Computación Numérica

Primer Parcial - Mayo 2018

1. Una máquina almacena números en punto flotante en base 2 en 16 bits, siguiendo un criterio similar al de la norma IEEE 754. El primer bit se usa para el signo del número, los seis siguientes para el exponente sesgado y los últimos nueve bits para la mantisa.

   (a) Calcular los exponentes máximo y mínimo.

   (b) Calcular el valor mínimo y máximo de los números positivos (excluido el cero) desnormalizados. Expresarlos en binario y en decimal. ¿Qué precisión tendría cada uno?

   (c) ¿Cuántos números positivos desnormalizados se pueden representar con este formato? Razonarlo.

   (d) Calcular el número 17.6 en este formato. Redondear al par más cercano. Calcular el error relativo cometido al almacenarlo

(a) El número de exponentes que podemos representar con m bits sería

$$2^m = 2^6 = 64$$

Si no tenemos en cuenta el signo van desde

$$[0, 1, \dots, 62, 63]$$

y teniendo en cuenta que el primero y el último están reservados

$$[R, 1, \dots, 62, R]$$

Pero los enteros representados serían los anteriores menos el $sesgo = 2^{m-1} - 1 = 2^{6-1} - 1 = 2^5 - 1 = 31$, es decir, el rango de números a representar sería

$$[R, 1 - 31, \dots, 62 - 31, R] = [R, -30, \dots, 31, R]$$

por lo tanto

Solución:

$$\boxed{e_{min} = -30 \ \text{ y } \ e_{max} = 31}$$

(b)
Los números desnormalizados se reconocen porque el exponente es el número binario reservado `000 000`. Entoces el bit excondido es cero y se asume que el exponente tiene el valor mínimo, en este caso, -30.
El valor mínimo desnormalizado tiene mantisa mínima (distinta de cero) y se representa en binario

signo	exponente	mantisa
0	000 000	000 000 001

que se corresponde con

$$0.000\,000\,001 \times 2^{-30} \longrightarrow 2^{-9} \times 2^{-30} = 2^{-39} \approx 1.8 \times 10^{-12}$$

Solución:

$$\boxed{\text{Mínimo número desnormalizado: } 1.8 \times 10^{-12}}$$

El valor máximo tiene mantisa máxima. Se representa en binario

signo	exponente	mantisa
0	000 000	111 111 111

que, teniendo en cuenta el bit escondido, tenemos una mantisa con 11 dígitos, y el número máximo es

$$0.111\,111\,111 \times 2^{-30}$$

que expresado en decimal es

$$\left(0 + 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + 2^{-4} + 2^{-5} + 2^{-6} + 2^{-7} + 2^{-8} + 2^{-9}\right) \times 2^{-30} \approx 9.3 \times 10^{-10}$$

Solución:

$$\boxed{\text{Máximo número desnormalizado: } 9.3 \times 10^{-10}}$$

La precisión del numero mínimo es 1 porque es el número de dígitos almacenados ya que los ceros a la izquierda no cuentan. Análogamente la precisión del máximo es 9 (c) El número de mantisas posibles es $2^9 = 512$ porque el bit escondido es siempre 0, no hay dos opciones. Y sólo hay un exponente. Si quitamos el cero (mantisa todo ceros) tenemos 511

Solución:

$$\boxed{\text{511 números desnormalizados}}$$

(e) Calcular el número 17.6 en este formato.

MANTISA:

Dividiendo el número sucesivamente por dos y almacenando el cociente y el resto de cada división

Cociente	17	8	4	2	1
Resto	1	0	0	0	$\swarrow$

Y la parte entera

$$(17)_{10} = (10001)_2$$

La parte fracionaria es, multiplicando en cada paso por dos, separándola en entera y fraccionaria y volviendo a multiplicar sólo la parte fraccionaria por dos

Fraccionaria	0.6	0.2	0.4	0.8	0.6	0.2	0.4	0.8	0.6	$\cdots$
Entera		1	0	0	1	1	0	0	1	$\cdots$

que es periódica

$$(0.6)_{10} = (0.1001\,1001\,1001\,1001\,\ldots)_2$$

Y el número completo es

$$(17.6)_{10} = (10001.1001\,1001\,\ldots)_2 \longrightarrow 1.0001\,1001\,1001\,\ldots \times 2^4$$

En rojo, el bit escondido y los números que no caben en la mantisa pero tendremos que tener en cuenta al redondearla. Cómo el número está más próximo al valor del truncado que al siguiente, redondeamos al truncado, y el número a almacenar es

$$1.0001\,1001\,1 \times 2^4$$

EXPONENTE: Como *sesgo* $= 31$ representaremos

$$4 + 31 = 35$$

Cociente	35	17	8	4	2	1
Resto	1	1	0	0	0	$\swarrow$

y el exponente en binario es $(100011)_2$ y la representación completa será

signo	exponente	mantisa
0	100011	000 110 011

2. Sea la función h

$$h(x) = \frac{x^3}{3} - 2\ln(2+x)$$

(a) Demostrar que en $[0,1]$ existe un único extremo de h.

(b) Aproximar el extremo haciendo dos iteraciones con el método de Newton con $x_0 = 1$.

(c) Aproximar el extremo haciendo dos iteración con el método de la secante con $x_0 = 0$ y $x_1 = 1$.

(a)

Sea $h(x) = x^3/3 - 2\ln(2+x) = 0$. La condición necesaria de extremo es $h'(x) = 0$. Por lo que, teniendo en cuenta que

$$h'(x) = x^2 - \frac{2}{2+x} = \frac{x^3+2x^2-2}{2+x}$$

para que $h'(x) = 0$ habrá de ser $x^3 + 2x^2 - 2 = 0$ y $2 + x \neq 0$. Cómo $x \neq -2$ en el intervalo $[0,1]$, estamos buscando las raíces de la función

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 2$$

Las condiciones (suficientes, no necesarias) que ha de cumplir f en $[0,1]$ para que exista una única raíz en el intervalo son:

1. f continua: f es continua porque es un polinomio, que es una función continua.
2. f tiene distinto signo en los extremos del intervalo:

$$f(0) = -2 \quad \text{y} \quad \text{f}(1) = 1$$

3. f es estrictamente creciente o decreciente en $[0,1]$. Es decir $f' > 0$ o $f' < 0$ en $(0,1)$:

$$f'(x) = 3x^2 + 4x = x(3x+4) = (+)(+) > 0.$$

para todos los $x \in (0,1)$ del intervalo.Y $f'(x) > 0$ en $(0,1)$.

(b)

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_0 - \frac{x_0^3 + 2x_0^2 - 2}{3x_0^2 + 4x_0} = 1 - \frac{1+2-2}{3+4} = 1 - \frac{1}{7} = 0.8571$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = x_1 - \frac{x_1^3 + 2x_1^2 - 2}{3x_1^2 + 4x_1} = 0.8571 - \frac{0.8571^3 + 2(0.8571)^2 - 2}{3(0.8571)^2 + 4(0.8571)} = 0.8395$$

(c)

$$x_0 = 0 \quad x_1 = 1 \quad f(x_0) = -2 \quad f(x_1) = 1$$

$$x_2 = x_1 - f(x_1)\frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)} = 1 - 1\frac{1-0}{1-(-2)} = 1 - \frac{1}{3} = 0.6667$$

$$x_1 = 1 \quad x_2 = 0.6667 \quad f(x_1) = 1 \quad f(x_2) = -0.8148$$

$$x_3 = x_2 - f(x_2)\frac{x_2 - x_1}{f(x_2) - f(x_1)} = 0.6667 - (-0.8148)\frac{0.6667 - 1}{-0.8148 - 1} = 0.8163$$

Computación Numérica

Segundo Parcial - Mayo 2018

1. Consideremos la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ y su polinomio interpolador con los nodos x_0 y x_1.

   (a) Demostrar que el error cometido al aproximar $f(x)$ mediante tal polinomio en cualquier punto de $[x_0, x_1]$ está acotado por $\frac{(x_1-x_0)^2}{4x_0^3}$.

   (b) Construir el polinomio interpolante, utilizando el método de Newton para $x_0 = 1$ y $x_1 = 2$ y dar una cota del error cometido.

(a)

El error de interpolación viene dado por

$$E(x) = f(x) - P_n(x) = f^{(n+1)}(c)\frac{(x-x_0)\dots(x-x_n)}{(n+1)!},$$

donde las x_i son los puntos de interpolación, c un punto del intervalo de interpolación, f la función a interpolar y P_n el polinomio de interpolación obtenido con los puntos de interpolación. En este caso, como tenemos dos nodos de interpolación, la interpolación es lineal y el error es

$$|E(x)| = |f(x) - P_1(x)| = \left|f^{(2)}(c)\right| \frac{|(x-x_0)(x-x_1)|}{2!}.$$

Por una parte, suponiendo $x_0 < x_1$, y como $c \in (x_0, x_1)$ tenemos

$$\left|f^{(2)}(c)\right| = \frac{2}{c^3} < \frac{2}{x_0^3}$$

Por otra parte

$$g(x) = |(x-x_0)(x-x_1)| = (x-x_0)(x_1-x)$$

y

$$g'(x) = (x_1 - x) + (x-x_0)(-1) = -2x + x_0 + x_1 = 0$$

con lo que el extremo está en

$$x = \frac{x_0+x_1}{2}.$$

Y como $g''(x) = -2$ en este punto tenemos un máximo. El valor de la función g en este máximo es

$$g\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right) = \left(\frac{x_0+x_1}{2} - x_0\right)\left(x_1 - \frac{x_0+x_1}{2}\right) = \left(\frac{x_1-x_0}{2}\right)\left(\frac{x_1-x_0}{2}\right) = \frac{1}{4}(x_1-x_0)^2.$$

Por lo tanto se verifica que

$$|E(x)| = |f(x) - P_1(x)| = \left|f^{(2)}(c)\right| \frac{|(x-x_0)(x-x_1)|}{2!} < \frac{2}{x_0^3}\frac{1}{4}(x_1-x_0)^2\frac{1}{2!} = \frac{(x_1-x_0)^2}{4x_0^3} \quad (1).$$

(b)

Para construir el polinomio

x	$f(x)$	
1	1	
		$\dfrac{1/2-1}{2-1} = -1/2$
2	1/2	

Ya tenemos los coeficientes del polinomio

$$f[x_0] = 1, \quad f[x_0, x_1] = -\frac{1}{2}.$$

Construímos el polinomio interpolante en la forma de Newton

$$\begin{aligned} P_1(x) =& f[x_0] + f[x_0,x_1](x-x_0) \\ P_1(x) =& 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)(x-1) \\ P_1(x) =& \frac{3-x}{2} \end{aligned}$$

Y, teniendo en cuenta (1) la cota del error es

$$\frac{(x_1-x_0)^2}{4x_0^3} = \frac{(2-1)^2}{4(1)^3} = \frac{1}{4} = 0.25$$

2. Una elipse, en coordenadas polares (α, r), con un foco en el origen y el otro foco en la parte no negativa del eje X tiene la forma

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \alpha}$$

con $0 \leq \varepsilon < 1$ y $p > 0$. Si hemos medido las coordinadas aproximadas de varios puntos de una elipse y tenemos que

α	0^o	15^o	30^o	45^o	60^o
r	15	14	13	11	10

aproximar el valor de p y ε por mínimos cuadrados, linealizando previamente la ecuación.

Para un punto cualquiera, debería cumplirse, aproximadamente

$$r_k = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos(\alpha_k)} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{r_k} = \frac{1 - \varepsilon \cos(\alpha_k)}{p} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{r_k} = \frac{1}{p} - \frac{\varepsilon}{p} \cos(\alpha_k)$$

Y si llamamo

$$y_k = \frac{1}{r_k}, \quad x_k = \cos(\alpha_k), \quad a_0 = \frac{1}{p}, \quad a_1 = -\frac{\varepsilon}{p}$$

tenemos

$$\frac{1}{r_k} = \frac{1}{p} - \frac{\varepsilon}{p} \cos(\alpha_k) \quad \Longrightarrow \quad y_k = a_0 + a_1 x_k$$

el problema es ahora ajustar una recta de regresión mínimo cuadrática

$$P_1(x) = a_0 + a_1 x$$

a los datos transformados (x_k, y_k), $\quad k = 1, \ldots, 5$

$$\begin{pmatrix} \sum_{k=1}^5 1 & \sum_{k=1}^5 x_k \\ \sum_{k=1}^5 x_k & \sum_{k=1}^5 x_k^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^5 y_k \\ \sum_{k=1}^5 x_k y_k \end{pmatrix}$$

Calculamos los valores correspondientes

	r_k	α_k	$y_k = 1/r_k$	$x_k = \cos\ \alpha_k$	x_k^2	$x_k\, y_k$
	15	0^o	0.0667	1.000	1.000	0.0667
	14	15^o	0.0714	0.966	0.933	0.0690
	13	30^o	0.0769	0.866	0.750	0.0666
	11	45^o	0.0909	0.707	0.500	0.0643
	10	60^o	0.1000	0.500	0.250	0.0500
$\sum$			0.4059	4.039	3.433	0.3166

Sustituyendo los datos y operando

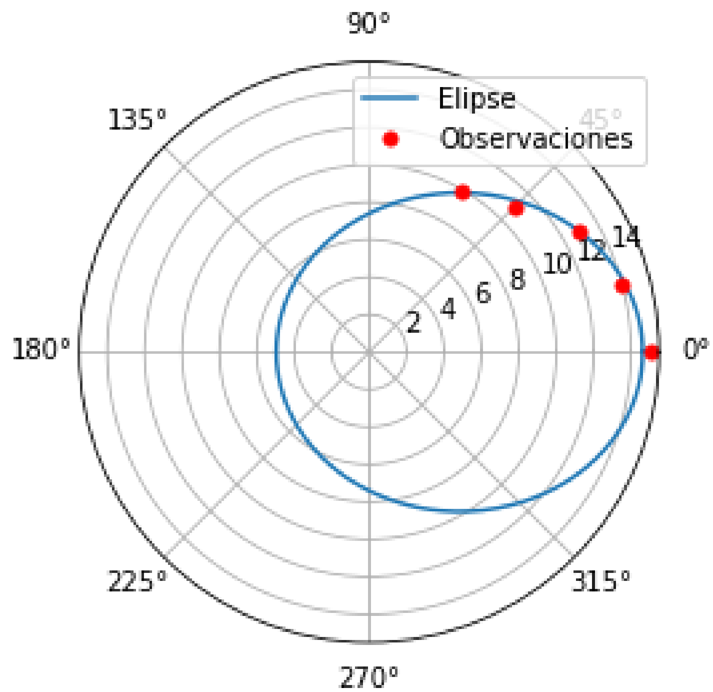
$$\begin{array}{rcrcl} 5\, a_0 & + & 4.039\, a_1 & = & 0.4059 \\ 4.039\, a_0 & + & 3.433\, a_1 & = & 0.3166 \end{array}$$

Y la solución de este sistema es $a_0 = 0.135 \quad a_1 = -0.0667$. Como

$$a_0 = \frac{1}{p} \quad a_1 = -\frac{\varepsilon}{p} \quad \Longrightarrow p = \frac{1}{a_0} \quad \varepsilon = -a_1 \times p$$

y $p = 7.4$, $\varepsilon = 0.5$ y la ecuación es

$$r = \frac{7.4}{1 - 0.5\cos(\alpha)}$$



3. La fórmula de cuadratura de cuadratura de Gauss-Legendre con dos nodos es

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \simeq f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \tag{1}$$

(a) Estudiar cuál es su grado de precisión.

(b) Usar la fórmula obtenida para calcular un valor aproximado de:

$$\int_{-1}^{2} (x^3 - x^2 + 2)\,dx$$

realizando previamente un cambio de variable adecuado

(c) ¿Qué error se comete al aplicar dicha fórmula en este ejercicio? Justificar la respuesta sin hacer la integral exacta.

(a) Para que una fórmula de cuadratura tenga precisión n, dicha fórmula ha de ser exacta para las funciones 1, x, x^2, ..., x^n y no serlo para x^{n+1}. Estudiemos la precisión de esta fórmula

¿Exacta para $f(x) = 1$?

$$\int_{-1}^{1} 1\,dx = 2 \overset{?}{=} f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 1 + 1 = 2 \qquad Si$$

¿Exacta para $f(x) = x$?

$$\int_{-1}^{1} x\,dx = 0 \overset{?}{=} f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} = 0 \qquad Si$$

¿Exacta para $f(x) = x^2$?

$$\int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3} \overset{?}{=} f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{2}{3} \qquad Si$$

¿Exacta para $f(x) = x^3$?

$$\int_{-1}^{1} x^3 dx = 0 \overset{?}{=} f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 = 0 \qquad Si$$

¿Exacta para $f(x) = x^4$?

$$\int_{-1}^{1} x^4 dx = \frac{2}{5} \overset{?}{=} f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^4 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^4 = \frac{2}{9} \qquad No$$

Como es exacta para 1, x, x^2 y x^3 pero no para x^4, es exacta para polinomios de hasta grado 3 pero no para grado 4 y la preción de la fórmula es 3.

(b) Queremos hacer un cambio de variable que nos lleve del intervalo $[a, b]$ al intervalo donde está definida la fórmula de cuadratura gaussiana $[-1, 1]$. Si hacemos un cambio de variable lineal de la forma

$$x = m\,t + n,$$

si $x = a$, entonces $t = -1$ y

$$a = -m + n.$$

Y si $x = b$, entonces $t = 1$ y

$$b = m + n.$$

La solución a este sistema es

$$m = \frac{b-a}{2} \qquad n = \frac{a+b}{2}.$$

Y por lo tanto, el cambio de variable es

$$x = \frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2} \qquad dx = \frac{b-a}{2}dt.$$

Y

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2}\right)dt$$

Y utilizando la fórmula de cuadratura gaussiana de dos nodos, la aproximación será

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2}\sum_{i=0}^{1}\omega_i\, f\left(\frac{b-a}{2}t_i + \frac{a+b}{2}\right)$$

siendo ω_i los pesos y t_i los nodos de la fórmula. En este caso, como $[a, b] = [-1, 2]$

$$\frac{b-a}{2} = 1.5 \qquad \frac{a+b}{2} = 0.5$$

y tenemos que

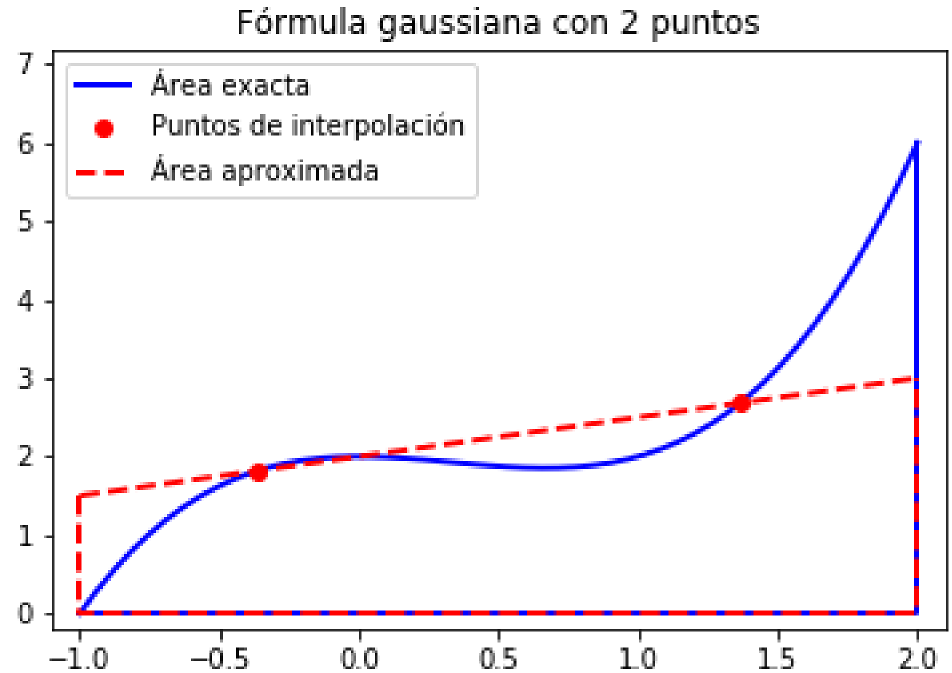
$$\int_{-1}^{2} f(x)\,dx = 1.5\int_{-1}^{1} f\left(1.5\,t + 0.5\right)dt \approx$$

$$\approx 1.5\left(f\left(-1.5\frac{1}{\sqrt{3}} + 0.5\right) + f\left(1.5\frac{1}{\sqrt{3}} + 0.5\right)\right) =$$

$$= 1.5\left(f(-0.366) + f(1.366)\right) =$$

$$= 1.5\left(1.817 + 2.683\right) = 6.75$$

(c) Como la fórmula tiene precisión 3 y la función integrando es un polinomio de grado 3, la integral es exacta y el error es cero.



Computación Numérica

Tercer Parcial - Mayo 2018

1. Sea el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ donde

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Calcular $\mathbf{x}$ utilizando la factorización LU. Indicar, en cada paso, las operaciones por fila realizadas.

En el primer paso hacemos ceros por debajo del elemento a_{11} sumando la primera fila multiplicada por un real.

$$\begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{array} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} f_1 \to f_1 \\ f_2 \to f_2 - \boxed{3/3}\ f_1 \\ f_3 \to f_3 - \boxed{3/3}\ f_1 \end{array}$$

Los multiplicadores, que aparecen en rojo, son los elementos con los que construímos la matriz L. Los insertamos en la matriz, en lugar de los ceros creados. La matriz transformada es

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ \boxed{1} & -1 & -1 \\ \boxed{1} & -1 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} f_1 \to f_1 \\ f_2 \to f_2 \\ f_3 \to f_3 - \boxed{(-1)/(-1)}\ f_2 \end{array}$$

Repetimos el proceso creando ceros por debajo de a'_{22} y llegamos a la matriz que almacena simultáneamente L y U.

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ \boxed{1} & -1 & -1 \\ \boxed{1} & \boxed{1} & -1 \end{pmatrix}$$

Y las matrices L y U son:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \boxed{1} & 1 & 0 \\ \boxed{1} & \boxed{1} & 1 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ahora, teniendo en cuenta que queremos resolver $Ax = b$ y que $A = LU$ podemos escribir $LUx = b$ y si llamamos $Ux = y$, entonces $Ly = b$:

1. Resolvemos el sistema triangular inferior $Ly = b$ por sustitución progresiva y obtenemos y.

$$\begin{array}{llll} y_1 & & & = & 0 \\ y_1 & +y_2 & & = & 1 \\ y_1 & +y_2 & +y_3 & = & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{lll} y_1 & = & 0 \\ y_2 & = & 1 - y_1 = 1 - 0 = 1 \\ y_3 & = & 2 - y_1 - y_2 = 2 - 0 - 1 = 1 \end{array}$$

2. Resolvemos el sistema triangular superior $Ux = y$ por sustitución regresiva y obtenemos x, que era lo que buscábamos.

$$\begin{array}{rrrcl} 3x_1 & +3x_2 & +3x_3 & = & 0 \\ & -x_2 & -x_3 & = & 1 \\ & & -x_3 & = & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{lclcr} x_3 & = & 1/(-1) & = & -1 \\ x_2 & = & (1 + x_3)/(-1) & = & 0 \\ x_1 & = & (-3x_2 - 3x_3)/3 & = & 1 \end{array}$$

2. Sea $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - x + y$.

   a) Hallar un mínimo local de f.

   b) Probar que dicho mínimo es, de hecho, global.

   c) Aproximarlo con una iteración por el método de Newton, tomando como punto inicial $(0,0)$.

a) La condición necesaria de mínimo para un punto (x_m, y_m) es que $\nabla f\,(x_m, y_m) = \left(f'_x, f'_y\right) = (0,0)$. Es decir

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + y - 1 = 0 \\ x + 2y + 1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} & 2(-1-2y) + y - 1 = 0 \rightarrow \\ x = -1 - 2y \nearrow & \end{cases} \qquad \begin{cases} y = -1 \searrow & \\ & x = 1 \end{cases}$$

Y el punto $(x_m, y_m) = (1, -1)$ cumple las condiciones necesarias de mínimo. Veamos si también cumple la condición suficiente que es que la matriz Hessiana en el punto (x_m, y_m) sea definida positiva. La matriz Hessiana para la función f en cualquier punto (x, y) es

$$H_f = \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Y en particular, en el punto $(x_m, y_m) = (1, -1)$

$$H_f(1,-1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Veamos si es definida positiva. Para ello los determinantes de los menores principales han de ser estrictamente positivos. Es decir

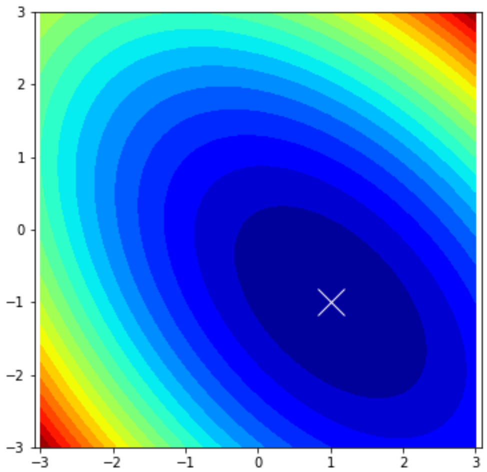
$$|H_f(1,-1)| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0 \quad \text{y} \quad |2| = 2 > 0.$$

Por lo tanto la matriz es definida positiva y se cumple la condición suficiente de mínimo.

b) Se tiene que:

- Cualquier mínimo local de una función convexa es también un mínimo absoluto.
- Si para todo elemento del dominio de f, la matriz hessiana $H_f(a)$ es definida positiva, entonces, la función f es estrictamente convexa.

En este caso, la matriz Hessiana f en cualquier punto coincide con la matriz Hessiana en $(1,-1)$ y ya hemos demostrado que es definida positiva, por lo que la función f es convexa y el mínimo local $(1,-1)$ es también mínimo global.


3
2
1
0
−1
−2
−3
−3
−2
−1
0
1
2
3

c) Realizaremos una iteración por el método de Newton usando la fórmula

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} - H^{-1}_{(x_0,y_0)} \cdot \nabla f_{(x_0,y_0)}$$

Si consideramos que

$$H_{(x_0,y_0)} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \nabla f_{(x_0,y_0)} \tag{1}$$

entonces

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = H^{-1}_{(x_0,y_0)} \cdot \nabla f_{(x_0,y_0)}$$

y escribiremos

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \tag{2}$$

donde $(c_1, c_2)^T$ es la solución del sistema (1).

Tenemos que

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \right) = (2x + y - 1, x + 2y + 1)$$

y

$$\nabla f_{(x_0,y_0)} = \nabla f_{(0,0)} = (-1, 1)\,.$$

Además

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\,\partial x} & \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\,\partial y} \\ \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\,\partial x} & \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\,\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

y

$$H_{(x_0,y_0)} = H_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

El sistema (1) es

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

y resolviéndolo

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto (2) es

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Hemos mejorado porque $f(x_0, y_0) = f(0,0) = 0$ y $f(x_1, y_1) = f(1,-1) = -1$ que es menor.