Tema 3. ESPACIOS VECTORIALES

Arturo Santamaría

Grado en Ingeniería Informática del Software
Universidad de Oviedo. Departamento de Matemáticas

PRIMER SEMESTRE

Definición

Un espacio vectorial es un conjunto $V \neq \varnothing$ con una l.c.i. $+$ y una l.c.e. $\cdot$ con dominio en un cuerpo $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ que cumple:

- $(V, +)$ es grupo abeliano.
- Distributiva respecto de la suma de vectores:
  $\alpha \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \alpha \cdot \vec{u} + \alpha \cdot \vec{v}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{K} \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in V$
- Distributiva respecto de la suma de escalares:
  $(\alpha + \beta) \cdot \vec{u} = \alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{u}, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \quad \forall \vec{u} \in V$
- Pseudoasociativa:
  $\alpha \cdot (\beta \cdot \vec{u}) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \vec{u}, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \quad \forall \vec{u} \in V$
- Elemento unidad respecto al producto por un escalar:
  $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}, \quad \forall \vec{u} \in V$

Ejemplos 3.1

Dado un cuerpo $\mathbb{K}$:

- $\mathbb{K}$ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial.
- $\mathbb{K}^n$ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial.
- $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial.
- El conjunto de los polinomios $\mathbb{K}[x]$ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial.
- $\{f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} \ / \ f$ continua $\}$ es un $\mathbb{R}-$espacio vectorial.
- El conjunto de soluciones de un sistema homogéneo con coeficientes en $\mathbb{K}$ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial.

Propiedades

Para cualesquiera $\vec{u}, \ \vec{v} \in V$ y $\alpha, \ \beta \in \mathbb{K}$ se tiene que:

- $\alpha \cdot \vec{0} = \vec{0}.$
- $0 \cdot \vec{u} = \vec{0}.$
- $\alpha \cdot \vec{u} = \vec{0} \Longrightarrow \vec{u} = \vec{0}$ o bien $\alpha = 0.$
- $\alpha \cdot \vec{u} = \alpha \cdot \vec{v}$ con $\alpha \neq 0$, entonces $\vec{u} = \vec{v}.$
- $\alpha \cdot \vec{u} = \beta \cdot \vec{u}$ con $\vec{u} \neq \vec{0}$, entonces $\alpha = \beta.$
- $(-\alpha) \cdot \vec{u} = -\alpha \cdot \vec{u}.$

Definición

Si V es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y H es un subconjunto de V, diremos que H es un **subespacio vectorial** de V si, con las leyes de composición definidas en V restringidas a H, tiene también estructura de $\mathbb{K}$-espacio vectorial.

Caracterización:
$H \subset V$, $H \neq \varnothing$, es subespacio vectorial de V si y sólo si se cumplen las dos condiciones siguientes:

- $\vec{u}, \vec{v} \in H \implies \vec{u} + \vec{v} \in H$
- $\alpha \in \mathbb{K}, \vec{u} \in H \implies \alpha \cdot \vec{u} \in H$

o, equivalentemente, si y sólo si:

$$\vec{u}, \vec{v} \in H, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{K} \implies \alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v} \in H$$

Ejemplos 3.2

- Obsérvese que el vector $\vec{0}$ pertenece a todo subespacio vectorial de V.
- $\{\vec{0}\}$ y V siempre son subespacios vectoriales de V. Se llaman los subespacios triviales.
  (¡No confundir $\{\vec{0}\}$ con el conjunto vacío $\varnothing$!)
- Los únicos subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^2$ son los triviales y las rectas que pasan por el origen.
  Por ejemplo, $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 3x - y = 0\}$ es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$, pero $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 3x - y = 1\}$ no lo es.
- Los únicos subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$ son los triviales, las rectas que pasan por el origen y los planos que pasan por el origen.

Ejemplos 3.3

- El conjunto de matrices cuadradas de orden 2, tales que $a_{12} = 0$, es un subespacio vectorial de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, pero el conjunto de matrices cuadradas de orden 2, tales que $a_{12} = 7$, no lo es.
- Sea $V = \{f : [0, 2] \longrightarrow \mathbb{R} \ / \ f \text{ continua}\}$.
  El subconjunto H_1 de las funciones de V, tales que $f(1) = 0$ es subespacio vectorial de V.
  En cambio, el subconjunto H_2 de funciones de V, tales que $f(1) = 3$, no lo es.

Sistema de vectores. Combinación lineal.

Un sistema de vectores de un $\mathbb{K}$-espacio vectorial V, es un conjunto de vectores de dicho espacio, expresados en un cierto orden y que, eventualmente, pueden ser repetidos. Lo denotaremos, por ejemplo, $S = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_p\}$.

Llamamos **combinación lineal** de los vectores del sistema anterior $S = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_p\}$ a cualquier vector de la forma:

$$\vec{u} = \alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 + \cdots + \alpha_p \vec{u}_p$$

para ciertos $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p \in \mathbb{K}$

Subespacio generado. Sistema generador.

El conjunto de todas las posibles combinaciones lineales de vectores $S = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p\}$, tiene estructura de subespacio vectorial y recibe el nombre de **subespacio generado** por S. Se denota por $\langle S \rangle$.

Dos sistemas de vectores se dicen **equivalentes** si generan el mismo subespacio.

Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y $S = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p\}$ un sistema de vectores de V, tales que $V = \langle S \rangle$. En ese caso, se dice que S es un **sistema generador** de V, o que **genera** V.

Dependencia e independencia lineal

- Un sistema de vectores $S = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p\}$ se dice que es **libre** o que sus vectores son **linealmente independientes** si:

$$\alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 + \cdots + \alpha_p\vec{u}_p = \vec{0} \implies \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_p = 0$$

- Por el contrario, se dice que S es **ligado** o que sus vectores son **linealmente dependientes** si no es libre, es decir:

Existen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p \in \mathbb{K}$, **no todos nulos** tales que:

$$\alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 + \cdots + \alpha_p\vec{u}_p = \vec{0}$$

Ejemplos 3.4

- $\{(1,6,4), (0,3,-5), (0,0,-1)\}$ es un sistema libre de $\mathbb{R}^3$.
- $\{(1,6,4), (0,3,-5), (2,9,13)\}$ es un sistema ligado de $\mathbb{R}^3$.

Propiedades

Dado un sistema de vectores $S = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p\}$:

- Si $\vec{0} \in S$, entonces S es ligado.
- $\{\vec{u}\}$ es ligado si y sólo si $\vec{u} = \vec{0}$.
- $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ es ligado si y sólo si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son proporcionales.
- S es un conjunto ligado si y sólo si al menos uno de sus vectores es combinación lineal del resto.
- Si S es un sistema libre y $T \subset S$, entonces T es libre.
- Si S es un sistema ligado y $S \subset T$, entonces T es ligado.

- **Teorema fundamental de la independencia lineal**: Si V es un espacio vectorial generado por un sistema $S = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_p\}$ de p vectores, entonces todo sistema libre de vectores de V tiene a lo sumo p elementos.
- De todo sistema ligado de vectores no nulos puede extraerse un sistema libre equivalente a él.

Si el sistema es ligado, alguno de los vectores es combinación lineal del resto. Eliminando dicho vector obtenemos otro sistema equivalente a él que es libre (en cuyo caso hemos terminado) o ligado. Si reiteramos este proceso concluimos con un sistema libre equivalente ya que, en última instancia, llegaríamos a un único vector que por ser no nulo sería libre.

Rango de un sistema de vectores

Se denomina **rango de un sistema de vectores** $S = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_p\}$ al número máximo de vectores linealmente independientes que se pueden extraer de él. Se denota $rg(S)$.

NOTA:

El rango de una matriz coincide con el de sus vectores fila y con el de sus vectores columna.

Bases

Un $\mathbb{K}$-espacio vectorial V se dice que es de **tipo finito** si existe un sistema generador de V formado por un número finito de vectores.

Un sistema de vectores $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ de un espacio vectorial V, se dice que es una **base** de V si se cumple que:

- $\mathcal{B}$ es un sistema generador de V.
- $\mathcal{B}$ es un sistema libre.

Teorema. **(Existencia de bases)**
En todo espacio vectorial de tipo finito, $V \neq \{\vec{0}\}$, existe una base.

Dimensión

Teorema de la dimensión.
Todas las bases de un espacio vectorial de tipo finito, $V \neq \{\vec{0}\}$, tienen el mismo número de vectores. A este número se le llama **dimensión** de V y se denota $\dim(V)$.

En lo sucesivo, a los espacios vectoriales de tipo finito les llamaremos de dimensión finita. Centraremos nuestro estudio en este tipo de espacios.

El espacio $\{\vec{0}\}$, por razones obvias, no tiene ninguna base. Diremos que tiene dimensión cero.

NOTA:
El rango de un sistema de vectores coincide con la dimensión del subespacio que generan.

Ejemplos 3.5

- $\mathcal{B} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$, por lo tanto $\dim(\mathbb{R}^3)$=3.
- $\mathcal{B} = \{(1,0,0,\ldots,0),(0,1,0,\ldots,0),\ldots,(0,0,0,\ldots,1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^n$, luego $\dim(\mathbb{R}^n)$=n.
- $\mathcal{B} = \{x^n,\ldots,x^2,x,1\}$ es una base de $\mathbb{R}_n[x]$, con lo cual $\dim(\mathbb{R}_n[x]) = n+1$.
- $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ es una base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, por tanto $\dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})) = 4$.

ESTRUCTURA DE ESPACIO VECTORIAL
COMBINACIONES LINEALES E INDEPENDENCIA LINEAL
BASES, DIMENSIÓN Y COORDENADAS
CRITERIO DE INDEPENDENCIA LINEAL. MÉTODO DE GAUSS
DESCRIPCIÓN DE UN SUBESPACIO VECTORIAL
SUMA E INTERSECCIÓN DE SUBESPACIOS VECTORIALES
Bases
Dimensión
Coordenadas
Cambio de base

Propiedades

Sea $S = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_p\}$ un sistema de vectores de un espacio vectorial de dimensión finita V, entonces se verifica:

- Si S es sistema generador de V, entonces $p \geq \dim(V)$.
- Si S es libre, entonces $p \leq \dim(V)$.
- Si S es generador de V y $\dim(V) = p$, entonces S es una base de V.
- Si S es libre y $\dim(V) = p$, entonces S es una base de V.

ESTRUCTURA DE ESPACIO VECTORIAL
COMBINACIONES LINEALES E INDEPENDENCIA LINEAL
BASES, DIMENSIÓN Y COORDENADAS
CRITERIO DE INDEPENDENCIA LINEAL. MÉTODO DE GAUSS
DESCRIPCIÓN DE UN SUBESPACIO VECTORIAL
SUMA E INTERSECCIÓN DE SUBESPACIOS VECTORIALES
Bases
Dimensión
Coordenadas
Cambio de base

Propiedades

- **Teorema de la base incompleta**.
  En un espacio vectorial V de dimensión n, todo sistema formado por p vectores linealmente independientes puede completarse con otros $n-p$ vectores hasta obtener una base de V.
- **Dimensión de un subespacio**.
  En un espacio vectorial V de dimensión n, todo subespacio U es de dimensión finita y $\dim U \leq n$.
  Además, $\dim U = n$ si y sólo si $U = V$.

ESTRUCTURA DE ESPACIO VECTORIAL
COMBINACIONES LINEALES E INDEPENDENCIA LINEAL
BASES, DIMENSIÓN Y COORDENADAS
CRITERIO DE INDEPENDENCIA LINEAL. MÉTODO DE GAUSS
DESCRIPCIÓN DE UN SUBESPACIO VECTORIAL
SUMA E INTERSECCIÓN DE SUBESPACIOS VECTORIALES
Bases
Dimensión
Coordenadas
Cambio de base

Coordenadas

Teorema. (Unicidad de coordenadas)
Sea $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots \vec{v}_n\}$ una base del espacio vectorial V.
Entonces, para cada $\vec{x} \in V$, existe unos únicos escalares $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tales que:

$$\vec{x} = x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + \cdots + x_n\vec{v}_n$$

Se dice que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son las **coordenadas de $\vec{x}$ en la base** $\mathcal{B}$, y que $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es el **vector de coordenadas de $\vec{x}$ en la base** $\mathcal{B}$. Se escribe:

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)_{\mathcal{B}}$$

Identificación con $\mathbb{K}^n$

La introducción del concepto de coordenadas facilita el cálculo con vectores, permitiendo establecer una identificación entre los vectores de cualquier $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión n y los de $\mathbb{K}^n$. Fijada una base, todo vector de un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión n viene representado por su vector de coordenadas en esa base y, recíprocamente, todo vector de $\mathbb{K}^n$ es vector de coordenadas de un vector determinado.

Cambio de base

Sean $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n\}$ y $B' = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n\}$ dos bases distintas de un $\mathbb{K}$-espacio vectorial E.
Sea $\vec{x}$ un vector cualquiera de E tal que:

$$\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)_B \qquad \vec{x} = (x'_1, x'_2, ..., x'_n)_{B'}$$

es decir:

$$\vec{x} = x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + ... + x_n\vec{u}_n = x'_1\vec{v}_1 + x'_2\vec{v}_2 + ... + x'_n\vec{v}_n$$

¿Qué relación existe entre $(x_1, x_2 ..., x_n)$ y $(x'_1, x'_2, ..., x'_n)$?

Como B es base, podemos poner los vectores de B' en combinación lineal de los de B:

$$(1)\begin{cases} \vec{v}_1 = p_{11}\vec{u}_1 + p_{21}\vec{u}_2 + ... + p_{n1}\vec{u}_n \\ \vec{v}_2 = p_{12}\vec{u}_1 + p_{22}\vec{u}_2 + ... + p_{n2}\vec{u}_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \vec{v}_n = p_{1n}\vec{u}_1 + p_{2n}\vec{u}_2 + ... + p_{nn}\vec{u}_n \end{cases} \quad (p_{ij} \in \mathbb{K} \quad \forall\, i,j = 1, ..., n)$$

obteniendo así las ecuaciones de cambio de base vectoriales.

El escalar p_{ij} representa la i-ésima coordenada del vector $\vec{v}_j$ en la base B.

Así:

$$x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + ... + x_n\vec{u}_n = \vec{x} = x'_1\vec{v}_1 + x'_2\vec{v}_2 + ... + x'_n\vec{v}_n =$$

$$= x'_1(p_{11}\vec{u}_1 + p_{21}\vec{u}_2 + ... + p_{n1}\vec{u}_n) + x'_2(p_{12}\vec{u}_1 + p_{22}\vec{u}_2 + ... + p_{n2}\vec{u}_n) +$$

$$+ ... + x'_n(p_{1n}\vec{u}_1 + p_{2n}\vec{u}_2 + ... + p_{nn}\vec{u}_n) =$$

$$= (p_{11}x'_1 + p_{12}x'_2 + ... + p_{1n}x'_n)\vec{u}_1 + (p_{21}x'_1 + p_{22}x'_2 + ... + p_{2n}x'_n)\vec{u}_2 +$$

$$+ ... + (p_{n1}x'_1 + p_{n2}x'_2 + ... + p_{nn}x'_n)\vec{u}_n$$

Haciendo uso de la unicidad de coordenadas de $\vec{x}$ en la base, se concluye que:

$$(2)\left\{\begin{array}{l} x_1 = p_{11}x'_1 + p_{12}x'_2 + \ldots + p_{1n}x'_n \\ x_2 = p_{21}x'_1 + p_{22}x'_2 + \ldots + p_{2n}x'_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = p_{n1}x'_1 + p_{n2}x'_2 + \ldots + p_{nn}x'_n \end{array}\right.$$

Estas ecuaciones, que relacionan las coordenadas del vector $\vec{x}$ en las bases B y B', se llaman **ecuaciones de cambio de base** en coordenadas.

Si hubiésemos expresado en (1), análogamente, los vectores de B en combinación lineal de los de B', habríamos llegado en (2) a unas ecuaciones de cambio de base, duales de las anteriores, en las que aparecerían $x'_1, x'_2, ..., x'_n$ en función de $x_1, x_2, ..., x_n$.

Cambio de base (matricialmente)

Todo esto, lo podemos expresar de forma matricial:

$$\vec{x} = x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + \ldots + x_n\vec{u}_n = \begin{pmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \cdots & \vec{u}_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = x'_1\vec{v}_1 + x'_2\vec{v}_2 + \ldots + x'_n\vec{v}_n = \begin{pmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

Las ecuaciones (1), las escribiremos, matricialmente:

$$\begin{pmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \cdots & \vec{u}_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \ldots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \ldots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \ldots & p_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \cdots & \vec{u}_n \end{pmatrix} P$$

obteniendo así la ecuación matricial de cambio de base vectorial.

La matriz P se denomina **matriz de cambio de base** o **matriz de paso** de la base B a la base B'.

Sustituyendo:

$$\begin{pmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \cdots & \vec{u}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \vec{x} = \begin{pmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \cdots & \vec{u}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

ESTRUCTURA DE ESPACIO VECTORIAL
COMBINACIONES LINEALES E INDEPENDENCIA LINEAL
BASES, DIMENSIÓN Y COORDENADAS
CRITERIO DE INDEPENDENCIA LINEAL. MÉTODO DE GAUSS
DESCRIPCIÓN DE UN SUBESPACIO VECTORIAL
SUMA E INTERSECCIÓN DE SUBESPACIOS VECTORIALES
Bases
Dimensión
Coordenadas
Cambio de base

y haciendo uso de la unicidad de coordenadas de $\vec{x}$ en la base B, llegamos a la **ecuación matricial del cambio de base** en coordenadas:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

que es equivalente a las ecuaciones de cambio de base (2) obtenidas anteriormente. Podemos escribirlo $X = PX'$.

Arturo Santamaría ÁLGEBRA LINEAL

ESTRUCTURA DE ESPACIO VECTORIAL
COMBINACIONES LINEALES E INDEPENDENCIA LINEAL
BASES, DIMENSIÓN Y COORDENADAS
CRITERIO DE INDEPENDENCIA LINEAL. MÉTODO DE GAUSS
DESCRIPCIÓN DE UN SUBESPACIO VECTORIAL
SUMA E INTERSECCIÓN DE SUBESPACIOS VECTORIALES
Bases
Dimensión
Coordenadas
Cambio de base

NOTA IMPORTANTE:
La matriz de cambio de base de B a B', tiene en sus columnas las coordenadas, en la base B, de los vectores de B' .

- Sea $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Se tiene que:

$$P \text{ es una matriz cambio de base } \iff$$
$$\iff rg\,(P) = n \iff P \text{ es invertible } \iff |P| \neq 0$$

- Si P es la matriz de paso de B a B', entonces P^{-1} es la matriz de paso de B' a B.

Arturo Santamaría ÁLGEBRA LINEAL

ESTRUCTURA DE ESPACIO VECTORIAL
COMBINACIONES LINEALES E INDEPENDENCIA LINEAL
BASES, DIMENSIÓN Y COORDENADAS
CRITERIO DE INDEPENDENCIA LINEAL. MÉTODO DE GAUSS
DESCRIPCIÓN DE UN SUBESPACIO VECTORIAL
SUMA E INTERSECCIÓN DE SUBESPACIOS VECTORIALES
Bases
Dimensión
Coordenadas
Cambio de base

Ejemplo 3.6

Se consideran en $\mathbb{R}^3$ las bases:

$$\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$$

$$\mathcal{B}' = \{\vec{v}_1 = \vec{u}_1, \vec{v}_2 = \frac{1}{2}\vec{u}_1 + \vec{u}_3, \vec{v}_3 = \vec{u}_2\}$$

Calcular las coordenadas en la base $\mathcal{B}$ del vector $\vec{x} = \vec{v}_1 - \vec{v}_3$.

Arturo Santamaría ÁLGEBRA LINEAL

Operaciones elementales

Llamaremos **operaciones elementales** a cada una siguientes realizadas sobre un sistema de vectores $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$:

- $\{\vec{v}_2, \vec{v}_1, \vec{v}_3, \ldots, \vec{v}_n\}$
- $\{\alpha\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$, con $\alpha \neq 0$.
- $\{\vec{v}_1 + \vec{v}_2, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$
- $\{\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{v}_n, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$

Sistemas de vectores escalonados

Llamaremos **sistema de vectores escalonado**, a aquel cuyos vectores de coordenadas en una cierta base sean las filas de una matriz escalonada.

- Si un sistema de vectores S_2 se obtiene, a partir de otro S_1 , mediante operaciones elementales, son equivalentes, esto es $\langle S_1 \rangle = \langle S_2 \rangle$.
- Todo sistema de vectores no nulos escalonado es libre.

Criterio de independencia lineal. Método de Gauss

- El criterio de independencia lineal o método de Gauss es un algoritmo para conseguir un sistema escalonado, equivalente a otro dado, mediante la realización de operaciones elementales.
- Si el sistema escalonado al que se llega es de vectores no nulos (y por tanto libre), los vectores del sistema de partida son también linealmente independientes.
- Si, por el contrario, en el sistema escalonado final hay vectores nulos, eso significa que los vectores iniciales constituían un sistema ligado. En este caso, el método nos permite conocer de forma inmediata el rango de dicho sistema y las relaciones de dependencia lineal existentes entre los vectores del sistema inicial.

Ejemplos 3.7

- $\{(1,6,4),(0,3,-5),(0,0,-1)\}$ es un sistema libre de $\mathbb{R}^3$.
- $\{(1,6,4),(0,3,-5),(2,9,13)\}$ es un sistema ligado de $\mathbb{R}^3$.

Ecuaciones cartesianas

Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión n y H un subespacio de V de dimensión r.
Se llaman **ecuaciones cartesianas** o **implícitas** de H a aquellas condiciones sin ligaduras que deben satisfacer las coordenadas, en una cierta base, de un vector genérico de V para pertenecer a H.

Si H tiene s ecuaciones cartesianas, se tiene que $r = n - s$, esto es:

$$\dim(H) = \dim(V) - \text{n}^o \text{ de ec. cart. de } H$$

Ecuaciones paramétricas

Se llaman **ecuaciones paramétricas** de H a aquellas condiciones sin ligaduras que expresan, en función de una serie de parámetros, la forma que deben tener las coordenadas, en una cierta base, de un vector genérico de V para pertenecer a H.

El número de parámetros que aparecen en unas ecuaciones paramétricas de H coincide con $\dim(H)$.

Descripción de un subespacio

Las formas más usuales de describir un subespacio vectorial H de V son las siguientes:

- Dando un sistema generador del subespacio H o, mejor, una base de H.
- Mediante unas ecuaciones cartesianas de U.
- Facilitando unas ecuaciones paramétricas de H.

NOTA:
Obsérvese que tanto las ecuaciones cartesianas como las paramétricas dependen de la base de trabajo elegida en V.

Ejemplos 3.8

- Se considera en $\mathbb{R}^3$ el subespacio $H = \langle (1,-1,0), (0,0,1) \rangle$. Obtener su dimensión, ecuaciones paramétricas y ecuaciones cartesianas.
- Obtener una base, la dimensión y unas ecuaciones paramétricas del subespacio de $\mathbb{R}^3$:

$$U = \{(x,y,z) \;/\; 2x - z = 0\,, \quad y + z = 0\}$$

Intersección, unión y suma de subespacios

Sean H_1 y H_2 subespacios de un $\mathbb{K}$-espacio vectorial V. Se tiene que:

- La **intersección** de H_1 y H_2:
$$H_1 \cap H_2 = \{\vec{v} \in V \;/\; \vec{v} \in H_1 \text{ y } \vec{v} \in H_2\}$$
es un subespacio vectorial de V.
- La **unión** de H_1 y H_2:
$$H_1 \cup H_2 = \{\vec{v} \in V \;/\; \vec{v} \in H_1 \text{ o } \vec{v} \in H_2\}$$
no es, en general, un subespacio vectorial de V.
- La **suma** de H_1 y H_2:
$$H_1 + H_2 = \{\vec{v} \in V \;/\; \vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \text{ con } \vec{v}_1 \in H_1 \text{ y } \vec{v}_2 \in H_2\}$$
es un subespacio vectorial de V.

Suma de p subespacios

- Se puede definir análogamente la suma de p subespacios $H_1, H_2, \ldots, H_p$ de V, de la forma:
$$H_1 + H_2 + \cdots + H_p = \left\{ \sum_{i=1}^{p} \vec{v}_i \;/\; \vec{v}_i \in H_i \quad (i = 1, 2, \ldots, p) \right\} =$$
$$= \{\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \cdots + \vec{v}_p \;/\; \vec{v}_i \in H_i \quad (i = 1, 2, \ldots, p)\}$$
Este conjunto es, análogamente, subespacio de V.

- Se consideran los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^2$
$$H_1 = \{(x, 0) \;/\; x \in \mathbb{R}\} \qquad H_2 = \{(0, y) \;/\; y \in \mathbb{R}\}$$
Se tiene que $\vec{v}_1 = (1, 0) \in H_1$, $\vec{v}_2 = (0, 1) \in H_2$, pero $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = (1, 1) \notin H_1 \cup H_2$

  Por lo tanto $H_1 \cup H_2$ no es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$.

Dados dos subespacios vectoriales H_1 y H_2 de un espacio vectorial V, se tiene que:

- $H_1 \cap H_2$ es el mayor subespacio vectorial de V contenido en H_1 y en H_2.
- $H_1 + H_2$ es el menor subespacio vectorial de V que contiene a H_1 y H_2 simultáneamente.

Propiedades

Sean H_1 y H_2 dos subespacios vectoriales de un $\mathbb{K}$-espacio vectorial V. Se tiene que:

- Si S_1 y S_2 son sistemas generadores de H_1 y H_2, respectivamente, entonces la unión $S_1 \cup S_2$ es un sistema generador de $H_1 + H_2$.
- **Fórmula de las dimensiones o Fórmula de Grassmann.**
$$\dim(H_1) + \dim(H_2) = \dim(H_1 + H_2) + \dim(H_1 \cap H_2)$$

Ejemplo 3.9

Calcular una base de la suma y una base de la intersección de los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^4$:

$$H_1 =< (1,2,1,0), (-1,1,1,1) >$$

$$H_2 =< (2,1,0,-1), (1,-1,3,7) >$$

Suma directa

Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, y sean H_1 y H_2 dos subespacios vectoriales suyos.

Se dice que ambos subespacios tienen **suma directa**, y lo denotaremos $H_1 \oplus H_2$, si todo vector de $H_1 + H_2$ se pueda expresar **de forma única** como suma de un vector de H_1 y otro de H_2.

Caracterización de suma directa

Sean H_1 y H_2 subespacios de un $\mathbb{K}$-espacio vectorial V. Son equivalentes:

- La suma de H_1 y H_2 es directa ($H_1 \oplus H_2$).
- $H_1 \cap H_2 = \left\{\vec{0}\right\}$.
- La unión de una base de H_1 y una base de H_2 proporciona una base de $H_1 + H_2$.
- $\dim(H_1 + H_2) = \dim(H_1) + \dim(H_2)$
- $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{0}$ con $\vec{v}_1 \in H_1$ y $\vec{v}_2 \in H_2 \implies \vec{v}_1 = \vec{0}$ y $\vec{v}_2 = \vec{0}$.

Subespacios suplementarios

En un $\mathbb{K}$-espacio vectorial V, se dice que dos subespacios vectoriales H_1 y H_2 dos **subespacios suplementarios** si $V = H_1 \oplus H_2$ o, lo que es lo mismo, si cumple que:

- $H_1 \cap H_2 = \left\{\vec{0}\right\}$.
- $V = H_1 + H_2$.

NOTA:
Sea $B = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r, \vec{v}_{r+1}, \ldots, \vec{v}_n\}$ una base de un $\mathbb{K}$-espacio vectorial V. Se tiene que los subespacios $H_1 = \langle \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r \rangle$ y $H_2 = \langle \vec{v}_{r+1}, \ldots, \vec{v}_n \rangle$ son suplementarios en V.

Ejemplos 3.10

En general, el suplementario de un subespacio vectorial dado no es único.

- En $\mathbb{R}^2$, si H_1 es una recta que pasa por el origen, cualquier otra recta H_2 que pase por el origen distinta de ella es un subespacio suplementario de H_1.
- En $\mathbb{R}^3$, si H_1 es una recta que pasa por el origen, cualquier plano H_2 que pase por el origen y no contenga a H_1 es un subespacio suplementario de H_1.
- En $\mathbb{R}^3$, si H_1 es una plano que pasa por el origen, cualquier recta H_2 que pase por el origen es un subespacio suplementario de H_1, siempre y cuando no esté contenida en H_1 .