Computación Numérica

Primer Parcial B - Marzo 2017

1. Sea la ecuación

$$x^2 e^{1-x} - 2 = 0$$

(a) Demostrar que en $[-1.5, -0.5]$ existe una única raíz.

(b) ¿Se puede calcular por el método de bisección partiendo de dicho intervalo?

(c) Aproximar la raíz haciendo tres iteraciones con el método de bisección en dicho intervalo.

(d) Dar una cota del error cometido al calcular esta raíz.

(a)

Sea $f(x) = x^2 e^{1-x} - 2$. Las condiciones (suficientes, no necesarias) que ha de cumplir f en $[-1.5, -0.5]$ para que exista una única raíz en el intervalo son:

1. f continua: f es continua porque es el producto de un polinomio por una exponencial y sumada a una función constante, todas ellas funciones continuas.
2. f tiene distinto signo en los extremos del intervalo:

$$f(-1.5) = 25.4 \quad \text{y} \quad \text{f}(-0.5) = -0.87$$

3. f es estrictamente creciente o decreciente en $[-1.5, -0.5]$. Es decir $f' > 0$ o $f' < 0$ en $(-1.5, -0.5)$:

$$f'(x) = 2x\, e^{1-x} + x^2 e^{1-x}(-1) = e^{1-x}(2x - x^2) = e^{1-x} x(2 - x).$$

Teniendo en cuenta el signo de los factores en el intervalo $(-1.5, -0.5)$:

$$f'(x) = e^{1-x} x(2 - x) = (+)(-)(+) < 0$$

Y $f'(x) < 0$ en $(-1.5, -0.5)$.

(b)

Si, porque se cumplen las condiciones necesarias, que son las condiciones 1. y 2. de la pregunta anterior.

(c)

k	a	c	b	$f(a)$	$f(c)$	$f(b)$	*cota de error*
1	-1.5	$(-1.5+(-0.5))/2=-1$	-0.5	25.4	5.4	-0.87	0.5
2	-1	$(-1+(-0.5))/2=-0.75$	-0.5	5.4	1.23	-0.87	0.25
3	-0.75	$(-0.75+(-0.5))/2=-0.625$	-0.5	1.23		-0.87	0.125

Y podemos dar como raíz aproximada -0.625 (la solución exacta es -0.6269)

(d)

La cota de error es

$$\frac{b_0-a_0}{2^n}=\frac{-0.5-(-1.5)}{2^3}=\frac{1}{8}=0.125$$

2. Sean las funciones

$$f(x) = x - \cos(x) \qquad g_1(x) = \cos(x) \qquad g_2(x) = 2x - \cos(x)$$

(a) Demostrar que la ecuación $f(x) = 0$ tiene la misma raíz que $g_i(x) = x$ con $i = 1, 2$.

(b) Enunciar el teorema de la aplicación contractiva.

(c) Demostrar analíticamente que la función g_1 cumple las condiciones del teorema de la aplicación contractiva el intervalo con $[0, 1]$.

(d) Demostrar analíticamente que la función g_2 no cumple las condiciones del teorema de la aplicación contractiva el intervalo con $[0, 1]$.

(e) Hacer dos iteraciones con g_1 tomando como punto inicial $x_0 = 0$

(a)

$$g_1(x) = \cos(x) \iff x = \cos(x) \iff x - \cos(x) = 0 \iff f(x) = x - \cos(x)$$

$$g_2(x) = 2x - \cos(x) \iff x = 2x - \cos(x) \iff 0 = x - \cos(x) \iff f(x) = x - \cos(x)$$

(b)

El Teorema de la aplicación contractiva dice: sea g derivable definida en el intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ y $x_0 \in [a, b]$ un punto del intervalo. Si

1. $x \in [a, b] \quad \Rightarrow \quad g(x) \in [a, b]$
2. $|g'(x)| \leq k < 1$ para todo $x \in [a, b]$

Entonces g tiene un único punto fijo $\alpha \in [a, b]$, y la sucesión x_n definida como $x_{i+1} = f(x_i)$ que tiene como punto inicial x_0 converge a α con orden al menos lineal.

(c)

Empecemos por la **condición 2**

$$|g_1'(x)| = |-\sin(x)| = \sin(x)$$

Como $1 < \frac{\pi}{2} = 1.57$ y como $\operatorname{sen}(x)$ es creciente en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ se verifica que

$$|g_1'(x)| = |-\operatorname{sen}(x)| = \operatorname{sen}(x) \leq \sin(1) = 0.84 \quad \text{en} \quad [0, 1]$$

y se cumple la segunda condición 2.

Veamos la **condición 1**. Como el $\cos(x)$ es decreciente en $[0,1]$ tendrá su máximo en 0 y su mínimo en 1.

$$x \in [0,1] \;\Rightarrow\; g_1(1) \leq g(x) \leq g_1(0) \;\Rightarrow\; 0.54 \leq g(x) \leq 1 \;\Rightarrow\; g(x) \in [0.54, 1] \subset [0,1]$$

y se cumple también la primera condición.

(d)

Empecemos por la **condición 2**.

$$|g_2'(x)| = 2 + \operatorname{sen}(x) \geq 2 \quad \text{en} \quad [0,1]$$

puesto que en $[0,1]$ se verifica que $\operatorname{sen}(x)$ es positivo. Y no se cumple la segunda condición, por lo que no cumple las condiciones del teorema de la aplicación contractiva.

(e)

k	$x_{k+1} = g_1(x_k)$
0	$x_0 = 0$
1	$x_1 = g_1(x_0) = g_1(0) = \cos 0 = 1$
2	$x_2 = g_1(x_1) = g_1(1) = \cos 1 = 0.54030$

Computación Numérica

Primer Parcial B - Marzo 2017

1. Sea la función
$$h(x) = \frac{x-1}{x^3+1}.$$

   (a) Demostrar que esta función tiene un único extremo en $[1, 2.5]$.

   (b) ¿Se puede calcular por el método de bisección partiendo de dicho intervalo?

   (c) Aproximar el extremo haciendo tres iteraciones.

   (d) Dar una cota del error cometido al calcularlo.

   (e) ¿Cuántos pasos se necesitarían para aproximar el extremo con un error menor que 10^{-8} ?

(a)

Para que el punto α será un extremo de h es necesario que $h'(\alpha) = 0$. Como

$$h'(t) = \frac{(x^3+1) - (x-1)3x^2}{(x^3+1)^2} = \frac{x^3+1-3x^3+3x^2}{(x^3+1)^2} = \frac{1+3x^2-2x^3}{(x^3+1)^2}$$

Como $(x^3+1)^2 > 0$ para toda la recta real, si tomamos $f(x) = 1 + 3x^2 - 2x^3$ entonces

$$h \quad \text{tiene un extremo en } [1, 2.5] \Longleftrightarrow f \quad \text{tiene una raíz en } [1, 2.5].$$

O lo que es lo mismo

$$h'(t) = 0 \quad \text{en } [1, 2.5] \Longleftrightarrow f(t) = 0 \quad \text{en } [1, 2.5].$$

Las condiciones (suficientes, no necesarias) que ha de cumplir f en $[-1.5, -0.5]$ para que exista una única raíz en el intervalo son:

1. f continua: f es continua porque es un polinomio.
2. f tiene distinto signo en los extremos del intervalo:

$$f(1) = 2 \quad \text{y} \quad \text{f}(2.5) = -11.5$$

3. f es estrictamente creciente o decreciente en $[1, 2.5]$. Es decir, $f' > 0$ o $f' < 0$ en $(1, 2.5)$:

$$f'(x) = 6x - 6x^2 = -6(x-1)x$$

Teniendo en cuenta el signo de los factores en el intervalo $(1, 2.5)$:

$$f'(x) = -6(x-1)x = (-)(+)(+) < 0$$

Y $f'(x) < 0$ en $(1, 2.5)$.

(b)

Si, porque se cumplen las condiciones necesarias, que son las condiciones 1 y 2 de la pregunta anterior.

(c)

k	*a*	*c*	*b*	*f(a)*	*f(c)*	*f(b)*	*cota de error*
1	1	$(1+2.5)/2 = 1.75$	2.5	2	-0.53	-11.5	0.75
2	1	$(1+1.75)/2 = 1.375$	1.75	2	1.47	-0.53	0.375
3	1.375	$(1.375+1.75)/2 = 1.5625$	1.75	1.47		-0.53	0.1875

Y podemos dar como raíz aproximada 1.5625 (la solución exacta es 1.67765)

(d)

La cota de error es

$$\frac{b_0 - a_0}{2^n} = \frac{2.5-1}{2^3} = \frac{1.5}{8} = 0.1875$$

(e)

El número de iteraciones n necesarias para que el error E sea menor que una tolerancia *tol* al aplicar el método de Bisección a un intervalo \$$[a, b]$\$ (donde se cumplen las condiciones) es

$$E < \frac{b-a}{2^n}$$

Si hacemos $\frac{b-a}{2^n} < tol$ se cumple que $E < tol$

$$\frac{b-a}{2^n} < tol \quad \Longrightarrow \quad \frac{b-a}{2^n} < tol \quad \Longrightarrow \quad \frac{b-a}{tol} < 2^n$$

Y como si aplicamos logaritmos (función creciente) a los dos miembros de una desigualdad, la desigualdad se mantiene

$$\ln\frac{b-a}{tol} < \ln 2^n \quad\Longrightarrow\quad \ln\frac{b-a}{tol} < n\ln 2$$

Si dividimos los dos términos de la desigualdad por $\ln 2$, como es positivo, no cambia el sentido de la desigualdad

$$\ln\frac{b-a}{tol} < \ln 2^n \quad\Longrightarrow\quad \frac{1}{\ln 2}\ln\frac{b-a}{tol} < n$$

Teniendo en cuenta que $tol = 10^{-8}$ y $b-a = 2.5-1 = 1.5$

$$\frac{1}{\ln 2}\ln\frac{1.5}{10^{-8}} < n \quad\Longrightarrow\quad 27.16 < n$$

y para garantizar que el error es menor que 10^{-8} podemos tomar $n = 28$.

2. Aproximar utilizando el método de Newton $r = \sqrt[3]{75}$. Utilizar como punto inicial $x_0 = 4$, realizar dos iteraciones. Redondear a 5 cifras decimales en cada paso.

$$x = \sqrt[3]{75} \quad\Rightarrow\quad x^3 = 75 \quad\Rightarrow\quad x^3 - 75 = 0$$

Por lo tanto $f(x) = x^3 - 75$ y $f'(x) = 3x^2$ y la función de iteración será

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^3 - 75}{3x_k^2}$$

Si $x_0 = 4$

$$x_1 = x_0 - \frac{x_0^3 - 75}{3x_0^2} = 4 - \frac{4^3 - 75}{3(4^2)} = 4 - \frac{64-75}{3(16)} = 4 - \frac{11}{48} = 4 - \frac{11}{48} = 4 + 0.22917 = 4.22917$$

Si $x_1 = 4.22917$

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1^3 - 75}{3x_1^2} = 4.22917 - \frac{4.22917^3 - 75}{3(4.22917^2)} = 4.21720$$

3. En el método de bisección, un número suficiente de iteraciones para que el error absoluto e_a sea menor que una tolerancia dada ε es

$$\frac{1}{\log 2}\log\left(\frac{b_0-a_0}{\varepsilon}\right) < n.$$

¿Cuántas iteraciones se necesitan para obtener un dígito adicional de precisión en la aproximación?

Para que tener un dígito adiccional la tolerancia ha de ser 0.1ϵ y de acuerdo con la fórmula, el número de iteraciones será

$$\frac{1}{\log 2}\log\left(\frac{b_0-a_0}{\varepsilon}\right) < N$$

El número adicional de iteraciones será

$$\frac{1}{\log 2}\log\left(\frac{b_0-a_0}{0.1\varepsilon}\right) - \frac{1}{\log 2}\log\left(\frac{b_0-a_0}{\varepsilon}\right) < N-n.$$

Sacando factor común $\dfrac{1}{\log 2}$ y teniendo en cuenta las propiedades de los logaritmos

$$\frac{1}{\log 2}\left[\left(\log\left(b_0-a_0\right)-\log 0.1-\log\varepsilon\right)-\left(\log\left(b_0-a_0\right)-\log\varepsilon\right)\right] < N-n$$

es decir

$$\frac{1}{\log 2}\left(-\log 0.1\right) < N-n,$$

$$3.3 < N-n,$$

Por lo tanto el número adicional de iteraciones será 4.