Universidad de Oviedo
Universidá d'Uviéu
University of Oviedo

Sesión 1
Lógica de Proposiciones
Introducción Teórica

Departamento de Informática
Ciencia de la Computación e Inteligencia Artificial
Universidad de Oviedo

Lógica de proposiciones

- Lógica a nivel de enunciados o proposiciones atómicas (no descomponibles).
- La unidad más pequeña que tratamos en lógica de proposiciones es el enunciado.
- No se analiza o discute el significado: se centra en su verdad o falsedad.
  - "3+3" ¿es una proposición? y
  - "Hace calor" ¿lo es?

L0. Sintaxis. Alfabeto

Alfabeto del Lenguaje Proposicional: conjunto de símbolos que se pueden utilizar para construir las cadenas del lenguaje

- Conjunto finito o numerable de símbolos proposicionales

  $\mathcal{P} = \{p, q, r, p1, \ldots.\}$

- Conjunto de símbolos de conectivas:

  $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$

Conectiva	Conexión Gramatical	
$\neg$	**no …**	**Negación**
$\wedge$	**… y …**	**Conjunción**
$\vee$	**… o …**	**Disyunción**
$\rightarrow$	**Si … entonces …**	**Implicación**
$\leftrightarrow$	**… si y sólo si …**	**Doble implicación**

- Símbolos de Verdad: **V**, **F** (*Constantes Lógicas*)
- Símbolos de puntuación: (…), para ganar legibilidad {, }, [,]

Nombre de la conectiva	Representación en lógica	Frases en lenguaje natural
Negación	$\sim p$	no p es falso p no es cierto p
Conjunción	$p \wedge q$	p y q p pero q p sin embargo q p no obstante q p a pesar de q
Disyunción	$p \vee q$	p o q o p o q o ambos al menos p o q como mínimo p o q
Condicional	$p \rightarrow q$ (p sería el antecedente y q el consecuente)	si p entonces q p sólo si q q si p q cuando p q es necesario para p p es suficiente para q no p a menos que q
Bicondicional	$p \leftrightarrow q$	p es necesario y suficiente para q p sí y sólo si q

L0. Del L. Natural al L. Proposicional

Formalizar: Transformar una frase del lenguaje natural al lenguaje de lógica proposicional

***Si** el sensor se activa **y no** hay vigilante **entonces** la alarma salta*

⇩

***Si** p **y no** q **entonces** r*

⇩

$(p \wedge \neg q) \rightarrow r$

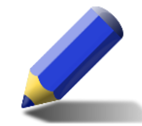
Proposiciones simples

Identificar enunciados declarativos simples en L. Natural
"el sensor se activa" (p)
"hay vigilante" (q)
"salta la alarma" (r)

Conectivas

Identificar conexiones gramaticales
Si..entonces.. (→)
y (∧)
No (¬)

L0. Del L. Natural al L. Proposicional



Traduce de L. Natural a L. Proposicional.

Sesión 1, Ejercicio 3.

a) Es septiembre y no tengo vacaciones.

b) Estudio o no apruebo el examen.

c) Si no estudio no apruebo el examen.

d) Para aprobar el examen es necesario estudiar.

e) Es suficiente copiar para suspender.

f) No me voy de vacaciones a menos que apruebe.

g) Tengo clase sí y sólo sí soy estudiante.

L0. Formalización de frases

a) Es septiembre y no tengo vacaciones.

p: Es septiembre
q: Tengo vacaciones

p **y no** q

$p \wedge \neg q$

b) Estudio o no apruebo el examen

p: Estudio
q: Apruebo el examen

p **o no** q

$p \vee \neg q$

c) Si no estudio no apruebo el examen

p: Estudio
q: Apruebo el examen

Si no p **no** q

$\neg p \rightarrow \neg q$

L0. Formalización de frases

d) Para aprobar el examen es necesario estudiar

p: Aprobar el examen q: Estudiar

Para p **es necesario** q

q **es necesario para** p

$$¿p \rightarrow q? \text{ ó } ¿q \rightarrow p?$$

$$p \rightarrow q$$

e) Es suficiente copiar para suspender

p: Copiar q: Suspender

Es suficiente p **para** q

p **es suficiente para** q

$$¿p \rightarrow q? \text{ ó } ¿q \rightarrow p?$$

$$p \rightarrow q$$

L0. Formalización de frases

f) No me voy de vacaciones a menos que apruebe.

p: me voy de vacaciones
q: apruebo

No p **a menos que** q

$$p \rightarrow q \qquad \neg q \rightarrow \neg p \qquad \neg p \vee q$$

g) Tengo clase sí y sólo sí soy estudiante

p: Tengo clase
q: Soy estudiante

p **si y solo si** q

$$p \leftrightarrow q$$

L0. Del L. Natural al L. Proposicional

Traduce de L. Natural a L. Proposicional.

Sesión 1, Ejercicio 3.

a)	Es septiembre y no tengo vacaciones.	a)	$p \wedge \neg q$
b)	Estudio o no apruebo el examen.	b)	$p \vee \neg q$
c)	Si no estudio no apruebo el examen.	c)	$\neg p \rightarrow \neg q$
d)	Para aprobar el examen es necesario estudiar.	d)	$p \rightarrow q$
e)	Es suficiente copiar para suspender.	e)	$p \rightarrow q$
f)	No me voy de vacaciones a menos que apruebe.	f)	$p \rightarrow q$
g)	Tengo clase sí y sólo sí soy estudiante.	g)	$p \leftrightarrow q$

L0. Razonamiento

- Premisas seguidas de una conclusión

Ejemplo

Si el sensor se activa y no hay vigilante, la alarma salta. La alarma no salta pero el sensor se activa. Por tanto, hay vigilante.

	Traducido
Si el sensor se activa y no hay vigilante, la alarma salta	$p \wedge \neg q \rightarrow r$
La alarma no salta pero el sensor se activa	$\neg r \wedge p$
Hay vigilante	q

$$\{p \wedge \neg q \rightarrow r, \neg r \wedge p\} \vDash q$$

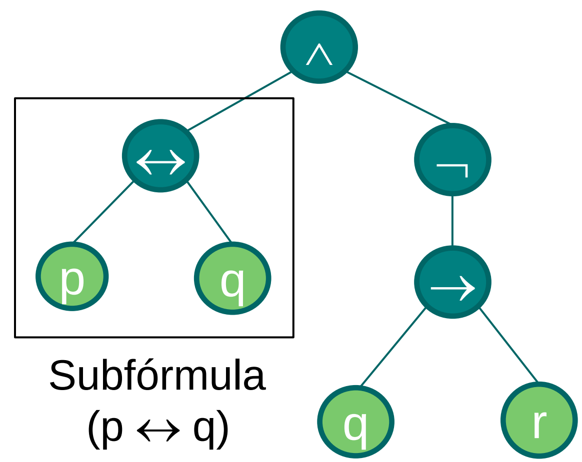
L0. Sintaxis. Reglas

- Conjunto $\mathcal{F}$ de ***Fórmulas Bien Formadas (fbf)***: cadenas de símbolos del lenguaje L0 sintácticamente correctas.
- **Fórmulas Bien Formadas (fbf).** Se obtienen aplicando un número finito de veces las siguientes reglas sintácticas:
  - Caso básico. Símbolos Proposicionales y Constantes Lógicas
    - $\mathcal{P} \subset \mathcal{F}$ Fórmulas atómicas /proposiciones
    - $\{\mathbf{V},\mathbf{F}\} \subset \mathcal{F}$
  - Paso inductivo. Si *F y G son* fbf entonces también lo son:
    - $(\neg F), (F \wedge G), (F \vee G), (F \rightarrow G), (F \leftrightarrow G) \in \mathcal{F}$

      Fórmulas compuestas
- Las fbf se denominan simplemente fórmulas

Árbol de formación

$((p \leftrightarrow q) \wedge (\neg(q \rightarrow r)))$



L0. Sintaxis: Prioridad de Conectivas

- Permite omitir el uso de paréntesis

Prioridades*

+	$\neg$
	$\wedge$
	$\vee$
	$\rightarrow$
-	$\leftrightarrow$

Ejemplos

Fórmula con paréntesis	Fórmula equivalente sin paréntesis
$(p\wedge(\neg q))$	$p\wedge\neg q$
$((p\wedge q)\rightarrow r)$	$p\wedge q\rightarrow r$
$((\neg p)\leftrightarrow(q\vee r))$	$\neg p\leftrightarrow q\vee r$
$((p \vee (q \wedge p)) \rightarrow r)$	$p \vee q \wedge p \rightarrow r$

Entre conectivas de igual nivel tiene prioridad la más a la izquierda

Ejemplo: Escribimos $p\rightarrow q\rightarrow r$ en lugar de $((p\rightarrow q)\rightarrow r)$

(*) M. Ben-Ari. Mathematical Logic for Computer Science. Springer-Verlag, 2012.

L0. Semántica. Interpretación

Interpretación

Sea $\mathcal{P}$ el conjunto de símbolos proposicionales de una fórmula *F*, una **Interpretación** I para la fórmula *F* es una aplicación

$$I: \mathcal{P} \rightarrow \{\mathbf{V}, \mathbf{F}\}$$

- **Ejemplo**

  Fórmula *F* : $p \wedge \neg q \rightarrow r$

$I = \{ p^I = \mathbf{V}, q^I = \mathbf{F}, r^I = \mathbf{V} \}$

$J = \{ p^J = \mathbf{F}, q^J = \mathbf{V}, r^J = \mathbf{F} \}$

…

¿Cuántas interpretaciones posibles puede tener una fórmula proposicional?

2^n donde **n** es el **número símbolos proposicionales distintos** de la fórmula

L0. Semántica. Reglas

Dada una interpretación *I*, el **valor de verdad bajo *I* de una fórmula *F* (*F^I*)** viene dado por las siguientes reglas semánticas

1. Si F = proposición atómica **p**, $F^I = p^I$
2. Para cualesquiera G y H fbf

$$\text{Si } F = G \wedge H,\ F^I = \begin{cases} \mathbf{V} & \text{si } G^I = \mathbf{V} \text{ y } H^I = \mathbf{V} \\ \mathbf{F} & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$\text{Si } F = G \vee H,\ F^I = \begin{cases} \mathbf{F} & \text{si } G^I = \mathbf{F} \text{ y } H^I = \mathbf{F} \\ \mathbf{V} & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$\text{Si } F = G \rightarrow H,\ F^I = \begin{cases} \mathbf{F} & \text{si } G^I = \mathbf{V} \text{ y } H^I = \mathbf{F} \\ \mathbf{V} & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$\text{Si } F = G \leftrightarrow H,\ F^I = \begin{cases} \mathbf{V} & \text{si } G^I = H^I \\ \mathbf{F} & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$\text{Si } F = \neg G,\ F^I = \begin{cases} \mathbf{V} & \text{si } G^I = \mathbf{F} \\ \mathbf{F} & \text{si } G^I = \mathbf{V} \end{cases}$$

L0. Semántica. Evaluación

Evaluar la Fórmula $\boldsymbol{F = p \wedge \neg q \rightarrow r}$ bajo las interpretaciones **I** y **J**

$I = \{\, p^I = \mathbf{V},\ q^I = \mathbf{F},\ r^I = \mathbf{F} \,\}$

$p \wedge \neg q \rightarrow r$

$\mathbf{V} \quad \neg\mathbf{F} \quad \mathbf{F}$

$\mathbf{V} \wedge \mathbf{V}$

$\mathbf{V} \rightarrow \mathbf{F}$

$\mathbf{F}$

$\boxed{F^I = \mathbf{F}}$

I es un ***Contramodelo*** para **F**

$J = \{\, p^J = \mathbf{F},\ q^J = \mathbf{V},\ r^J = \mathbf{F} \,\}$

$p \wedge \neg q \rightarrow r$

$\mathbf{F} \quad \neg\mathbf{V} \quad \mathbf{F}$

$\mathbf{F} \wedge \mathbf{F}$

$\mathbf{F} \rightarrow \mathbf{F}$

$\mathbf{V}$

$\boxed{F^J = \mathbf{V}}$

J es un ***Modelo*** para **F**