# PRÁCTICA Temas 3 y 4

Órdenes y funciones que pueden resultar de utilidad:

- `colspace(A)`. Proporciona, por columnas, una base del subespacio generado por los vectores columna de la matriz $A$. Si $f$ es una aplicación lineal, cuya matriz en una cierta base es $A$, el resultado, por columnas, es una base de la imagen de $f$. Dado que es una función simbólica, el argumento debe ser una variable simbólica.
- `inv(A)`. Calcula la inversa de una matriz regular $A$. Equivale al comando `A^(-1)`.
- `null(A)`. Proporciona, por columnas, una base del subespacio de soluciones del sistema homogéneo $AX = 0$. Si $f$ es una aplicación lineal, cuya matriz en una cierta base es $A$, el resultado es una base del núcleo de $f$.

  Es recomendable utilizar este comando con la matriz $A$ simbólica para que el resultado quede expresado con números enteros o fraccionarios.
- `rank(A)`. Calcula el rango de la matriz $A$.
- `rref(A)`. Proporciona una matriz escalonada reducida por filas de la matriz $A$.
- `sym(A)`. Convierte la matriz numérica $A$ en una matriz simbólica.
- `syms x y z ...` . Crea las variables simbólicas `x,y,z,...` .



# 1. Espacios vectoriales

### Ejercicio 1.1

*Se consideran en $\mathbb{R}^4$ los subespacios:*

$$U = \langle \vec{u}_1 = (1, -1, 0, 1),\ \vec{u}_2 = (-1, 0, 1, 0),\ \vec{u}_3 = (1, -2, 1, 2)\rangle$$

$$V = \{(x,\, y,\, z,\, t)\ /\ x + y + z = 0\,,\ x + 2z + t = 0\}$$

*(a) Calcular la dimensión y una base de $U$, $V$, $U+V$ y $U \cap V$.*

*(b) Determinar las coordenadas del vector $\vec{u} = (5, -4, -1, 4) \in U$ en la base de $U$ obtenida en el apartado anterior.*

*(c) Dar unas ecuaciones paramétricas de $U + V$ y $U \cap V$.*

**Solución***:*

*(a)*

1. *Construir una matriz* `U` *cuyos vectores fila sean $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ y $\vec{u}_3$. A partir de ella, por medio del comando* `rref`*, [1], obtener una matriz escalonada reducida. Almacenar las filas no nulas de la matriz resultante en* `BaseU`*. Sus vectores fila son una base de $U$.*

   *El comando* `rank` *aplicado a* `U` *o a* `BaseU` *nos permite conocer la dimensión de $U$.*

   *En este caso, como la dimensión de $U$ es 2, cualquier par de vectores no proporcionales de $U$, forman base de dicho subespacio, por ejemplo $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$.*
2. *Guardar en una variable* `CoefEcV` *la matriz del sistema homogéneo que forman las ecuaciones implícitas de $V$. Mediante la orden* `null`*, podemos obtener una matriz cuyas columnas forman una base de $V$. Almacenar en* `BaseV` *la traspuesta de dicha matriz. El comando* `rank` *aplicado a* `BaseV` *nos permite conocer la dimensión de $V$.*
3. *Almacenar, por filas, en una matriz* `Suma` *los vectores de las bases de $U$ y de $V$ obtenidas anteriormente. A partir de ella, mediante el comando* `rref`*, obtener una matriz escalonada reducida. Sus filas no nulas forman una matriz* `BaseSuma` *cuyos vectores fila son una base de $U+V$. El comando* `rank` *aplicado a* `Suma` *o a* `BaseSuma` *nos permite conocer la dimensión de $U+V$.*
4. *Conocidas las dimensiones de $U$, $V$ y $U+V$, aplicando la ecuación de dimensiones, obtenemos la dimensión de $U \cap V$ (en este caso, 1).*

   *Vamos a determinar las ecuaciones cartesianas de $U$. Para ello, basta con:*

   ```
   >> CoefEcU=null(sym(BaseU)).'
   >> syms x y z t
   >> EcU=CoefEcU*[x;y;z;t]
   ```

   *Los vectores de $U \cap V$, serán aquellos que verifiquen simultáneamente todas las ecuaciones de $U$ y de $V$. Bastará con resolver el sistema homogéneo resultante que, en este caso, tendrá cuatro ecuaciones y cuatro incógnitas. La orden* `null` *aplicada a la matriz de coeficientes de dicho sistema nos proporcionará una base del subespacio solución, es decir, de $U \cap V$.*

[1] Nótese que en el proceso de escalonamiento que se realiza mediante la orden `rref`, se puede producir un reordenamiento de filas. De este modo, la posición de los vectores fila libres de la matriz escalonada no tiene porqué corresponderse con la de los vectores fila libres en la matriz inicial.

(b) *Como ya vimos, la dimensión de* $U$ *es dos y una posible base era* $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$. *Para determinar las coordenadas de* $\vec{u} = (5, -4, -1, 4)$ *en dicha base, se tiene que:*

$$\vec{u} = a\,\vec{u}_1 + b\,\vec{u}_2 \Longleftrightarrow (5, -4, -1, 4) = a\,(1, -1, 0, 1) + b\,(-1, 0, 1, 0) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{r} a - b = 5 \\ -a = -4 \\ b = -1 \\ a = 4 \end{array} \right\} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

*Por tanto, para calcular las coordenadas buscadas, basta con resolver este sistema (por ejemplo, empleando el comando* `rref`*).*

(c) *Para obtener las ecuaciones paramétricas de un subespacio vectorial procederemos en función de los datos que conozcamos de él:*

- *Si conocemos una base, basta con:*
  1. *Definir tantas variables simbólicas como indique la dimensión del subespacio.*
  2. *Con dichas variables, construir una combinación lineal de los vectores de la base, que representará un elemento genérico del subespacio cuyas componentes son los segundos miembros de las ecuaciones buscadas.*
- *Si conocemos sus ecuaciones cartesianas, basta con resolver el sistema homogéneo formado por éstas, por ejemplo mediante el comando* `solve`.

## Ejercicio 1.2

*Probar que los vectores del sistema* $S = \{(1, 1, 1), (1, 3, 1), (-2, 1, 3)\}$ *forman una base de* $\mathbb{R}^3$. *Hallar las coordenadas del vector* $u = (1, 1, 2)$ *en la base* $S$.

## Ejercicio 1.3

*Dado el subespacio de* $\mathbb{R}^4$ *de ecuaciones implícitas:*

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \end{array} \right.$$

*hallar las ecuaciones paramétricas y una base.*

## Ejercicio 1.4

*Hallar una base del subespacio de* $\mathbb{R}^5$, *formado por los vectores* $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ *tales que:*

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x_1 + x_3 + 2x_4 + 7x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_4 + 3x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 6x_5 = 0 \\ x_1 + x_3 + x_5 = 0. \end{array} \right.$$

## Ejercicio 1.5

*Se consideran en* $\mathbb{R}^4$ *los subespacios:*

$$U = \langle\, \vec{u}_1 = (1, -1, 0, 1),\ \vec{u}_2 = (-1, 0, 1, 0),\ \vec{u}_3 = (1, -2, 1, 2)\,\rangle$$

$$V = \langle\, \vec{v}_1 = (0, -1, 1, 1),\ \vec{v}_2 = (1, -2, 1, 2)\,\rangle$$

*Calcular la dimensión y una base de* $U + V$ *y* $U \cap V$. *Dar unas ecuaciones paramétricas de ambos.*



## Ejercicio 1.6

*En el espacio vectorial de los polinomios de grado menos o igual que 4,* $\mathbb{R}_4[x]$, *se considera el subespacio* $U$ *generado por los polinomios:*

$$p_1(x) = 3 + 2x - x^2 - x^4\ , \quad p_2(x) = -8 - 7x + x^3 + x^4$$

$$p_3(x) = 2 + 3x + 2x^2 - x^3 + x^4\ , \quad p_4(x) = 5x + 8x^2 - 3x^3 + 5x^4$$

*y el subespacio* $T$ *generado por:*

$$q_1(x) = 5 - 2x - x^3\ , \quad q_2(x) = 1 + 3x + x^2\ , \quad q_3(x) = -3 + 8x + 2x^2 + x^3$$

(a) *Calcular la dimensión y una base de:* $U$, $T$, $U + T$ *y* $U \cap T$.

(b) *Discutir si el polinomio* $q(x) = 3x^2 + x^4$ *pertenece o no al subespacio* $U$.

(c) *Demostrar que el polinomio* $q(x)$ *pertenece al subespacio* $U + T$ *y calcular sus coordenadas en la base obtenida.*

## Ejercicio 1.7

*En el espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden 2,* $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ , *hallar la intersección y la suma de los subespacios* $U$ *y* $V$ *definidos de la manera siguiente:*

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \qquad V = \left\langle \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

## Ejercicio 1.8

*Dados los polinomios* $p_1(x) = 1$ , $p_2(x) = (x + 2)^2$ , $p_3(x) = x$ *y* $p_4(x) = x^3$ , *probar que constituyen una base del espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que tres. Hallar las coordenadas del polinomio* $q(x) = (x + 1)^3$ *en dicha base.*

## Ejercicio 1.9

*Sean* $\mathcal{B}_1 = \{\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3\}$ *y* $\mathcal{B}_2 = \{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3\}$ *dos bases de* $\mathbb{R}^3$ *tales que:*

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{u}_1 = \overline{e}_1 + \overline{e}_2 + \overline{e}_3 \\ \overline{u}_2 = \overline{e}_1 - \overline{e}_2 + \overline{e}_3 \\ \overline{u}_3 = \overline{e}_1 - \overline{e}_2 - \overline{e}_3 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} \overline{v}_1 = \overline{e}_1 + \overline{e}_3 \\ \overline{v}_2 = \overline{e}_1 - \overline{e}_2 \\ \overline{v}_3 = \overline{e}_2 - \overline{e}_3 \end{array} \right.$$

*donde* $\mathcal{B} = \{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$ *es otra base de* $\mathbb{R}^3$.
*Calcular las coordenadas del vector* $\overline{w} = \overline{u}_1 + 2\overline{u}_2 - \overline{u}_3$ *en la base* $\mathcal{B}_2$.

# 2. Aplicaciones lineales

## Ejercicio 2.1

*Sea* $f:\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^5$ *una aplicación lineal cuya matriz respecto de las bases canónicas de* $\mathbb{R}^4$ *y* $\mathbb{R}^5$ *es:*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \\ 4 & -8 & 34 & 52 \\ 2 & -3 & 12 & 19 \\ 0 & -1 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

(a) *Obtener la matriz asociada a dicha aplicación, cuando se consideran las bases:*

$$\begin{aligned} B &= \{(2,-1,-4,2),(1,-1,-2,2),(-1,-1,3,4),(-2,0,4,1)\} \quad y \\ C &= \{(1,1,1,1,1),(0,1,1,1,1),(0,0,1,1,1),(0,0,0,1,1),(0,0,0,0,1)\} \end{aligned}$$

(b) *Calcular las coordenadas en la base* $B$ *del vector* $\vec{u}=(1,-1,0,1)$ *y las coordenadas en la base canónica de* $\mathbb{R}^5$ *del vector* $\vec{v}$, *cuyo vector de coordenadas en la base* $C$ *es (1,0,-1,0,1).*

(c) *Obtener las dimensiones del núcleo y de la imagen y, si es posible, una base de los citados subespacios.*

(d) *Analizar si los vectores* $(1,-1,2,3)$ *y* $(0,11,-2,3)$ *pertenecen al núcleo de* $f$.

**Solución**:

(a)
1. *Almacenar en la variable* `M` *la matriz de la aplicación dada.*
2. *Guardar en las variables* `b1`, `b2`, `b3` *y* `b4` *los vectores de la base* $B$ *y en las variables* `c1`, `c2`, `c3`, `c4` *y* `c5` *los vectores de la base* $C$.
3. *Definir las matrices de paso* `P` *y* `Q`, *de las bases canónicas de* $\mathbb{R}^4$ *y* $\mathbb{R}^5$ *a las bases* $B$ *y* $C$, *respectivamente.*
4. *Con las matrices calculadas, obtener* $M_1 = M(f;B,C)$ *por medio de la relación de equivalencia correspondiente y almacenarla en* `M1`.

(b) *Almacenar en las variables* `u` *y* `v` *los vectores considerados. Con las matrices* `P` *y* `Q` *obtenidas en el apartado anterior, podemos calcular los vectores de coordenadas solicitados* $(u_1,u_2,u_3,u_4)$ *y* $(v_1,v_2,v_3,v_4,v_5)$, *teniendo en cuenta que:*

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} \qquad y \qquad \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(c)
1. *La orden* `null` *aplicada a* `M` *o a* `M1`, *proporciona, por columnas, una base de vectores del núcleo de la aplicación lineal* $f$. *Se recomienda usarla como función simbólica (para ello transformarlas con el comando* `sym`*), o con la opción* `'r'`. *Con la ayuda de la orden* `rank` *se obtiene la dimensión del núcleo de* $f$.



2. *La orden* `colspace` *aplicada a* `M` *o a* `M1`, *proporciona, por columnas, una base de vectores de la imagen de la aplicación lineal* $f$. *Con la ayuda de la orden* `rank` *se obtiene la dimensión de la imagen de* $f$. *También se puede obtener, en este momento, utilizando la ecuación de dimensiones.*

(d) *Almacenar en las variables* `x1` *y* `x2` *los vectores dados. Para ver si están o no en el núcleo, basta ver si sus imágenes por* $f$ *son o no el vector* $\vec{0}$. *Podemos realizarlo con:*

```
>> fx1x2=M*[x1;x2].'
```

*Otra posibilidad sería analizar la independencia lineal o no de cada uno de ellos con los de la base conocida del núcleo.*

**Ejercicio 2.2** *Se considera la aplicación lineal* $f:\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ *definida por:*

$$\begin{cases} f(\overline{v}_1) = \overline{w}_1 + 3\,\overline{w}_2 + \overline{w}_3 \\ f(\overline{v}_2) = -2\,\overline{w}_1 + 2\,\overline{w}_2 - 2\,\overline{w}_3 \\ f(\overline{v}_3) = 8\,\overline{w}_1 + 2\,\overline{w}_2 + 8\,\overline{w}_3 \\ f(\overline{v}_4) = -2\,\overline{w}_1 - 2\,\overline{w}_3 \end{cases} \quad , \text{ donde: } \quad \begin{cases} \overline{w}_1 = \overline{v}_1 + \overline{v}_3 \\ \overline{w}_2 = -\,\overline{v}_2 + \overline{v}_3 \\ \overline{w}_3 = \overline{v}_1 + \overline{v}_2 + \overline{v}_4 \\ \overline{w}_4 = -\,\overline{v}_3 + \overline{v}_4 \end{cases}$$

*siendo* $B_1 = \{\overline{v}_1,\overline{v}_2,\overline{v}_3,\overline{v}_4\}$ *y* $B_2 = \{\overline{w}_1,\overline{w}_2,\overline{w}_3,\overline{w}_4\}$ *bases de* $\mathbb{R}^4$. *Se pide:*

(a) *Calcular las matrices de* $f$ *con respecto a las siguientes bases:* $M(f;B_1)$, $M(f;B_2)$, $M(f;B_1,B_2)$.

(b) *Obtener una base de la imagen de* $f$ *y una base del núcleo de* $f$.

(c) *Calcular la imagen mediante* $f$ *del vector* $\overline{v} = \frac{1}{2}\overline{v}_1 - 3\,\overline{v}_2 + \overline{v}_3$.

(d) *Determinar si los vectores* $\overline{a} = \overline{v}_1 - \overline{v}_3 + \overline{v}_4$ *y* $\overline{b} = 2\,\overline{v}_1 - 3\,\overline{v}_2 + 4\,\overline{v}_4$ *pertenecen o no al núcleo de* $f$.

## Ejercicio 2.3

*Sea* $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *el endomorfismo definido por:*

$$f(\vec{u}_1) = \vec{u}_1\,, \quad f(\vec{u}_2) = 2\vec{u}_2 \quad y \quad f(\vec{u}_3) = -\vec{u}_3\,,$$

*donde* $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ *y* $\vec{u}_3$ *son vectores de* $\mathbb{R}^3$ *cuyas coordenadas respecto a la base canónica,* $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$, *son:*

$$\vec{u}_1 = (-1,0,2)\,, \quad \vec{u}_2 = (0,1,-1) \quad y \quad \vec{u}_3 = (2,1,-4)\,.$$

*Se pide:*

(a) *Comprobar que* $\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$ *es una base de* $\mathbb{R}^3$.

(b) *Hallar la matriz asociada al endomorfismo* $f$ *respecto a la base canónica.*

(c) *Hallar la imagen por* $f$ *del vector* $\vec{v} = 2\vec{u}_1 + \vec{e}_2$ *y expresarla en la base canónica y en la base* $\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$.

(d) *Probar que* $f$ *es biyectiva. Hallar* $f^{-1}(3\vec{u}_1 + \vec{u}_2)$ *y expresarlo en la base canónica.*

**Ejercicio 2.4**

*Se consideran las aplicaciones lineales* $f:\mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *, definida por*

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = (3x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 + 6x_5\,,\; x_1 - 8x_5\,,\; x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)$$

*y* $g:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ *, definida por*

$$g(x_1,x_2,x_3) = (x_1,x_2,0,x_3)\ .$$

*(a) Determinar la matriz asociada a la aplicación* $g\circ f$ *con respecto a las bases canónicas.*

*(b) Analizar si la aplicación es inyectiva y si es suprayectiva.*

*(c) Obtener la imagen del vector* $(1,2,3,4,5)$ *a través de* $g\circ f$ .

**Ejercicio 2.5** *Se considera la aplicación lineal* $f : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$ *cuya matriz en las bases:*

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

*de* $M_2(\mathbb{R})$ *y* $B' = \{1, x, x^2\}$ *de* $\mathbb{R}_2[x]$ *es:*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

*(a) Calcula una base de* $Ker(f)$ *y una base de* $Im(f)$ .

*(b) Determinar* $f\left(\begin{pmatrix} 2/3 & 1/5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\right)$ .

*(c) Demostrar que* $B'_1 = \{-2 + 3\,x + x^2/2,\, 1 - x + 3\,x^2,\, 2\,x - 3\,x^2\}$ *es una base de* $\mathbb{R}_2[x]$ *y obtener la matriz de* $f$ *en la bases* $B$ *y* $B'_1$ .