciones se dice que f es discontinua en c.

Se dice que f presenta una *discontinuidad evitable* en el punto c si $\exists \lim\limits_{x\to c} f(x) \in R$, pero es distinto de $f(c)$ ó la función no está definida en c.

Ejemplos.

$$f(x) = \begin{cases} sen(x) - 1 & \text{si } x < 0 \\ x - 1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} sen(x) - 1 & \text{si } x < 0 \\ x - 1 & \text{si } x > 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Se dice que f presenta una *discontinuidad esencial* en el punto c si $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ no existe como número real.

Es de *primera especie de salto finito* en el punto c si $\exists \lim\limits_{x\to c^-} f(x) \in R$ y $\exists \lim\limits_{x\to c^+} f(x) \in R$ pero ambos límites son distintos.

Ejemplo.

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & \text{si } x < 0 \\ sen(x)/x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Es de *primera especie de salto infinito* en el punto c si uno de los límites laterales es $+\infty$ ó $-\infty$ siendo el otro límite lateral un número real ó $+\infty$ ó $-\infty$.

Ejemplo.

$$f(x) = \begin{cases} 1/x & \text{si } x < 0 \\ sen(x)/x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Es *esencial de segunda especie* en el punto c si uno de los límites laterales, al menos, no existe (no es un número real, ni $+\infty$, ni $-\infty$).

Ejemplo.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ sen(1/x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Ejercicio.

Estudiar el tipo de discontinuidad en el punto 0 de la función $f(x) = \dfrac{e^{1/x}}{1+e^{1/x}}$

Solución:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \frac{0}{1+0} = 0 \qquad \lim_{x \to 0} f(x) = \frac{\infty}{\infty} \quad \text{indeterminación}$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\dfrac{1}{e^{1/x}} + 1} = \frac{1}{0+1} = 1$$

es una discontinuidad esencial de primera especie de salto finito.

Continuidad lateral.

Sea $f : D \subset R \to R$ definida en las "proximidades" de un punto c (por la derecha). f es continua por la derecha en $c \Leftrightarrow$:

1) $c \in D$, es decir, f está definida en c.
2) $\exists \lim_{x \to c^+} f(x) \in R$
3) $\lim_{x \to c^+} f(x) = f(c)$

Análogamente se define la continuidad por la izquierda en c.

Si f está definida en las "proximidades" de un punto c, tanto a la izquierda como a la derecha de c, se verifica que f es continua en $c \Leftrightarrow f$ es continua por la derecha y por la izquierda en c.

Ejemplo:

$$f(x) = \frac{e^{1/x}}{1+e^{1/x}} \quad \text{si} \quad x \neq 0 \quad \text{y} \quad f(0) = 0$$

es continua por la izquierda en 0 pero no por la derecha (por lo visto en el ejercicio anterior).

f es continua en un intervalo abierto cuando es continua en todos los puntos de ese intervalo.

f es continua en un intervalo cerrado $[a\,,b] \Leftrightarrow :$ f es continua en todos los puntos del abierto $(a\,,b)$, es continua (por la derecha) en a y es continua (por la izquierda) en b.

Continuidad de las funciones elementales.

- La función potencial entera $f(x) = x^n$, $n = 0\,,1,\,2,...$ es continua en R.
- Las funciones polinómicas son continuas en R.
- Las funciones racionales son continuas en R excepto en los puntos que anulan al denominador.
- La función seno y la función coseno son continuas en R.
- La función tangente es continua en su dominio.
- La función exponencial es continua en R
- La función logarítmica es continua en su dominio.

Ejercicio.

Estudiar la continuidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x(x-1)} & x \in (0\,,1) \\ 0 & x = 0 \text{ ó } x = 1 \end{cases}$$

Propiedades de las funciones continuas.

* Si f y g son continuas en un punto c, entonces las funciones $f+g$, $f-g$ y fg son también continuas en c. Si, además, $g(c) \neq 0$ entonces f/g es también continua en c.

* Si g es continua en c y f es continua en $g(c)$ entonces $f \circ g$ es continua en c.

Ejercicios.

Estudiar la continuidad de la función $f(x) = \log(x^2)$

Estudiar la continuidad de la función $f(x) = x.e^{1/x}$ si $x \neq 0$ y $f(0) = 0$

Teorema de Bolzano.

Si f es continua en $[a\,,b]$ y $f(a).f(b) < 0$, es decir, f cambia de signo en los extremos del intervalo, se verifica que existe, al menos, un punto $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = 0$.

Se dice que c es un cero de f ó raíz de la ecuación $f(x) = 0 \Leftrightarrow :$ $f(c) = 0$

Ejercicios.

¿Se puede aplicar Bolzano a la función $f(x) = 1/x$ si $x \in (0\,,1]$, $f(0) = -1$, en $[0\,,1]$?

Demostrar que la ecuación $\dfrac{x}{2} - sen(x) = 0$ tiene, al menos, una raíz en el intervalo $\left(\dfrac{\pi}{2}\,,\pi\right)$.

*Teorema de Darboux (del valor intermedio)***.**

Sea f continua en $[a,b]$ y "d" un número comprendido entre $f(a)$ y $f(b)$. Entonces existe, al menos, un punto $c \in (a,b)$ tal que $f(c)=d$, es decir, f alcanza todos los valores comprendidos entre $f(a)$ y $f(b)$.

Teorema de la acotación.

Si f es continua en $[a,b] \Rightarrow f$ está acotada en $[a,b]$, es decir,

$$\exists K \in R^{+} \ / \ |f(x)| \leq K \quad \forall x \in [a,b].$$

*Teorema de Weierstrass***.**

Si f es continua en $[a,b]$, entonces f alcanza el máximo y el mínimo (absoluto) en dicho intervalo, es decir, existen x_1 , $x_2 \in [a,\mathrm{b}]$ tales que $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \quad \forall x \in [a,b]$. El mínimo sería $m = f(x_1)$ y el máximo $M = f(x_2)$