Computación Numérica

Primer Parcial A - Mayo 2014

Una máquina almacena números en punto flotante en 11 bits. El primer bit se usa para el signo del número, los cinco siguientes para el exponente sesgado y los últimos cinco bits para la mantisa. Si se sigue un criterio similar al de la norma IEEE 754:

1. **Calcular el número $(11011001011)_2$ en base 10.**

signo	1
exponente	10110
mantisa	01011

Cálculo del exponente
El exponente sesgado es $1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 = 22$. Si el número de bits del exponente es $m = 5$, entonces el $sesgo = 2^{m-1} - 1 = 15$ y el exponente es

$$22 - sesgo = 22 - 15 = 7$$

Cálculo de la mantisa
Teniendo en cuenta el bit escondido, la mantisa es (1),01011 que en base 10 es

$$1 + 2^{-2} + 2^{-4} + 2^{-5} = 1{,}34375$$

Número
Como el bit del signo es 1 el número es negativo. Teniendo en cuenta la mantisa y el exponente, el número en base 10 es

$$-(1 + 2^{-2} + 2^{-4} + 2^{-5}) \times 2^7 = -172$$

2. **¿Cual sería el ϵ de máquina?**
Formato decimal
El número 1 teniendo en cuenta el bit escondido sería $(1),00000 \times 2^0$. El ϵ de máquina es el número más pequeño que se puede alinear con este 1 en este formato para sumárselo:

$$\begin{cases} 1 = 1{,}00000 \quad \times 2^0 \\ \epsilon = 0{,}00001 \quad \times 2^0 = 1{,}000000 \times 2^{-5} = 2^{-5} = 0{,}03125 \end{cases}$$

Formato binario
Como el número es $1{,}000000 \times 2^{-5}$ la mantisa es (1),00000. El exponente sesgado será $-5 + sesgo = -5 + 15 = 10 = 2^3 + 2^1$ y que en binario será 01010. Por lo tanto.

$$\epsilon = 0\ 01010\ 000000$$

3. **¿Cual sería el mayor real desnormalizado?**
Formato decimal
Si se almacena en forma desnormalizada:
- El exponente en binario es 00000.
- Se asume como exponente el menor posible de los normalizados.
- Se asume que el bit escondido es 0.
El menor exponente posible es, sesgado, 00001 y sin sesgar $1 - sesgo = 1 - 15 = -14$. Por lo tanto, el mayor número desnormalizado es $(0),11111 \times 2^{-14}$ que en decimal es

$$(2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + 2^{-4} + 2^{-5}) \times 2^{-14} = 0{,}0000591278$$

Formato binario
Ya se ha dicho que el exponente se escribe 00000 y como la mantisa es (0),111111, teniendo en cuenta el signo, se escribirá

$$0\ 00000\ 11111$$

4. **Calcular el número $(11{,}25)_{10}$ en este formato de 11 bits.**
Cálculo de la mantisa
Para convertir a binario la parte decimal, multiplicamos por 2, le quitamos la parte entera, que será nuestro dígito binario y repetimos el proceso.

$$\begin{array}{rccc} Decimal: & 0{,}25 & 0{,}5 & 0 \\ Entera: & & 0 & 1 \end{array}$$

y tomamos los dígitos:

$$0{,}01$$

Para convertir a binario la parte entera 11 dividimos de forma reiterada por 2 y guardamos los restos:

$$\begin{array}{rcccc} cocientes: & 11 & 5 & 2 & 1 \\ restos: & 1 & 1 & 0 & \end{array}$$

empezando por el último cociente, seguimos con los restos en orden inverso:

$$1011$$

que almacenamos

$$1011{,}01 = (1){,}01101 \times 2^3$$

y no hace falta almacenar el primer uno. Por lo tanto la mantisa se almacena como

$$01101$$

Cálculo del exponente
El $sesgo = 15$. El exponente sesgado será $exponente + sesgo = 3 + 15 = 18 = 2^4 + 2^1$, que en binario es 10010.

Número

signo	exponente	mantisa
0	10010	01101

Primer Parcial B - Mayo 2014

Sea la ecuación

$$h(t) = t^3 - 6t^2 + t + \ln t$$

1. **Demostrar que esta función tiene un único extremo relativo en** $[3, 4]$**.**

   Para que el punto α será un extremo de h es necesario que $h'(\alpha) = 0$. Como

   $$h'(x) = 3t^2 - 12t + 1 + \frac{1}{t} = \frac{3t^3 - 12t^2 + t + 1}{t}$$

   si tomamos $f(x) = 3t^3 - 12t^2 + t + 1$ entonces

   $$h \quad \text{tiene un extremo en } [3, 4] \Longleftrightarrow f \quad \text{tiene una raíz en } [3, 4].$$

   O lo que es lo mismo

   $$h'(x) = 0 \quad \text{en } [3, 4] \Longleftrightarrow f(x) = 0 \quad \text{en } [3, 4].$$

   Las condiciones (suficientes, no necesarias) que ha de cumplir f en $[3, 4]$ para que exista una raíz en el intervalo son:
   a) f continua: f es continua porque es la suma de funciones continuas, el polinomio lo es siempre y $\ln x$ es continua en todo su dominio.
   b) f tiene distinto signo en los extremos del intervalo: $f(3) = -23$ y $f(4) = 5$
   c) $f' > 0$ o $f' < 0$ en $(3, 4)$:

   $$f'(t) = 9t^2 - 24t + 1$$

   Si calculamos las raíces y factorizamos:

   $$9t^2 - 24t + 1 = 9(t - 0{,}042)(t - 2{,}62)$$

   Como $(t - 0{,}042)$ es siempre positivo en $(3, 4)$ y $(t - 2{,}62)$ también $9t^2 - 24t + 1 > 0$ en $(3, 4)$.
   Por lo tanto $f' > 0$ en $(3, 4)$.

2. **¿Se puede calcular por el método de bisección partiendo de dicho intervalo?¿Por qué?**

   Si porque se cumplen las condiciones necesarias, que son las condiciones a) y b) de la pregunta anterior.

3. **Aproximar el extremo haciendo dos iteraciones con el método de bisección.**

k	a	c	b	$f(a)$	$f(b)$	$f(c)$	*cota de error*
0	3		4	-23		5	4-3=1
1	3	$(a+b)/2$=(3+4)/2=3.5	4	-23	-13.9	5	3.5-3=0.5
2	3.5	$(a+b)/2$=(3.5+4)/2=3.75	4	-13.9	-5.8	5	4-3.75=0.25

   Y podemos dar como raíz aproximada 3,75 (la raíz verdadera es $3{,}89236 \in [3{,}75, 4]$).

4. **Dar una cota del error.**
   La raíz está en el intervalo $[3{,}75, 4]$ por lo tanto la cota de error es $4 - 3{,}75 = 0{,}25$

5. **Aproximar dicho extremo haciendo dos iteraciones con el método de Newton con $x_0 = 4$.**

$$t_{k+1} = t_k - \frac{f(t_k)}{f'(t_k)} = t_k - \frac{3t_k^3 - 12t_k^2 + t_k + 1}{9t_k^2 - 24t_k + 1} = \frac{6t_k^3 - 12t_k^2 - 1}{9t_k^2 - 24t_k + 1}$$

k	$t_{k+1} = \frac{6t_k^3 - 12t_k^2 - 1}{9t_k^2 - 24t_k + 1}$
0	4
1	3,89796
2	3,89238

   (la raíz verdadera es 3,89236).

Computación Numérica

Segundo Parcial - Mayo 2014

1. **Dados los nodos:**

x	0	**1**	**2**
y	**1**	0	**2**

Si escribimos el spline natural que los ajusta como

$$s(x) = \begin{cases} s_1(x) = a\,(x-1)^{\,3} + b\,(x-1)^{\,2} + c\,(x-1) + d & \text{si } x \in [0,1] \\ s_2(x) = e\,(x-1)^{\,3} + f\,(x-1)^{\,2} + g\,(x-1) + h & \text{si } x \in [1,2] \end{cases}$$

plantear las ecuaciones del sistema cuya solución son los coeficientes a**,** b**,** c**,** d**,** e**,** f**,** g **y** h**. Especificar las condiciones aplicadas.**

Se tienen que cumplir las siguientes condiciones:
Condiciones de interpolación: la curva ha de pasar por los tres puntos. Por lo tanto:

$$s_1(0) = 1,\ s_1(1) = 0,\ s_2(1) = 0,\ s_2(2) = 2.$$

Condiciones de continuidad: han de coincidir las derivadas primera y segunda en los puntos intermedios:

$$s_1'(1) = s_2'(1),\ s_1''(1) = s_2''(1).$$

Y como hay 8 incógnitas y de momento sólo tenemos 6 condiciones (ecuaciones) imponemos dos más en los extremos. Como el spline es natural las condiciones adicionales son:

$$s_1''(0) = 0,\ s_2''(2) = 0.$$

Calculamos

$$s'(x) = \begin{cases} s_1'(x) = 3a\,(x-1)^{\,2} + 2b\,(x-1) + c & \text{si } x \in [0,1] \\ s_2'(x) = 3e\,(x-1)^{\,2} + 2f\,(x-1) + g & \text{si } x \in [1,2] \end{cases}$$

$$s''(x) = \begin{cases} s_1''(x) = 6a\,(x-1) + 2b & \text{si } x \in [0,1] \\ s_2''(x) = 6e\,(x-1) + 2f & \text{si } x \in [1,2] \end{cases}$$

y las ecuaciones son:

1. $s_1(0) = 1 \Longrightarrow -a + b - c + d = 1$
2. $s_1(1) = 0 \Longrightarrow d = 0$
3. $s_2(1) = 0 \Longrightarrow h = 0$
4. $s_2(2) = 2 \Longrightarrow e + f + g + h = 2$
5. $s_1'(1) = s_2'(1) \Longrightarrow c = g$
6. $s_1''(1) = s_2''(1) \Longrightarrow 2b = 2f$
7. $s_1''(0) = 0 \Longrightarrow -6a + 2b = 0$
8. $s_2''(2) = 0 \Longrightarrow 6e + 2f = 0$

Y tenemos un sistema lineal de ocho ecuaciones para calcular ocho incógnitas.

2. **La ley de Hooke es $F(x) = kx$ donde F es la fuerza aplicada al resorte, k la constante del muelle y x la variación en la longitud del resorte.**

x (mm)	**8**	**15**	**23**	**30**
Fuerza (g)	**5.8**	**11.6**	**17.4**	**23.2**

Calcular la recta que pasa por el origen y que minimiza los errores cuadráticos. Deducir la fórmula empleada para calcular la recta a partir de los errores cuadráticos. Calcular la constante k de este muelle. La recta que pasa por el origen será de la forma:

$$F(x) = kx$$

Queremos calcular la recta que minimiza la suma de los errores cuadráticos:

$$E(k) = \sum_{k=1}^{4}(F(x_k) - y_k)^2 = \sum_{k=1}^{4}(k \times x_k - y_k)^2.$$

O lo que es lo mismo:

$$\begin{aligned} E(k) &= (F(8) - 5{,}8)^2 + (F(15) - 11{,}6)^2 + (F(23) - 17{,}4)^2 + (F(30) - 23{,}2)^2 = \\ &= (k \times 8 - 5{,}8)^2 + (k \times 15 - 11{,}6)^2 + (k \times 23 - 17{,}4)^2 + (k \times 30 - 23{,}2)^2 \end{aligned}$$

Para hallar el error mínimo derivamos:

$$\begin{aligned} E'(k) &= \sum_{k=1}^{4} 2(k \times x_k - y_k)x_k = \sum_{k=1}^{4} 2(k \times x_k^2 - y_k x_k) = 0 \\ & k\sum_{k=1}^{4} x_k^2 - \sum_{k=1}^{4} y_k x_k = 0 \end{aligned}$$

Y por lo tanto:

$$k = \frac{\sum_{k=1}^{4} y_k x_k}{\sum_{k=1}^{4} x_k^2}$$

O lo que es lo mismo:

$$\begin{aligned} E'(k) &= 2(k \times 8 - 5{,}8) \times 8 + 2(k \times 15 - 11{,}6) \times 15 + 2(k \times 23 - 17{,}4) \times 23 + 2(k \times 30 - 23{,}2) \times 30 \\ &= 2k(8 \times 8 + 15 \times 15 + 23 \times 23 + 30 \times 30) - 2(8 \times 5{,}8 + 15 \times 11{,}6 + 23 \times 17{,}4 + 30 \times 23{,}2) = 0 \end{aligned}$$

Y por lo tanto:

$$k = \frac{8 \times 5{,}8 + 15 \times 11{,}6 + 23 \times 17{,}4 + 30 \times 23{,}2}{8 \times 8 + 15 \times 15 + 23 \times 23 + 30 \times 30} = \frac{1316{,}6}{1718} = 0{,}766\text{gr/mm}$$

Y la recta de aproximación es

$$F(x) = 0{,}766x$$

3. **Supongamos que tenemos tres puntos (x_0, y_0), (x_1, y_1) y (x_2, y_2) de una función f, de forma que $x_1 = x_0 + h$ y $x_2 = x_0 + 2h$ con $0 < h < 1$. Construir una fórmula de derivación de tipo interpolatorio que aproxime $f'(x_0)$ o $f'(x_2)$ y que utilice estos tres puntos.**

   Si usamos un polinomio de interpolación de f de 2^o grado en x_0, x_1, x_2, siendo $y_j = f(x_j)$, el polinomio de interpolación en la forma de Newton es:

$$p(x) = [y_0] + [y_0, y_1](x - x_0) + [y_0, y_1, y_2](x - x_0)(x - x_1)$$

   con

$$[y_0] = y_0, \quad [y_0, y_1] = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1} = \frac{y_1 - y_0}{h},$$

$$[y_0, y_1, y_2] = \frac{[y_0, y_1] - [y_1, y_2]}{x_0 - x_2} = \frac{1}{2h}\left(\frac{y_0 - y_1}{h} - \frac{y_1 - y_2}{h}\right) = \frac{1}{2h^2}(y_0 - 2y_1 + y_2).$$

$$[y_0] = y_0, \quad [y_0, y_1] = \frac{y_1 - y_0}{h}, \quad [y_0, y_1, y_2] = \frac{1}{2h^2}(y_0 - 2y_1 + y_2).$$

   Si derivamos $p(x)$

$$f'(x) \approx p'(x) = [y_0, y_1] + [y_0, y_1, y_2]((x - x_0) + (x - x_1)),$$

   y para el caso particular del punto x_0

$$f'(x_0) \approx p'(x_0) = [y_0, y_1] + [y_0, y_1, y_2]((x_0 - x_0) + (x_0 - x_1)),$$

$$f'(x_0) \approx \frac{y_1 - y_0}{h} + \frac{1}{2h^2}(y_0 - 2y_1 + y_2)(-h),$$

$$f'(x_0) \approx \frac{-3y_0 + 4y_1 - y_2}{2h}.$$

   Y si aproximamos la derivada en el punto x_2

$$f'(x_2) \approx p'(x3h_2) = [y_0, y_1] + [y_0, y_1, y_2]((x_2 - x_0) + (x_2 - x_1)),$$

$$f'(x_1) \approx \frac{y_1 - y_0}{h} + \frac{1}{2h^2}(y_0 - 2y_1 + y_2)(2h + h),$$

$$f'(x_1) \approx \frac{y_0 - 4y_1 + 3y_2}{2h}.$$

Computación Numérica

Tercer Parcial - Mayo 2014

1. **Sea el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ donde**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

   a) **Calcular la matriz de iteración de Gauss-Seidel B_{G-S}.**

   La matriz $B_{G-S} = -(L+D)^{-1}U$ con

$$A = L + D + U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Por lo que

$$L + D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad y \quad U = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Calculemos por Gauss-Jordan $(L+D)^{-1}$

$$\begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{lll} f_1 & \rightarrow & f_1 \\ f_2 & \rightarrow & f_2 \quad -(2/1)f_1 \\ f_3 & \rightarrow & f_3 \quad -(0/1)f_1 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{lll} f_1 & \rightarrow & f_1 \quad -(0/5)f_2 \\ f_2 & \rightarrow & f_2 \\ f_3 & \rightarrow & f_3 \quad -(-1/5)f_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2/5 & 1/5 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{lll} f_1 & \rightarrow & f_1 \\ f_2 & \rightarrow & f_2/5 \\ f_3 & \rightarrow & f_3/3 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2/5 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2/15 & 1/15 & 1/3 \end{pmatrix}$$

   Por lo tanto

$$(L+D)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2/5 & 1/5 & 0 \\ -2/15 & 1/15 & 1/3 \end{pmatrix}$$

y

$$B_{G-S} = -(L{+}D)^{-1}U = -\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2/5 & 1/5 & 0 \\ -2/15 & 1/15 & 1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 4/5 & 1/5 \\ 0 & 4/15 & 1/15 \end{pmatrix}$$

b) **Calcular la norma infinito de la matriz de iteración de Gauss-Seidel B_{G-S}. Partiendo de este resultado ¿qué podemos decir de la convergencia del método de Gauss-Seidel?**

$$B_{G-S} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 4/5 & 1/5 \\ 0 & 4/15 & 1/15 \end{pmatrix} \begin{matrix} 0+2+0=2 \\ 0+4/5+1/5=1 \\ 0+4/15+1/15=1/3 \end{matrix}$$

$$||B_{G-S}||_\infty = \text{Max}\,(2,1,1/3) = 2$$

Como $||B_{G-S}||_\infty < 1$ es condición suficiente, no necesaria, de convergencia, no podemos asegurar ni que converge ni que no converge.

c) **Calcular la norma uno de B_{G-S}. Partiendo de este resultado ¿qué podemos decir de la convergencia del método de Gauss-Seidel?**

$$B^T_{G-S} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 4/5 & 4/15 \\ 0 & 1/5 & 1/15 \end{pmatrix} \begin{matrix} 0+0+0=0 \\ 0+4/5+1/5=46/15 \\ 0+1/5+1/15=4/15 \end{matrix}$$

$$||B_{G-S}||_1 = \text{Max}\,(0,46/15,4/15) = 46/15$$

Como $||B_{G-S}||_1 < 1$ es condición suficiente, no necesaria, de convergencia, no podemos asegurar ni que converge ni que no converge.

d) **Calcular los autovalores de B_{G-S}. Partiendo de este resultado ¿qué podemos decir de la convergencia del método de Gauss-Seidel?**

$$\begin{vmatrix} 0-\lambda & -2 & 0 \\ 0 & 4/5-\lambda & 1/5 \\ 0 & 4/15 & 1/15-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$-\lambda\left(\frac{4}{5}-\lambda\right)\left(\frac{1}{15}-\lambda\right) - \frac{4}{15}\frac{1}{5}(-\lambda) = \frac{13}{15}\lambda^2 - \lambda^3 = (\lambda)(\lambda)\left(\frac{13}{15}-\lambda\right) = 0$$

Y los autovalores son

$$\lambda_{1,2} = 0, \quad \lambda_3 = \frac{13}{15}$$

La condición necesaria y suficiente para que el método de Gauss-Seidel converja es que todos los autovalores, en valor absoluto, sean menores que 1. Como esta condición se cumple, el método converge.

e) **Realizar una iteración con Gauss-Seidel. Utilizar $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$.**

El sistema es

$$\begin{array}{rrrcr} x & +2y & & = & 1 \\ 2x & +5y & -z & = & 3 \\ & -y & +3z & = & -3 \end{array}$$

En la primera ecuación despejamos la primera incógnita, x, en la segunda, la segunda incógnita, y, y finalmente, z.

$$\begin{array}{rcl} x & = & 1-2y \\ y & = & (3-2x+z)/5 \\ z & = & (-3+y)/3 \end{array}$$

Realizamos una iteración

$$\begin{array}{rcl} x^{(1)} & = & 1-2y^{(0)} = 1-2(0) = 1 \\ y^{(1)} & = & \left(3-2x^{(1)}+z^{(0)}\right)/5 = (3-2(1)+(0))/5 \ = 0{,}2 \\ z^{(1)} & = & \left(-3+y^{(1)}\right)/3 = (-3+0{,}2)/3 = -2{,}8 \end{array}$$

2. **Utilizando el método del gradiente, aproximar el mínimo de la función** $f(x,y) = x^4 + y^4$. **Utilizar el punto (1,1) como punto inicial y realizar una iteración.**

Realizaremos una iteración por el método del gradiente usando la fórmula

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} - h\nabla f_{(x_0,y_0)} \tag{1}$$

y buscaremos h para que

$$g(h) = f(x_0 - hf_x(1,1), y_0 - hf_y(1,1))$$

tenga un valor mínimo.
Tenemos que

$$\nabla f = (f_x, f_y) = \left(4x^3, 4y^3\right)$$

y

$$\nabla f_{(x_0,y_0)} = \nabla f_{(1,1)} = (4,4)\,.$$

$g(h) = f(x_0 - hf_x(1,1), y_0 - hf_y(1,1)) = f(1-4h, 1-4h) = (1-4h)^4 + (1-4h)^4 = 2(1-4h)^4$
Optimicemos esta función:

$$g'(h) = 8(1-4h)^3(-4) = 0 \Longrightarrow 1-4h = 0 \Longrightarrow h = \frac{1}{4}$$

y usando este valor en la ecuación (1)

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Hemos llegado al mínimo porque $f(x_0,y_0) = f(1,1) = 2$ y $f(x_1,y_1) = f(0,0) = 0$ que es el menor valor posible puesto que f es siempre positivo.

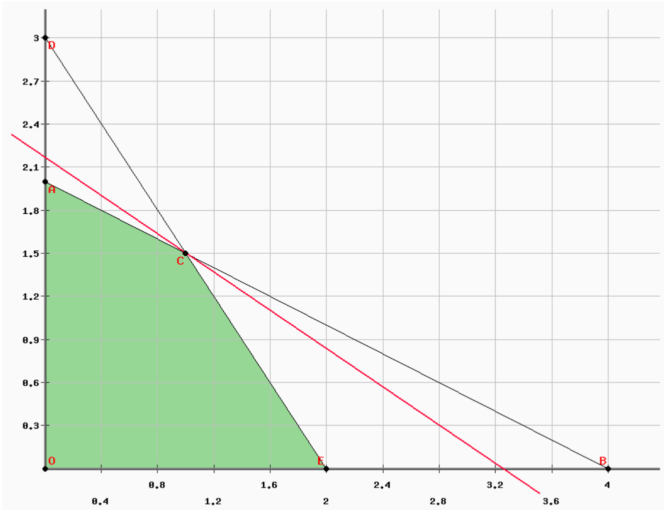

Figura 1: Solución gráfica del problema 3.

3. **Maximizar la función** $f(x, y) = 2x + 3y$ **con las restricciones**

$$x + 2y \leq 4, \quad 3x + 2y \leq 6, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0$$

a) **Geométricamente.**

La región de posibles soluciones es la región verde. Una curva de nivel de f es la línea roja. La función crece hacia la derecha. El punto donde la función es máxima es $B\,(1, 1{,}5)$ y en él la función vale $f(1, 1{,}5) = 6{,}5$.

b) **Mediante el algoritmo simplex.**

Reescribimos las condiciones

$$\begin{aligned} F - 2x - 3y &= 0 \\ x + 2y + r &= 4 \\ 3x + 2y + s &= 6 \end{aligned}$$

y entonces la tabla es:

	F	x	y	r	s	Valor
f_1	1	-2	-3	0	0	0
f_2	0	1	2	1	0	4
f_3	0	3	2	0	1	6

En la primera fila el valor negativo con mayor valor absoluto es -3 y, de los valores de esta columna debajo de -3 en la segunda fila el $Valor/y = 4/2 = 2$ y en la tercera $6/2 = 3$. Elejimos la segunda fila como ecuación pivotal porque de los dos valores 2 es menor que 3. Por lo tanto el pivote está en la segunda columna, segunda fila. Realizamos las operaciones por fila

$$\begin{array}{lllll} f_1 & \to & f_1 & - & \frac{-3}{\mathbf{2}} \; f_2 \\ f_3 & \to & f_3 & - & \frac{2}{\mathbf{2}} \; f_2 \\ f_2 & \to & \frac{1}{\mathbf{2}} & f_2 & \end{array}$$

y la matriz se trasforma en

	F	x	y	r	s	Valor
f_1	1	$-1/2$	0	$3/2$	0	6
f_2	0	$1/2$	1	$1/2$	0	2
f_3	0	2	0	-1	1	2

En la primera fila queda el valor negativo $-1/2$ y, de los valores de esta columna en la segunda fila tenemos el $Valor/y = 2/(1/2) = 4$ y en la tercera $2/2 = 1$. Elejimos la tercera fila como ecuación pivotal porque de los dos valores 2 es menor que 3. Por lo tanto el pivote está en la segunda columna, segunda fila. Realizamos las operaciones por fila

$$\begin{array}{llllll} f_1 & \rightarrow & f_1 & - & \frac{-1/2}{\mathbf{2}} & f_3 \\ f_2 & \rightarrow & f_2 & - & \frac{1/2}{\mathbf{2}} & f_3 \\ f_3 & \rightarrow & \frac{1}{\mathbf{2}} & f_3 & & \end{array}$$

F	x	y	r	s	Valor
1	0	0	5/2	1/4	**13/2**
0	0	**1**	3/4	-1/4	**3/2**
0	**1**	0	-1/2	1/2	**1**

Ya no hay valores negativos en la primera fila y hemos acabado. En la columna de F el valor a la altura del 1 es $13/2 = 6{,}5$, en la columna de y el valor en la fila del 1 es $3/2 = 1{,}5$ y en la columna de x, 1. Resumiendo, el máximo está en $(x, y) = (1, 1{,}5)$ y el valor del máximo es $f\,(1, 1{,}5) = 6{,}5$.