Manuel José Fernández, mjfg@uniovi.es

CALCULO
GRADO EN INGEN. INFORM. DEL SOFTWARE. 2020-21
TEMA 2. INTEGRAL DE RIEMANN

2.1: Cálculo de primitivas.

Concepto de primitiva:

Se dice que la función $F(x)$ es una primitiva de la función $f(x)$ en el intervalo (a,b) $\Leftrightarrow: F$ es derivable en (a,b) tal que $F'(x)=f(x) \quad \forall x\in(a,b)$.

Ejemplos.

La función $F(x)=x^4-8$ es una primitiva de la función $f(x)=4x^3 \quad \forall x\in R$.

La función $F(x)=\sqrt{x-1}$ es una primitiva de la función $f(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}$ en el intervalo $(1,+\infty)$.

La función $F(x)=tg(x)+2$ es una primitiva de la función $f(x)=1+tg^2(x)$ en cada uno de los intervalos $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right), \left(\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{2}\right), \ ...$

La función $F(x)=\log(x)$ es una primitiva de la función $f(x)=\dfrac{1}{x}$ en el intervalo $(0,+\infty)$.

Se verifican las dos propiedades siguientes:

1) Si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$ en el intervalo (a,b), entonces la función $G(x)=F(x)+C$, siendo C una constante real arbitraria, también es una primitiva de $f(x)$ en (a,b).

2) Si $F(x)$ y $G(x)$ son dos primitivas de $f(x)$ en el intervalo (a,b), entonces $F(x)-G(x)=C$ $\forall x\in R$.

Nota.
La demostración de la primera propiedad es trivial. Para la segunda se utiliza el teorema del valor medio.

Definición.

Al conjunto de todas las primitivas de la función f en el intervalo (a,b) se le llama la *integral indefinida* de f en (a,b).

La integral indefinida de f se representa de la siguiente manera: $\int f(x)dx$ donde la función $f(x)$ recibe el nombre de integrando.

En virtud de las dos propiedades anteriores, podemos escribir $\int f(x)dx = F(x) + C$, siendo F una primitiva cualquiera de f en (a,b) y C una constante real arbitraria.

Nota.
Generalmente no se indica el intervalo (a,b) en el que $F(x)$ es una primitiva de la función $f(x)$.

La integral indefinida es un operador lineal, es decir, se verifican las dos propiedades siguientes:

$$\int (f+g)(x)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

$$\int a.f(x)dx = a\int f(x)dx \qquad \forall a \in R$$

siendo f y g dos funciones que admiten primitiva en cierto intervalo.

Se verifican los siguientes resultados:

Si f es continua en $[a,b]$ entonces existe una función F que es primitiva de f en (a,b).

Si f definida en (a,b) presenta alguna discontinuidad esencial de primera especie (salto finito o infinito) entonces f no tiene primitiva en (a,b).

Integrales inmediatas.

$$\int a\, dx = ax + C \qquad \forall a \in R$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad n \neq -1 \qquad\qquad \int \left(f(x)\right)^n . f'(x)\, dx = \frac{\left(f(x)\right)^{n+1}}{n+1} + C \qquad n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \log|x| + C \qquad\qquad \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log|\, f(x)\,| + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + C \qquad a > 0, \quad a \neq 1 \qquad\qquad \int a^{f(x)} . f'(x)dx = \frac{a^{f(x)}}{\log a} + C \qquad a > 0, \quad a \neq 1$$

$$\int e^x dx = e^x + C \qquad\qquad \int e^{f(x)} f'(x)dx = e^{f(x)} + C$$

$$\int sen(x)dx = -\cos(x) + C \qquad \int sen\big(f(x)\big)f'(x)dx = -\cos\big(f(x)\big) + C$$

$$\int \cos(x)dx = sen(x) + C \qquad \int \cos\big(f(x)\big)f'(x)dx = sen\big(f(x)\big) + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2(x)}dx = tg(x) + C \qquad \int \frac{1}{\cos^2\big(f(x)\big)} f'(x)\,dx = tg\big(f(x)\big) + C$$

$$\int \frac{1}{sen^2(x)}dx = -ctg(x) + C \qquad \int \frac{1}{sen^2\big(f(x)\big)} f'(x)dx = -ctg\big(f(x)\big) + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = arcsen(x) + C \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-\big(f(x)\big)^2}} f'(x)dx = arcsen\big(f(x)\big) + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx = arctg(x) + C \qquad \int \frac{1}{1+\big(f(x)\big)^2} f'(x)dx = arctg\big(f(x)\big) + C$$

$$\int tg(x)dx = -\int \frac{-sen(x)}{\cos(x)}dx = -\log|\cos(x)| + C$$

$$\int ctg(x)dx = \int \frac{\cos(x)}{sen(x)}dx = \log|sen(x)| + C$$

Ejemplos:

$$\int \frac{4x^3}{1+x^8}dx = \int \frac{4x^3}{1+\left(x^4\right)^2}dx = arctg\left(x^4\right) + C$$

$$\int \frac{8x+5}{4x^2+5x+1}dx = \log\left|4x^2+5x+1\right| + C$$

$$\int \cos(3x)\,dx = \frac{1}{3}\int 3\cos(3x)\,dx = \frac{1}{3}sen(3x) + C$$

$$\int e^{5x}dx = \frac{1}{5}\int 5e^{5x}dx = \frac{1}{5}e^{5x} + C$$

$$\int \frac{\log(x)}{x}dx = \int \log(x)\frac{1}{x}\,dx = \frac{\log^2(x)}{2} + C$$

$$\int \frac{arctg(x)}{1+x^2}\,dx = \frac{(arctg(x))^2}{2} + C$$

Métodos generales de integración: cambio de variable y partes.

Método de cambio de variable o sustitución.

Sea $f(x)$ continua. Si hacemos el cambio de variable $x = g(t)$, siendo g una función inyectiva y de clase uno, se verifica:

$$\int f(x)\,dx = \int f(g(t))\,g'(t)dt$$

Ejemplos:

$$\int x(2x+1)^{10}dx =$$

$$= \int \frac{t-1}{2}t^{10}\frac{1}{2}dt = \frac{1}{4}\int \left(t^{11} - t^{10}\right)dt = \frac{1}{4}\left(\frac{t^{12}}{12} - \frac{t^{11}}{11}\right) + C = = \frac{1}{4}\left(\frac{(2x+1)^{12}}{12} - \frac{(2x+1)^{11}}{11}\right) + C$$

Se ha hecho el cambio de variable $2x+1=t$, es decir, $x = g(t) = \frac{t-1}{2}$ $\qquad g'(t) = \frac{1}{2}$

$$\int \frac{1}{x.\log(x)}\,dx = \int \frac{1}{t}\,dt = \log|\,t\,| + C = \log|\,\log(x)\,| + C$$

Se ha hecho el cambio de variable $\log(x) = t$, es decir, $x = g(t) = e^t$ $\qquad g'(t) = e^t$

Método de integración por partes:

Si f y g son dos funciones derivables en el punto x, sabemos que fg es derivable en x

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x), \text{ es decir, } f(x)g'(x) = (fg)'(x) - f'(x)g(x)$$

Por tanto

$$\int f(x)g'(x)dx = \int (fg)'(x) - \int f'(x)g(x)dx = (fg)(x) - \int f'(x)g(x)dx =$$

$$= f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

Si llamamos $u = f(x)$, $v = g(x)$ entonces $du = f'(x)dx$ y $dv = g'(x)dx$. Resulta:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Ejemplos:

$$\int \log(x)dx = I \qquad u = \log(x), \quad du = \frac{1}{x}dx \quad , \quad dv = dx \quad , \quad v = x$$

$$I = x\log(x) - \int x.\frac{1}{x}dx = x\log(x) - x = x(\log(x) - 1) + C$$

$$\int e^{2x} sen(x)dx = I \qquad u = e^{2x} \;, \quad du = 2e^{2x}dx, \quad dv = sen(x)dx, \; v = -\cos(x)$$

$$I = -e^{2x}\cos(x) + 2\int e^{2x}\cos(x)dx \qquad u = e^{2x} \;, \; du = 2e^{2x}dx, \; dv = \cos(x)dx, \; v = sen(x)$$

$$I = -e^{2x}\cos(x) + 2\left[e^{2x}sen(x) - 2\int e^{2x}sen(x)dx\right] = -e^{2x}\cos(x) + 2e^{2x}sen(x) - 4I$$

$$I = \frac{1}{5}e^{2x}(2sen(x) - \cos(x)) + C$$

Integración de funciones racionales.

$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$, P y Q polinomios

Es suficiente estudiar el caso en que el grado de $P(x)$ sea menor que el grado de $Q(x)$. Si sucede lo contrario, se realiza la división y determinamos dos polinomios $C(x)$ y $R(x)$, cociente y resto respectivamente, tales que $P(x) = Q(x)C(x) + R(x)$ con grado de $R(x) <$ grado de $Q(x)$.

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int C(x)dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)} dx$$

Ejemplo:

$$\int \frac{x^3 + 2x^2 - x - 1}{x^2 - 1} dx = \int (x+2)dx + \int \frac{1}{x^2 - 1} dx$$

Así pues, supongamos que el grado de $P(x)$ es inferior al grado de $Q(x)$. Para hallar la integral se calculan las raíces de la ecuación $Q(x) = 0$ y se descompone la fracción original en suma de fracciones simples. Distinguiremos los dos casos siguientes:

1) raíces reales simples $a, b, c, ...$ en este caso $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} + ...$

Ejemplo:

$$\int \frac{dx}{x^2 - 1}$$

$$\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} \quad \Leftrightarrow \quad A(x-1) + B(x+1) = 1$$

Si $x = 1 \quad \Rightarrow \quad 2B = 1 \quad \Rightarrow \quad B = 1/2$

Si $x = -1 \quad \Rightarrow \quad -2A = 1 \quad \Rightarrow \quad A = -1/2$

$$\int \frac{dx}{x^2 - 1} = -\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} = -\frac{1}{2}\log|x+1| + \frac{1}{2}\log|x-1| + C = \frac{1}{2}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$$

2) Supongamos que $Q(x)=0$ tiene una raíz real a de orden de multiplicidad m; en este caso

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_m}{(x-a)^m}+\ldots$$

Ejemplo:

$$I=\int\frac{6x^4-9x^2+5}{(x-1)^2(x+2)(x+1)^2}\,dx$$

$$\frac{6x^4-9x^2+5}{(x-1)^2(x+2)(x+1)^2}=\frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{(x-1)^2}+\frac{B}{x+2}+\frac{C_1}{x+1}+\frac{C_2}{(x+1)^2}$$

$$A_1(x-1)(x+2)(x+1)^2+A_2(x+2)(x+1)^2+B(x-1)^2(x+1)^2+C_1(x-1)^2(x+2)(x+1)+$$

$$+C_2(x-1)^2(x+2)=6x^4-9x^2+5$$

Si $x=1 \Rightarrow 12A_2=2 \Rightarrow A_2=1/6$

Si $x=-1 \Rightarrow 4C_2=2 \Rightarrow C_2=1/2$

Si $x=-2 \Rightarrow 9B=65 \Rightarrow B=65/9$

Si $x=0 \Rightarrow -2A_1+2A_2+B+2C_1+2C_2=5 \Rightarrow C_1-A_1=-16/9$

Si $x=2 \Rightarrow 36A_1+36A_2+9B+12C_1+4C_2=65 \Rightarrow 3C_1+9A_1=-2$

Resolvemos el sistema de las dos ecuaciones anteriores y se obtiene $A_1=5/18$ $C_1=-3/2$.

$$I=\frac{5}{18}\int\frac{dx}{x-1}+\frac{1}{6}\int\frac{dx}{(x-1)^2}+\frac{65}{9}\int\frac{dx}{x+2}-\frac{3}{2}\int\frac{dx}{x+1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x+1)^2}=$$

$$=\frac{5}{18}\log|x-1|-\frac{1}{6}\frac{1}{x-1}+\frac{65}{9}\log|x+2|-\frac{3}{2}\log|x+1|-\frac{1}{2}\frac{1}{x+1}+C$$

Integración de algunas funciones irracionales.

1) $\int R\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right) dx$ siendo R una función racional

Se realiza el cambio de variable $x = a sen(t)$

Ejemplo:

$$I = \int \frac{x^3}{\sqrt{2 - x^2}} dx \qquad x = g(t) = \sqrt{2} sen(t) \qquad g'(t) = \sqrt{2}\cos(t)$$

$$Dom\ f = \{x \in R \,/\, x^2 < 2\} = \left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$$

$$x \in \left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right) \Leftrightarrow \sqrt{2}\, sen(t) \in \left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right) \Leftrightarrow sen(t) \in (-1, 1) \Leftrightarrow \cos(t) \neq 0 \Leftrightarrow t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z$$

$$I = \int \frac{2\sqrt{2} sen^3(t)}{\sqrt{2 - 2sen^2(t)}} \sqrt{2}\cos(t)\, dt = 2\sqrt{2} \int \frac{sen^3(t)}{\sqrt{2}\sqrt{1 - sen^2(t)}} \sqrt{2}\cos(t) dt = 2\sqrt{2} \int \frac{sen^3(t)}{\sqrt{\cos^2(t)}} \cos(t)\, dt$$

Si $\cos(t) > 0$

$$I = 2\sqrt{2} \int sen^3(t) dt = 2\sqrt{2} \int sen(t)\left(1 - \cos^2(t)\right) dt =$$

$$= 2\sqrt{2} \int sen(t) dt - 2\sqrt{2} \int \cos^2(t) sen(t) dt = -2\sqrt{2}\cos(t) + 2\sqrt{2}\frac{\cos^3(t)}{3} =$$

$$= -2\sqrt{2}\sqrt{1 - sen^2(t)} + 2\sqrt{2}\frac{\left(\sqrt{1 - sen^2(t)}\right)^3}{3} = -2\sqrt{2}\sqrt{1 - \frac{x^2}{2}} + 2\sqrt{2}\frac{\left(\sqrt{1 - \frac{x^2}{2}}\right)^3}{3} =$$

$$= -2\sqrt{2}\frac{\sqrt{2 - x^2}}{\sqrt{2}} + 2\sqrt{2}\frac{\left(\sqrt{2 - x^2}\right)^3}{6\sqrt{2}} = -2\sqrt{2 - x^2} + \frac{\left(\sqrt{2 - x^2}\right)^3}{3} + C$$

Si $\cos(t) < 0$ se procede de forma análoga.

Nota.

Para resolver el ejercicio anterior hemos tenido que calcular la integral de la función $sen^3(t)$. En otras situaciones tendremos que obtener las integrales de $sen^2(t)$ ó $\cos^2(t)$. Para ello, nos servimos de las siguientes identidades trigonométricas:

$$sen^2(t) = \frac{1-\cos(2t)}{2} \qquad ; \qquad \cos^2(t) = \frac{1+\cos(2t)}{2}$$

2) $\int R\left(x, \sqrt{a^2+x^2}\right)dx$ siendo R una función racional

Se realiza el cambio de variable $x = a\,tg(t)$

Ejemplo:

$$I = \int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+1}} \qquad x = g(t) = tg(t) \qquad g'(t) = 1 + tg^2(t) = \sec^2(t)$$

Si $\sec(t) > 0$

$$I = \int \frac{\sec^2(t)}{tg^2(t)\sqrt{\sec^2(t)}}dt = \int \frac{\sec(t)}{tg^2(t)}dt = \int \frac{\cos(t)}{sen^2(t)}dt = \int sen^{-2}(t)\cos(t)dt =$$

$$= -\frac{1}{sen(t)} = -\frac{1}{sen(arctg(x))} + C$$