Universidad de Oviedo
Universidá d'Uviéu
University of Oviedo

Sesión 5
Formalización y Evaluación en Lógica de Predicados

Departamento de Informática
Ciencia de la Computación e Inteligencia Artificial
Universidad de Oviedo

L1. Sintaxis

1. Para cada una de las siguientes fórmulas, identifica los símbolos de constante, variable, función y predicado, indicando su aridad cuando proceda:
   a) $((p(c) \wedge r(X,Y)) \vee q(Y))$
   b) $\exists Y \forall X\, r(g(X, f(Y)), f(c))$

L1. Sintaxis

Solución:

a) $((p(c) \wedge r(X,Y)) \vee q(Y))$

Predicados: p (con aridad 1), q (con aridad 1), r (con aridad 2)

Funciones: no hay.

Variables: X, Y

Constantes: c

Solución:

b) $\exists Y \forall X\ r(g(X, f(Y)), f(c))$

Predicados: r (con aridad 2)

Funciones: f (con aridad 1), g (con aridad 2)

Variables: X, Y

Constantes: c

L1. Formalización

2. Establecer la relación de formalización entre las fórmulas y los enunciados siguientes:

a) $\exists X\big(p(X) \land q(X)\big)$
b) $\forall X(p(X) \rightarrow q(X))$
c) $\forall X(p(X) \rightarrow \neg q(X))$
d) $\forall X \neg p(f(X), a)$

1) No existe ningún número cuyo sucesor sea 0
2) Una persona es un ser racional
3) Ningún sabio dice tonterías
4) Hay usuarios que tienen permiso de lectura

Solución:

a) $\exists X\big(p(X) \land q(X)\big)$
b) $\forall X(p(X) \rightarrow q(X))$
c) $\forall X(p(X) \rightarrow \neg q(X))$
d) $\forall X \neg p(f(X), a)$

1) No existe ningún número cuyo sucesor sea 0
2) Una persona es un ser racional
3) Ningún sabio dice tonterías
4) Hay usuarios que tienen permiso de lectura

L1. Formalización

3. Formaliza los siguientes enunciados en lógica de predicados.
   a) Bilbo es un hobbit y Gandalf es un mago.
   b) Algunos hobbits cuentan chistes.
   c) Todos los magos cuentan historias fantásticas.
   d) No todos los magos son buenos.
   e) Ningún mago es un orco.
   f) Hay un anillo que es deseado por todos.
   g) Bien está lo que bien acaba.
   h) Los magos cuentan chistes solo cuando hay hobbits.

Predicados:
- A(x): x es un anillo
- B(x): x es bueno
- C(x): x cuenta chistes
- D(x,y): x desea y
- F(x): x cuenta historias fantásticas
- H(x): x es un hobbit
- M(x): x es un mago
- O(x): x es un orco
- Y(x): x está bien
- Z(x): x acaba bien

Constantes:
- Bilbo (b)
- Gandalf (g)

L1. Formalización

Solución:

a) Bilbo es un hobbit y Gandalf es un mago. $H(b) \wedge M(g)$

b) Algunos hobbits cuentan chistes. $\exists x \, (H(x) \wedge C(x))$

c) Todos los magos cuentan historias fantásticas. $\forall x \, (M(x) \rightarrow F(x))$

d) No todos los magos son buenos.
$\neg \forall x \, (M(x) \rightarrow B(x))$ o bien $\exists x \, (M(x) \wedge \neg B(x))$

e) Ningún mago es un orco. $\forall x \, (M(x) \rightarrow \neg O(x))$ o bien $\neg \exists x \, (M(x) \wedge O(x))$

f) Hay un anillo que es deseado por todos. $\exists x \, (A(x) \wedge \forall y \, D(y, x))$

g) Bien está lo que bien acaba. $\forall x \, (Z(x) \rightarrow Y(x))$

h) Los magos cuentan chistes solo cuando hay hobbits.
$\forall x \, (M(x) \rightarrow (C(x) \rightarrow \exists y \, H(y)))$

L1. Formalización

4. Formaliza los siguientes enunciados en lógica de predicados.
   a) Todo el mundo ama a alguien.
   b) Todos los alumnos de informática que estudian Lógica la aprueban.
   c) No todos los alumnos de informática aprueban Lógica.
   d) Es necesario que algún alumno de informática apruebe todas las asignaturas para que Pedro apruebe lógica.
   e) Algún alumno de informática no aprueba Lógica a menos que la haya estudiado.

Predicados:

- A(x,y): x ama a y
- I(x): x es alumno de informática
- E(x,y): x estudia y
- P(x,y): x aprueba y

Constantes:

- Pedro (p)
- Lógica (g)

L1. Formalización

Solución:

a) Todo el mundo ama a alguien.

$$\forall x\ \exists y\ A(x,y)$$

b) Todos los alumnos de informática que estudian Lógica la aprueban.

$$\forall x\ (I(x) \land E(x,g) \rightarrow P(x,g))$$

c) No todos los alumnos de informática aprueban Lógica.

$$\neg\forall x\ (I(x) \rightarrow P(x,g)) \ \text{ o bien } \ \exists x\ (I(x) \land \neg P(x,g))$$

d) Es necesario que algún alumno de informática apruebe todo para que Pedro apruebe lógica.

$$P(p,g) \rightarrow \exists x\ (I(x) \land \forall y\ P(x,y))$$

e) Algún alumno de informática no aprueba Lógica a menos que la haya estudiado.

$$\exists x\ (I(x) \land (P(x,g) \rightarrow E(x,g)))$$

L1. Formalización

5. Formaliza los siguientes enunciados en lógica de predicados.
   a) Es necesario que algún asturiano sea bueno en algún deporte para que todos hablen bien de Asturias.
   b) No todos los asturianos hablan en asturiano, pero todos los asturianos conocen a alguien que habla en asturiano.

Predicados:

- A(x): x es asturiano
- B(x,y): x es bueno en y
- C(x,y): x conoce a y
- D(x): x es un deporte
- H(x): x habla en asturiano
- Z(x,y): x habla bien de y

Constantes:

- Asturias (a)

L1. Formalización

Solución:

a) Es necesario que algún asturiano sea bueno en algún deporte para que todos hablen bien de Asturias.

$$\forall x\, Z(x,a) \rightarrow \exists x\, \left(A(x) \wedge \exists y\, \left(D(y) \wedge B(x,y)\right)\right)$$

b) No todos los asturianos hablan en asturiano, pero todos los asturianos conocen a alguien que habla en asturiano.

$$\neg\forall x\, \left(A(x) \rightarrow H(x)\right) \wedge \forall x\, \left(A(x) \rightarrow \exists y\, \left(C(x,y) \wedge H(y)\right)\right)$$

L1. Formalización

6. Formaliza los siguientes enunciados en lógica de predicados.
   a) Los niños mayores juegan con algunos niños pequeños.
   b) Algunos niños mayores juegan solo con niños pequeños.
   c) Algunos niños mayores no juegan con Laura a menos que Laura juegue con niños pequeños.

Predicados:
- J(x,y): x juega con y
- M(x): x es un niño mayor
- P(x): x es un niño pequeño

Constantes:
- Laura (l)

L1. Formalización

Solución:

a) Los niños mayores juegan con algunos niños pequeños.

$$\forall x\ (M(x) \rightarrow \exists y\ (P(y) \land J(x,y)))$$

b) Algunos niños mayores juegan solo con niños pequeños.

$$\exists x\ (M(x) \land \forall y\ (J(x,y) \rightarrow P(y)))$$

c) Algunos niños mayores no juegan con Laura a menos que Laura juegue con niños pequeños.

$$\exists x\ (M(x) \land (J(x,l) \rightarrow \exists y\ (P(y) \land J(l,y))))$$

L1. Formalización

7. Formalizar en lógica de predicados.

```
for (i=0; i<numObjects, i++)
{
        x=Objects(i);
        if isMushroom(x)
                if isPoisonous(x) && isPurple(x)
                        return false;
}
return true;
```

Solución:

$$\neg\exists x\ \big(isMushroom(x) \land isPoisonous(x) \land isPurple(x)\big)$$

$$\forall x\ (isMushroom(x) \rightarrow \neg(isPoisonous(x) \land isPurple(x)))$$

L1. Evaluación

8. Evalúese la siguiente fórmula con las interpretaciones que le acompañan.

$$F \coloneqq \forall x \forall y\, (p(x,y) \rightarrow q(x) \vee p(a,a))$$

a) $I_1 \coloneqq \left(dom(I_1), p_{I_1}, q_{I_1}, a_{I_1}\right)$ con $dom(I_1) \coloneqq \{A, B\},\ p_{I_1} \coloneqq \{(A,B),(B,B)\},\ q_{I_1} \coloneqq \{A\},\ a_{I_1} = B$

b) $I_2 \coloneqq \left(dom(I_2), p_{I_2}, q_{I_2}, a_{I_2}\right)$ con $dom(I_2) \coloneqq \{A, B\},\ p_{I_2} \coloneqq \{(B,B)\},\ q_{I_2} \coloneqq \{A\},\ a_{I_2} = A$

c) $I_3 \coloneqq \left(dom(I_3), p_{I_3}, q_{I_3}, a_{I_3}\right)$ con $dom(I_3) \coloneqq \{A, B\},\ p_{I_3} \coloneqq \{(A,A),(B,B)\},\ q_{I_3} \coloneqq \{B\},\ a_{I_3} = B$

d) $I_4 \coloneqq \left(dom(I_4), p_{I_4}, q_{I_4}, a_{I_4}\right)$ con $dom(I_4) \coloneqq \{A, B\},\ p_{I_4} \coloneqq \{(A,A),(A,B)\},\ q_{I_4} \coloneqq \{A\},\ a_{I_4} = B$

e) $I_5 \coloneqq \left(dom(I_5), p_{I_5}, q_{I_5}, a_{I_5}\right)$ con $dom(I_5) \coloneqq \{A\},\ p_{I_5} \coloneqq \{(A,A)\},\ q_{I_5} \coloneqq \{\ \},\ a_{I_5} = A$

L1. Evaluación

Solución:

$$F \ := \forall x \forall y\ (p(x,y) \rightarrow q(x) \vee p(a,a))$$

a) $I_1 := \left(dom(I_1), p_{I_1}, q_{I_1}, a_{I_1}\right)$ con $dom(I_1) := \{A, B\},\ p_{I_1} := \{(A,B),(B,B)\},\ q_{I_1} := \{A\},\ a_{I_1} = B$

$x = A$: $\forall y(\ldots)$ **V**

- $y = A$: $p(A,A) \rightarrow q(A) \vee p(B,B)$ — F, V, V — V
- $y = B$: $p(A,B) \rightarrow q(A) \vee p(B,B)$ — V, V, V — V

$x = B$: $\forall y(\ldots)$ **V**

- $y = A$: $p(B,A) \rightarrow q(B) \vee p(B,B)$ — F, F, V — V
- $y = B$: $p(B,B) \rightarrow q(B) \vee p(B,B)$ — V, F, V — V

V

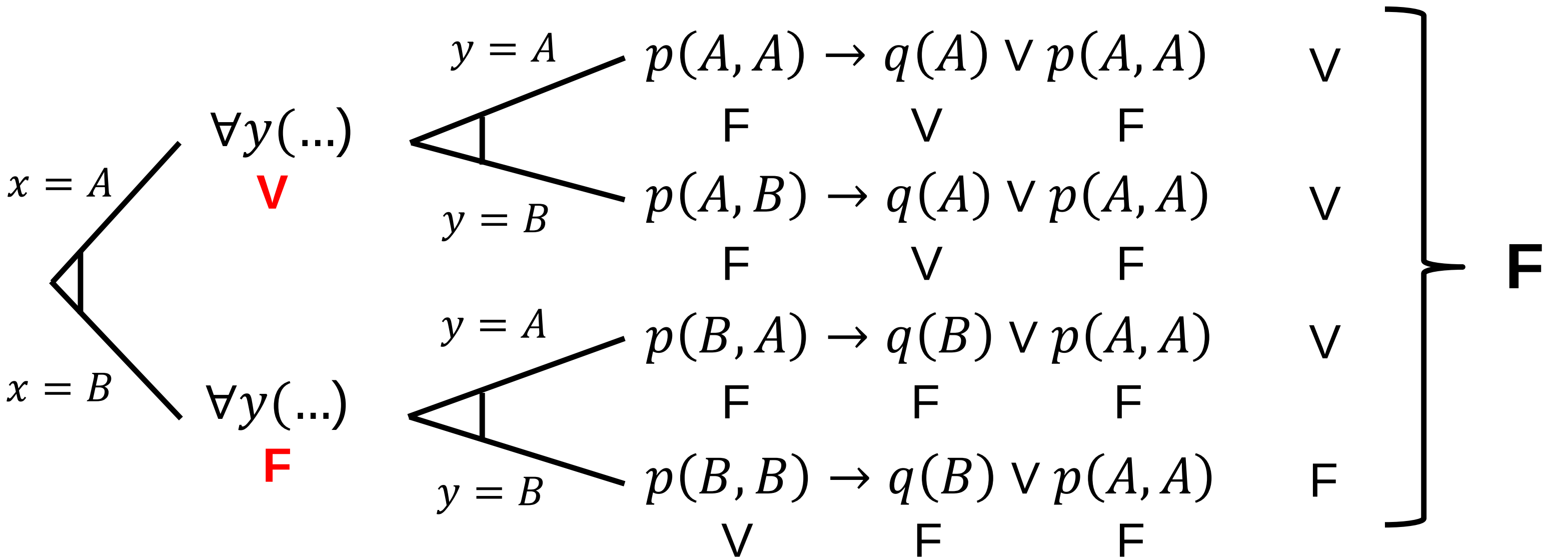
La fórmula es verdadera bajo la interpretación I_1.

L1. Evaluación

Solución:

$$F := \forall x \forall y\, (p(x,y) \rightarrow q(x) \vee p(a,a))$$

b) $I_2 := \left(dom(I_2), p_{I_2}, q_{I_2}, a_{I_2}\right)$ con $dom(I_2) := \{A,B\},\ p_{I_2} := \{(B,B)\},\ q_{I_2} := \{A\},\ a_{I_2} = A$



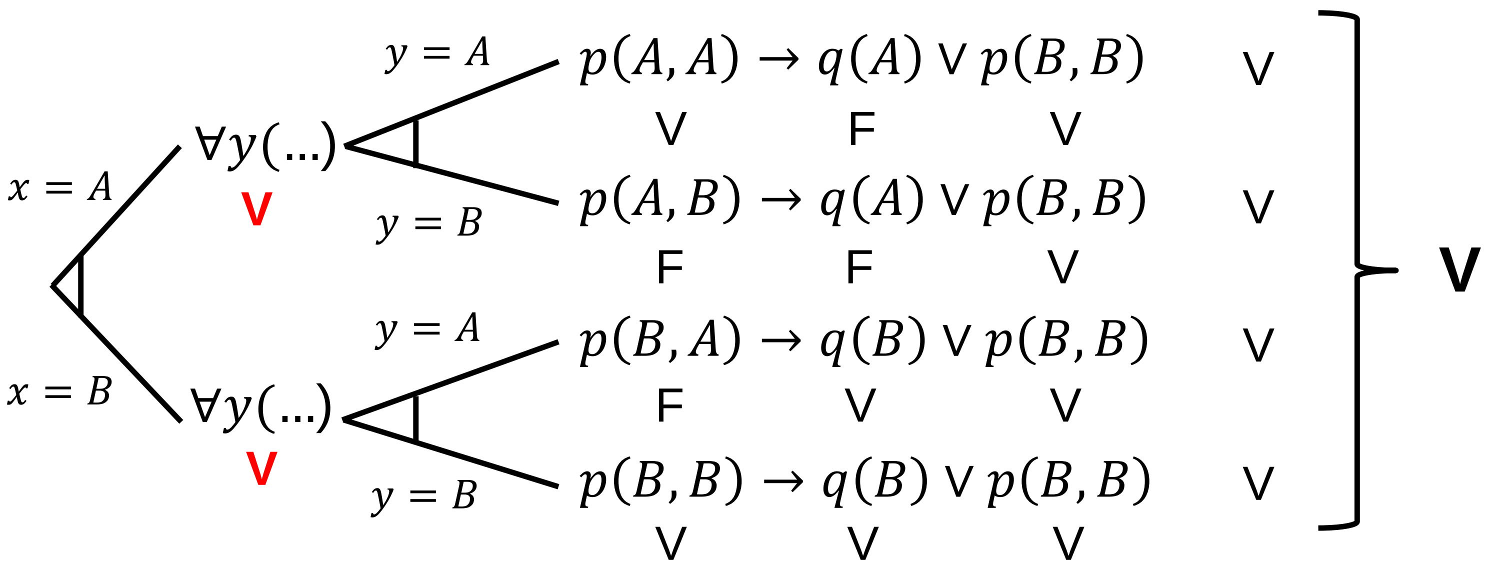
La fórmula es falsa bajo la interpretación I_2.

L1. Evaluación

Solución:

$$F := \forall x \forall y\,(p(x,y) \rightarrow q(x) \vee p(a,a))$$

c) $I_3 := \left(dom(I_3), p_{I_3}, q_{I_3}, a_{I_3}\right)$ con $dom(I_3) := \{A,B\},\ p_{I_3} := \{(A,A),(B,B)\},\ q_{I_3} := \{B\},\ a_{I_3} = B$



La fórmula es verdadera bajo la interpretación I_3.

L1. Evaluación

Solución:

$$F \coloneqq \forall x \forall y\, (p(x,y) \rightarrow q(x) \vee p(a,a))$$

d) $I_4 \coloneqq \left(dom(I_4), p_{I_4}, q_{I_4}, a_{I_4}\right)$ con $dom(I_4) \coloneqq \{A,B\},\ p_{I_4} \coloneqq \{(A,A),(A,B)\},\ q_{I_4} \coloneqq \{A\},\ a_{I_4} = B$

$x = A$: $\forall y(\ldots)$ **V**

- $y = A$: $p(A,A) \rightarrow q(A) \vee p(B,B)$ — V; V F — V
- $y = B$: $p(A,B) \rightarrow q(A) \vee p(B,B)$ — V; V F — V

$x = B$: $\forall y(\ldots)$ **V**

- $y = A$: $p(B,A) \rightarrow q(B) \vee p(B,B)$ — F; F F — V
- $y = B$: $p(B,B) \rightarrow q(B) \vee p(B,B)$ — F; F F — V

V

La fórmula es verdadera bajo la interpretación I_4.

L1. Evaluación

Solución:

$$F := \forall x \forall y\,(p(x,y) \to q(x) \vee p(a,a))$$

e) $I_5 := \big(dom(I_5), p_{I_5}, q_{I_5}, a_{I_5}\big)$ con $dom(I_5) := \{A\},\ p_{I_5} := \{(A,A)\},\ q_{I_5} := \{\ \},\ a_{I_5} = A$

$y = A$ $\quad p(A,A) \to q(A) \vee p(A,A)$ V

V F V

$x = A$ $\quad \forall y(\ldots)$

V

V

La fórmula es verdadera bajo la interpretación I_5.

L1. Evaluación

8. Evalúese la siguiente fórmula con las interpretaciones que le acompañan.

$$G \;\coloneqq \exists x \exists y\, (p(x,y) \rightarrow \forall z\, q(x,z))$$

a) $I_1 \coloneqq \left(dom(I_1), p_{I_1}, q_{I_1}\right)$ con $dom(I_1) \coloneqq \{A,B\},\ p_{I_1} \coloneqq \{(A,B)\},\ q_{I_1} \coloneqq \{(A,B)\}$

b) $I_2 \coloneqq \left(dom(I_2), p_{I_2}, q_{I_2}\right)$ con $dom(I_2) \coloneqq \{A,B\},\ p_{I_2} \coloneqq \{(A,A),(B,B)\},\ q_{I_2} \coloneqq \{(A,A),(A,B)\}$

c) $I_3 \coloneqq \left(dom(I_3), p_{I_3}, q_{I_3}\right)$ con $dom(I_3) \coloneqq \{A\},\ p_{I_3} \coloneqq \{(A,A)\},\ q_{I_3} \coloneqq \{(A,A)\}$

d) $I_4 \coloneqq \left(dom(I_4), p_{I_4}, q_{I_4}\right)$ con $dom(I_4) \coloneqq \{A,B\},\ p_{I_4} \coloneqq \{(A,B)\},\ q_{I_4} \coloneqq \{(B,A)\}$

L1. Evaluación

Solución:

$$G \coloneqq \exists x \exists y\, (p(x,y) \rightarrow \forall z\, q(x,z))$$

a) $I_1 \coloneqq \left(dom(I_1), p_{I_1}, q_{I_1}\right)$ con $dom(I_1) \coloneqq \{A, B\},\ p_{I_1} \coloneqq \{(A,B)\},\ q_{I_1} \coloneqq \{(A,B)\}$

$x = A$

$\exists y\,(\ldots)$

V

$y = A$

$p(A,A) \rightarrow \forall z\, q(A,z)$ V

F ¿?

V

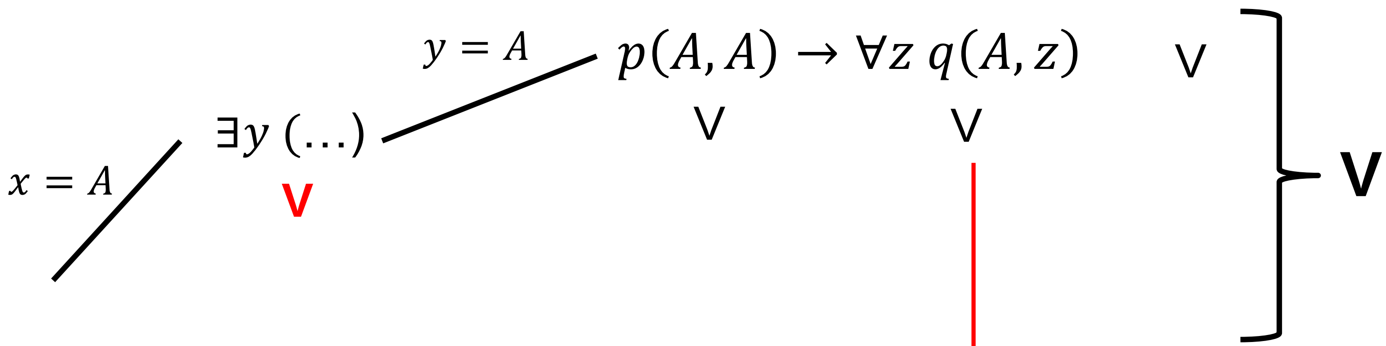
Sin necesidad de evaluar lo que falta, podemos ver que la fórmula es verdadera bajo la interpretación I_1.

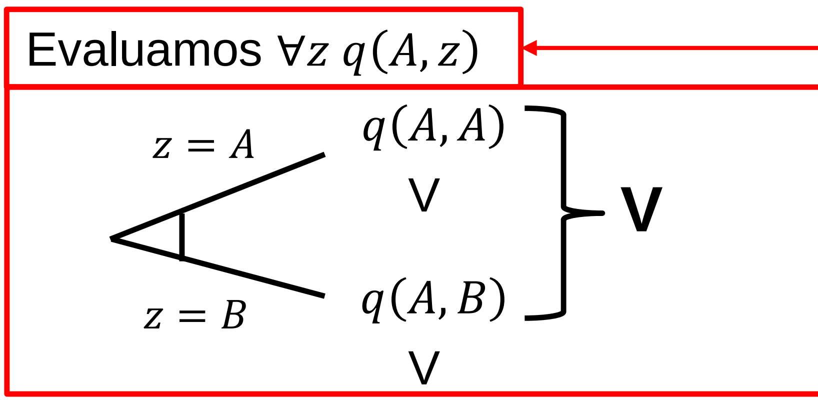
L1. Evaluación

Solución:

$$G \coloneqq \exists x \exists y\, (p(x,y) \rightarrow \forall z\, q(x,z))$$

b) $I_2 \coloneqq \left(dom(I_2), p_{I_2}, q_{I_2}\right)$ con $dom(I_2) \coloneqq \{A,B\},\ p_{I_2} \coloneqq \{(A,A),(B,B)\},\ q_{I_2} \coloneqq \{(A,A),(A,B)\}$





Sin necesidad de evaluar lo que falta, podemos ver que la fórmula es verdadera bajo la interpretación I_2.

L1. Evaluación

Solución:

$$G \coloneqq \exists x \exists y\, (p(x,y) \rightarrow \forall z\, q(x,z))$$

c) $I_3 \coloneqq \left(dom(I_3), p_{I_3}, q_{I_3}\right)$ con $dom(I_3) \coloneqq \{A\},\ p_{I_3} \coloneqq \{(A,A)\},\ q_{I_3} \coloneqq \{(A,A)\}$

$y = A$ $\quad p(A,A) \rightarrow \forall z\, q(A,z)$ V

V V

V

$\exists y\,(\ldots)$

$x = A$

V

Evaluamos $\forall z\, q(A,z)$

$z = A$ $\quad q(A,A)$ V

V

V

La fórmula es verdadera bajo la interpretación I_3.

L1. Evaluación

Solución:

$$G \coloneqq \exists x \exists y \, (p(x,y) \rightarrow \forall z \, q(x,z))$$

d) $I_4 \coloneqq \left(dom(I_4), p_{I_4}, q_{I_4}\right)$ con $dom(I_4) \coloneqq \{A, B\},\ p_{I_4} \coloneqq \{(A,B)\},\ q_{I_4} \coloneqq \{(B,A)\}$

$x = A$ $\exists y \, (\ldots)$ **V**

$y = A$ $p(A,A) \rightarrow \forall z \, q(A,z)$ V

F   ¿?

V

Sin necesidad de evaluar lo que falta, podemos ver que la fórmula es verdadera bajo la interpretación I_4.

L1. Evaluación

8. Evalúese la siguiente fórmula con las interpretaciones que le acompañan.

$$H \coloneqq \exists y \neg \exists x \, (p(y) \leftrightarrow q(x,y))$$

a) $I_1 \coloneqq \left(dom(I_1), p_{I_1}, q_{I_1}\right)$ con $dom(I_1) \coloneqq \{A, B\},\ p_{I_1} \coloneqq \{A\},\ q_{I_1} \coloneqq \{(A,B),(A,A)\}$

b) $I_2 \coloneqq \left(dom(I_2), p_{I_2}, q_{I_2}\right)$ con $dom(I_2) \coloneqq \{A, B\},\ p_{I_2} \coloneqq \{A\},\ q_{I_2} \coloneqq \{(A,B),(B,A),(B,B)\}$

L1. Evaluación

Solución:

$$H \coloneqq \exists y \neg \exists x\, (p(y) \leftrightarrow q(x,y))$$

a) $I_1 \coloneqq (dom(I_1), p_{I_1}, q_{I_1})$ con $dom(I_1) \coloneqq \{A,B\},\ p_{I_1} \coloneqq \{A\},\ q_{I_1} \coloneqq \{(A,B),(A,A)\}$

$y = A$: $\neg \underbrace{\exists x\, (p(A) \leftrightarrow q(x,A))}_{\mathbf{V}}$ **F**

$y = B$: $\neg \underbrace{\exists x\, (p(B) \leftrightarrow q(x,B))}_{\mathbf{V}}$ **F**

F

Evaluamos $\exists x\, (p(A) \leftrightarrow q(x,A))$

$x = A$: $p(A) \leftrightarrow q(A,A)$ V   V

V

Evaluamos $\exists x\, (p(B) \leftrightarrow q(x,B))$

$x = A$: $p(B) \leftrightarrow q(A,B)$ F   V   F

$x = B$: $p(B) \leftrightarrow q(B,B)$ F   F   V

V

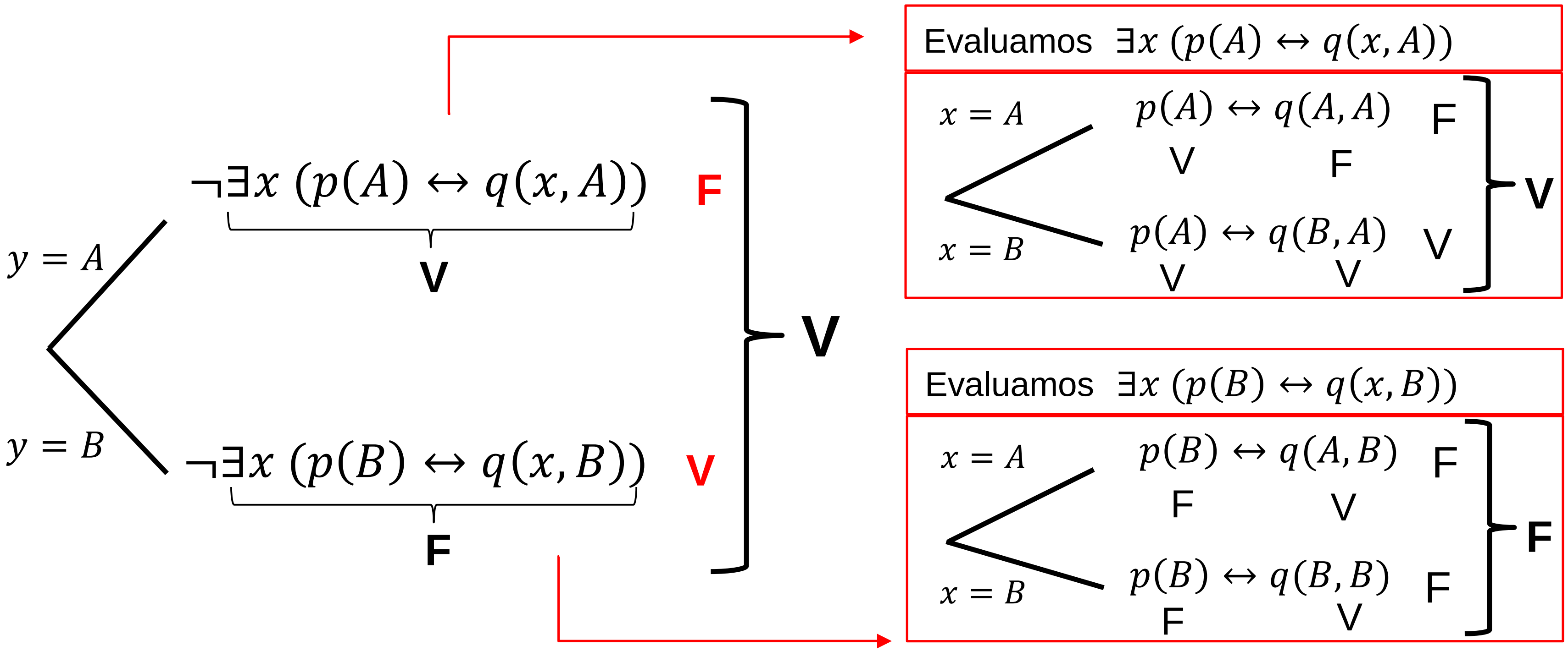
La fórmula es falsa bajo la interpretación I_1.

L1. Evaluación

Solución:

$$H \coloneqq \exists y \neg \exists x\, (p(y) \leftrightarrow q(x,y))$$

b) $I_2 \coloneqq \left(dom(I_2), p_{I_2}, q_{I_2}\right)$ con $dom(I_2) \coloneqq \{A,B\},\ p_{I_2} \coloneqq \{A\},\ q_{I_2} \coloneqq \{(A,B),(B,A),(B,B)\}$



La fórmula es verdadera bajo la interpretación I_1.

L1. Evaluación

9. Proporcionar una interpretación bajo la cual la siguiente fórmula tome el valor de verdadero:

$$\forall x \exists y \left[p\big(y, f(x)\big) \wedge q\big(a, g(y, x)\big) \right]$$

L1. Evaluación

$$\forall x \exists y \left[p(y, f(x)) \wedge q(a, g(y,x)) \right]$$

Solución: hay infinitas soluciones posibles, vamos a proponer una de ellas. Hay que definir los predicados, funciones y constantes. Por ejemplo comprobemos que bajo la siguiente interpretación la fórmula es verdadera:

dominio = {1,2}

p(x,y) = “x ≥ y”

q(x,y) = “x+y>2”

f(x) = 3-x

g(x,y) = max(x,y)

a = 2

$x = 1$: $\exists y\,(\ldots)$ **V**

- $y = 1$: $p(1, f(1)) \wedge q(2, g(1,1))$ — F, V — F
- $y = 2$: $p(2, f(1)) \wedge q(2, g(2,1))$ — V, V — V

$x = 2$: $\exists y\,(\ldots)$ **V**

- $y = 1$: $p(1, f(2)) \wedge q(2, g(1,2))$ — V, V — V

V

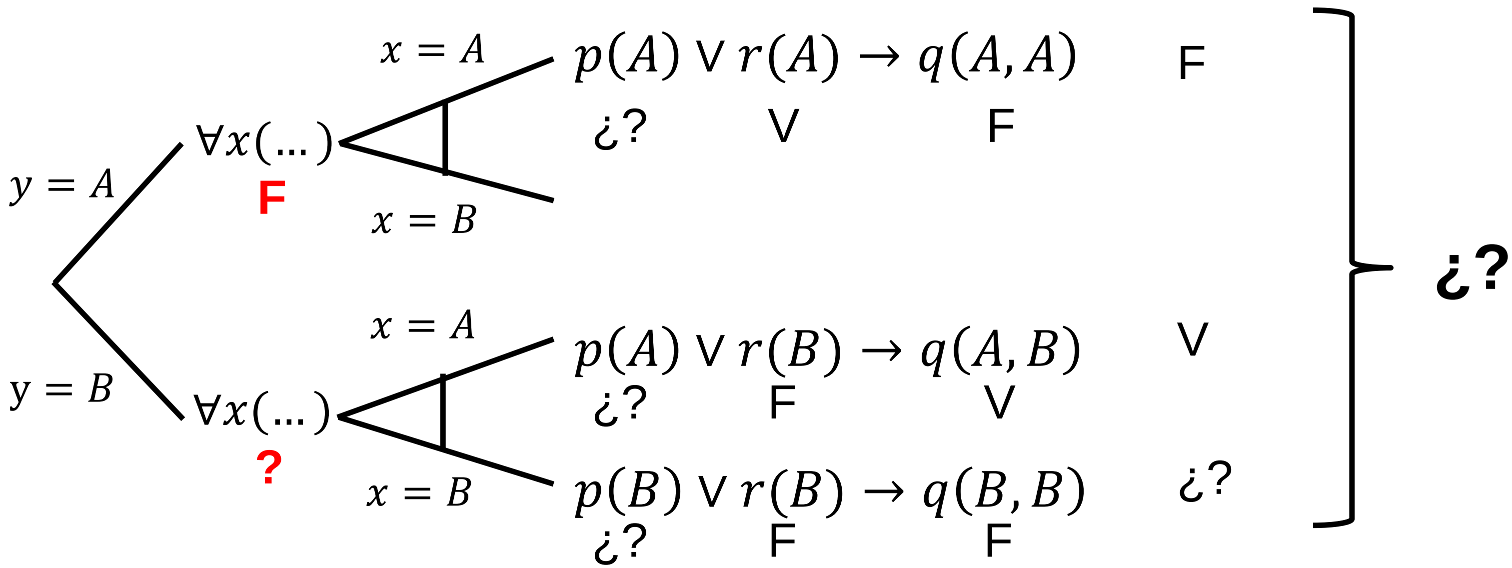
L1. Evaluación

10. Dada la fórmula $\exists y \forall x(p(x) \vee r(y) \rightarrow q(x,y))$ y la interpretación $I \coloneqq (dom(I), r_I, q_I, p_I)$ con $dom(I) \coloneqq \{A, B\}, r_I \coloneqq \{A\}, q_I \coloneqq \{(A, B)\}$, $p_I \coloneqq ¿?$. Completa p_I para que la fórmula sea verdadera bajo la interpretación I, si es posible.

L1. Evaluación

$$\exists y \forall x (p(x) \vee r(y) \rightarrow q(x, y))$$

Solución: comenzamos construyendo el árbol con los datos que tenemos:

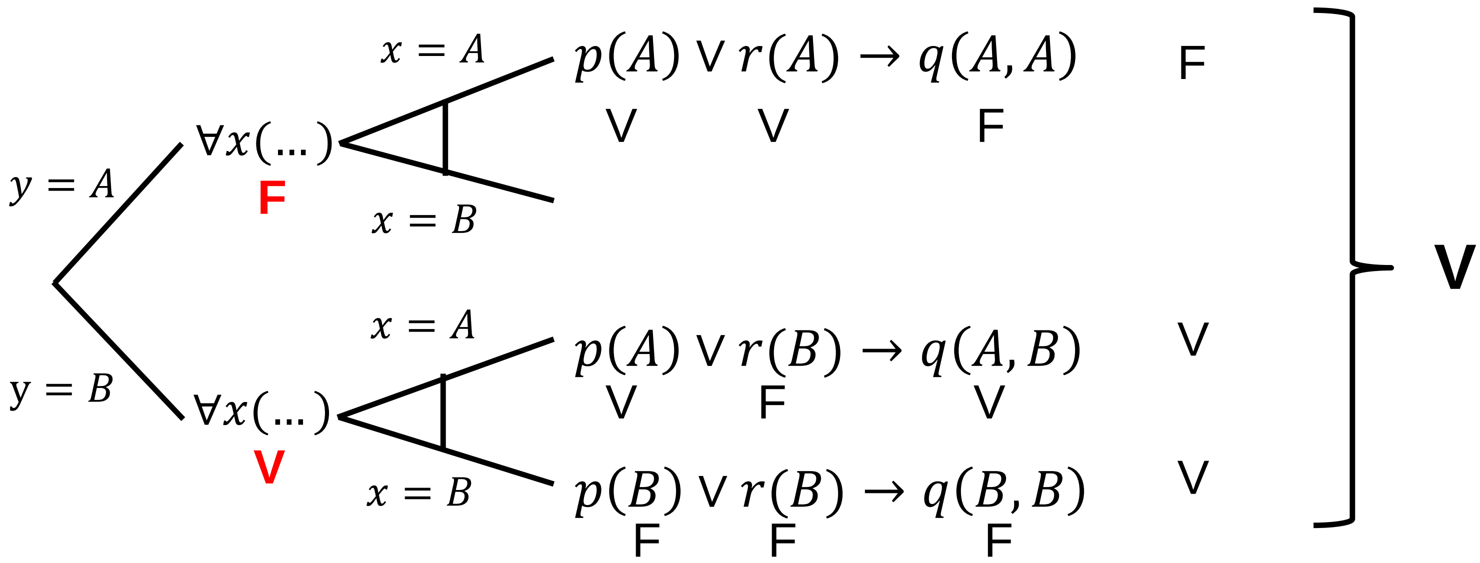


Para que el resultado sea verdadero, ya que a fórmula es $\exists y \forall x$, necesitaríamos que la cuarta rama fuese V. Para conseguir esto, lo único que necesitaríamos es que $p(B)$ sea falso. Por tanto, cualquier interpretación que tenga $p(B)$ falso será una solución al ejercicio.

L1. Evaluación

$\exists y \forall x (p(x) \vee r(y) \to q(x,y))$

Solución: por ejemplo, con $p_I \coloneqq \{A\}$ tendríamos



Y entonces la fórmula sería verdadera bajo la interpretación I.