Computación Numérica

Tercer Parcial - Mayo 2018

1. Dada la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Calcular su determinante usando Gauss con pivote parcial. Enumerar las tres propiedades de los determinantes en las que se basa este método.

La fila del pivote es la primera y, de momento, el pivote es $a_{11} = 2$. Lo comparamos con los elementos que están debajo de él ($a_{12} = 4$ y $a_{13} = 1$) y nos quedamos con el elemento mayor en valor absoluto ($a_{12} = 4$). Intercambiamos la fila que lo contiene con la fila del pivote

$$\begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{array} \begin{pmatrix} \boxed{2} & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{ccc} f_1 & \leftarrow & f_2 \\ f_2 & \leftarrow & f_1 \\ & & \end{array}$$

Ahora hacemos ceros por debajo del elemento a_{11} sumando la fila del pivote multiplicada por un real.

$$\begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{array} \begin{pmatrix} \boxed{4} & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{ccccccc} f_1 & \rightarrow & f_1 & & & \\ f_2 & \rightarrow & f_2 & - & (2/4) & f_1 \\ f_3 & \rightarrow & f_3 & - & (1/4) & f_1 \end{array}$$

La matriz transformada es

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 0 & \boxed{-1} & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Ahora la fila del pivote es la segunda y, de momento, el pivote es $a_{22} = -1$. Lo comparamos con los elementos que están debajo de él ($a_{23} = 1$) y nos quedamos con el elemento mayor en valor absoluto. En este caso, no hay ningún elemento mayor en valor absoluto y no intercambiamos filas. Hacemos ceros por debajo del pivote sumando, a las filas por debajo de la fila del pivote, la fila de pivote multiplicada por un real. No tocamos la fila del pivote y las que están por encima de ella

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 0 & \boxed{-1} & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{cccccc} f_1 & \rightarrow & f_1 & & & \\ f_2 & \rightarrow & f_2 & & & \\ f_3 & \rightarrow & f_3 & - & (1/(-1)) & f_2 \end{array}$$

Llegamos a

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Teniendo en cuenta que:

a) Al intercambiar una columna o una fila, el determinante queda multiplicado por el signo negativo.

b) Las operaciones entre filas ($f_i \leftarrow f_i + \lambda f_j$) no alteran el valor del determinante.

c) El valor del determinante de una matriz triangular o diagonal es el producto de los elementos de la diagonal.

Cómo hemos realizado un intercambio de filas multiplicamos por (-1) el producto de los elementos de la diagonal y

$$|M| = (-1) \times (4) \times (-1) \times (2) = 8$$

2. Sea el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ donde

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 4 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si resolvemos el sistema ¿Converge por Jacobi?¿Por qué? Realizar 2 iteraciones con Jacobi. Utilizar $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0, 0)^T$

Si una matriz A es diagonal estrictamente dominante por filas y resolvemos Ax=b mediante el algoritmo de Jacobi, este converge.

Estudiemos si la matriz de coeficientes de este sistema es diagonal estrictamente dominante por filas. Es decir

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ii}| \quad \text{para todo } i$$

Para la matriz A

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 4 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} |3| > |1| + |1| \\ |6| \not> |4| + |2| \\ |4| > |1| + |1| \end{array}$$

No lo es, así que no podemos concluir nada.

Calculemos la matriz de iteración B_J. Se tiene que $B_J = -D^{-1}(L + U)$. O también:

1. Dividimos cada fila por el correspondiente elemento de la diagonal.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 1/3 \\ 4/6 & 1 & 2/6 \\ 1/4 & 1/4 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Cambiamos todos los elementos de signo.

$$\begin{pmatrix} -1 & -1/3 & -1/3 \\ -4/6 & -1 & -2/6 \\ -1/4 & -1/4 & -1 \end{pmatrix}$$

3. Ponemos ceros en la diagonal principal.

$$B_J = \begin{pmatrix} 0 & -1/3 & -1/3 \\ -4/6 & 0 & -2/6 \\ -1/4 & -1/4 & 0 \end{pmatrix}$$

Si alguna norma matricial de B_J es estrictamente menor que uno, el método de Jacobi converge.

Probemos con la norma infinito

$$\|B_J\|_\infty = \max_{1\le i\le 3}\sum_{j=1}^{3}|a_{ij}|$$

$$B_J = \left(\begin{array}{ccc} 0 & -1/3 & -1/3 \\ -4/6 & 0 & -2/6 \\ -1/4 & -1/4 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} 0+1/3+1/3=1/6 \\ 4/6+2/6=1 \\ 1/4+1/4+0=1/2 \end{array}$$

$$\|B_J\|_\infty = \max\left(1/6, 1, 1/2\right) = 1$$

Como esta norma no es estrictamente menor que uno, tampoco decide. Calculemos la norma uno

$$\|B_J\|_1 = \max_{1\le j\le 3}\sum_{i=1}^{3}|a_{ij}|$$

$$B_J = \left(\begin{array}{ccc} 0 & -2/3 & -1/4 \\ -1/3 & 0 & -1/4 \\ -1/3 & -1/3 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} 0+2/3+1/4=11/12 \\ 1/3+0+1/4=7/12 \\ 1/3+1/3+0=2/3 \end{array}$$

$$\|B_J\|_1 = \max\left(\frac{11}{12}, \frac{7}{12}, \frac{8}{12}\right) = \frac{11}{12} < 1$$

y como una norma de la matriz de iteración es menor que uno, el método de Jacobi converge.

El sistema es

$$\begin{array}{rrrcr} 3x & +y & +z & = & 2 \\ 4x & +6y & +2z & = & -2 \\ x & +y & +4z & = & 0 \end{array}$$

En la primera ecuación despejamos la primera incógnita, x, en la segunda, la segunda incógnita, y, y finalmente, z.

$$\begin{array}{rcl} x & = & (2-y-z)/3 \\ y & = & \left(-2-4x-2z\right)/6 \\ z & = & (-x-y)/4 \end{array}$$

Realizamos la primera iteración

$$\begin{array}{rcl} x^{(1)} & = & (2-y^{(0)}-z^{(0)})/3 = 2/3 = 0{,}667 \\ y^{(1)} & = & \left(-2-4x^{(0)}-2z^{(0)}\right)/6 = -1/3 = -0{,}333 \\ z^{(1)} & = & (-x^{(0)}-y^{(0)})/4 = 0 \end{array}$$

y la segunda

$$\begin{array}{rcl} x^{(2)} & = & (2-y^{(1)}-z^{(1)})/3 = (2-(-0{,}333)-0)/3 = 0{,}778 \\ y^{(2)} & = & \left(-2-4x^{(1)}-2z^{(1)}\right)/6 = \left(-2-4(0{,}667)-2(0)\right)/6 = -0{,}778 \\ z^{(2)} & = & (-x^{(1)}-y^{(1)})/4 = \left(-(0{,}667)-(-0{,}333)\right)/4 = -0{,}0833 \end{array}$$

3. Sea $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - x + y$.

   a) Aproximarlo con una iteración por el método de gradiente con el descenso más pronunciado, tomando como punto inicial $(0, 0)$.

   b) Aproximarlo con dos iteraciones por el método de gradiente con tasa de aprendizaje $\eta = 0{,}5$, tomando como punto inicial $(0, 0)$.

   c) Proponer una función objetivo utilizando el método de penalización para aproximar el mínimo de f sujeto a las restricciones $x \geq 0$ e $y \geq 0$.

a) Realizaremos una iteración por el método del gradiente con el descenso más pronunciado usando la fórmula

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} - h\nabla f_{(x_0,y_0)} \tag{1}$$

y buscaremos h para que

$$g(h) = f\left(x_0 - hf_x(x_0, y_0), y_0 - hf_y(x_0, y_0)\right)$$

tenga un valor mínimo.
Tenemos que

$$\nabla f = (f_x, f_y) = (2x + y - 1, x + 2y + 1)$$

y

$$\nabla f_{(x_0,y_0)} = \nabla f_{(0,0)} = (-1, 1)\,.$$

$g(h) = f\left(x_0 - hf_x(0, 0), y_0 - hf_y(0, 0)\right) = f\left(0 + h, 0 - h\right) = h^2 - h^2 + h^2 - h - h = h^2 - 2h$

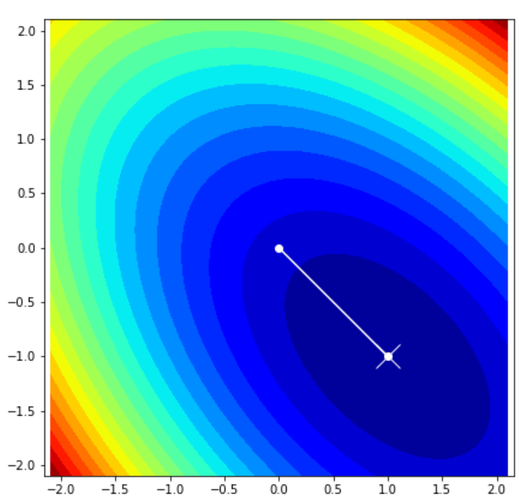
Optimicemos esta función:

$$g'(h) = 2h - 2 = 0 \Longrightarrow h = 1$$

y usando este valor en la ecuación (1)

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - (1)\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

y $f(x_0, y_0) = f(0, 0) = 0$ mientras que $f(x_1, y_1) = f(1, -1) = -1$.



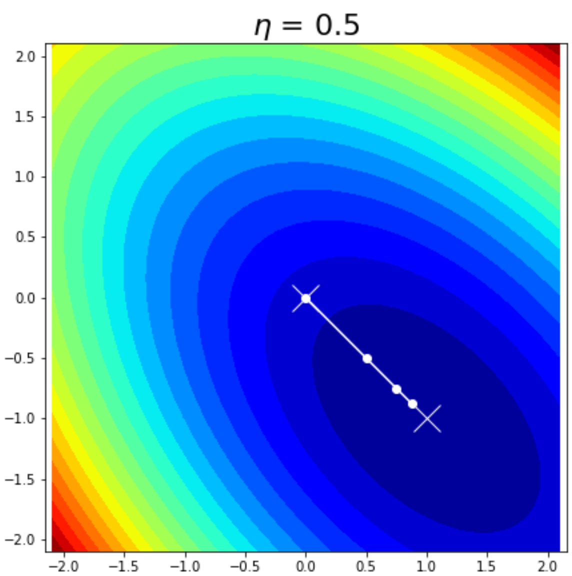
b) Ahora realizaremos dos iteraciones con el método del gradiente con tasa de aprendizaje $\eta = 0{,}5$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} - \eta \nabla f_{(x_0,y_0)}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} - \eta \begin{pmatrix} 2x_0 + y_0 - 1 \\ x_0 + 2y_0 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 0{,}5 \begin{pmatrix} 2(0) + (0) - 1 \\ (0) + 2(0) + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ -0{,}5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} - \eta \nabla f_{(x_1,y_1)}$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} - \eta \begin{pmatrix} 2x_1 + y_1 - 1 \\ x_1 + 2y_1 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ -0{,}5 \end{pmatrix} - 0{,}5 \begin{pmatrix} 2(0{,}5) + (-0{,}5) - 1 \\ (0{,}5) + 2(-0{,}5) + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}75 \\ -0{,}75 \end{pmatrix}$$



c) La idea del método de penalización es reemplazar la función objetivo f por otra función

$$F(x,y) = f(x,y) + cP(x,y)$$

y resolver el problema sin restricciones. Para ello tomamos como c una constante positiva y P es una función que satisface las condiciones:

- P es continua en el dominio de f.
- $P(x,y) \geq 0$ para todo punto del domino de f, y
- $P(x,y) = 0$ si y solo si el punto (x,y) satisface las restricciones.

De acuerdo con ello, una función F podria ser

$$F(x,y) = f(x,y) + 10\phi_1(x,y) + 10\phi_2(x,y)$$

con

$$\phi_1(x,y) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x < 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases} \qquad \phi_2(x,y) = \begin{cases} y^2 & \text{si} \quad y < 0 \\ 0 & \text{si} \quad y \geq 0 \end{cases}$$

$(0{,}5, 0)$ es el mínimo global de f para la región que cumple las restricciones $x \geq 0$, $y \geq 0$. Si representamos esta función F, vemos que es punto $(0{,}5, 0)$ está próximo al mínimo local de esta función.