Manuel José Fernández, mjfg@uniovi.es

CALCULO
GRADO EN INGEN. INFORM. DEL SOFTWARE. 2020-21
TEMA 1. FUNCIONES REALES DE UNA VARIABLE REAL

1.1: Conjuntos Numéricos.

Un *conjunto* es una colección de objetos. Los objetos de un conjunto se llaman los *elementos* del conjunto. Para indicar que un elemento x está en el conjunto A escribimos $x \in A$ y para indicar lo contrario escribimos $x \notin A$. A menudo se representan los conjuntos mediante llaves encerrando a sus elementos. Así pues, $1 \in \{-1, 0, 1, 2\}$ pero $0 \notin \{1, 2, 3\}$.
De los conjuntos numéricos se definen en primer lugar los *números naturales* $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$ con los cuales se pueden realizar las operaciones de suma y multiplicación para que el resultado siga siendo un número natural.

Método de inducción.
Se considera el conjunto $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Sea P una propiedad que puede verificar o no un número natural; expresamos que $P(n)$ es cierto si el número natural n verifica la propiedad P. Si se verifica
a) $P(1)$ es cierto, es decir, el primer número natural verifica P.
b) Si $P(n)$ es cierto entonces también lo es $P(n+1)$.

Entonces todo número natural verifica la propiedad P.

Ejercicio:

Demostrar aplicando el principio de inducción que $1+2+...+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ $\quad \forall n \in N$

Solución:
Para $n=1$ obtenemos $1=1$ cierto
Supongamos, por hipótesis de inducción, que es cierta la igualdad para n y debemos demostrarla para $n+1$: $1+2+...+n+n+1 = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$

$$1+2+...+n+n+1 = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

A continuación se definen los *números enteros* $Z = \{\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ con los cuales se pueden realizar las operaciones de suma, resta y multiplicación para que el resultado siga siendo un número entero. Seguidamente se consideran los *números racionales* $Q = \{p/q \;;\; p, q \in Z \text{ y } q \neq 0\}$ con los cuales se pueden realizar las cuatro operaciones elementales de suma, resta, multiplicación y división por un número distinto de cero.

Ejemplos:

$1/2 = 0.5$ expresión decimal constituida por un número finito de cifras decimales

$1/3 = 0.\overline{3}$ $\qquad$ $1/7 = 0.\overline{142857}\,\overline{142857}\ \ldots$ $\qquad$ $1/6 = 0.1\overline{6}$

número infinito de cifras decimales pero repetidas periódicamente.

Veamos ahora que $\sqrt{2}$ no es un número racional, es decir, que $\sqrt{2}$ no se puede expresar de la forma p/q siendo esta una fracción irreducible (es decir que p y q no tienen divisores comunes a excepción de la unidad).
Si $\sqrt{2} = p/q \;\Rightarrow\; 2 = p^2/q^2 \;\Rightarrow\; p^2 = 2q^2 \Rightarrow\; p^2$ es par $\Rightarrow\; p$ es par ; entonces $\exists k \in N \;/\; p = 2k \;\Rightarrow\; p^2 = 4k^2 = 2q^2 \;\Rightarrow\; q^2 = 2k^2 \;\Rightarrow\; q^2$ es par $\Rightarrow\; q$ es par .
En este caso p y q serian pares lo que contradice el hecho de que p y q no tengan divisores comunes.

Los números como $\sqrt{2}\,, \pi\,,\ \ldots$ se les llama *irracionales*; el conjunto de los números racionales ampliado con los irracionales forman el conjunto de los números *reales* R.
Así, por ejemplo, las raíces de la ecuación polinómica $x^2 - 3x + 1 = 0$ son números reales

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \qquad \text{irracionales}$$

Sin embargo, las raíces de la ecuación polinómica $x^2 - 2x + 3 = 0$ no son números reales.

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{-8}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}\, i \qquad \text{números } \textit{complejos o imaginarios}.$$

Si A y B son conjuntos, entonces decimos que A está contenido en B y lo representamos $A \subset B$ si y sólo si todo elemento de A es también un elemento de B (se dice que A es un subconjunto de B). Así, por ejemplo, $N \subset Z \subset Q \subset R$.

Producto cartesiano.

$$AxB = \{(a,b)\,/\, a \in A \quad \text{y} \quad b \in B\}$$

Ejemplos:

Si $A = \{0\,,1\}$ y $B = \{1\,,2\}$,

$$AxB = \{(0,1), (0,2), (1,1), (1,2)\} \qquad\qquad BxA = \{(1,0), (1,1), (2,0), (2,1)\}$$

Si $A = B = [0\,,1]$,

$$AxB = \{(x,y) \;/\; x \in [0,1]\,,\; y \in [0,1]\} \qquad \text{cuadrado unidad}$$

Intersección.

$$A \cap B = \{x \,/\, x \in A \quad \text{y} \quad x \in B\} \quad ; \quad \text{si} \quad A \subset B \;\Rightarrow\; A \cap B = A$$

Ejemplos:

$A=\{\text{múltiplos de}\,3\}$, $B=\{\text{múltiplos de}\,4\}$, $A\cap B=\{\text{múltiplos de}\,12\}$

$A=\{x\in R \ / \ x>1\}$, $B=\{x\in R \ / \ x<3\}$, $A\cap B=\{x\in R \ / \ 1<x<3\}$

Unión.

$A\cup B=\{x/ \ x\in A \ \text{ó} \ x\in B\}$; si $A\subset B \Rightarrow A\cup B=B$

Ejemplo:

$A=\{x\in R \ / \ x>1\}$, $B=\{x\in R \ / \ x>3\}$

$A\cap B=\{x\in R \ / \ x>3\}$ $A\cup B=\{x\in R \ / \ x>1\}$

Propiedades de orden en R

* o bien $a<b$, o $b<a$, o $a=b$

* Si $a\le b$ y $b\le c$, entonces $a\le c$

* Si $a\le b$, entonces $a+c\le b+c$ $\forall c\in R$

* Si $a\le b$ y $c>0$ entonces $ac\le bc$

* Si $a\le b$ y $c<0$ entonces $ac\ge bc$. Por tanto si $a\le b$ entonces $-a\ge -b$

* Si $a\le b$, siendo a y b no nulos del mismo signo, entonces $\frac{1}{a}\ge\frac{1}{b}$

Valor absoluto de un número real.

Dado un número real x el valor absoluto de x, denotado por $|x|$, se define de la siguiente manera: $|x|=x$ si $x\ge 0$, $|x|=-x$ si $x\le 0$

Otras caracterizaciones son,

$$|x|=\max\{x,-x\} \quad ; \quad |x|=\sqrt{x^2}$$

interpretación geométrica: $|x|=$ distancia entre x y 0.

$|x-c|=$ distancia entre x y c.

Ejemplos:

$$|x-1|=\begin{cases} x-1 & \text{si } x\ge 1 \\ 1-x & \text{si } x\le 1 \end{cases}$$

$$|x^2-1| = \begin{cases} x^2-1 & \text{si } x^2 \geq 1 \\ 1-x^2 & \text{si } x^2 \leq 1 \end{cases} = \begin{cases} x^2-1 & \text{si } |x| \geq 1 \\ 1-x^2 & \text{si } |x| \leq 1 \end{cases} = \begin{cases} x^2-1 & \text{si } x \geq 1 \text{ ó } x \leq -1 \\ 1-x^2 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

*Propiedades del valor absoluto***.**

Sean $x, y \in R$. Se verifica

1) $|x| \geq 0$ y $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2) $|-x| = |x|$
3) $|xy| = |x|\,|y|$
4) $-|x| \leq x \leq |x|$
5) $|x| \leq \delta \Leftrightarrow -\delta \leq x \leq \delta$
6) $|x-c| \leq \delta \Leftrightarrow c-\delta \leq x \leq c+\delta$
7) $|x+y| \leq |x|+|y|$; $|x-y| \leq |x|+|y|$
8) $|x-y| \geq |x|-|y|$
9) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ si $y \neq 0$

Ejercicio:

Hallar los $x \in R$ tales que $|x-2| \geq 1$

Solución:

$$|x-2| \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 3 \text{ ó } x \leq 1$$

Ejercicio:

Hallar los $x \in R$ tales que $|x^2-1| \geq 1$

Solución:

$$|x^2-1| \geq 1 \Leftrightarrow x^2 \geq 2 \text{ ó } x^2 \leq 0 \Leftrightarrow |x| \geq \sqrt{2} \text{ ó } x = 0 \Leftrightarrow x \geq \sqrt{2} \text{ ó } x \leq -\sqrt{2} \text{ ó } x = 0$$

Ejercicio:

Hallar los $x \in R$ tales que $\left|\frac{x}{x+1}\right| \leq 1$

Solución:

$$\left|\frac{x}{x+1}\right| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \frac{x}{x+1} \leq 1$$

Si $x > -1$, $-1 \leq \frac{x}{x+1} \leq 1 \Leftrightarrow -x-1 \leq x \leq x+1 \Leftrightarrow 2x \geq -1 \Leftrightarrow x \geq -1/2$

Si $x < -1$, $-1 \leq \frac{x}{x+1} \leq 1 \Leftrightarrow -x-1 \geq x \geq x+1$ no existe x

Así pues, la solución son los $x \geq -1/2$.

Ejercicio:

Hallar los $x \in R$ tales que $\left| \dfrac{x}{x^2+1} \right| \leq 1$

Ejercicio:

Hallar los $x \in R$ tales que $|x+3| + |x-3| < 8$

Conjuntos acotados.

Un conjunto $A \subset R$ se dice que está acotado superiormente $\Leftrightarrow: \exists \mathrm{M} \in R \ / \ x \leq \mathrm{M} \quad \forall x \in A$
M se denomina cota superior para A

Un conjunto $A \subset R$ se dice que está acotado inferiormente $\Leftrightarrow: \exists \mathrm{m} \in R \ / \ x \geq \mathrm{m} \quad \forall x \in A$
m se denomina cota inferior para A

Un conjunto $A \subset R$ está acotado $\Leftrightarrow$: está acotado superior e inferiormente $\Leftrightarrow$
$\exists \mathrm{K} \in R^+ \ / \ |x| \leq \mathrm{K} \quad \forall x \in A$

Axioma del supremo (ínfimo).

Sea A un conjunto de números reales acotado superiormente. Entonces A tiene extremo superior o *supremo*, denotado por $\sup A$, que coincide con la menor de las cotas superiores.

Sea A un conjunto de números reales acotado inferiormente. Entonces A tiene extremo inferior o *ínfimo*, denotado por $\inf A$, que coincide con la mayor de las cotas inferiores.

Si el supremo pertenece al conjunto A se llama *máximo* y se denota $\max \mathrm{A}$. Si el ínfimo pertenece al conjunto A se llama *mínimo* y se denota $\min \mathrm{A}$.

Intervalos acotados.

Dados $a, b \in R$ se tiene

$(a, b) = \{x \in R / a < x < b\}$ intervalo abierto $\qquad [a, b] = \{x \in R / a \leq x \leq b\}$ cerrado

$(a, b] = \{x \in R / a < x \leq b\} \qquad [a, b) = \{x \in R / \mathrm{a} \leq x < \mathrm{b}\}$

Intervalos no acotados.

Dados $a, b \in R$ se tiene

$(a, \infty) = \{x \in R / x > a\} \qquad [a, \infty) = \{x \in R / x \geq a\}$

$(-\infty, b) = \{x \in R / x < b\}$; $\qquad (-\infty, b] = \{x \in R / x \leq b\} \qquad (-\infty, \infty) = R$

Ejercicio

Hallar, si existen, el supremo, ínfimo, máximo y mínimo de los subconjuntos de R siguientes:

a) $A=(0,4)$ $\quad$ $\sup A=4$, $\inf A=0$, no existe máximo ni mínimo de A
.

b) $B=N=\{1,2,3,\dots\}$ $\quad$ $\inf B=\min B=1$, no existe supremo ni máximo de B.

c) $C=\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\dots\right\}$ $\quad$ $\sup C=\max C=1$, $\inf C=0$, no existe mínimo de C.

d) $D=\{x\in R\,/\,x^2+5x-6\le 0\}$

$$x^2+5x-6=0 \Leftrightarrow x=\frac{-5\pm\sqrt{25+24}}{2}=\frac{-5\pm 7}{2} \quad ; \quad x=1 \quad \text{ó} \quad x=-6$$

$$x^2+5x-6\le 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+6)\le 0 \Leftrightarrow \begin{array}{l}(x-1)\le 0 \quad \text{y} \quad (x+6)\ge 0 \quad \text{ó} \\ (x-1)\ge 0 \quad \text{y} \quad (x+6)\le 0\end{array}$$

$$\Leftrightarrow \; x\le 1 \;\; \text{y} \;\; x\ge -6 \;\; \text{ó} \;\; x\ge 1 \;\; \text{y} \;\; x\le -6 \;\; \Leftrightarrow \;\; x\le 1 \;\; \text{y} \;\; x\ge -6$$

$$D=[-6,1] \qquad \sup D=\max D=1 \quad ; \quad \inf D=\min D=-6$$