Manuel José Fernández, mjfg@uniovi.es

CALCULO
GRADO EN INGEN. INFORM. DEL SOFTWARE. 2020-21
TEMA 1. FUNCIONES REALES DE UNA VARIABLE REAL

1.5: Derivabilidad. Propiedades de las funciones derivables.

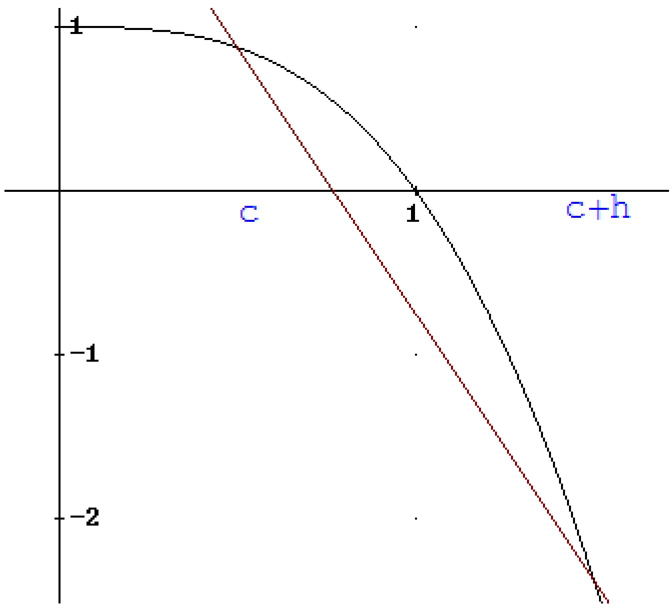
*Derivada de una función en un punto: interpretación geométrica***.**

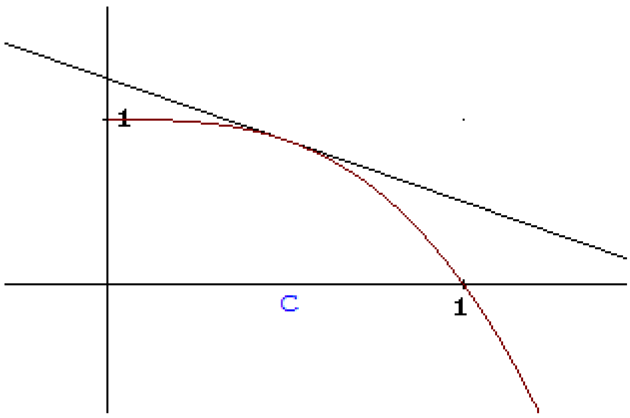
Se dice que una función $f : D \subset R \to R$ es derivable en un punto c perteneciente al interior de D, si existe y es finito el límite siguiente:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

en cuyo caso, a dicho valor se le llama derivada de f en el punto c, y se denota por $f'(c)$.

Nótese que $\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$ es la pendiente de la recta secante a la curva $y = f(x)$ que pasa por los puntos $(c, f(c))$ y $(c+h, f(c+h))$.





La derivada de f en c, si existe, es la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(c\,, f(c))$. La ecuación de esta recta es

$$y - f(c) = f'(c)\,(x - c)$$

Si $f'(c) = 0$, la tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(c\,, f(c))$ es una recta horizontal.

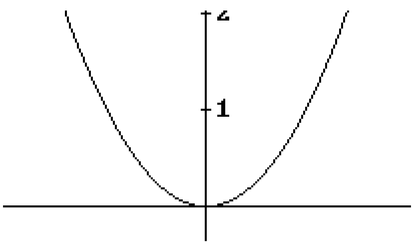
Si $\lim_{h\to 0}\left|\dfrac{f(c+h)-f(c)}{h}\right| = +\infty$ se dice que f tiene derivada infinita en c (aunque no es derivable en c).

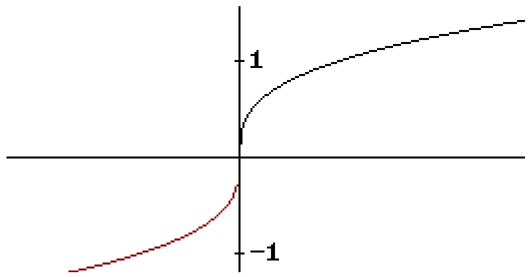
Ejemplos:

$f(x) = x^2$ $\qquad f'(0) = \lim_{h\to 0}\dfrac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\dfrac{h^2}{h} = \lim_{h\to 0} h = 0$

La tangente a la curva $y = x^2$ en el punto $(0{,}0)$ es $y = 0$

$f(x) = \sqrt[3]{x}$ $\qquad f'(0) = \lim_{h\to 0}\dfrac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\dfrac{h^{1/3}}{h} = \lim_{h\to 0}\dfrac{1}{h^{2/3}} = +\infty$





Derivadas laterales

Se dice que una función $f : D \subset R \to R$ es derivable por la derecha en un punto c perteneciente al interior de D, si existe y es finito el límite siguiente:

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

en cuyo caso, a dicho valor se le llama derivada por la derecha de f en el punto c, y se denota por $f'(c^+)$.

Análogamente, se define la derivada por la izquierda

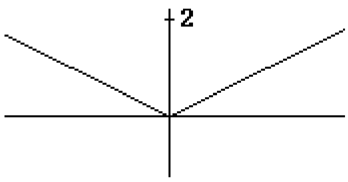
$$f'(c^-) = \lim_{h\to 0^-}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

Se verifica que f es derivable en $c \Leftrightarrow f$ es derivable por la derecha y por la izquierda en c y ambos valores coinciden.

Si en un punto c en el que f es continua se tienen derivadas laterales finitas y distintas, la gráfica de f presenta un "pico" en el punto c y se dice que $(c, f(c))$ es un punto anguloso.

Ejemplo:

$f(x) = |x|$ no es derivable en el cero.



$$f'(0^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h}{h} = 1 \qquad f'(0^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-h}{h} = -1$$

De forma similar se definen las derivadas laterales infinitas en caso de que los límites laterales correspondientes sean infinitos (también puede ocurrir que uno de los límites laterales sea infinito y el otro no).

Ejercicio:
Comprobar que la función $f(x) = \sqrt{|x|}$ tiene derivadas laterales infinitas en el cero.

Función derivada: ejemplos.

f es derivable en un subconjunto abierto de R si lo es en todos sus puntos.

Dada $f : D \subset R \to R$, en los puntos en que f sea derivable tiene sentido hablar de la función derivada $f' : D^* \subset R \to R \qquad D^* \subset D$

$$x \to f'(x)$$

Ejemplos:

- $f(x) = k \quad \forall x \in R$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{k - k}{h} = 0 \qquad \forall x \in R$$

- $f(x) = x \quad \forall x \in R$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x + h - x}{h} = 1 \qquad \forall x \in R$$

- $f(x) = x^2 \quad \forall x \in R$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 + 2xh}{h} = \lim_{h \to 0} (h + 2x) = 2x \qquad \forall x \in R$$

- $f(x) = \sqrt{x} \quad x \geq 0$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x+h-x}{h\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad \forall x > 0$$

- $f(x) = |x| \quad \forall x \in R$

$f'(x) = 1$ si $x > 0$, $f'(x) = -1$ si $x < 0$

Derivabilidad y continuidad.

Si f es derivable en un punto c, entonces f es continua en dicho punto. El recíproco no es cierto en general. Así, por ejemplo, la función $f(x) = |x|$ es continua en $c = 0$ pero no es derivable en dicho punto.

Nota:

Si f es derivable por la izquierda (resp. por la derecha) en c entonces f es continua por la izquierda (resp. por la derecha) en dicho punto. Por tanto, si f es derivable por la izquierda y por la derecha en c entonces f es continua en dicho punto.

Propiedades de la derivada.

1) Si f y g son derivables en un punto c, entonces $f + g$ es derivable en c y además:

$$(f+g)'(c) = f'(c) + g'(c)$$

2) Si f es derivable en un punto c y $\alpha \in R$, entonces $\alpha.f$ es derivable en c y además:

$$(\alpha.f)'(c) = \alpha.f'(c)$$

3) Si f y g son derivables en c, entonces fg es derivable en c y además:

$$(fg)'(c) = f'(c)g(c) + f(c)g'(c)$$

Utilizando la propiedad 3) se demuestra (por inducción) lo siguiente:

Si $f(x) = x^n \quad n = 1, 2, 3, \ldots \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1} \qquad \forall x \in R$

y como consecuencia de 1), 2) y el resultado anterior si

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \qquad n \in N$$

resulta $\quad P'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \ldots + 2a_2 x + a_1 \qquad \forall x \in R$

4) Si g es derivable en un punto c y $g(c) \neq 0$, entonces $\frac{1}{g}$ es derivable en c y además:

$$(1/g)'(c) = -\frac{g'(c)}{[g(c)]^2}$$

Por tanto:

Si $\quad f(x) = x^n = \frac{1}{x^{-n}} \quad n = -1, -2, -3, \ldots \Rightarrow f'(x) = -\frac{-nx^{-n-1}}{(x^{-n})^2} = nx^{n-1} \qquad \forall x \neq 0$

5) Si f y g son derivables en c y $g(c) \neq 0$, entonces $\frac{f}{g}$ es derivable en c y además:

$$(f/g)'(c) = \frac{f'(c)g(c) - f(c)g'(c)}{[g(c)]^2}$$

Como consecuencia se deduce que las funciones racionales son derivables en todos los puntos de su dominio, es decir, en todos aquellos puntos que no anulan al denominador.

Derivadas de otras funciones.

* Si $f(x) = sen(x) \Rightarrow f'(x) = \cos(x) \qquad \forall x \in R$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{sen(x+h) - sen(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{sen(x)\cos(h) + \cos(x)sen(h) - sen(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{sen(x)(\cos(h) - 1)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{\cos(x)sen(h)}{h} = sen(x)\lim_{h \to 0} \frac{-h^2/2}{h} + \cos(x) = \cos(x)$$

* Si $\quad f(x) = \log_a(x) \quad a > 0 \quad a \neq 1 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}\log_a(e) \qquad \forall x > 0$

Si $a = e$ se obtiene la derivada del logaritmo neperiano

* $\quad f(x) = \log(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} \qquad \forall x > 0$

Derivada de funciones compuestas. Regla de la cadena.

Si g es derivable en c y f es derivable en $g(c)$ se verifica que $f \circ g$ es derivable en c y

$$(f \circ g)'(c) = f'(g(c)).g'(c)$$

Otras derivadas.

* Si $f(x) = \cos(x) = sen\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Rightarrow f'(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right).\ (-1) = -sen(x) \qquad \forall x \in R$

* Si $f(x) = tg(x) = \dfrac{sen(x)}{\cos(x)} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{\cos^2(x) + sen^2(x)}{\cos^2(x)} = \dfrac{1}{\cos^2(x)} = \sec^2(x) =$

$$= 1 + tg^2(x) \qquad \forall x \in R - \left\{(2k-1)\frac{\pi}{2},\ k \in Z\right\}$$

* Si $f(x) = a^x \quad a > 0 \Rightarrow \log\ f(x) = x.\log(a)$ y aplicando la regla de la cadena

$$\frac{1}{f(x)} f'(x) = \log(a) \Rightarrow f'(x) = a^x.\log(a) \qquad \forall x \in R$$

* Si $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x.\log(e) = e^x \qquad \forall x \in R$

Ejercicio:
Obtener la función derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = tg(1+x)^3$
b) $f(x) = e^{-|x|}$
c) $f(x) = x^2.sen(1/x)$ si $x \neq 0$, $f(0) = 0$
d) $f(x) = e^x - 1$ si $x \geq 0$, $f(x) = x^3$ si $x < 0$
e) $f(x) = (1+x)^{\log(1+x)}$

Derivada de la función inversa.

Sea f una función inyectiva y f^{-1} su función inversa. Si f es derivable en el punto $f^{-1}(c)$ con derivada distinta de cero, se verifica que f^{-1} es derivable en el punto c y además:

$$(f^{-1})'(c) = \frac{1}{f'(f^{-1}(c))}$$

Otras derivadas.

* Si $g(x) = arcsen(x)$, entonces $g'(x) = \dfrac{1}{f'(g(x))}$ siendo $f(x) = sen(x)$. Por tanto

$$g'(x) = \frac{1}{\cos(g(x))} = \frac{1}{+\sqrt{1 - sen^2(g(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad \forall x \in (-1,1)$$

Recuérdese que $g : [-1,1] \to \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$

* Si $g(x) = \arccos(x)$, entonces $g'(x) = \dfrac{1}{f'(g(x))}$ siendo $f(x) = \cos(x)$. Por tanto

$$g'(x) = \frac{1}{-\operatorname{sen}(g(x))} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2(g(x))}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad \forall x \in (-1,1)$$

Recuérdese que $g : [-1,1] \to [0, \pi]$

* Si $g(x) = arctg(x)$, entonces $g'(x) = \dfrac{1}{f'(g(x))}$ siendo $f(x) = tg(x)$. Por tanto

$$g'(x) = \frac{1}{1 + tg^2(g(x))} = \frac{1}{1 + x^2} \quad \forall x \in R$$

Recuérdese que $g : R \to \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$

* Si $g(x) = \sqrt[n]{x} = x^{1/n}$, entonces $g'(x) = \dfrac{1}{f'(g(x))}$ siendo $f(x) = x^n$. Por tanto

$$g'(x) = \frac{1}{n(g(x))^{n-1}} = \frac{1}{n\left(x^{1/n}\right)^{n-1}} = \frac{1}{n}\left(x^{1/n}\right)^{1-n} = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

$\forall x \neq 0$ si n es impar , $\forall x > 0$ si n es par

Teorema de Rolle.

Si f es continua en $[a,b]$, derivable en (a,b) y $f(a)=f(b)$, se verifica que existe, al menos, un punto $c\in(a,b)$ tal que $f'(c)=0$, es decir, la tangente a la curva $y=f(x)$ en el punto $(c,f(c))$ es paralela al eje de abscisas.

Como consecuencia (corolario) de este teorema se deduce que si f es derivable en R y $f'(x)\neq 0 \quad \forall x\in R$ entonces la ecuación $f(x)=0$ tiene, a lo sumo, una raíz real. Análogamente en un intervalo (a,b).

Ejercicios:

1) Encontrar una función f definida en $[-1,1]$ que no satisfaga alguna de las hipótesis del teorema de Rolle, y sin embargo verifique $f'(c)=0$ para algún $c\in(-1,1)$.

2) ¿Se puede aplicar el teorema de Rolle a la función $f(x)=|x|$ en $[-1,1]$?

Como consecuencia de los teoremas de Bolzano y de Rolle se deduce:

Si f es continua en $[a,\mathrm{b}]$, $f(a).f(b)<0$, f derivable en (a,b) y $f'(x)\neq 0 \quad \forall x\in(a,b)$, se verifica que existe un único punto $c\in(a,b)$ tal que $f(c)=0$, es decir, en el intervalo (a,b) la ecuación $f(x)=0$ tiene una y solo una raíz.

Ejemplo:

Si $f(x)=\dfrac{x}{2}-sen(x)$, la ecuación $f(x)=0$ tiene una única raíz en el intervalo $\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$ ya que f es continua en $\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$, derivable en $\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$, $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right).f(\pi)<0$ y $f'(x)=\dfrac{1}{2}-\cos(x)\neq 0$ $\forall x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$ puesto que $\cos(x)=\dfrac{1}{2}$ si $x=\dfrac{\pi}{3},\dfrac{5\pi}{3},\ldots$

Ejercicio:

Demostrar que la ecuación $sen(x)+3x-1=0$ tiene una única raíz real y encontrar un intervalo de longitud menor que dos que la contenga.

Regla de L´Hopital.

Nos permite el cálculo de límites con indeterminaciones del tipo $\dfrac{0}{0},\dfrac{\infty}{\infty},0.\infty,\infty-\infty,1^{\infty},\infty^{0}$, 0^0. Lo vamos a enunciar para los dos primeros casos ya que los demás se pueden expresar de alguna de esas dos maneras.

1) Sean f y g dos funciones derivables en un entorno reducido de un punto $c \in R$. Si $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x) = 0$ y existe $\lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, entonces también existe $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)}$ y además,

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

2) Sean f y g dos funciones derivables en un entorno reducido de un punto $c \in R$. Si

$\lim_{x \to c} |f(x)| = \lim_{x \to c} |g(x)| = +\infty$ y existe $\lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, entonces también existe $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)}$ y además,

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

En ambos casos, el resultado es igualmente valido si $c = +\infty$ ó $c = -\infty$. Si en la expresión $\lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ se vuelve a presentar una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$ se puede volver a aplicar la regla de L´Hopital.

Ejercicios.

$$\lim_{x \to 1} \left[\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\log(x)} \right] \qquad \lim_{x \to 0} x^x \qquad \lim_{x \to 0} \frac{tg(x) - x}{x - sen(x)}$$