Computación Numérica

Primer Parcial B - Marzo 2015

1. En el método de bisección, un número suficiente de iteraciones para que el error absoluto e_a sea menor que una tolerancia dada ϵ es

$$n = E\left[\frac{1}{\log 2}\log\left(\frac{b_0 - a_0}{\epsilon}\right)\right] + 1.$$

¿Cuántas iteraciones se necesitan para obtener un dígito adicional de precisión en la aproximación?

Para que tener un dígito adiccional la tolerancia ha de ser 0.1ϵ y de acuerdo con la fórmula, el número de iteraciones será

$$N = E\left[\frac{1}{\log 2}\log\left(\frac{b_0 - a_0}{\epsilon}\right)\right] + 1.$$

El número adicional de iteraciones será

$$N - n > \frac{1}{\log 2}\log\left(\frac{b_0 - a_0}{0.1\epsilon}\right) - \frac{1}{\log 2}\log\left(\frac{b_0 - a_0}{\epsilon}\right).$$

Sacando factor común $\dfrac{1}{\log 2}$ y teniendo en cuenta las propiedades de los logaritmos

$$N - n > \frac{1}{\log 2}\left[\left(\log\left(b_0 - a_0\right) - \log 0.1 - \log\epsilon\right) - \left(\log\left(b_0 - a_0\right) - \log\epsilon\right)\right]$$

es decir

$$N - n > \frac{1}{\log 2}\left(-\log 0.1\right) = 3.3.$$

Por lo tanto el número adicional de iteraciones será 4.

2. Sea la función

$$h(t) = t + \ln|t| - \arctan t.$$

(a) Demostrar que esta función tiene un único extremo relativo en $[-2, -1]$.

(b) Aproximar el extremo utilizando el método de Newton. Utilizar como punto inicial $x_0 = -1$ y realizar 2 iteraciones.

(a) Para que el punto α será un extremo de h es necesario que $h'(\alpha) = 0$. Como

$$h'(t) = 1 + \frac{1}{t} - \frac{1}{1+t^2} = \frac{1+t^2+t^3}{t(1+t^2)}$$

Y si tomamos $f(x) = 1 + t^2 + t^3$ entonces

$$h \quad \text{tiene un extremo en } [-2,-1] \Longleftrightarrow f \quad \text{tiene una raíz en } [-2,-1].$$

O lo que es lo mismo

$$h'(t) = 0 \quad \text{en } [-2,-1] \Longleftrightarrow f(t) = 0 \quad \text{en } [-2,-1].$$

Las condiciones (suficientes, no necesarias) que ha de cumplir f en $[-2, -1]$ para que exista una única raíz en el intervalo son:
1. f continua: f es continua porque es un polinomio.
2. f tiene distinto signo en los extremos del intervalo: $f(-2) = -3$ y $f(-1) = 1$
3. $f' > 0$ o $f' < 0$ en $(-2, -1)$:

$$f'(t) = 2t + 3t^2.$$

Si factorizamos:

$$f'(t) = 2t + 3t^2 = t(2+3t) = 3t(\frac{2}{3} + t)$$

Como t es siempre negativo en $(-2, -1)$ y $(\frac{2}{3} + t)$ también es negativo, $f'(t) > 0$ en $(-2, -1)$.

(b) La sucesión se define

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \qquad x_0 = -1$$

o lo que es lo mismo

$$x_{k+1} = x_k - \frac{1 + x_k^2 + x_k^3}{2x_k + 3x_k^2} \qquad x_0 = -1.$$

Por lo tanto

$$x_1 = x_0 - \frac{1 + x_0^2 + x_0^3}{2x_0 + 3x_0^2} = (-1) - \frac{1 + (-1)^2 + (-1)^3}{2(-1) + 3(-1)^2} = -1 - \frac{1+1-1}{-2+3} = -2$$

$$x_2 = x_1 - \frac{1 + x_1^2 + x_1^3}{2x_1 + 3x_1^2} = (-2) - \frac{1 + (-2)^2 + (-2)^3}{2(-2) + 3(-2)^2} = -2 - \frac{1+4-8}{-4+12} = -1.625$$

3. $\boxed{\text{Aproximar utilizando el método de la secante } r = \sqrt[3]{2}\text{. Utilizar como puntos iniciales } x_0 = 1 \text{ y } x_1 = 2\text{. Realizar 2 iteraciones y calcular el residual. Si } r = 1.25992\text{, calcular el error absoluto de la aproximación.}}$

Si tenemos $x = \sqrt[3]{2} \Rightarrow x^3 = 2 \Rightarrow x^3 - 2 = 0$ y nuestra función puede ser $f(x) = x^3 - 2$.
Si iteramos usando el método de la Secante usaremos la fórmula

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

Por lo tanto

$$x_{k+1} = x_k - \frac{(x_k^3 - 2)(x_k - x_{k-1})}{(x_k^3 - 2) - (x_{k-1}^3 - 2)}$$

o lo que es lo mismo

$$x_{k+1} = x_k - \frac{(x_k^3 - 2)(x_k - x_{k-1})}{(x_k^3 - x_{k-1}^3)}$$

Si $x_0 = 1$ y $x_1 = 2$ entonces $x_2 = 1.14286$
Si $x_1 = 2$ y $x_2 = 1.14286$ entonces $x_3 = 1.20968$
El residual será

$$|f(x_3)| = \left|x_3^3 - 2\right| = 0.23.$$

Los errores absoluto y relativo

$$e_a = |x - x^*| = |1.25992 - 1.20968| = 0.05024 \qquad e_r = \frac{e_a}{\sqrt[3]{2}} = \frac{0.05024}{1.25992} = 0.04$$

Computación Numérica

Primer Parcial B - Marzo 2015

1. En el método de bisección, usar la expresión

$$e_a = |\alpha - m_n| < \frac{b_0 - a_0}{2^n}.$$

para obtener el número mínimo de iteraciones para que el error absoluto e_a sea menor que una tolerancia dada, ϵ.

Una condición suficiente es que se cumpla

$$e_a = |\alpha - m_n| < \frac{b_0 - a_0}{2^n} < \epsilon.$$

Y se tiene que

$$\frac{b_0 - a_0}{2^n} < \epsilon \Longleftrightarrow \frac{b_0 - a_0}{\epsilon} < 2^n \tag{1}$$

Como $f(x) = \log(x)$ es una función estrictamente creciente se tiene que si $0 < x < y \Longrightarrow \log(x) < \log(y)$ y a partir de (1)

$$\log\left(\frac{b_0 - a_0}{\epsilon}\right) < \log\left(2^n\right)$$

y teniendo en cuenta las propiedades de los logaritmos

$$\log\left(\frac{b_0 - a_0}{\epsilon}\right) < n\log 2.$$

Como $\log 2 > 0$, si dividimos los dos miembros de la desigualdad por $\log 2$ el sentido de la desigualdad no cambia y

$$\frac{1}{\log 2}\log\left(\frac{b_0 - a_0}{\epsilon}\right) < n$$

y si $E(x)$ es la función parte entera de x la solución es

$$n = E\left[\frac{1}{\log 2}\log\left(\frac{b_0 - a_0}{\epsilon}\right)\right] + 1.$$

2. Sea la función

$$h(t) = \left(2t - t^3\right) e^{-2t}.$$

(a) Demostrar que esta función tiene un único extremo relativo en $[0, 1]$.

(b) ¿Se puede calcular dicho extremo por el método de bisección partiendo del intervalo $[0, 1]$?

(c) Aproximar el extremo haciendo tres iteraciones.

(d) Dar una cota del error cometido al calcular este extremo.

(a) Para que el punto α será un extremo de h es necesario que $h'(\alpha) = 0$. Como

$$h'(t) = e^{-2t}(2t^3 - 3t^2 - 4t + 2)$$

y como $e^{-2t} > 0$, si tomamos $f(x) = 2t^3 - 3t^2 - 4t + 2$ entonces

$$h \quad \text{tiene un extremo en } [0,1] \Longleftrightarrow f \quad \text{tiene una raíz en } [0,1].$$

O lo que es lo mismo

$$h'(t) = 0 \quad \text{en } [0,1] \Longleftrightarrow f(t) = 0 \quad \text{en } [0,1].$$

Las condiciones (suficientes, no necesarias) que ha de cumplir f en $[0, 1]$ para que exista una única raíz en el intervalo son:
1. f continua: f es continua porque es un polinomio.
2. f tiene distinto signo en los extremos del intervalo: $f(0) = 2$ y $f(1) = -3$
3. $f' > 0$ o $f' < 0$ en $(0, 1)$:

$$f'(t) = 6t^2 - 6t - 4.$$

Si calculamos las raíces y factorizamos:

$$f'(t) = 6t^2 - 6t - 4 = 6(t + 0.46)(t - 1.45)$$

Como $(t + 0.46)$ es siempre positivo en $(0, 1)$ y $(t - 1.45)$ siempre es negativo $f'(t) < 0$ en $(0, 1)$.

(b) Si, porque se cumplen las condiciones necesarias, que son las condiciones 1. y 2. de la pregunta anterior.

(c)

k	*a*	*c*	*b*	*f(a)*	*f(c)*	*f(b)*	*cota de error*
0	0	$(a + b)/2 = (0 + 1)/2 = 0.5$	1	2	-0.5	-3	$1 - 0 = 1$
1	0	$(a + b)/2 = (0 + 0.5)/2 = 0.25$	0.5	2	0.84	-0.5	$0.5 - 0 = 0.5$
2	0.25	$(a + b)/2 = (0.25 + 0.5)/2 = 0.375$	0.5	0.84	0.18	-0.5	$0.5 - 0.25 = 0.25$
3	0.375		0.5				$0.5 - 0.375 = 0.125$

Y podemos dar como raíz aproximada 0.375 (la solución verdadera es $0.41 \in [0.375, 0.5]$)

(c) La raíz está en el intervalo $[0.375, 0.5]$ por lo tanto la cota de error es $0.5 - 0.375 = 0.125$.

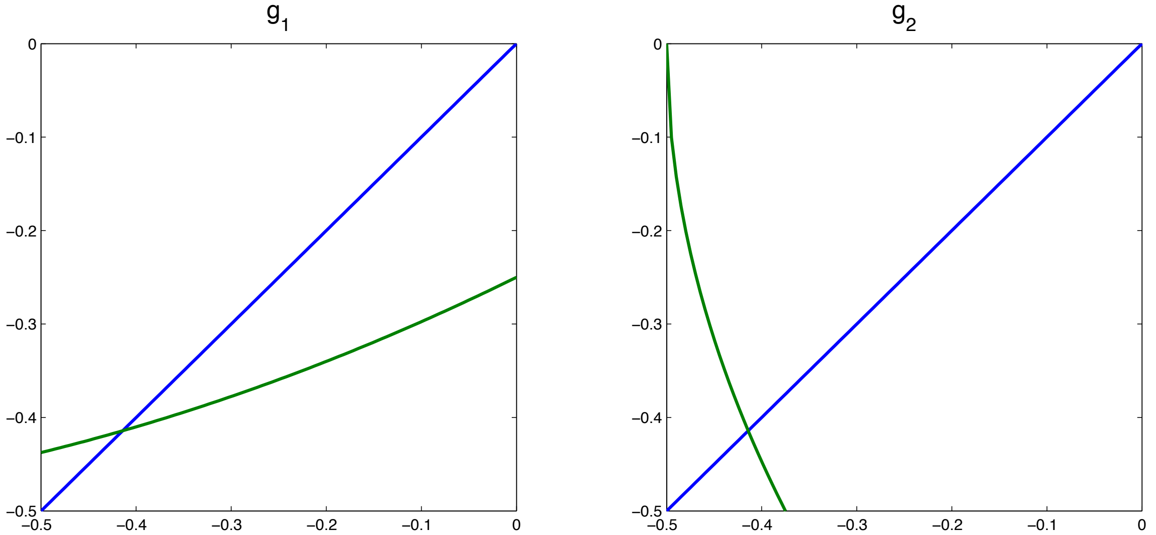
3. Demostrar que si tenemos la ecuación $f(x) = x^2 - 2x - 1$ y consideramos sus raíces en el intervalo $[-0.5, 0]$:

(a) La ecuación $f(x) = 0$ tiene la misma raíz que $g_i(x) = x$ con $i = 1, 2$ siendo

$$g_1(x) = \frac{x^2 + 2x - 1}{4} \qquad g_2(x) = -\sqrt{2x + 1}$$

(b) Enunciar las condiciones del teorema de la aplicación contractiva.

(c) Utilizándolo y teniendo en cuenta las gráficas, escoger, una de las dos funciones para aproximar la solución por el método de iteración de punto fijo comenzando en $x_0 = 0$.



(a) Queremos demostrar que $f(x) = 0 \Longleftrightarrow g_i(x) = x$. Para la primera función de iteración

$$g_1(x) = x \Longleftrightarrow \frac{x^2 + 2x - 1}{4} = x \Longleftrightarrow x^2 + 2x - 1 = 4x \Longleftrightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \Longleftrightarrow f(x) = 0.$$

Y para la segunda

$$g_2(x) = x \Longleftrightarrow -\sqrt{2x + 1} = x \Longleftrightarrow 2x + 1 = x^2 \Longleftrightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \Longleftrightarrow f(x) = 0.$$

(b) Sea g una función definida en el intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ y $x_0 \in [a, b]$ una aproximación inicial de la iteración de punto fijo dada por $x_{k+1} = g(x_k)$, con $k \geq 0$.

1. $g(x) \in [a, b]$ para todo $x \in [a, b]$,

2. g es diferenciable en $[a, b]$ y existe una constante $k < 1$ tal que $g'(x) \leq k$ para todo $x \in [a, b]$.

(c) La función g_1 sí cumple las condiciones: cumple la condición 1 porque la gráfica de g_1 está, en el intervalo $[-0.5, 0]$ totalmente contenida entre las rectas $y = -0.5$ y $y = 0$. Y cumple la condición 2 porque la gráfica tiene una pendiente menor que la recta $y = x$ que tiene pendiente uno.
La función g_2 no cumple las condiciones: no cumple la condición 1 porque la gráfica de g_2 no está, en el intervalo $[-0.5, 0]$ totalmente contenida entre las rectas $y = -0.5$ y $y = 0$. Y no cumple la condición 2 porque la gráfica tiene una pendiente mayor en valor absoluto que la recta $y = x$ que tiene pendiente uno.
Por lo tanto escogeríamos la función g_1 para aproximar la solución por el método de iteración de punto fijo.