Tema 4. APLICACIONES LINEALES

Arturo Santamaría

Grado en Ingeniería Informática del Software
Universidad de Oviedo. Departamento de Matemáticas

PRIMER SEMESTRE

Definición

Sean U y V dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales. Una aplicación $f: U \longrightarrow V$ se dice que es una **aplicación lineal** si verifica:

- $f(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) = f(\vec{u}_1) + f(\vec{u}_2) \qquad \forall \vec{u}_1, \vec{u}_2 \in U.$
- $f(\alpha \vec{u}) = \alpha f(\vec{u}) \qquad \forall \alpha \in \mathbb{K}, \ \forall \vec{u} \in U.$

o, equivalentemente, si cumple la siguiente condición:

$$f(\alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2) = \alpha_1 f(\vec{u}_1) + \alpha_2 f(\vec{u}_2) \qquad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}, \ \forall \vec{u}_1, \vec{u}_2 \in U$$

Si $U = V$ la aplicación lineal se dice que es un **endomorfismo**.

Se denota por $L(U, V)$ al conjunto de todas las aplicaciones lineales definidas entre U y V.
En el caso de los endomorfismos de U, escribiremos $L(U)$.

Propiedades

Sea $f: U \longrightarrow V$ una aplicación lineal. Se tiene que:

- $f(\vec{0}_U) = \vec{0}_V.$
- $f(-\vec{u}) = -f(\vec{u}) \qquad \forall \vec{u} \in U.$
- Si $S = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$ es un sistema de vectores de U y $f(S) = \{f(\vec{u}_1), f(\vec{u}_2), \ldots, f(\vec{u}_n)\}$ es el sistema formado por sus imágenes mediante f, entonces:
  - Si S es ligado $f(S)$ es ligado.
  - Si $f(S)$ es libre S es libre.
  - Si S es libre $f(S)$ no tiene porqué ser libre.

Ejemplos 4.1

Consideremos una aplicación $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Se tiene que:

- Si $f(x, y) = (x, x + y + 1, y)$, f no es una aplicación lineal.
- Si $f(x, y) = (2x, x + y, 0)$, f es una aplicación lineal.
- Si $f(x, y) = (x + y^2, y, 0)$, f no es una aplicación lineal.

Suma y producto por un escalar

Sean U y V dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales, $f\colon U \longrightarrow V$ y $g\colon U \longrightarrow V$ dos aplicaciones lineales y $\alpha \in \mathbb{K}$.

Las aplicaciones definidas mediante las siguientes operaciones son también lineales:

- **SUMA**:

$$\begin{array}{rccc} f+g\colon & U & \longrightarrow & V \\ & \vec{u} & \hookrightarrow & (f+g)(\vec{u}) = f(\vec{u}) + g(\vec{u}) \end{array}$$

- **PRODUCTO POR UN ESCALAR**:

$$\begin{array}{rccc} \alpha\cdot f\colon & U & \longrightarrow & V \\ & \vec{u} & \hookrightarrow & (\alpha\cdot f)(\vec{u}) = \alpha\cdot f(\vec{u}) \end{array}$$

Composición

Sean U, V y W tres $\mathbb{K}$-espacios vectoriales, $f\colon U \longrightarrow V$ y $g\colon V \longrightarrow W$ dos aplicaciones lineales.

La siguiente aplicación es también lineal:

- **COMPOSICIÓN**:

$$\begin{array}{rccc} g\circ f\colon & U & \longrightarrow & W \\ & \vec{u} & \hookrightarrow & (g\circ f)(\vec{u}) = g(f(\vec{u})) \end{array}$$

Componer dos aplicaciones es hacerlas actuar una tras otra. Podemos expresarlo de una manera más gráfica así:

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & V \arrow[r, "g"] & W \end{tikzcd}$$

Determinación de aplicaciones lineales

Teorema. (Determinación de aplicaciones lineales)
Sean U y V dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales.
Una aplicación lineal $f\colon U \longrightarrow V$ queda determinada en cuanto se fijan las imágenes de los vectores de una base cualquiera de U.

En efecto:
Sea $B_U = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ una base cualquiera de U.
Supongamos que fijamos las imágenes de los vectores de B_U, de modo que:

$$f(\vec{u}_1) = \vec{a}_1\ ; \qquad f(\vec{u}_2) = \vec{a}_2\ ; \qquad \dots \qquad f(\vec{u}_n) = \vec{a}_n$$

para ciertos vectores $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n \in V$.

Veamos que entonces queda automáticamente determinada la imagen de cualquier otro vector de U y, con ello, la aplicación f.

Sea $\vec{x}$ un vector cualquiera de U tal que:

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)_{B_U} = x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + \dots + x_n\vec{u}_n$$

Tenemos que:

$$f(\vec{x}) = f(x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + \dots + x_n\vec{u}_n) =$$

$$= x_1 f(\vec{u}_1) + x_2 f(\vec{u}_2) + \dots + x_n f(\vec{u}_n) = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \dots + x_n\vec{a}_n$$

De este modo, si son conocidos $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ también lo es $f(\vec{x})$, pues éste sólo depende de dichos vectores y de las coordenadas de $\vec{x}$ en la base B, que son intrínsecas a $\vec{x}$.

Queda así bien definida una única aplicación lineal de la forma:

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\quad f \quad} & V \\ x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + \cdots + x_n\vec{u}_n & \hookrightarrow & x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \cdots + x_n\vec{a}_n \end{array}$$

Matriz de una aplicación lineal

Sean U y V dos espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo $\mathbb{K}$, de dimensiones n y m, respectivamente.

Consideremos una base $B_U = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n\}$ de U y otra $B_V = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_m\}$ de V.

Se considera la aplicación $f \in L(U, V)$ definida por:

$$\begin{cases} f(\vec{u}_1) = \vec{a}_1 = a_{11}\vec{v}_1 + a_{21}\vec{v}_2 + ... + a_{m1}\vec{v}_m \\ f(\vec{u}_2) = \vec{a}_2 = a_{12}\vec{v}_1 + a_{22}\vec{v}_2 + ... + a_{m2}\vec{v}_m \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f(\vec{u}_n) = \vec{a}_n = a_{1n}\vec{v}_1 + a_{2n}\vec{v}_2 + ... + a_{mn}\vec{v}_m \end{cases} \qquad \begin{matrix} a_{ij} \in \mathbb{K} \\ \forall i = 1, ..., m \\ \forall j = 1, ..., n \end{matrix}$$

Así, a_{ij} es la coordenada i-ésima de $f(\vec{u}_j)$ en la base $\mathcal{B}_V$.

La aplicación f queda, en virtud del teorema anterior, definida inequívocamente.

Sea $\vec{x}$ un vector cualquiera de U tal que:

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)_{B_U} = x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + ... + x_n\vec{u}_n$$

siendo $\vec{y}$ su imagen mediante f, de modo que:

$$f(\vec{x}) = \vec{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_m)_{B_V} = y_1\vec{v}_1 + y_2\vec{v}_2 + ... + y_m\vec{v}_m$$

Tenemos que:

$$y_1\vec{v}_1 + y_2\vec{v}_2 + ... + y_m\vec{v}_m = f(\vec{x}) =$$
$$= f(x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + ... + x_n\vec{u}_n) = x_1 f(\vec{u}_1) + x_2 f(\vec{u}_2) + ... + x_n f(\vec{u}_n) =$$
$$= x_1(a_{11}\vec{v}_1 + a_{21}\vec{v}_2 + \cdots + a_{m1}\vec{v}_m) + x_2(a_{12}\vec{v}_1 + a_{22}\vec{v}_2 + \cdots + a_{m2}\vec{v}_m) + \cdots$$
$$\cdots + x_n(a_{1n}\vec{v}_1 + a_{2n}\vec{v}_2 + \cdots + a_{mn}\vec{v}_m) =$$
$$= (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n)\vec{v}_1 + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n)\vec{v}_2 + \cdots$$
$$\cdots + (a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n)\vec{v}_m$$

Haciendo uso de la unicidad de coordenadas de un vector en una base, aplicado en este caso al vector $\vec{y}$ en la base B_V:

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{cases}$$

o matricialmente:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}}_{Y} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{X}$$

Esta ecuación, que podemos expresar brevemente como $Y = AX$, es la **ecuación matricial de la aplicación lineal**.

La matriz $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, así definida, es única y se denomina **matriz de** f **respecto a las bases** B_U **y** B_V.

Se expresa: $A = M(f; B_U, B_V)$.

Si f es un endomorfismo, es decir $U = V$, suele tomarse la misma base de trabajo en el espacio inicial y final, digamos B_U, y en este caso podemos escribir:

$$A = M(f; B_U, B_U) = M(f; B_U)$$

NOTA IMPORTANTE:

Las columnas de $A = M(f; B_U, B_V)$ son las imágenes mediante f de los vectores de B_U, expresados en coordenadas en la base B_V.

Formas de expresar una aplicación lineal

Una aplicación lineal $f \in L(U,V)$ puede expresarse mediante:

- la imagen de un elemento genérico de U.
- las imágenes de los vectores de cualquier base de U.
- la matriz de f respecto a una pareja cualquiera de bases de U y V, respectivamente.

Cambio de representación matricial

En las condiciones anteriores, fijadas bases en U y V, f viene representado de forma única por una matriz, de orden $m \times n$. No obstante, dado que en un espacio vectorial podemos considerar más de una base de trabajo, cabe preguntarse:

¿Cuál es la relación existente entre dos matrices que representan a una misma aplicación lineal utilizando distintas bases?

Dado un vector $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)_{B_U}$ cualquiera de U y su imagen $\vec{y} = f(\vec{x}) = (y_1, y_2, \ldots, y_m)_{B_V}$, trabajando de forma matricial:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \cdots & \vec{u}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\vec{y} = f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

La ecuación matricial de f en las bases B_U y B_V es:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Longrightarrow Y = AX$$

Consideremos unas nuevas bases de trabajo $B'_U = \{\vec{u}'_1, \vec{u}'_2, ..., \vec{u}'_n\}$ y $B'_V = \{\vec{v}'_1, \vec{v}'_2, ..., \vec{v}'_m\}$ en U y V respectivamente. Procediendo de forma análoga con estas nuevas bases, tendremos:

$$\vec{x} = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)_{B'_U} = \begin{pmatrix} \vec{u}'_1 & \vec{u}'_2 & \cdots & \vec{u}'_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

$$\vec{y} = f(\vec{x}) = (y'_1, y'_2, \ldots, y'_m)_{B'_V} = \begin{pmatrix} \vec{v}'_1 & \vec{v}'_2 & \cdots & \vec{v}'_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ \vdots \\ y'_m \end{pmatrix}$$

DEFINICIÓN Y PROPIEDADES
MATRIZ DE UNA APLICACIÓN LINEAL. CAMBIO DE BASE
NÚCLEO E IMAGEN DE UNA APLICACIÓN LINEAL
CLASIFICACIÓN DE LAS APLICACIONES LINEALES
Determinación de aplicaciones lineales
Matriz de una aplicación lineal
Cambio de representación matricial de una aplicación lineal
Relación entre la representación matricial y las operaciones

La ecuación matricial de f en las bases B'_U y B'_V será:

$$\begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ \vdots \\ y'_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} \\ a'_{21} & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a'_{m1} & a'_{m2} & \cdots & a'_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \Longrightarrow Y' = A'X'$$

donde $A' = M(f; B'_U, B'_V)$.

¿Qué relación existe entre A y A'?

Arturo Santamaría ÁLGEBRA LINEAL

DEFINICIÓN Y PROPIEDADES
MATRIZ DE UNA APLICACIÓN LINEAL. CAMBIO DE BASE
NÚCLEO E IMAGEN DE UNA APLICACIÓN LINEAL
CLASIFICACIÓN DE LAS APLICACIONES LINEALES
Determinación de aplicaciones lineales
Matriz de una aplicación lineal
Cambio de representación matricial de una aplicación lineal
Relación entre la representación matricial y las operaciones

Sea P la matriz de paso de B_U a B'_U y Q la matriz de paso de B_V a B'_V. En estas condiciones:

$$\left\{\begin{array}{c} Y' = A'X' \\ Y = AX \\ X = PX' \\ Y = QY' \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} Y' = A'X' \\ Y = AX \\ X = PX' \\ Y' = Q^{-1}Y \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} Y' = A'X' \\ X = PX' \\ Y' = Q^{-1}AX \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} Y' = A'X' \\ Y' = (Q^{-1}AP)X' \end{array}\right\}$$

Arturo Santamaría ÁLGEBRA LINEAL

DEFINICIÓN Y PROPIEDADES
MATRIZ DE UNA APLICACIÓN LINEAL. CAMBIO DE BASE
NÚCLEO E IMAGEN DE UNA APLICACIÓN LINEAL
CLASIFICACIÓN DE LAS APLICACIONES LINEALES
Determinación de aplicaciones lineales
Matriz de una aplicación lineal
Cambio de representación matricial de una aplicación lineal
Relación entre la representación matricial y las operaciones

Como esto es válido para cualquier vector $\vec{x}$, $Q^{-1}AP$ hace el papel de $M(f; B'_U, B'_V)$. Pero dicha matriz es única y en nuestro caso es A', luego:

$$A' = Q^{-1}AP$$

Se dice que A y A' son **matrices equivalentes** (tienen entre sí una relación como la anterior con $P, Q \in GL_n(\mathbb{K})$).

Si f es un endomorfismo, cuando se considera la misma base de trabajo en el espacio inicial y final, $Q = P$, con lo cual:

$$A' = P^{-1}AP$$

y decimos que A y A' son **matrices semejantes** (tienen entre sí una relación como la anterior con $P \in GL_n(\mathbb{K})$).

Arturo Santamaría ÁLGEBRA LINEAL

NOTA:

Dada una matriz $A = M(f; B_U, B_V)$ de $f \in L(U, V)$, todas las demás matrices que representan a f en distintas bases son equivalentes a A.

Recíprocamente, toda matriz equivalente a A, pongamos $A' = Q^{-1}AP$ con $P, Q \in GL_n(\mathbb{K})$, representa a f en una cierta pareja de bases que están relacionadas con B_U y B_V por medio de las matrices de equivalencia P y Q como matrices de paso.

Ejemplo 4.2

Sean $B_1 = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ y $B_2 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ bases de $\mathbb{R}^3$ y de $\mathbb{R}^2$, respectivamente. Consideremos $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la aplicación lineal, tal que:

$$\begin{cases} f(\vec{e}_1) = 2\vec{v}_1 + 3\vec{v}_2 \\ f(\vec{e}_2) = -\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 \\ f(\vec{e}_3) = \vec{v}_1 - 3\vec{v}_2 \end{cases}$$

(a) Sea $B'_1 = \{\vec{e}\,'_1 = \vec{e}_2 + \vec{e}_3;\ \vec{e}\,'_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_3;\ \vec{e}\,'_3 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2\}$ una nueva base en $\mathbb{R}^3$. Determinar $A_1 = M(f; B'_1, B_2)$.

(b) Dada la base $B'_2 = \left\{\vec{v}\,'_1 = \frac{1}{2}(\vec{v}_1 + \vec{v}_2);\ \vec{v}\,'_2 = \frac{1}{2}(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)\right\}$ de $\mathbb{R}^2$, hallar $A_2 = M(f; B_1, B'_2)$.

(c) Calcular $A' = M(f; B'_1, B'_2)$.

Ejemplo 4.3 (El cambio de base como aplicación lineal)

Dado un $\mathbb{K}$-espacio vectorial U, la aplicación identidad:

$$\begin{array}{rccc} id_U\colon & U & \longrightarrow & U \\ & \vec{u} & \hookrightarrow & (id_U)(\vec{u}) = \vec{u} \end{array}$$

es lineal.

El cambio de base entre dos bases B_U y B'_U de U puede considerarse como un endomorfismo de U, en el que se consideran, como bases de trabajo, B'_U en el espacio inicial y B_U en el final.

En efecto, si P es la matriz de cambio de base de B_U a B'_U, se tiene que:

$$M(id_U; B'_U, B_U) = P$$

Relación entre la repr. matricial y las operaciones

Sean U, V y W tres $\mathbb{K}$-espacios vectoriales con bases B_U, B_V y B_W respectivamente.

Consideremos las aplicaciones lineales $f\colon U \to V$, $g\colon U \to V$ y $h\colon V \to W$, de tal forma que:

- $A = M(f; B_U, B_V)$.
- $B = M(g; B_U, B_V)$.
- $C = M(h; B_V, B_W)$.

Entonces:

1. $M(f + g; B_U, B_V) = A + B$.
2. $M(\alpha \cdot f; B_U, B_V) = \alpha \cdot A, \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}$.
3. $M(h \circ f; B_U, B_W) = C \cdot A$.

Imagen e imagen recíproca de subespacios

Sean U y V dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales y $f \in L(U,V)$.

- Dado un subespacio vectorial S de U, llamaremos **imagen de S mediante f** al conjunto:

$$f(S) = \{f(\vec{s}) \ / \ \vec{s} \in S\} = \{\vec{v} \in V \ / \ \vec{v} = f(\vec{s}), \text{ para algún } \vec{s} \in S\}$$

  Si S un subespacio vectorial de U, su imagen $f(S)$ es un subespacio vectorial de V.
- Dado un subespacio vectorial T de V, se llama **imagen recíproca** o **antiimagen** de T mediante f al conjunto:

$$f^{-1}(T) = \{\vec{u} \in U \ / \ f(\vec{u}) \in T\}$$

  Si T un subespacio vectorial de V, su imagen recíproca $f^{-1}(T)$ es un subespacio vectorial de U.

Imagen de una aplicación lineal

Sean U y V dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales y $f \in L(U,V)$.

Llamamos **imagen de** f al subespacio vectorial de V:

$$Im(f) = f(U) = \{f(\vec{u}) \ / \ \vec{u} \in U\} =$$

$$= \{\vec{v} \in V \ / \ \vec{v} = f(\vec{u}), \text{ para algún } \vec{u} \in U\}$$

- $Im(f)$ es un subespacio vectorial de V.
- Se llama **rango de** f a la dimensión de su imagen:

$$rg(f) = dim(Im(f))$$

- Si $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$ es una base de U, entonces:

$$Im(f) = \langle f(\vec{u}_1), f(\vec{u}_2), \ldots, f(\vec{u}_n)\rangle$$

Núcleo de una aplicación lineal

Sean U y V dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales y $f \in L(U,V)$.

Se llama **núcleo de** f al subespacio vectorial de U:

$$Ker(f) = f^{-1}(\{\vec{0}_V\}) = \{\vec{u} \in U \ / \ f(\vec{u}) = \vec{0}_V\}$$

- $Ker(f)$ es un subespacio vectorial de U.

Teorema. (Ecuación de dimensiones)
Dada una aplicación lineal $f : U \longrightarrow V$ se cumple que:

$$dim(U) = dim(Im(f)) + dim(Ker(f)) = rg(f) + dim(Ker(f))$$

Tipos de aplicaciones

Sea $f\colon A \longrightarrow B$ una aplicación entre dos conjuntos A y B.

- f es **inyectiva** cuando a elementos distintos de A les corresponden imágenes distintas mediante f, es decir:

$$x, y \in A, \quad x \neq y \quad \Longrightarrow \quad f(x) \neq f(y)$$

  o, equivalentemente, si:

$$x, y \in A, \quad f(x) = f(y) \quad \Longrightarrow \quad x = y$$

- f es **suprayectiva** si todo elemento de B es imagen de, al menos, un elemento de A, es decir:

$$\forall x \in B, \quad \exists y \in A \ / \ f(y) = x$$

- f es **biyectiva** si es inyectiva y suprayectiva.

Caracterizaciones

Sean U y V dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales y $f \in L(U,V)$.

- f es inyectiva $\iff$ $Ker(f) = \left\{\vec{0}_U\right\}$.
- f es suprayectiva $\iff$ $Im(f) = V$.
- Si f es biyectiva, decimos que f es un **isomorfismo**. En este caso:
  - $\dim(U) = \dim(V)$.
  - Cualquier matriz de f es cuadrada e inversible.

Ejemplo 4.4

Se considera la aplicación lineal $f : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por:

$$\begin{cases} f(x+1) = (1,0,0) \\ f(x^2+x) = (1,1,0) \\ f(x^2-x-1) = (0,0,0) \end{cases}$$

Hallar la matriz de f respecto de la base canónica de $\mathbb{R}_2[x]$ y de la base $B_2 = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$.

Ejemplo 4.5

Se considera la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}_3[x]$ tal que:

$$\begin{cases} f(1,1,1) = x^3 + 2x + 1 = f(0,1,1) \\ f(0,0,1) = 3x^3 + 2x^2 + 3x - 1 \end{cases}$$

Se pide:

(a) Matriz de f en las bases canónicas.

(b) Base, ecuaciones paramétricas e implícitas de $Ker(f)$.

(c) Base, ecuaciones paramétricas e implícitas de $Im(f)$.