



Universidad de Oviedo
Universidá d'Uviéu
University of Oviedo

Sesión 4

Deducción Natural

Departamento de Informática
Ciencia de la Computación e Inteligencia Artificial
Universidad de Oviedo

L0. Deducción Natural

1. Demuestra por Deducción Natural:

- a) $\{p \rightarrow (p \wedge q), p\} \vdash q$
- b) $\{p \rightarrow (q \rightarrow r), p \rightarrow q, p\} \vdash r$
- c) $\{p \rightarrow \neg q, ((\neg q \vee r) \rightarrow \neg s), p \wedge t\} \vdash \neg s$
- d) $\{p \rightarrow q, p \rightarrow r\} \vdash (p \rightarrow q \wedge r)$
- e) $\{p \rightarrow q\} \vdash (p \wedge r \rightarrow q \wedge r)$
- f) $\{p \rightarrow (q \leftrightarrow r)\} \vdash p \wedge q \rightarrow r$
- g) $\{p \vee q \rightarrow r\} \vdash (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$
- h) $\{p \vee q \rightarrow \neg p, \neg q\} \vdash \neg p$
- i) $\{r \vee \neg q \rightarrow s \wedge \neg r, s \vee \neg r \rightarrow q, p \rightarrow \neg q\} \vdash \neg (\neg r \wedge p)$
- j) $\{\neg p \rightarrow q, p \rightarrow \neg r\} \vdash r \rightarrow q$
- k) $\{p \wedge q \rightarrow r\} \vdash \neg r \rightarrow (p \rightarrow \neg q)$
- l) $\{p \rightarrow q, r \rightarrow s, p \vee r\} \vdash q \vee s$
- m) $\{p \wedge (q \vee r)\} \vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
- n) $\{(p \vee s) \rightarrow (q \wedge r), \neg r \rightarrow q\} \vdash (p \vee \neg q) \rightarrow r$

L0. Deducción Natural

1. Demuestra por Deducción Natural:

a) $\{p \rightarrow (p \wedge q), p\} \vdash q$

1. $p \rightarrow (p \wedge q)$	P1
2. p	P2
3. $p \wedge q$	$\rightarrow E1,2$
4. q	$\wedge E3$

L0. Deducción Natural

b) $\{p \rightarrow (q \rightarrow r), p \rightarrow q, p\} \vdash r$

1.	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	P1
2.	$p \rightarrow q$	P2
3.	p	P3
4.	$q \rightarrow r$	$\rightarrow E1,3$
5.	q	$\rightarrow E2,3$
6.	r	$\rightarrow E4,5$

L0. Deducción Natural

c) $\{p \rightarrow \neg q, ((\neg q \vee r) \rightarrow \neg s), p \wedge t\} \vdash \neg s$

1.	$p \rightarrow \neg q$	P1
2.	$(\neg q \vee r) \rightarrow \neg s$	P2
3.	$p \wedge t$	P3
4.	p	$\wedge E3$
5.	$\neg q$	$\rightarrow E1,4$
6.	$\neg q \vee r$	$\vee I5$
7.	$\neg s$	$\rightarrow E2,6$

L0. Deducción Natural

d) $\{p \rightarrow q, p \rightarrow r\} \vdash (p \rightarrow q \wedge r)$

1.	$p \rightarrow q$	P1
2.	$p \rightarrow r$	P2
3.	p	Supuesto
4.	q	$\rightarrow E1,3$
5.	r	$\rightarrow E2,3$
6.	$q \wedge r$	$\wedge I4,5$
7.	$p \rightarrow q \wedge r$	$\rightarrow I3-6$

L0. Deducción Natural

e) $\{p \rightarrow q\} \vdash (p \wedge r \rightarrow q \wedge r)$

1. $p \rightarrow q$	P1
2. $p \wedge r$	Supuesto
3. p	$\wedge E2$
4. r	$\wedge E2$
5. q	$\rightarrow E1,3$
6. $q \wedge r$	$\wedge I4,5$
7. $p \wedge r \rightarrow q \wedge r$	$\rightarrow I2-6$

L0. Deducción Natural

f) $\{p \rightarrow (q \leftrightarrow r)\} \vdash p \wedge q \rightarrow r$

1. $p \rightarrow (q \leftrightarrow r)$ P1

2. $p \wedge q$ Supuesto

3. p $\wedge E2$

4. q $\wedge E2$

5. $q \leftrightarrow r$ $\rightarrow E1,3$

6. $q \rightarrow r$ $\leftrightarrow E5$

7. r $\rightarrow E4-6$

8. $p \wedge q \rightarrow r$ $\rightarrow I2-7$

L0. Deducción Natural

g) $\{p \vee q \rightarrow r\} \vdash (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$

1.	$p \vee q \rightarrow r$	P1
2.	p	Supuesto
3.	$p \vee q$	$\vee I 2$
4.	r	$\rightarrow E 1, 3$
5.	$p \rightarrow r$	$\rightarrow I 2-4$
6.	q	Supuesto
7.	$p \vee q$	$\vee I 6$
8.	r	$\rightarrow E 1, 7$
9.	$q \rightarrow r$	$\rightarrow I 6-8$
10.	$(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$	$\wedge I 5, 9$

p Sup.	q Sup.
r	r
$(p \rightarrow r)$	$(q \rightarrow r)$
<hr/>	
$(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$	

L0. Deducción Natural

h) $\{p \vee q \rightarrow \neg p, \neg q\} \vdash \neg p$

1.	$p \vee q \rightarrow \neg p$	P1
2.	$\neg q$	P2
3.	p	Supuesto
4.	$p \vee q$	$\vee I 3$
5.	$\neg p$	$\rightarrow E 1, 4$
6.	$p \wedge \neg p$	$\wedge I 3, 5$
7.	$\neg p$	$\neg I 3-6$

L0. Deducción Natural

i) $\{r \vee \neg q \rightarrow s \wedge \neg r, s \vee \neg r \rightarrow q, p \rightarrow \neg q\} \vdash \neg (\neg r \wedge p)$

1.	$r \vee \neg q \rightarrow s \wedge \neg r$	P1
2.	$s \vee \neg r \rightarrow q$	P2
3.	$p \rightarrow \neg q$	P3
4.	$\neg r \wedge p$	Supuesto
5.	$\neg r$	$\wedge E4$
6.	$s \vee \neg r$	$\vee I5$
7.	q	$\rightarrow E2,6$
8.	p	$\wedge E4$
9.	$\neg q$	$\rightarrow E3,8$
10.	$q \wedge \neg q$	$\wedge I7,9$
11.	$\neg (\neg r \wedge p)$	$\neg I4-10$

L0. Deducción Natural

j) $\{\neg p \rightarrow q, p \rightarrow \neg r\} \vdash r \rightarrow q$

1.	$\neg p \rightarrow q$	P1
2.	$p \rightarrow \neg r$	P2
3.	r	Supuesto
4.	p	Supuesto
5.	$\neg r$	\rightarrow E2,4
6.	$r \wedge \neg r$	\wedge I3,5
7.	$\neg p$	\neg I4-6
8.	q	\rightarrow E1,7
9.	$r \rightarrow q$	\rightarrow I3-8

L0. Deducción Natural

k) $\{p \wedge q \rightarrow r\} \vdash \neg r \rightarrow (p \rightarrow \neg q)$

1.	$p \wedge q \rightarrow r$	P1
2.	$\neg r$	Supuesto
3.	p	Supuesto
4.	q	Supuesto
5.	$p \wedge q$	$\wedge I 3,4$
6.	r	$\rightarrow E 1,5$
7.	$r \wedge \neg r$	$\wedge I 2,6$
8.	$\neg q$	$\neg I 4-7$
9.	$p \rightarrow \neg q$	$\rightarrow I 3-8$
10.	$\neg r \rightarrow (p \rightarrow \neg q)$	$\rightarrow I 2-9$

L0. Deducción Natural

l) $\{p \rightarrow q, r \rightarrow s, p \vee r\} \vdash q \vee s$

1.	$p \rightarrow q$	P1
2.	$r \rightarrow s$	P2
3.	$p \vee r$	P3
4.	p	Supuesto
5.	q	\rightarrow E1,4
6.	$q \vee s$	\vee I5
7.	$p \rightarrow q \vee s$	\rightarrow I4-6
8.	r	Supuesto
9.	s	\rightarrow E2,8
10.	$q \vee s$	\vee I9
11.	$r \rightarrow q \vee s$	\rightarrow I8-10
12.	$q \vee s$	\vee E3,7,11

	<table><tr><td>p Sup.</td></tr><tr><td>q ∨ s</td></tr></table>	p Sup.	q ∨ s	<table><tr><td>r Sup.</td></tr><tr><td>q ∨ s</td></tr></table>	r Sup.	q ∨ s
p Sup.						
q ∨ s						
r Sup.						
q ∨ s						
p ∨ r	(p → q ∨ s)	(r → q ∨ s)				
<hr/>						
q ∨ s						

L0. Deducción Natural

m) $\{p \wedge (q \vee r)\} \vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

1.	$p \wedge (q \vee r)$	P1
2.	p	\wedge E1
3.	$q \vee r$	\wedge E1
4.	q	Supuesto
5.	$p \wedge q$	\wedge I2,4
6.	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	\vee I5
7.	$q \rightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	\rightarrow I4-6
8.	r	Supuesto
9.	$p \wedge r$	\wedge I2,8
10.	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	\vee I9
11.	$r \rightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	\rightarrow I8-10
12.	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	\vee E3,7,11

<div> <div>q Sup.</div> <div>$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$</div> </div>		<div> <div>r Sup.</div> <div>$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$</div> </div>	
$q \vee r$	$q \rightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$r \rightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	
<hr/>			
$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$			

L0. Deducción Natural

n) $\{(p \vee s) \rightarrow (q \wedge r), \neg r \rightarrow q\} \vdash (p \vee \neg q) \rightarrow r$

1. $(p \vee s) \rightarrow (q \wedge r)$ P1

2. $\neg r \rightarrow q$ P2

3. $p \vee \neg q$ Supuesto

4. p Supuesto

5. $p \vee s$ $\vee I4$

6. $q \wedge r$ $\rightarrow E1,5$

7. r $\wedge E6$

8. $p \rightarrow r$ $\rightarrow I4-7$

9. $\neg q$ Supuesto

10. $\neg r$ Supuesto

11. q $\rightarrow E2,10$

12. $\neg q \wedge q$ $\wedge I9,11$

13. r $\neg E10-12$

14. $\neg q \rightarrow r$ $\rightarrow I9-13$

15. r $\vee E3,8,14$

16. $(p \vee \neg q) \rightarrow r$ $\rightarrow I3-15$

	<div> <p>p Sup.</p> <p>r</p> </div>	<div> <p>$\neg q$ Sup.</p> <p>r</p> </div>
$p \vee \neg q$	$p \rightarrow r$	$\neg q \rightarrow r$
<hr/>		
	r	

L0. Deducción Natural

2. Averiguar, mediante deducción natural, si el siguiente razonamiento es correcto:

Es necesario que me puedan multar para que guarde los límites de velocidad.

Si guardo los límites de velocidad, entonces no me pueden multar y mantengo los puntos.

Por tanto, no guardo los límites de velocidad

$$\{q \rightarrow p, q \rightarrow \neg p \wedge r\} \vdash \neg q$$

1. $q \rightarrow p$	P1
2. $q \rightarrow \neg p \wedge r$	P2
3. q	Supuesto
4. p	\rightarrow E1,3
5. $\neg p \wedge r$	\rightarrow E2,3
6. $\neg p$	\wedge E5
7. $p \wedge \neg p$	\wedge I4,6
8. $\neg q$	\neg I3-7

L0. Deducción Natural

3. Demuestra por Deducción Natural:

- a) $\{p, (q \vee p) \wedge (p \rightarrow r), q \vee s\} \vdash r \vee s$
- b) $\{q \vee \neg r \leftrightarrow p, q \rightarrow \neg r, \neg r \rightarrow s\} \vdash p \wedge \neg r \rightarrow s$
- c) $\{p \rightarrow q \wedge r\} \vdash p \wedge q \leftrightarrow p \wedge r$
- d) $\{p \vee \neg r, \neg r \rightarrow s, \neg p\} \vdash s$
- e) $\{p \wedge \neg q, q \vee r\} \vdash r$
- f) $\{p \wedge q \wedge r, p \wedge r \rightarrow \neg s, s \vee t\} \vdash t$

L0. Deducción Natural

a) $\{p, (q \vee p) \wedge (p \rightarrow r), q \vee s\} \vdash r \vee s$

1. p	P1
2. $(q \vee p) \wedge (p \rightarrow r)$	P2
3. $q \vee s$	P3
4. $p \rightarrow r$	$\wedge E2$
5. r	$\rightarrow E1,4$
6. $r \vee s$	$\vee I5$

L0. Deducción Natural

b) $\{q \vee \neg r \leftrightarrow p, q \rightarrow \neg r, \neg r \rightarrow s\} \vdash p \wedge \neg r \rightarrow s$

1.	$q \vee \neg r \leftrightarrow p$	P1
2.	$q \rightarrow \neg r$	P2
3.	$\neg r \rightarrow s$	P3
4.	$p \wedge \neg r$	Supuesto
5.	$\neg r$	$\wedge E4$
6.	s	$\rightarrow E3,5$
7.	$p \wedge \neg r \rightarrow s$	$\rightarrow I4-6$

L0. Deducción Natural

1. $p \rightarrow q \wedge r$

P1

2. $p \wedge q$

Supuesto

3. p

$\wedge E2$

4. $q \wedge r$

$\rightarrow E1,3$

5. r

$\wedge E4$

6. $p \wedge r$

$\wedge I3,5$

7. $p \wedge q \rightarrow p \wedge r$

$\rightarrow I2-6$

8. $p \wedge r$

Supuesto

9. p

$\wedge E8$

10. $q \wedge r$

$\rightarrow E1,9$

11. q

$\wedge E10$

12. $p \wedge q$

$\wedge I9,11$

13. $p \wedge r \rightarrow p \wedge q$

$\rightarrow I8-12$

14. $p \wedge q \leftrightarrow p \wedge r$

$\leftrightarrow I7,13$

c) $\{p \rightarrow q \wedge r\} \vdash p \wedge q \leftrightarrow p \wedge r$

$p \wedge q$ Sup.

$p \wedge r$

$p \wedge q \rightarrow p \wedge r$

$p \wedge r$ Sup.

$p \wedge q$

$p \wedge r \rightarrow p \wedge q$

$p \wedge q \leftrightarrow p \wedge r$

L0. Deducción Natural

d) $\{p \vee \neg r, \neg r \rightarrow s, \neg p\} \vdash s$

- | | | |
|----|------------------------|---------------------|
| 1. | $p \vee \neg r$ | P1 |
| 2. | $\neg r \rightarrow s$ | P2 |
| 3. | $\neg p$ | P3 |
| 4. | p | Supuesto |
| 5. | $\neg s$ | Supuesto |
| 6. | $p \wedge \neg p$ | $\wedge I 3,4$ |
| 7. | s | $\neg E 5-6$ |
| 8. | $p \rightarrow s$ | $\rightarrow I 4-7$ |
| 9. | s | $\vee E 1,2,8$ |

<div><div>p Sup.</div><div>s</div></div>		
$p \vee \neg r$	$p \rightarrow s$	$\neg r \rightarrow s$
<hr/>		
s		

L0. Deducción Natural

e) $\{p \wedge \neg q, q \vee r\} \vdash r$

1.	$p \wedge \neg q$	P1
2.	$q \vee r$	P2
3.	q	Supuesto
4.	$\neg r$	Supuesto
5.	$\neg q$	$\wedge E1$
6.	$q \wedge \neg q$	$\wedge I\ 3,5$
7.	r	$\neg E\ 4-6$
8.	$q \rightarrow r$	$\rightarrow I\ 3-7$
9.	r	Supuesto
10.	$\neg r$	Supuesto
11.	$\neg r \wedge r$	$\wedge I\ 9,10$
12.	r	$\neg E\ 10-11$
13.	$r \rightarrow r$	$\rightarrow I\ 9-12$
14.	r	$\vee E\ 2,8,13$

	<div>q Sup. r</div>	<div>r Sup. r</div>
$q \vee r$	$q \rightarrow r$	$r \rightarrow r$
<hr/>		
	r	

L0. Deducción Natural

1. $p \wedge q \wedge r$ P1
2. $p \wedge r \rightarrow \neg s$ P2
3. $s \vee t$ P3

4. s Supuesto
5. p $\wedge E1$
6. r $\wedge E1$
7. $p \wedge r$ $\wedge I5,6$
8. $\neg s$ $\rightarrow E2,7$

9. $\neg t$ Supuesto
10. $s \wedge \neg s$ $\wedge I 4,8$

11. t $\neg E9-10$

12. $s \rightarrow t$ $\rightarrow I4-11$

13. t Supuesto

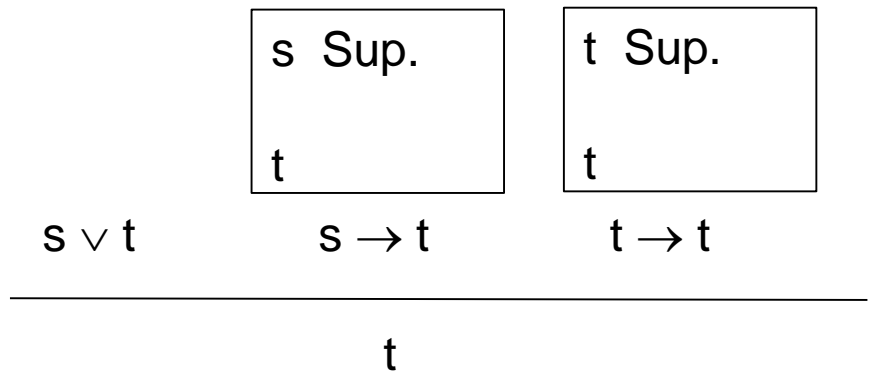
14. $\neg t$ Supuesto
15. $\neg t \wedge t$ $\wedge I13,14$

16. t $\neg E14-15$

17. $t \rightarrow t$ $\rightarrow I13-16$

18. t $\vee E3,12,17$

f) $\{p \wedge q \wedge r, p \wedge r \rightarrow \neg s, s \vee t\} \vdash t$



L0. Deducción Natural

1. $p \wedge q \wedge r$ P1
2. $p \wedge r \rightarrow \neg s$ P2
3. $s \vee t$ P3

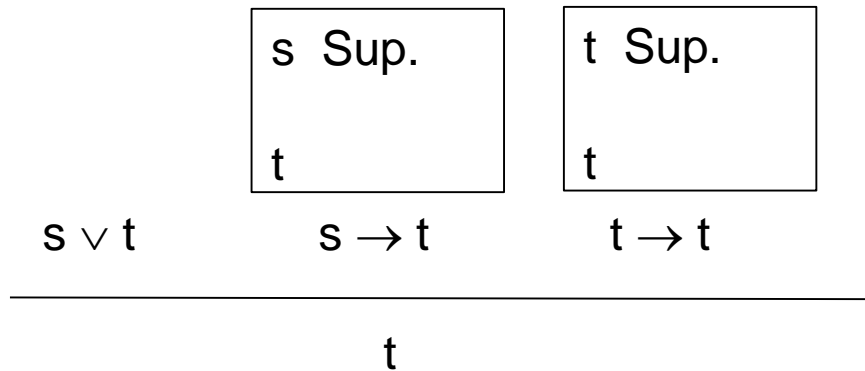
- | | |
|-----------------------|--------------------|
| 4. s | Supuesto |
| 5. $\neg t$ | Supuesto |
| 5. p | $\wedge E1$ |
| 6. r | $\wedge E1$ |
| 7. $p \wedge r$ | $\wedge I5,6$ |
| 8. $\neg s$ | $\rightarrow E2,8$ |
| 10. $s \wedge \neg s$ | $\wedge I4,9$ |
| 11. t | $\neg E5-10$ |

12. $s \rightarrow t$ $\rightarrow I4-11$

- | | |
|-----------------------|-----------------|
| 13. t | Supuesto |
| 14. $\neg t$ | Supuesto |
| 15. $\neg t \wedge t$ | $\wedge I13,14$ |
| 16. t | $\neg E14-15$ |

17. $t \rightarrow t$ $\rightarrow I13-16$
18. t $\vee E3,12,17$

f) $\{p \wedge q \wedge r, p \wedge r \rightarrow \neg s, s \vee t\} \vdash t$



L0. Deducción Natural

4. Completa el siguiente esquema de deducción natural:

1. $p \vee (q \wedge r)$	Premisa
2. p	Supuesto
3. $p \vee q$	$\vee I 2$
4. $p \vee r$	$\vee I 2$
5. $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$	$\wedge I 3,4$
6. $p \rightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	$\rightarrow I 2-5$
7. $q \wedge r$	Supuesto
8. q	$\wedge E 7$
9. r	$\wedge E 7$
10. $p \vee q$	$\vee I 8$
11. $p \vee r$	$\vee I 9$
12. $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$	$\wedge I 10,11$
13. $q \wedge r \rightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	$\rightarrow I 7-12$
14. $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$	$\vee E 1,6,13$

L0. Deducción Natural

5. Considérese la demostración por Deducción Natural del siguiente razonamiento:

1. $p \vee q \rightarrow s \wedge r$ Premisa

2. $\neg s \leftrightarrow \neg r$ Premisa

3. $\zeta?$ Supuesto

4.

5.

6.

7.

8.

9.

10. $\neg s \rightarrow \neg r$ \leftrightarrow E 2

11. $\zeta?$ Supuesto

12.

13.

14.

15. $\zeta?$ \rightarrow I 9-14

16. s $\zeta?$

17. \rightarrow I 3-16

$\{p \vee q \rightarrow s \wedge r, \neg s \leftrightarrow \neg r\} \vdash q \vee r \rightarrow s$

a. En el paso 3 debemos suponer

$q \vee r$

b. En el paso 11 debemos suponer

$\neg s$

c. El contenido del paso 15 es

$r \rightarrow s$

d. La regla que se debe aplicar en el paso 16 es

\vee E 3,8,15

L0. Deducción Natural

2019-2020 a. $\{\neg t \rightarrow \neg (s \vee q), q \rightarrow t\} \vdash q \vee s \rightarrow t$

1. $\neg t \rightarrow \neg (s \vee q)$ P1

2. $q \rightarrow t$ P2

3. $q \vee s$ Supuesto

4. s Supuesto

5. $\neg t$ Supuesto

6. $\neg (s \vee q)$ $\rightarrow E1,5$

7. $s \vee q$ $\vee I4$

8. $(s \vee q) \wedge \neg (s \vee q)$ $\wedge I6,7$

9. t $\neg E5-8$

10. $s \rightarrow t$ $\rightarrow I4-9$

11. t $\vee E3,2,10$

12. $q \vee s \rightarrow t$ $\rightarrow I3-11$

s Sup.

t

$q \vee s$	$q \rightarrow t$	$s \rightarrow t$
<hr/>		
t		

L0. Deducción Natural

2019-2020 b. $\{q \rightarrow (r \wedge s), p\} \vdash (q \vee \neg p) \rightarrow (\neg r \vee s)$

1.	$q \rightarrow (r \wedge s)$	P1
2.	p	P2
3.	$q \vee \neg p$	Supuesto
4.	q	Supuesto
5.	$r \wedge s$	$\rightarrow E 1, 4$
6.	s	$\wedge E 5$
7.	$\neg r \vee s$	$\vee I 6$
8.	$q \rightarrow \neg r \vee s$	$\rightarrow I 4-7$
9.	$\neg p$	Supuesto
10.	$\neg s$	Supuesto
11.	$\neg p \wedge p$	$\wedge I 2, 9$
12.	s	$\neg E 10-11$
13.	$\neg r \vee s$	$\vee I 12$
14.	$\neg p \rightarrow \neg r \vee s$	$\rightarrow I 9-13$
15.	$\neg r \vee s$	$\vee E 3, 8, 14$
16.	$(q \vee \neg p) \rightarrow (\neg r \vee s)$	$\rightarrow I 3-15$

<div> q Sup. </div> <div> $\neg r \vee s$ </div>	<div> $\neg p$ Sup. </div> <div> $\neg r \vee s$ </div>
$q \vee \neg p$	$q \rightarrow \neg r \vee s$
	$\neg p \rightarrow \neg r \vee s$
<hr/>	
$\neg r \vee s$	