Universidad de Oviedo
Universidá d'Uviéu
University of Oviedo

Bloque I
Fundamentos de la Lógica

Departamento de Informática
Ciencia de la Computación e Inteligencia Artificial
Universidad de Oviedo

Introducción

¿Por qué estudiamos Lógica?

- Precursora y parte integral de la Informática: Inteligencia Artificial, Programación Lógica, Computabilidad y Complejidad, Bases de Datos Relacionales, Electrónica Digital….

Un ejemplo:

- Mario escribe un programa en Java con un condicional:.

```
if( a < b || (a >= b && c == d)) …
```

- María propone reescribirlo de forma más sencilla:

```
if( a < b || c == d) …
```

- ¿Es lo mismo? ¿Por qué?

Evolución

350a.c. — Nacimiento

Etapa filosófica

1700

1847

1879 — Etapa matemática

1900

1910

1930

1933

1945 — Etapa informática

1958

1969

2000

Lógica

↓

Computabilidad

↓

Informática

Introducción. Lógica para la informática

- Inteligencia Artificial
  - representación y gestión del conocimiento,
  - planificación,
  - aprendizaje automático,…
- Diseño de Hardware
- Robótica
- Programación Lógica
- Bases de Datos Relacionales
- Especificación y verificación de software
- Electrónica digital: diseño y verificación de circuitos
- Diseño de lenguajes de programación…

Introducción. El lenguaje de la Lógica

Lenguaje Natural

- Instrumento de comunicación humano.
  - Flexible y expresivo
  - Redundante y ambiguo
- Tipos uso: interrogativo, imperativo, **declarativo**

Lógica Formal.

- Lenguaje formal para modelar y construir conocimiento.
  - Riguroso, preciso y no ambiguo
  - Mucho menos expresivo
  - Centrado en sentencias que toman valor **verdadero** o **falso**

Introducción. El lenguaje de la Lógica

- El conocimiento puede tenerse por
  - Constatación de un hecho o idea, reflejada en frases de tipo declarativo
    - *Alguien nos dice que "Está lloviendo" o vemos por la ventana que está lloviendo*
  - Deducción (o razonamiento) a partir de una serie de declaraciones, de otras nuevas cuya afirmación se sigue necesariamente de las declaraciones previas.
    - *Conocemos que Pedro sólo coge el paraguas el día que llueve, y hoy le vemos con paraguas; podemos deducir que está lloviendo.*

- **Resolver un problema en lógica:**
  1. Representar el problema (las frases/declaraciones) en términos lógicos (mediante **fórmulas lógicas**).
  2. Manipular, relacionar, combinar distintas fórmulas usando los métodos disponibles para comprobar si un razonamiento es correcto.

Introducción

El propósito de la lógica es estudiar la corrección de Razonamientos

- **Razonamiento:** Varias premisas seguidas de una conclusión
- En cualquier razonamiento humano de tipo deductivo, que sea correcto, se preserva la verdad
  - Si en un cierto dominio del discurso las premisas de las que parte el razonamiento son verdaderas la conclusión también lo será.
- **Ejemplos**

Si *Juan es un hombre* ***entonces*** *Juan es mortal* **.** *Juan es un hombre.* ***Por tanto***, *Juan es mortal.*

Juan es un hombre ***Por tanto***, *Juan es mortal.*

¿Misma estructura lógica? **No!!!**

Introducción

Propósito: estudiar la corrección de Razonamientos

- Cualquier razonamiento con la estructura del primero será correcto

  Si ***entonces*** **.**
  Por tanto,

  - **Si como helado entonces voy al cine. Como helado. Por tanto voy al cine.**
  - **Si quedo con amigos entonces juego a las cartas. Quedo con amigos. Por tanto juego a las cartas.**

- Sin embargo, hay un montón de razonamientos con la estructura del segundo que no concluimos intuitivamente que sean correctos

  Por tanto,

  - ***La luna es amarilla. Por tanto, la luna está hecha de queso***
  - ***Como judías. Por tanto, mi cara es verde***

Ejemplos de Razonamientos

1. *Si el bucle se detiene, se lanza una excepción. Si se lanza una excepción se muestra la pantalla azul. No se muestra la pantalla azul. Por tanto, el bucle no se detiene.*
2. *Si llueve, María se enfada. Si María se enfada Juan duerme en el sofá. Juan no duerme en el sofá. Por tanto, no llueve.*
3. *Todas las variables del primer bucle están inicializadas. x es una variable del primer bucle. Por tanto x está inicializada*
4. *Todos los profesores son buenos. Juan es un profesor. Por tanto, Juan es bueno.*
5. *Todos los profesores son buenos. Luis es bueno. Por tanto, Luis es profesor*

¿Cuáles de los razonamientos tienen la misma estructura lógica?

Ejemplos de Razonamientos

1. *Si el bucle se detiene, se lanza una excepción. Si se lanza una excepción se muestra la pantalla azul. No se muestra la pantalla azul. Por tanto, el bucle no se detiene.*
2. *Si llueve, María se enfada. Si María se enfada Juan duerme en el sofá. Juan no duerme en el sofá. Por tanto, no llueve.*
3. *Todas las variables del primer bucle están inicializadas. x es una variable del primer bucle. Por tanto x está inicializada*
4. *Todos los profesores son buenos. Juan es un profesor. Por tanto, Juan es bueno.*
5. *Todos los profesores son buenos. Luis es bueno. Por tanto, Luis es profesor*

¿Cuáles de los razonamientos son correctos?

Lenguajes de la Lógica

¿Hay sólo una Lógica? No, "lógica" se refiere a una familia de lenguajes formales con distintas propiedades y niveles de expresividad:

- Lógicas clásicas: lógica de proposiciones y lógica de predicados
- Lógicas no clásicas: lógica modal, lógica multivaluada, lógica difusa…

Niveles de expresividad

Lógica de Proposiciones (L0)

- **+** sencillo, **-** expresivo.
- Elemento básico: proposición o enunciado simple
- Ejemplo: ***p:*** "Messi protagoniza FIFA 18"

Lógica de Predicados (L1)

- **+** expresivo (y + complejo)
- Elementos básicos: objetos, relaciones y propiedades de ellos
- Ejemplo: ***p(messi,fifa18)*** donde *p(X,Y)* representa que *X* protagoniza *Y*

Computabilidad. Bloques

Bloque I: Fundamentos de la Lógica

1. **Lógica Proposicional**
2. Lógica de Predicados

Bloque II: Teoría de la Computabilidad

3. Modelos de Computación y Funciones Computables.
4. Resultados Fundamentales y Resolubilidad de Problemas.

Universidad de Oviedo
Universidá d'Uviéu
University of Oviedo

Tema 1
Lógica Proposicional (L0)

Departamento de Informática
Ciencia de la Computación e Inteligencia Artificial
Universidad de Oviedo

L0. Contenidos

- Del Lenguaje Natural al Lenguaje de la Lógica Proposicional
- Sintaxis y Semántica
  - Alfabeto y Reglas
  - Semántica
    - Evaluación: Interpretación y Reglas Semánticas
  - Clasificación: Fórmulas y Conjuntos de Fórmulas
  - Equivalencia
  - Consecuencia Lógica y Razonamiento Correcto
- Prueba de la Consecuencia lógica
  - Métodos Semánticos:
    - Tablas de Verdad
    - Pruebas por Contradicción
  - Métodos Sintácticos:
    - Resolución Proposicional
    - Deducción Natural

L0 Lógica Proposicional

Como se ha indicado previamente

Para estudiar la corrección de una deducción o razonamiento enunciado en Lenguaje Natural**, hemos de identificar su estructura lógica y representarla en el <u>Lenguaje Proposicional</u>**, es decir realizar una "abstracción" de uno a otro.

L0 Lenguaje Proposicional

Idea intuitiva

- **Enunciado simple** (**proposición**): unidad mínima del lenguaje con contenido de información, sobre cuya verdad o falsedad es posible pronunciarse.
  - Acciones con sujeto indeterminado: **llueve, es invierno**, etc..
  - Atribuciones de propiedades a sujetos concretos: **Gasol es alto, Juan es médico**, etc…
  - Relaciones entre sujetos: **Juan es amigo de Pedro, Laura juega con Mario**, etc…

Contraejemplos: ¿Qué hora es?, ¡Genial!, 2+2, Pedro, etc…

- Permite construir **enunciados complejos** con conexiones gramaticales simples: y, o, no, … (**conectivas**)
  - Pedro estudia Informática **pero no** va a clase
  - **No** llueve
  - Juan vive solo **y no** quiere compañía
  - **No** como helado
  - Los alumnos van a clase **o** a la cafetería

Conectiva	Conexión Gramatical	
$\neg$	**no …**	**Negación**
$\wedge$	**… y …**	**Conjunción**
$\vee$	**… o …**	**Disyunción**
$\rightarrow$	**Si … entonces …**	**Implicación**
$\leftrightarrow$	**… si y sólo si …**	**Doble implicación**

L0. Del L. Natural al L. Proposicional

Parafraseo de Conectivas

No (Negación)

p	*Es lunes*
$\neg p$	***No** es lunes*

Es falso que sea lunes
No es cierto que sea lunes

Y (Conjunción)

p	*Es lunes*
q	*Llueve*
$p \wedge q$	*Es lunes **y** llueve*

Es lunes **pero** llueve
Es lunes **sin embargo** llueve
Es lunes **no obstante** llueve
Es lunes **a pesar de que** llueve

O (Disyunción)

p	*Es lunes*
q	*Llueve*
$p \vee q$	*Es lunes **o** llueve*

o es lunes **o** llueve **o ambos**
al menos es lunes **o** llueve
como mínimo es lunes **o** llueve

Si … entonces… (Condicional)

p	*Es de España*
q	*Es europeo*
$p \rightarrow q$	***Si** es de España **entonces** es europeo*

Cuando es de España, es europeo.
Es europeo **cuando** es de España.
Es europeo **si** es de España.
Es de España **sólo si** es europeo.
Es suficiente que sea de España **para** que sea europeo
Es necesario que sea europeo **para** que sea de España
No es de España **a menos que** sea europeo

… sí y sólo si… (Bicondicional)

p	*Es ciudadano Español*
q	*Tiene la nacionalidad española*
$p \leftrightarrow q$	*Es ciudadano español **sí y sólo si** tiene la nacionalidad española*

Es necesario y suficiente que sea lunes **para** que llueva

L0. Del L. Natural al L. Proposicional

Ejemplo

***Si** el sensor se activa **y no** hay vigilante **entonces** la alarma salta*

⇩

Si p y no q entonces r

⇩

$(p \wedge \neg q) \rightarrow r$

Proposiciones simples

Identificar enunciados declarativos simples en L. Natural

"el sensor se activa" (p)

"hay vigilante" (q)

"salta la alarma" (r)

Conectivas

Identificar conexiones gramaticales

Si..entonces.. ($\rightarrow$)

y ($\wedge$)

No ($\neg$)

L0. Del L. Natural al L. Proposicional

Traduce de L. Natural a L. Proposicional

El bizcocho sube sólo si tiene levadura pero para que no suba es suficiente abrir el horno.

En este blog no se borran los comentarios a menos que contengan insultos o estén fuera de la temática del post.

Las pensiones del Régimen General son incompatibles entre sí cuando coincidan en un mismo beneficiario, a menos que expresamente se disponga lo contrario.

L0. Del L. Natural al L. Proposicional

Traduce de L. Natural a L. Proposicional

El bizcocho sube sólo si tiene levadura pero para que no suba es suficiente abrir el horno.

Proposiciones:
p: El bizcocho sube
q: Tiene levadura
r: Abrir el horno

p *sólo si* ***q*** *pero para que no* ***p*** *es suficiente* ***r****.*

L0. Del L. Natural al L. Proposicional

Traduce de L. Natural a L. Proposicional

El bizcocho sube sólo si tiene levadura pero para que no suba es suficiente abrir el horno.

Proposiciones:
p: El bizcocho sube
q: Tiene levadura
r: Abrir el horno

$\wedge$

p *sólo si* ***q*** *pero para que no* ***p*** *es suficiente* ***r****.*

L0. Del L. Natural al L. Proposicional

Traduce de L. Natural a L. Proposicional

El bizcocho sube sólo si tiene levadura pero *para que no suba es suficiente abrir el horno*.

Proposiciones:
p: El bizcocho sube
q: Tiene levadura
r: Abrir el horno

$\boxed{(p \rightarrow q)} \wedge$

p *sólo si* ***q*** *pero* *para que no* ***p*** *es suficiente* ***r***.

L0. Del L. Natural al L. Proposicional

Traduce de L. Natural a L. Proposicional

El bizcocho sube sólo si tiene levadura pero *para que no suba es suficiente abrir el horno*.

Proposiciones:
p: El bizcocho sube
q: Tiene levadura
r: Abrir el horno

$$\boxed{(p \to q)} \wedge \boxed{(r \to \neg p)}$$

p** sólo si **q pero *para que no **p** es suficiente **r***.

Nombre de la conectiva	Representación en lógica	Frases en lenguaje natural
Negación	$\sim p$	no p es falso p no es cierto p
Conjunción	$p \wedge q$	p y q p pero q p sin embargo q p no obstante q p a pesar de q
Disyunción	$p \vee q$	p o q o p o q o ambos al menos p o q como mínimo p o q
Condicional	$p \rightarrow q$ (p sería el antecedente y q el consecuente)	si p entonces q p sólo si q q si p q cuando p q es necesario para p p es suficiente para q no p a menos que q
Bicondicional	$p \leftrightarrow q$	p es necesario y suficiente para q p sí y sólo si q

L0. Del L. Natural al L. Proposicional

Ambigüedades

El lenguaje natural puede ser ambiguo.

Ejemplo

Cuando no hay electricidad el robot se detiene y el sensor se activa

Cuando no p q y r

p = hay electricidad
q = el robot se detiene
r = el sensor se activa

$(\neg p \rightarrow q) \wedge r$ $\neg p \rightarrow (q \wedge r)$

?

L0. Contenidos

- Del Lenguaje Natural al Lenguaje de la Lógica Proposicional
- Sintaxis y Semántica
  - Alfabeto y Reglas
  - Semántica
    - Evaluación: Interpretación y Reglas Semánticas
  - Clasificación: Fórmulas y Conjuntos de Fórmulas
  - Equivalencia
  - Consecuencia Lógica y Razonamiento Correcto
- Prueba de la Consecuencia lógica
  - Métodos Semánticos:
    - Tablas de Verdad
    - Pruebas por Contradicción
  - Métodos Sintácticos:
    - Resolución Proposicional
    - Deducción Natural

L0. Sintaxis

- La **Sintaxis** especifica qué frases están bien formadas (tienen un “formato adecuado”) en el lenguaje formal de la L0. Se define mediante:
  - Alfabeto: conjunto de símbolos del lenguaje
  - Reglas Sintácticas: reglas qué indican cómo combinar símbolos para formar “frases” (sentencias / fórmulas)

- **Sintaxis:** ejemplos
  - Matemáticas: x + y = 4 // + yx4 =
  - Castellano: Ana escucha su iPod // su Ana iPod escucha
  - Java:

```
for (int i=0; i<10; i++){count++;}// for (int i=0, i<10;) i++}{count++;
```

L0. Sintaxis. Alfabeto

Alfabeto del Lenguaje Proposicional: conjunto de símbolos que se pueden utilizar para construir las cadenas del lenguaje

- Conjunto finito o numerable de símbolos proposicionales

  $\mathcal{P} = \{p, q, r, p1, \ldots.\}$

- Conjunto de símbolos de conectivas: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
- Símbolos de Verdad: **V**, **F** (*Constantes Lógicas*)
- Símbolos de puntuación: (…), para ganar legibilidad {, }, [,]

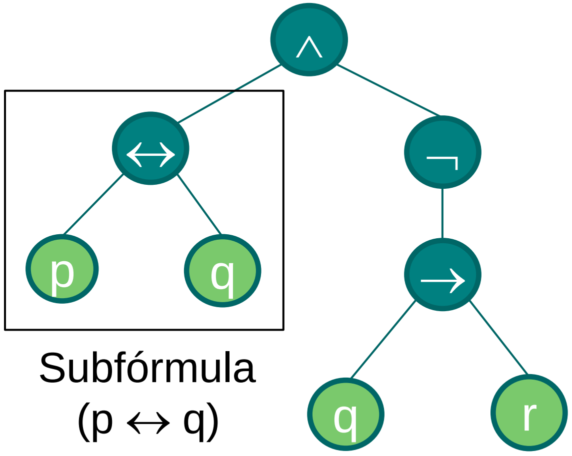
L0. Sintaxis. Reglas

- Conjunto $\mathcal{F}$ de ***Fórmulas Bien Formadas (fbf)***: cadenas de símbolos del lenguaje L0 sintácticamente correctas.
- **Fórmulas Bien Formadas (fbf).** Se obtienen aplicando un número finito de veces las siguientes reglas sintácticas:
  - Caso básico. Símbolos Proposicionales y Constantes Lógicas
    - $\mathcal{P} \subset \mathcal{F}$ Fórmulas atómicas /proposiciones
    - $\{\mathbf{V},\mathbf{F}\} \subset \mathcal{F}$
  - Paso inductivo. Si *F y G son* fbf entonces también lo son:
    - $(\neg F), (F \wedge G), (F \vee G), (F \rightarrow G), (F \leftrightarrow G) \in \mathcal{F}$

      Fórmulas compuestas
- Las fbf se denominan simplemente fórmulas

Árbol de formación

$((p \leftrightarrow q) \wedge (\neg(q \rightarrow r)))$



L0. Sintaxis: Prioridad de Conectivas

- Permite omitir el uso de paréntesis

Prioridades[*]

+	$\neg$
	$\wedge$
	$\vee$
	$\rightarrow$
-	$\leftrightarrow$

Ejemplos

Fórmula con paréntesis	Fórmula equivalente sin paréntesis
$(p\wedge(\neg q))$	$p\wedge\neg q$
$((p\wedge q)\rightarrow r)$	$p\wedge q\rightarrow r$
$((\neg p)\leftrightarrow(q\vee r))$	$\neg p\leftrightarrow q\vee r$
$((p \vee (q \wedge p)) \rightarrow r)$	$p \vee q \wedge p \rightarrow r$

Entre conectivas de igual nivel tiene prioridad la más a la izquierda

Ejemplo: Escribimos $p\rightarrow q\rightarrow r$ en lugar de $((p\rightarrow q)\rightarrow r)$

(*) M. Ben-Ari. Mathematical Logic for Computer Science. Springer-Verlag, 2012.

L0. Sintaxis. Reglas

Ejercicio: ¿Son todas fbf?

$\neg q$ | $\neg(\neg q)$ | $(p\wedge\neg q)$ | $(p\rightarrow q)$ | $(\neg p\vee q)\leftrightarrow(\neg q\rightarrow\neg(p\wedge r))$

$(p\wedge q)\leftrightarrow(\neg q\rightarrow r)$ | $p\wedge\wedge q\vee r$ | $(p\wedge q)\vee r$ | $(p\wedge q)\rightarrow F$ | V

L0. Sintaxis. Reglas

Ejercicio: ¿Son todas fbf?

$\neg q$ | $\neg (\neg q)$ | $(p \wedge \neg q)$ | $(p \rightarrow q)$ | $(\neg p \vee q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg (p \wedge r))$

$(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow r)$ | $\cancel{p \wedge \wedge q \vee r}$ | $(p \wedge q) \vee r$ | $(p \wedge q) \rightarrow F$ | V

Dos conectivas no deben ser adyacentes, a no ser que una de ellas sea la negación $\neg$

L0. Sintaxis. Árbol de formación

Ejercicio: Representar el árbol de las fórmulas

$p \wedge q \leftrightarrow \neg q \rightarrow r$	$p \wedge q \vee r$	$\neg p \vee q \leftrightarrow \neg q \rightarrow \neg(p \wedge r)$

L0. Semántica. Motivación

- La **Semántica** de una fórmula corresponde a su significado
- Matemáticas: $x + y = 4$ es:
  - Verdadera en una situación en la que x e y valen 2
  - Falsa en una situación en la que x vale 1 e y vale 2
- En Java: "lista.size() < 3" es:
  - Verdadera cuando lista es una lista vacía.
  - Falsa cuando lista contiene los números del 1 al 10
- En lógica, la semántica permite definir el *valor de verdad* de una fórmula con respecto a una situación concreta, mundo posible o configuración dada

L0. Semántica

- Asocia un **significado** a las fórmulas proposicionales
  - En lógica clásica sólo hay **dos significados posibles**: los valores de verdad **Verdadero (V)** o **Falso (F).** Las fórmulas son "Verdaderas" o "Falsas" en cada mundo/configuración posible
  - **El significado de la fórmula en una situación** depende sólo del valor de verdad de las proposiciones que la componen y de cómo se combinan. Es independiente de cualquier otro significado o interpretación de la vida real.
- **Evaluación** de fórmulas
  - Mecanismo que permite asignar un valor de verdad (**V** / **F**) a una fórmula, a partir de una asignación de valores de verdad para cada una de las proposiciones atómicas que aparecen en ella (**Interpretación**) y las **Reglas semánticas** de las conectivas.

L0. Semántica. Interpretación

Interpretación

Sea $\mathcal{P}$ el conjunto de símbolos proposicionales de una fórmula *F*, una **Interpretación** I para la fórmula *F* es una aplicación

$$\mathrm{I}: \mathcal{P} \rightarrow \{\mathbf{V}, \mathbf{F}\}$$

- **Ejemplo**

  Fórmula *F* : $p \wedge \neg q \rightarrow r$

$I = \{ p^I = \mathbf{V}, q^I = \mathbf{F}, r^I = \mathbf{V} \}$

$J = \{ p^J = \mathbf{F}, q^J = \mathbf{V}, r^J = \mathbf{F} \}$

…

¿Cuántas interpretaciones posibles puede tener una fórmula proposicional?

2^n donde **n** es el **número símbolos proposicionales distintos** de la fórmula

L0. Semántica. Reglas

Dada una interpretación I, el **valor de verdad bajo I de una fórmula F (F^I)** viene dado por las siguientes reglas semánticas

1. Si F = proposición atómica **p**, $F^I = p^I$
2. Para cualesquiera G y H fbf

$$\text{Si } F = G \wedge H,\ F^I = \begin{cases} \mathbf{V} & \text{si } G^I = \mathbf{V} \text{ y } H^I = \mathbf{V} \\ \mathbf{F} & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$\text{Si } F = G \vee H,\ F^I = \begin{cases} \mathbf{F} & \text{si } G^I = \mathbf{F} \text{ y } H^I = \mathbf{F} \\ \mathbf{V} & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$\text{Si } F = G \rightarrow H,\ F^I = \begin{cases} \mathbf{F} & \text{si } G^I = \mathbf{V} \text{ y } H^I = \mathbf{F} \\ \mathbf{V} & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$\text{Si } F = G \leftrightarrow H,\ F^I = \begin{cases} \mathbf{V} & \text{si } G^I = H^I \\ \mathbf{F} & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$\text{Si } F = \neg G,\ F^I = \begin{cases} \mathbf{V} & \text{si } G^I = \mathbf{F} \\ \mathbf{F} & \text{si } G^I = \mathbf{V} \end{cases}$$

L0. Semántica. Evaluación

Evaluar la Fórmula $F = p \wedge \neg q \rightarrow r$ bajo las interpretaciones **I** y **J**

$I = \{ p^I = \mathbf{V}, q^I = \mathbf{F}, r^I = \mathbf{F} \}$

$$p \wedge \neg q \rightarrow r$$

$$\underbrace{\underbrace{\mathbf{V} \wedge \underbrace{\neg \mathbf{F}}_{\mathbf{V}}}_{\mathbf{V}} \rightarrow \mathbf{F}}_{\mathbf{F}}$$

$$\boxed{F^I = \mathbf{F}}$$

I es un ***Contramodelo*** para **F**

$J = \{ p^J = \mathbf{F}, q^J = \mathbf{V}, r^J = \mathbf{F} \}$

$$p \wedge \neg q \rightarrow r$$

$$\underbrace{\underbrace{\mathbf{F} \wedge \underbrace{\neg \mathbf{V}}_{\mathbf{F}}}_{\mathbf{F}} \rightarrow \mathbf{F}}_{\mathbf{V}}$$

$$\boxed{F^J = \mathbf{V}}$$

J es un ***Modelo*** para **F**

L0. Tablas de Verdad

- Representación tabular de los valores de una fórmula bajo todas las interpretaciones

- Representación semántica de las conectivas como Tablas de Verdad

p	¬p
V	F
F	V

p	q	p ∧ q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

p	q	p ∨ q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

p	q	p → q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

p	q	p ↔ q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

L0. Tablas de Verdad

- Permiten determinar los valores de una fórmula bajo todas las interpretaciones

$F = p \wedge \neg q \rightarrow r$ tiene 2^3 interpretaciones

p	q	r	¬q	p ∧¬q	p ∧¬q → r
V	V	V	F	F	V
V	V	F	F	F	V
V	F	V	V	V	V
V	F	F	V	V	F
F	V	V	F	F	V
F	V	F	F	F	V
F	F	V	V	F	V
F	F	F	V	F	V

L0. Contenidos

- Del Lenguaje Natural al Lenguaje de la Lógica Proposicional
- Sintaxis y Semántica
  - Alfabeto y Reglas
  - Semántica
    - Evaluación: Interpretación y Reglas Semánticas
  - Clasificación: Fórmulas y Conjuntos de Fórmulas
  - Equivalencia
  - Consecuencia Lógica y Razonamiento Correcto
- Prueba de la Consecuencia lógica
  - Métodos Semánticos:
    - Tablas de Verdad
    - Pruebas por Contradicción
  - Métodos Sintácticos:
    - Resolución Proposicional
    - Deducción Natural

L0. Clasificación de Fórmulas

- **Válida** (o **Tautología**): Verdadera en todas las interpretaciones

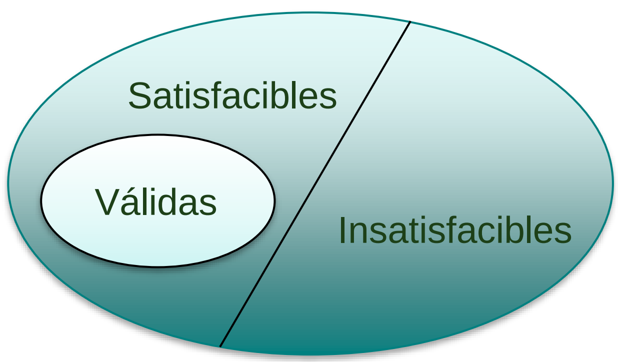
F válida sii $\forall \boldsymbol{I} \,/\, F^{I} = \mathbf{V}$

- **Satisfacible:** Verdadera en alguna interpretación

F satisfacible sii $\exists \boldsymbol{I} \,/\, F^{I} = \mathbf{V}$

- **Insatisfacible:** Falsa en todas las interpretaciones

F insatisfacible sii $\forall \boldsymbol{I} \,/\, F^{I} = \mathbf{F}$



Todas las fórmulas

L0. Clasificación Fórmulas

Ejercicio
Justificar el teorema

Teorema (válida/insatisfacible)

Una fórmula *F* es válida si y sólo si ¬ *F* es insatisfacible

Principio de espejo

L0. Clasificación Fórmulas

Ejercicio
Justificar el teorema

Teorema (válida/insatisfacible)

Una fórmula *F* es válida si y sólo si ¬ *F* es insatisfacible

Demostración:

F válida

sii $\forall I$ / F^I = **V** // por la definición de fórmula válida

sii $\forall I$ / $(\neg F)^I$ = **F** // por las reglas de la semántica

sii ¬*F* es insatisfacible **//** por la definición de insatisfacible

F	¬*F*
V	F
V	F
V	F
.	.
.	.
.	.
V	F
V	F

Puede justificarse mediante tablas de verdad

Válida Insatisfacible

L0. Clasificación Fórmulas

- **Ejercicio:** Clasifica las siguientes fórmulas

$p\rightarrow q\vee r$
$\neg(p\rightarrow q\vee r)$
$\neg p\vee q\leftrightarrow\neg q\rightarrow\neg p$
$\neg(\neg p\vee q\leftrightarrow\neg q\rightarrow\neg p)$
$(p\rightarrow q)\wedge(\neg r\vee s)\leftrightarrow(\neg p\vee q)\wedge(r\rightarrow s)$

L0. Clasificación de Conjuntos

- Conjunto de fórmulas **Consistente**: Todas verdaderas bajo alguna interpretación *I* (la misma para todas)

$\mathcal{C} = \{F_1, \ldots, F_n\}$ **consistente**: $\exists I \,/\, (F_1)^I = \mathbf{V} \wedge \ldots. \wedge (F_n)^I = \mathbf{V}$

  - Ejemplo: $\{p, p \rightarrow p\}$

- Conjunto de fórmulas **Inconsistente:** No existe ninguna interpretación que las haga verdad a todas a la vez

$\mathcal{C} = \{F_1, \ldots, F_n\}$ **inconsistente**: $\neg \exists I \,/\, (F_1)^I = \mathbf{V} \wedge \ldots. \wedge (F_n)^I = \mathbf{V}$

  - Ejemplo: $\{p, \neg p\}$

Observación: un conjunto de fórmulas satisfacibles puede ser inconsistente.

- p y $\neg$p son satisfacibles, pero el conjunto es inconsistente.

L0. Equivalencia Lógica. Motivación

- Las fórmulas $(p \rightarrow q)$ y $(\neg p \vee q)$
  - *Son sintácticamente distintas: cadenas de símbolos distintas*
  - *Pero toman el mismo valor de verdad para toda interpretación*

Fórmulas Equivalentes

L0. Equivalencia Lógica

- Dos fórmulas ***F*** y ***G*** son **equivalentes** (***F* ≡ *G***) si su valor de verdad es el mismo bajo toda interpretación

F es **equivalente** a ***G*** ***(F ≡ G)*** sí y sólo si $\forall I\ F^I = G^I$

  - ≡ Metasímbolo expresa sólo una relación entre fórmulas

    ¡¡ No es un símbolo de L0 !!

Ejemplo

$$F \rightarrow G \equiv \neg F \vee G$$

Podemos comprobarlo mediante tablas de verdad

F	G	$\neg F$	$\neg F \vee G$	$F \rightarrow G$
V	V	F	**V**	**V**
V	F	F	**F**	**F**
F	V	V	**V**	**V**
F	F	V	**V**	**V**

- La equivalencia lógica tiene la **propiedad de sustitución**

L0. Equivalencia Lógica

Tengo la fórmula $H = (\neg\neg G \wedge F)$. Sé que $\neg\neg G \equiv G$

¿Puedo simplificar H y escribir en su lugar $H' = (G \wedge F)$*?*

Hemos de estar seguros de que $H \equiv H'$

Teorema Sustitución

- Sean F, G y H fórmulas tales que $F \equiv G$, y F ocurre como subfórmula de H,
- Sea H' la fórmula obtenida sustituyendo en H las ocurrencias de F por G ($H' = H[F/G]$)

Entonces $\boldsymbol{H \equiv H'}$

Permite modificar fórmulas desde un punto de vista sintáctico sin modificar su semántica

L0. Equivalencia Lógica

- Relación entre equivalencia lógica y validez:

Teorema ($\equiv$ y $\leftrightarrow$)

$F \equiv G$ si y sólo si $F \leftrightarrow G$ es válida

Ejemplo: $F \rightarrow G \equiv \neg F \vee G$ sii $\neg F \vee G \leftrightarrow F \rightarrow G$ válida

F	G	$\neg F$	$\neg F \vee G$	$F \rightarrow G$	$(\neg F \vee G) \leftrightarrow (F \rightarrow G)$
V	V	F	**V**	**V**	**V**
V	F	F	**F**	**F**	**V**
F	V	V	**V**	**V**	**V**
F	F	V	**V**	**V**	**V**

L0. Equivalencia Lógica: Leyes

Nombre	Ley	
Contraposición	$G \rightarrow H \equiv \neg H \rightarrow \neg G$	
Supresión doble implicación	$G \leftrightarrow H \equiv (G \rightarrow H) \wedge (H \rightarrow G)$	
Absorción	$G \wedge (H \vee G) \equiv G$	$G \vee (H \wedge G) \equiv G$
Dominación	$G \wedge$ **F** $\equiv$ **F**	$G \vee$ **V** $\equiv$ **V**
Elemento neutro	$G \wedge$ **V** $\equiv G$	$G \vee$ **F** $\equiv G$
Complementario	Contradicción $G \wedge \neg G \equiv$ **F**	Medio Excluido $G \vee \neg G \equiv$ **V**
Idempotencia	$G \wedge G \equiv G$	$G \vee G \equiv G$
Conmutativa	$G \wedge H \equiv H \wedge G$	$G \vee H \equiv H \vee G$
Asociativa	$G\wedge (H\wedge J) \equiv (G\wedge H)\wedge J$	$G\vee (H\vee J) \equiv (G\vee H)\vee J$
Distributiva	$G\vee (H\wedge J) \equiv (G\vee H)\wedge (G\vee J)$	$G\wedge(H\vee J) \equiv (G\wedge H)\vee(G\wedge J)$
De Morgan	$\neg(G\vee H) \equiv \neg G\wedge \neg H$	$\neg(G\wedge H) \equiv \neg G\vee\neg H$
Doble negación	$\neg\neg G \equiv G$	

L0. Consecuencia Lógica

Q es **consecuencia** del conjunto de fórmulas

$$\Gamma = \{\boldsymbol{F_1}, \ldots, \boldsymbol{F_n}\},$$

si todo modelo común a las fórmulas de Γ también lo es de ***Q*** (se denota $\Gamma \vDash$ **Q**)

$$\forall I \text{ si } F_1^I = \ldots = F_n^I = \mathbf{V} \text{ entonces } Q^I = \mathbf{V}$$

Recuerda: Una interpretación es un modelo para una fórmula si le confiere el significado V (Verdadero)

L0. Razonamiento

- Premisas seguidas de una conclusión

Ejemplo

Si el sensor se activa y no hay vigilante, la alarma salta. La alarma no salta pero el sensor se activa. Por tanto, hay vigilante.

	Traducido
Si el sensor se activa y no hay vigilante, la alarma salta	$p \wedge \neg q \rightarrow r$
La alarma no salta pero el sensor se activa	$\neg r \wedge p$
Hay vigilante	q

$$\boxed{\{p \wedge \neg q \rightarrow r,\ \neg r \wedge p\} \models q}$$

L0. Razonamiento Correcto

- Un **razonamiento es correcto** si la conclusión es consecuencia lógica de las premisas.

$$\{P_1, P_2, \ldots P_n\} \vDash Q$$

En un **razonamiento correcto** siempre que las premisas son verdaderas la conclusión también lo es

Teorema (Consecuencia Lógica I)

$\{P_1, P_2, \ldots P_n\} \vDash Q$ si y sólo si $P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n \rightarrow Q$ es válida

Teorema (Consecuencia Lógica II)

$\{P_1, P_2, \ldots P_n\} \vDash Q$ si y sólo si $\{P_1, P_2, \ldots P_n, \neg Q\}$ es inconsistente

L0. Razonamiento Correcto

Ejercicio
Justificar el teorema

Teorema (Consecuencia Lógica I)

$\{P_1, P_2, \dots P_n\} \vDash Q$ es correcto si y sólo si $P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n \rightarrow Q$ es válida

Para comprobar si un razonamiento es correcto, se estudia si la fórmula

$$\underset{\text{(conjunción premisas)}}{P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n} \quad \underset{\text{implica}}{\rightarrow} \quad \underset{\text{(conclusión)}}{Q}$$

es válida

Utilizado por algunos métodos de prueba: Tablas de Verdad, Pruebas por Contradicción

L0. Razonamiento Correcto

Ejercicio
Justificar el teorema

Teorema (Consecuencia Lógica I)

$\{P_1, P_2, \ldots P_n\} \models Q$ es correcto si y sólo si $P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n \rightarrow Q$ es válida

Demostración

$\{P_1, P_2, \ldots, P_n\} \models Q$ es correcto $\equiv$

// Definición razonamiento correcto

En toda interpretación I, Si P^I_1 =**V**, P^I_2 =**V**, … P^I_n = **V**, entonces Q^I = **V** $\equiv$

// Evaluando

En toda interpretación I, $(P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n \rightarrow Q)^I$ = **V** $\equiv$

(en las interpretaciones en las que no todas las premisas son V, ocurre F→? y esto es V)

// Definición fórmula válida

$P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n \rightarrow Q$ es válida

L0. Razonamiento Correcto

Ejercicio
Justificar el teorema

Teorema (Consecuencia Lógica II)

$\{P_1, P_2, \ldots P_n\} \vDash Q$ si y sólo si $\{P_1, P_2, \ldots P_n, \neg Q\}$ es inconsistente

Para comprobar si un razonamiento es correcto, se estudia si el conjunto

$$\underbrace{\{P_1, P_2, \ldots P_n\}}_{\text{premisas}} \cup \underbrace{\{\neg Q\}}_{+\ \text{negación conclusión}}$$

es inconsistente

Técnica utilizada por muchos algoritmos: **Resolución**

L0. Razonamiento Correcto

Ejercicio
Justificar el teorema

Teorema (Consecuencia Lógica II)

$\{P_1, P_2, \dots P_n\} \vDash Q$ si y sólo si $\{P_1, P_2, \dots P_n, \neg Q\}$ es inconsistente

Demostración

$\{P_1, P_2, \dots, P_n\} \vDash Q$ es correcto ≡ // Teorema consecuencia lógica I

$P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n \rightarrow Q$ es válida ≡ // Teorema válida/insatisfacible

$\neg(P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n \rightarrow Q)$ es insatisfacible ≡ // Eliminación →

$\neg(\neg P_1 \vee \neg P_2 \vee \dots \vee \neg P_n \vee Q)$ es insatisfacible ≡ // De Morgan

$\neg\neg P_1 \wedge \neg\neg P_2 \wedge \dots \neg\neg P_n \wedge \neg Q$ es insatisfacible ≡ // Eliminación doble ¬

$P_1 \wedge P_2 \wedge \dots P_n \wedge \neg Q$ es insatisfacible ≡ // Re-escribiendo

$\{P_1, P_2, \dots, P_n, \neg Q\}$ es inconsistente

L0. Contenidos

- Del Lenguaje Natural al Lenguaje de la Lógica Proposicional
- Sintaxis y Semántica
  - Alfabeto y Reglas
  - Semántica
    - Evaluación: Interpretación y Reglas Semánticas
  - Clasificación: Fórmulas y Conjuntos de Fórmulas
  - Equivalencia
  - Consecuencia Lógica y Razonamiento Correcto
- Prueba de la Consecuencia lógica
  - Métodos Semánticos:
    - Tablas de Verdad
    - Pruebas por Contradicción
  - Métodos Sintácticos:
    - Resolución Proposicional
    - Deducción Natural

L0. Tablas de Verdad

Demostrar la corrección de razonamientos mediante Tablas de Verdad

Si llueve y no hace viento llevo abierto el paraguas. No llevo abierto el paraguas pero llueve. Por tanto, hace viento.

¿Correcto?

$\{p \wedge \neg q \rightarrow r, \neg r \wedge p\} \models q$ **¿** q **consecuencia lógica de** $\{p \wedge \neg q \rightarrow r, \neg r \wedge p\}$ **?**

$(p \wedge \neg q \rightarrow r) \wedge (\neg r \wedge p) \rightarrow q$ **¿Válida?** (T[ma] Consecuencia Lógica I)

p	q	r	$p \wedge \neg q$	$p \wedge \neg q \rightarrow r$	$\neg r$	$\neg r \wedge p$	$(p \wedge \neg q \rightarrow r) \wedge (\neg r \wedge p)$	$(p \wedge \neg q \rightarrow r) \wedge (\neg r \wedge p) \rightarrow q$
V	V	V	F	V	F	F	F	**V**
V	V	F	F	V	V	V	**V**	**V**
V	F	V	V	V	F	F	F	**V**
V	F	F	V	F	V	V	F	**V**
F	V	V	F	V	F	F	F	**V**
F	V	F	F	V	V	F	F	**V**
F	F	V	F	V	F	F	F	**V**
F	F	F	F	V	V	F	F	**V**

Fórmula es válida ⇒ $\{p \wedge \neg q \rightarrow r, \neg r \wedge p\} \models q$ ⇒ **Correcto**

L0. Tablas de Verdad

Ejercicio: Chequear cuáles de los siguientes razonamientos son correctos

- $\{ p \to q \wedge r , q \} \vDash r$
- $\{ p\to q, q\to r \} \vDash \neg r\to\neg p$
- $\{ p\to\neg q, p\to(r\to q) \} \vDash p\to\neg r$
- $\{ (p \vee q) \wedge \neg(p\wedge q), p\to\neg r\} \vDash r\to\neg q$

L0. Tablas de Verdad

Demostrar razonamientos mediante Tablas de Verdad

$\{p \rightarrow q \wedge r\ ,\ q\} \vDash r$ **¿Correcto?**

$(p \rightarrow q \wedge r) \wedge q \rightarrow r$ **¿Válida?**

Teorema
Consecuencia Lógica I

p	q	r	$q \wedge r$	$p \rightarrow q \wedge r$	$(p \rightarrow q \wedge r) \wedge q$	$(p \rightarrow q \wedge r) \wedge q \rightarrow r$
V	V	V	V	V	V	**V**
V	V	F	F	F	F	**V**
V	F	V	F	F	F	**V**
V	F	F	F	F	F	**V**
F	V	V	V	V	V	**V**
F	V	F	F	V	V	**F**
F	F	V	F	V	F	**V**
F	F	F	F	V	F	**V**

La fórmula NO es válida ➡ El razonamiento NO es correcto

L0. Pruebas por Contradicción

Reducción al Absurdo o Contradicción

- Demostrar que *G* es Válida: se supone lo contrario, es decir que $\exists \boldsymbol{I}$ / G^I = **F** y se calculan los valores de verdad de las proposiciones atómicas de *G*.
  - Rellenar, coherentemente con la supuesta falsedad, los valores de las subfórmulas de *G* desde las más externas de su estructura hasta asignar valor de verdad a cada proposición atómica.
  - Si se llega a un absurdo, entonces $\neg\exists \boldsymbol{I}$ / G^I = **F,** por lo que ***G* es Válida**; en caso contrario *G* no sería Válida (habremos encontrado una $\boldsymbol{I}$ / G^I = **F**).

L0. Pruebas por Contradicción

Demostrar la corrección de razonamientos mediante Pruebas por Contradicción

Si llueve y no hace viento llevo abierto el paraguas. No llevo abierto el paraguas pero llueve. Por tanto, hace viento.

¿Correcto?

$\{p \wedge \neg q \rightarrow r, \neg r \wedge p\} \vDash q$ **¿q consecuencia lógica de** $\{p \wedge \neg q \rightarrow r, \neg r \wedge p\}$ **?**

$(p \wedge \neg q \rightarrow r) \wedge (\neg r \wedge p) \rightarrow q$ **¿Válida?** (T^ma Consecuencia Lógica I)

Fórmula es válida

⇓

$\{p \wedge \neg q \rightarrow r, \neg r \wedge p\} \vDash q$

⇓

Correcto

p: **V**
q: **F**
r: **F**

$(p \wedge \neg q \rightarrow r) \wedge (\neg r \wedge p) \rightarrow q$

V F F F V F

V V

V

Contradicción $\boxed{\textbf{V/F}}$ **V**

V

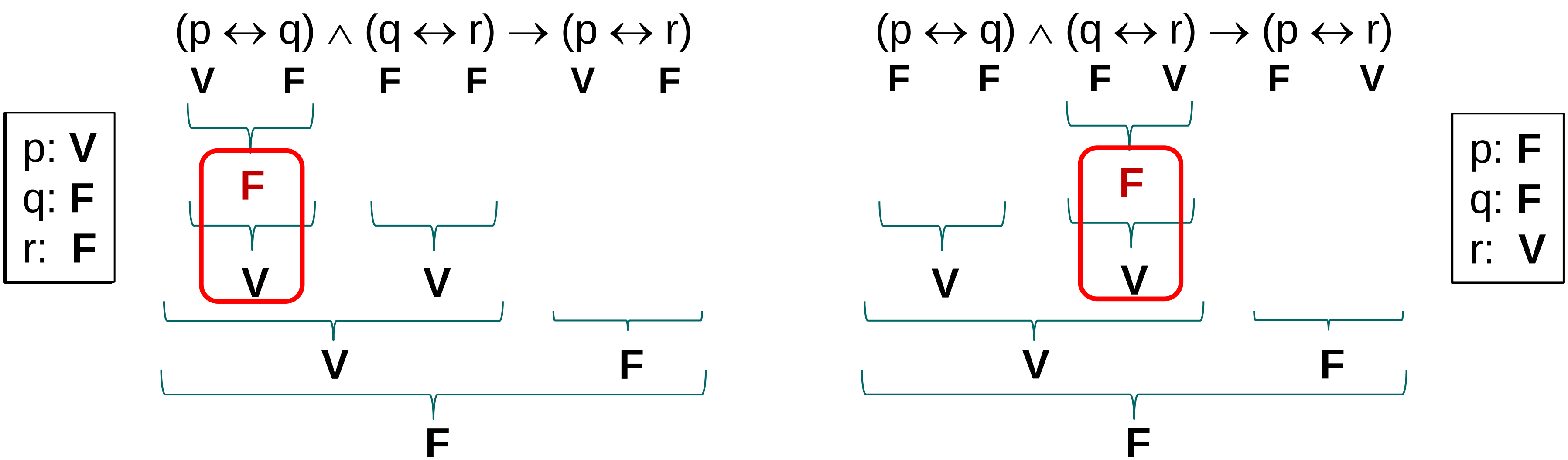
F

L0. Pruebas por Contradicción

Demostrar la corrección de razonamientos mediante Pruebas por Contradicción

$\{p \leftrightarrow q, q \leftrightarrow r\} \vDash p \leftrightarrow r$ **¿** $p \leftrightarrow r$ **consecuencia lógica de** $\{p \leftrightarrow q, q \leftrightarrow r\}$ **?**

$(p \leftrightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r) \rightarrow (p \leftrightarrow r)$ **¿Válida?**



Camino 1 (p:V, r:F): Contradicción **Camino 2 (p:F, r:V): Contradicción**

Contradicción por todos los caminos

Fórmula válida ➡ $\{p \leftrightarrow q, q \leftrightarrow r\} \vDash p \leftrightarrow r$ ➡ **Raz. Correcto**

L0. Pruebas por Contradicción

Demostrar la corrección de razonamientos mediante Pruebas por Contradicción

$\{p \vee q,\ p \to r,\ q \to r\} \vDash r \wedge \neg p$ **¿** $r \wedge \neg p$ **consecuencia lógica de** $\{p \vee q,\ p \to r,\ q \to r\} \vDash r \wedge \neg p$ **?**

$(p \vee q) \wedge (p \to r) \wedge (q \to r) \to r \wedge \neg p$ **¿Válida?**

$(p \vee q) \wedge (p \to r) \wedge (q \to r) \to r \wedge \neg p$

F F F F F F F F

V

p: **F**
q: **F**
r: **F**

F

V V V

V F

F

Camino 1 (r: F): Contradicción

$(p \vee q) \wedge (p \to r) \wedge (q \to r) \to r \wedge \neg p$

V ? V V ? V V V

F

p: **V**
q: ?
r: **V**

V V V

F

F

Camino 2 (r: V): No Contradicción

Como no hay contradicción por todos los caminos → Fórmula no válida

Fórmula No Válida ➡ $\{p \vee q,\ p \to r,\ q \to r\} \nvDash r \wedge \neg p$ ➡ **Raz. No Correcto**

L0. Pruebas por Contradicción

Ejercicio. Chequear cuál de los siguientes razonamientos es correcto usando contradicción

$\{ p \rightarrow q \wedge r , q \} \models r$

$\{ p \rightarrow q, q \rightarrow r \} \models \neg r \rightarrow \neg p$

$\{ p \rightarrow \neg q, p \rightarrow (r \rightarrow q) \} \models p \rightarrow \neg r$

$\{ (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q), p \rightarrow \neg r\} \models r \rightarrow \neg q$

L0. Métodos Semánticos de Prueba

Ejercicio: Comprobar que razonamientos son correctos

Si el bucle se detiene, se lanza una excepción. Si se lanza una excepción se muestra la pantalla azul. No se muestra la pantalla azul. Por tanto, el bucle no se detiene.

El robot entra en la sala sólo cuando no hay señal del enemigo. Además, cuando el robot entra en la sala, si hay luz, entonces hay señal del enemigo. Por tanto, es suficiente que el robot entre en la sala para que no haya luz.

El sistema puede estar encendido o apagado, pero no ambos. Cuando está encendido, no hay alarma. Por tanto, si hay alarma entonces no está apagado.

L0. Métodos Sintácticos de Prueba

- **Regla de inferencia:** regla que permite obtener una fórmula a partir de la manipulación sintáctica de una o más fórmulas
- **Derivación:**

De un conjunto de fórmulas $\{G_1,\ldots,G_n\}$ **se deriva** otra fórmula H, y se denota como

$$\{G_1,\ldots,G_n\} \vdash H$$

si existe una cadena finita $F_0,\ldots,F_m$ donde

  - $F_m = H$
  - F_i **se infiere** mediante una regla de inferencia a partir de formulas de $\{G_1,\ldots,G_n\} \cup \{F_0,\ldots,F_{i-1}\}$

- Resolución y Deducción Natural son mecanismos que permiten derivar una fórmula a partir de otras aplicando una o varias reglas de inferencia.

L0. Resolución Proposicional

- [Robinson 1965] Método constructivo que, realizando manipulaciones sintácticas, permite probar la consecuencia lógica.
  - Emplea **una regla de inferencia**. ☺
  - No necesariamente intuitivo desde el punto de vista humano, pero más sencillo de automatizar. ☹☺
  - Necesita las fórmulas en **Forma Clausal** ☹
- Correcto y Completo
  - $\Gamma \vDash Q$ si, y sólo si, $\Gamma \cup \{\neg Q\} \vdash \mathbf{F}$
- Prueba por Refutación (Teorema Consecuencia Lógica II)
  - Para demostrar $\Gamma \vDash Q$ prueba la inconsistencia de $\Gamma \cup \{\neg Q\}$

[Robinson1965] J. A. Robinson. *A Machine-Oriented Logic Based on the Resolution Principle*. *Journal of the ACM 12,(1), 23-41., 1965*

L0. Formas Normales

- Un **literal** es una proposición atómica o su negación.
  - ***Ejemplo:*** p o $\neg p$.
  - L^c, literal complementario de L. Ej: $L=$ p y $L^c= \neg$p; $L= \neg$p y $L^c=$ p
- Una fórmula está en **Forma Normal Conjuntiva (FNC)** si es una *conjunción* $F_1 \wedge ... \wedge F_n$, dónde cada F_i es una *disyunción* de *literales* (***Cláusula***).
  - $(\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee r \vee \neg s) \wedge p$
- Una fórmula está en **Forma Normal Disyuntiva (FND)** si es una *disyunción* $F_1 \vee ... \vee F_n$, dónde cada F_i es una *conjunción* de *literales*
  - $(p \wedge \neg q \wedge r) \vee \neg p \vee (r \wedge \neg s)$

L0. Formas Normales

- **Teorema:** Toda fórmula puede transformarse en otra equivalente en FNC (FND)
  - {Eliminación de $\leftrightarrow$} *$\{(F \leftrightarrow G) \equiv (F \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow F)\}$*
  - {Eliminación de $\rightarrow$} *$\{(F \rightarrow G) \equiv \neg F \vee G\}$*
  - {*simplificar: $\neg\neg$, *disy./conj de un literal y su opuesto**}
  - {Reducir el alcance de $\neg$} (y simplificar si procede) *{De Morgan}*
  - {Distributivas}
  - {Simplificar}
    - *Eliminar conj/disy. Con un literal y su opuesto* $\begin{cases} \{(F \vee \neg F \vee G) \wedge H \equiv \mathbf{V} \wedge H \equiv H\} \\ \{(F \wedge \neg F \wedge G) \vee H \equiv \mathbf{F} \vee H \equiv H\} \end{cases}$
    - *Eliminar literales repetidos*
    - *Eliminar absorciones:* $\{(F \wedge G) \vee F \equiv F \equiv F \wedge (G \vee F)\}$

L0. Forma Clausal

- Una fórmula está en **Forma Clausal (FC)** si es un conjunto de **cláusulas** (disyunción de literales)
  - Dada la fórmula *G* en FNC:

    $$(\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee r \vee \neg s) \wedge p$$

    la FC de G es el conjunto de cláusulas

    $$\{\neg p \vee q, \ \neg p \vee r \vee \neg s, \ p\}$$

- **Cláusula vacía** (notación $\square \equiv$ **F**)
- **Cláusula Horn:** $H \vee \neg G_1 \vee .... \vee \neg G_n$
  - **Hecho:** H
  - **Objetivo:** $\neg G_1 \vee .... \vee \neg G_n$
  - **Regla:** $H \vee \neg G_1 \vee .... \vee \neg G_n \ (n>0)$

Cláusulas Especiales

L0. (In)Satisfabilidad de ∅ y □

- El conjunto de **cláusulas** vacío ∅ es válido
  - Un conjunto de cláusulas (∧) es válido si, y sólo si, toda cláusula es **V** bajo cualquier interpretación. No es válido si, y sólo si, existe alguna interpretación bajo la cual alguna cláusula es F
  - No hay cláusulas en ∅ que puedan ser falsas, luego ∅ es válido
- □ **es insatisfacible**
  - Una cláusula (∨) es satisfacible si y sólo si existe una interpretación bajo la cual al menos un literal en la cláusula es **V**
  - No hay literales en la cláusula vacía, luego ninguno puede ser **V**, luego □ es insatisfacible (y equivalente a **F**)

L0. Formas Normales

Ejercicio. Poner en Forma Clausal

a) $\neg(p \wedge (\neg q \rightarrow \neg r))$

b) $\neg p \vee q \rightarrow \neg(q \wedge r)$

c) $\neg((p \wedge \neg q) \rightarrow \neg r)$

d) $(p \wedge q) \rightarrow (r \wedge s)$

e) $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \wedge q \rightarrow \neg r)$

f) $(q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg r \wedge p)$

L0. Formas Normales

Ejercicio. Poner en Forma Clausal

$\{\to\}$

b) $\neg p \vee q \to \neg(q \wedge r) \equiv$

$\{\neg\}$

$\neg(\neg p \vee q) \vee \neg(q \wedge r) \equiv$

$\{\neg\neg\}$

$(\neg\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg q \vee \neg r) \equiv$

{PD}

$(p \wedge \neg q) \vee (\neg q \vee \neg r) \equiv$

{Simplificando}
Literal repetido

$(p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg q \vee \neg q \vee \neg r) \equiv$

{Simplificando}
Absorción

$(p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg q \vee \neg r) \equiv$

$(\neg q \vee \neg r)$ **FNC**

$\{\neg q \vee \neg r\}$ **FC**

L0. Formas Normales

Ejercicio. Poner en Forma Clausal

{→}

e) $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \wedge q \rightarrow \neg r) \equiv$

{¬} {¬ ¬}

$\neg(\neg p \vee (\neg q \vee r)) \vee (\neg(p \wedge q) \vee \neg r) \equiv$

{PD}

$(p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \vee \neg q \vee \neg r) \equiv$

{Simplificando}
Disyunción de un literal y su complementario

$(p \vee \neg p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (q \vee \neg p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg r \vee \neg p \vee \neg q \vee \neg r) \equiv$

{Simplificando}
Literal repetido

$(\neg r \vee \neg p \vee \neg q \vee \neg r) \equiv$

$(\neg r \vee \neg p \vee \neg q)$ **FNC**

$\{\neg r \vee \neg p \vee \neg q\}$ **FC**

L0. Formas Normales

Ejercicio. Poner en Forma Clausal

{PD}

f) $(q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg r \wedge p) \equiv$

(*) (*) {PD}

$\{q \vee [(\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg r \wedge p)]\} \wedge \{r \vee [(\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg r \wedge p)]\} \equiv$

{Simplificando}
Disyunción de un literal y su complementario

$[(q \vee \neg p \vee \neg r) \wedge (q \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (q \vee \neg q \vee p)] \wedge [(r \vee \neg p \vee \neg r) \wedge (r \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (r \vee \neg q \vee p)]$
$\equiv$

$(q \vee \neg p \vee \neg r) \wedge (r \vee \neg q \vee p)$ **FNC**

$\{(q \vee \neg p \vee \neg r) , (r \vee \neg q \vee p)\}$ **FC**

(*) {PD} {PD} {Simplificando}

$[(\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg r \wedge p)] \equiv [\neg p \vee (\neg r \wedge p)] \wedge [\neg q \vee (\neg r \wedge p)] \equiv [(\neg p \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee p) \wedge (\neg q \vee \neg r) \wedge (\neg q \vee p)] \equiv$

$[(\neg p \vee \neg r) \wedge (\neg q \vee \neg r) \wedge (\neg q \vee p)]$

L0. Resolución Proposicional

- **Motivación** Supongamos una interpretación **I** que es un modelo para: $\mathbf{p \vee q}$ y $\mathbf{\neg p \vee r}$
    - Si $\mathbf{p}^{\mathbf{I}}$ es F entonces $\mathbf{q}^{\mathbf{I}}$ debe ser V (luego $\mathbf{(q \vee r)}^{\mathbf{I}}$ es V)
    - Si $\mathbf{p}^{\mathbf{I}}$ es V entonces $\mathbf{r}^{\mathbf{I}}$ debe ser V (luego $\mathbf{(q \vee r)}^{\mathbf{I}}$ es V)

luego $\mathbf{q \vee r}$ es verdadera bajo la interpretación I

$\mathbf{\{ p \vee q, \neg p \vee r \} \models q \vee r}$ y $\mathbf{\{ p \vee q, \neg p \vee r \} \vdash q \vee r}$

- **Regla de Resolución Proposicional**

$\mathbf{p} \vee q \vee \neg s \qquad r \vee \neg \mathbf{p} \vee \neg t$

$q \vee \neg s \vee r \vee \neg t$

Resolvente

Sean F y G cláusulas. Sean L y L^c **literales complementarios.** Si $C_1 = L \vee F$ y $C_2 = L^c \vee G$, entonces el resolvente de las cláusulas C_1 y C_2 respecto a L es:

$$\mathbf{Resolvente(C_1, C_2, L)} = F \vee G$$

En este caso se dice que C_1 y C_2 son cláusulas resolubles respecto al literal *L*.

L0. Resolución Proposicional

Procedimiento Resolución

- Entrada: Conjunto de cláusulas $S = \{P_1, P_2, \dots P_n, \neg Q\}$
- Salida: S consistente o inconsistente
- $S_0=S$
- Repetir los siguientes pasos obteniendo S_{i+1} a partir de S_i hasta que el procedimiento termine:
  - Elegir un par de cláusulas $\{C_1, C_2\} \subseteq S_i$, no elegidas previamente y resolubles respecto a un literal L, tal que C_1, C_2, L no se han elegido previamente.
  - Calculas su resolvente C= Resolvente(C_1, C_2, L)
  - $S_{i+1} = S_i \cup \{C\}$
- El procedimiento termina si:
  - $C=\square$, retorna Conjunto Inconsistente
  - Se han resuelto todos los pares de cláusulas posibles respecto a todos los literales posibles, retorna Conjunto Consistente.

L0. Resolución Proposicional

Demostrar la corrección de razonamientos mediante Resolución

Si llueve y no hace viento llevo abierto el paraguas. No llevo abierto el paraguas pero llueve. Por tanto, hace viento.

¿Correcto?

$\{p \wedge \neg q \to r,\ \neg r \wedge p\} \vDash q$ **¿q consecuencia lógica de** $\{p \wedge \neg q \to r,\ \neg r \wedge p\}$ **?**

$\{\neg p \vee q \vee r,\ \neg r,\ p,\ \neg q\}$ **¿Conjunto Inconsistente?** (T^{ma} Consecuencia Lógica II)

No es una prueba única

$\neg p \vee q \vee r$ $\quad \neg q$

$\neg p \vee r$ $\quad \neg r$

$\neg p$ $\quad p$

$\square$

Cada resolvente se añade al conjunto

$\{\neg p \vee q \vee r,\ \neg r,\ p,\ \neg q,\ \mathbf{\neg p \vee r}\}$

$\{\neg p \vee q \vee r,\ \neg r,\ p,\ \neg q,\ \neg p \vee r,\ \mathbf{\neg p}\}$

$\{\neg p \vee q \vee r,\ \neg r,\ p,\ \neg q,\ \neg p \vee r,\ \neg p,\ \square\}$

$\neg p \vee q \vee r$ $\quad \neg r$

$\neg p \vee q$ $\quad p$

q $\quad \neg q$

$\square$

Conjunto Inconsistente $\Rightarrow$ $\{p \wedge \neg q \to r,\ \neg r \wedge p\} \vDash q$ $\Rightarrow$ **Raz. Correcto**

$\{\neg p \vee q \vee r,\ \neg r,\ p,\ \neg q\} \vdash \square$

L0. Resolución Proposicional

Ejercicio. Demostrar por Resolución

$\{p \rightarrow \neg q,\ r \rightarrow q\} \vdash \neg(p \wedge r)$

$\{\neg p\} \vdash p \rightarrow q$

$\{\neg p \vee q\} \vdash p \rightarrow q$

$\{p \rightarrow q\} \vdash \neg p \vee q$

$\vdash p \leftrightarrow \neg\neg p$

L0. Deducción Natural

G. Gentzen (1945)
Autor: Eckart Menzler-Trott
Fuente: Wikipedia

- Es un sistema de demostración
  - Desarrollado en 1935 por Gentzen
  - **Objetivo**: Simular las técnicas de demostración *naturales*
  - Hay diversas variantes
- Contiene 2 reglas de inferencia por cada conectiva

L0. Deducción Natural

$\wedge$I	$\dfrac{A \qquad B}{A \wedge B}$	$\wedge$E	$\dfrac{A \wedge B}{A} \qquad \dfrac{A \wedge B}{B}$
$\vee$I	$\dfrac{A}{A \vee B} \qquad \dfrac{B}{A \vee B}$	$\vee$E	$\dfrac{A \vee B \quad A \to C \quad B \to C}{C}$
$\to$I	$\dfrac{\boxed{\begin{array}{c}A\\ \vdots\\ B\end{array}}}{A \to B}$	$\to$E	$\dfrac{A \qquad A \to B}{B}$ También conocido como Modus Ponens (MP)
$\leftrightarrow$I	$\dfrac{A \to B \qquad B \to A}{A \leftrightarrow B}$	$\leftrightarrow$E	$\dfrac{A \leftrightarrow B}{A \to B} \qquad \dfrac{A \leftrightarrow B}{B \to A}$
$\neg$I	$\dfrac{\boxed{\begin{array}{c}A\\ \vdots\\ B \wedge \neg B\end{array}}}{\neg A}$	$\neg$-E	$\dfrac{\boxed{\begin{array}{c}\neg A\\ \vdots\\ B \wedge \neg B\end{array}}}{A}$
V-I	$\dfrac{A \vee \neg A}{\mathbf{V}}$	V-E	$\dfrac{\mathbf{V}}{A \vee \neg A}$
F-I	$\dfrac{A \wedge \neg A}{\mathbf{F}}$	F-E	$\dfrac{\mathbf{F}}{A}$

Ejemplo

Demostrar $\{ p \wedge q \} \vdash p \wedge (q \vee r)$

1.	$p \wedge q$	Premisa
2.	p	$\wedge$E1
3.	q	$\wedge$E1
4.	$q \vee r$	$\vee$I 3
5.	$p \wedge (q \vee r)$	$\wedge$I 2,4

L0. Deducción Natural

Ejemplo

Demostrar $\{ p \rightarrow q, q \rightarrow r \} \vdash p \rightarrow r$

1.	$p \rightarrow q$	Premisa
2.	$q \rightarrow r$	Premisa
3.	p	Supuesto
4.	q	$\rightarrow$ E 1.3
5.	r	$\rightarrow$ E 2,4
6.	$p \rightarrow r$	$\rightarrow$ I 3-5

L0. Deducción Natural

Ejemplo

Demostrar $\{ p \wedge q \to r \} \vdash p \to (q \to r)$

1.	$p \wedge q \to r$	Premisa
2.	p	Supuesto
3.	q	Supuesto
4.	$p \wedge q$	$\wedge$-I 2.3
5.	r	$\to$ E 1,4
6.	$q \to r$	$\to$ I 3-5
7.	$p \to (q \to r)$	$\to$ I 2-6

L0. Deducción Natural

Demostrar la corrección de razonamientos mediante Deducción Natural

Si llueve y no hace viento llevo abierto el paraguas. No llevo abierto el paraguas pero llueve. Por tanto, hace viento.

¿Correcto?

$\{p \wedge \neg q \rightarrow r, \neg r \wedge p\} \vDash q$ **¿q consecuencia lógica de $\{p \wedge \neg q \rightarrow r, \neg r \wedge p\}$?**

$\{p \wedge \neg q \rightarrow r, \neg r \wedge p\} \vdash q$ **¿Podemos derivar la conclusión de las premisas?**

1	$p \wedge \neg q \rightarrow r$	Premisa
2	$\neg r \wedge p$	Premisa
3	$\neg r$	$\wedge$-E 2
4	p	$\wedge$-E 2
5	$\neg q$	Supuesto
6	$p \wedge \neg q$	$\wedge$-I 4,5
7	r	$\rightarrow$-E 1-6
8	$r \wedge \neg r$	$\wedge$-I 3,7
9	q	$\neg$-E 5-8

$\{p \wedge \neg q \rightarrow r, \neg r \wedge p\} \vdash q \Rightarrow \{p \wedge \neg q \rightarrow r, \neg r \wedge p\} \vDash q \Rightarrow$ **Raz. Correcto**

L0. Deducción Natural

Ejercicio. Demostrar

a) $\{ p \wedge q \} \vdash \neg\neg p$
b) $\{ p \rightarrow q, \neg q \} \vdash \neg p$
c) $\{ p \rightarrow q, q \rightarrow r \} \vdash (\neg r \rightarrow \neg p)$
d) $\{ p \rightarrow \neg q, p \rightarrow (r \rightarrow q) \} \vdash (p \rightarrow \neg r)$
e) $\{ p \rightarrow \neg q, r \rightarrow q \} \vdash \neg (p \wedge r)$
f) $\{ (p \vee s) \rightarrow (q \wedge r), \neg r \rightarrow q \} \vdash (p \vee \neg q) \rightarrow r$

L0. Deducción Natural

Ejercicio. Demostrar

$\{\neg p\} \vdash p \rightarrow q$

$\vdash p \leftrightarrow \neg\neg p$

$\{\neg p \vee q\} \vdash p \rightarrow q$ (*)

$\{p \rightarrow q\} \vdash \neg p \vee q$ (*)

L0. Deducción Natural

Soluciones $\{\neg p \vee q\} \vdash p \to q$

1	$\neg p \vee q$	Premisa
2	$\neg p$	Supuesto
3	p	Supuesto
4	$\neg q$	Supuesto
5	$p \wedge \neg p$	$\wedge$-I 2,3
6	q	
7	$p \to q$	
8	$\neg p \to (p \to q)$	
9	q	Supuesto
10	p	Supuesto
11	$\neg q$	Supuesto
12	$q \wedge \neg q$	$\wedge$-I 9,11
13	q	
14	$p \to q$	
15	$q \to (p \to q)$	
16	$p \to q$	

$\neg p$ Sup.

$p \to q$

q Sup.

$p \to q$

$$\frac{\neg p \vee q \qquad \neg p \to (p \to q) \qquad q \to (p \to q)}{p \to q}$$

L0. Deducción Natural

Soluciones

$$\{p \rightarrow q\} \vdash \neg p \vee q$$

1	$p \rightarrow q$	Premisa
2	$\neg (\neg p \vee q)$	Supuesto
3	p	Supuesto
4	q	$\rightarrow$ E 1,3
5	$\neg p \vee q$	$\vee$ I 4
6	$\neg (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee q)$	$\wedge$-I 2,5
7	$\neg p$	
8	$\neg p \vee q$	$\vee$ I 7
9	$\neg (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee q)$	$\wedge$ I 2,8
10	$\neg p \vee q$	

L0. Corrección de Razonamientos. Resumen

Pruebas por contradicción

$\{P_1, P_2, \ldots P_n\} \vDash Q$
correcto

$P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n \rightarrow Q$
válida

Teorema de consecuencia lógica 1

Suponemos lo contrario: NO VÁLIDA

- Si llegamos a una contradicción POR TODOS LOS CASOS, la fórmula es válida
- En otro caso, hemos encontrado una interpretación compatible con la suposición hecha

Resolución

$\{P_1, P_2, \ldots P_n\} \vDash Q$
correcto

$\{P_1, P_2, \ldots, P_n, \neg Q\}$
inconsistente

Teorema de consecuencia lógica 2

FNC
Regla de Resolución
Si se deriva □, conjunto inconsistente

Deducción Natural

$\{P_1, P_2, \ldots P_n\} \vDash Q$
correcto

Si aplicando reglas de DN
A partir de $\{P_1, P_2, \ldots P_n\}$
Obtenemos Q

Razonamiento correcto

L0. Propiedades Sistemas

Sea Γ un conjunto de premisas y **Q** una fórmula

$\Gamma \vDash Q$ denota que **Q es consecuencia de Γ**

$\Gamma \vdash Q$ denota que **Q es demostrable a partir de Γ**

Corrección: Un sistema es correcto si produce respuestas que son consecuencia lógica de sus premisas.

- Para toda Q, si $\Gamma \vdash Q$ entonces $\Gamma \vDash Q$

Completud: Un sistema completo nos asegura que si hay una fórmula que es consecuencia lógica de un conjunto de premisas, entonces podremos demostrarla a partir de ellas.

- Resolución: Para toda Q, $\Gamma \vDash Q$ entonces $\Gamma \cup \{\neg Q\} \vdash \square$
- Deducción Natural: Para toda Q, $\Gamma \vDash Q$ entonces $\Gamma \vdash Q$

Resolución y Deducción Natural son sistemas correctos y completos

L0. Decidibilidad y Tratabilidad

- ¿Existe un algoritmo para decidir $\Gamma \models \mathbf{Q}$?
  - La lógica de proposiciones es **decidible**
- ¿Existe un algoritmo para decidir $\Gamma \models \mathbf{Q}$ en un tiempo razonable (polinómico)?
  - Es posible "verificar" en un tiempo razonable si una interpretación satisface una fórmula ☺
  - Verificar la insatisfacibilidad/validez se desconoce si lo es ☹
    - **¿P=NP?** https://elpais.com/tecnologia/2017/05/19/actualidad/1495202801_698394.html
  - **SAT**: decidir si una fórmula es o no satisfacible
    - 1er problema NP-Completo.

L0. Problema *SAT*

- *SAT* = Detectar si una fórmula es satisfacible
  - Permite demostrar razonamientos
    - Tablas de verdad: muy complejo, 2^n
  - Se han desarrollado numerosos algoritmos
  - Uno de los primeros problemas NP-completos
    - Muchos problemas pueden reducirse a *SAT*
    - Diversas variantes (*3SAT*)
    - Competición para encontrar mejor razonador *SAT*
      - http://www.satcompetition.org
  - Aplicaciones: hardware, verificación software,…

L0. Bibliografía

- Arenas Alegría, L. *Lógica Formal para Informáticos*. Díaz de Santos, 1996.
- Cuena, J. *Lógica Informática*. Alianza Editorial, 1986.
- Huth, M., Ryan, M. *Logic in Computer Science*. Cambridge University Press, second edition, 2004.
- Ben Ari, M. *Mathematical Logic for Computer Science*. Springer-Verlag, third edition, 2012.