Computación Numérica

Segundo Parcial - Abril 2018

1. Consideremos la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ y su polinomio interpolador con los nodos positivos x_0 y x_1. El error cometido al aproximar $f(x)$ mediante tal polinomio en cualquier punto de $[x_0, x_1]$ está acotado por
$$\frac{(x_1 - x_0)^2}{4x_0^3}$$
Se desea tabular $f(x)$ para ser capaces de obtener, utilizando interpolación lineal en dos puntos consecutivos, cualquier valor de $f(x)$ con un error menor que 10^{-1}. Calcular el número de subintervalos necesarios, considerando los puntos igualmente espaciados, cuando $[x_0, x_n] = [1, 100]$.

Si dividimos el intervalo $[1, 100]$ en n intervalos iguales de longitud h tendremos que
$$h = \frac{100 - 1}{n} = \frac{99}{n} \quad (2).$$
Los extremos de los intervalos serán
$$x_i = 1 + i\,h \quad i = 0, \ldots, n.$$
Y los intervalos serán de la forma
$$[x_i, x_{i+1}] \quad i = 0, \ldots, n-1.$$
Teniendo en cuenta (1) para cada uno de estos intervalo la cota de error será
$$|E(x)| < \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{4x_i^3}.$$
Como $h = x_{i+1} - x_i$ es la longitud de todos los intervalos
$$|E(x)| < \frac{h^2}{4x_i^3}.$$
Y por la fórmula (2)
$$|E(x)| < \frac{(99/n)^2}{4x_i^3}.$$

Por otra parte, dado que todos los x_i están en el intervalo $[1, 100]$ el menor valor que puede tomar x_i es 1 y podemos decir

$$|E(x)| < \frac{(99/n)^2}{4x_i^3} < \frac{(99/n)^2}{4(1)^2} = \frac{99^2}{4n^2}.$$

Si hacemos

$$\frac{99^2}{4n^2} < 10^{-1} \quad (3)$$

entonces

$$|E(x)| < 10^{-1}$$

que es lo que estamos buscando. Veamos cuantos intervalos necesitamos como mínimo para que se cumpla (3).

$$\frac{99^2}{4n^2} < 10^{-1} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{99^2}{(4)(10^{-1})} < n^2 \quad \Longleftrightarrow \quad \sqrt{\frac{99^2 10}{4}} < n \quad \Longleftrightarrow \quad 156.53 < n$$

y si dividimos el intervalo $[1, 100]$ en $n = 157$ subintervalos iguales y realizamos interpolación lineal en cada uno de ellos podemos garantizar que el error de interpolación $|E(x)| < 10^{-1}$.

2. Cuando una persona toma una medicina, la cantidad de medicina en el organismo desciende con el tiempo siguiendo una ley exponencial

$$Q(t) = a\, e^{-b\, t}$$

Si una dosis de 1000 mg de cierta medicina es absorbida en sangre por una persona y se toman muestras de sangre y se calcula la cantidad de medicina que permanece en la sangre

$t\ (hours)$	0	15	30
$Q\ (mg)$	1000	180	31

calcular los valores a y b utilizando el criterio de los mínimos cuadrados.

Empezaremos linealizando la función a ajustar. Se cumple que,

$$Q_k = ae^{-b\, t_k} \Longrightarrow \ln Q_k = \ln\left(a\, e^{-b\, t}\right) \Longrightarrow \ln Q_k = \ln a + \ln e^{-b\, t} \Longrightarrow \ln Q_k = \ln a + (-b\, t_k) \ln e \Longrightarrow$$

$$\ln Q_k = \ln a - b\, t_k$$

y si llamamos

$$y_k = \ln Q_k, \quad x_k = t_k, \quad a_0 = \ln a, \quad a_1 = -b$$

tenemos que

$$\ln Q_k = \ln a - b\, t_k \quad \Longrightarrow \quad y_k = a_0 + a_1 x_k$$

y el problema es ahora ajustar una recta de regresión mínimo cuadrática

$$P_1(x) = a_0 + a_1\, x$$

que se resuelve con el sistema

$$\begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{3} 1 & \sum_{k=1}^{3} x_k \\ \sum_{k=1}^{3} x_k & \sum_{k=1}^{3} x_k^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{3} y_k \\ \sum_{k=1}^{3} x_k y_k \end{pmatrix}$$

Si calculamos los elementos de este sistema

	$x_k = t_k$	Q_k	$y_k = \ln Q_k$	x_k^2	$x_k\, y_k$
	0	1000	6.908	0	0.
	15	180	5.193	225	77.89
	30	31	3.434	900	103.02
$\sum$	45		15.535	1125	180.91

tenemos que

$$\begin{array}{rcrcl} 3a_0 & + & 45a_1 & = & 15.535 \\ 45a_0 & + & 1125a_1 & = & 180.91 \end{array}$$

con lo que

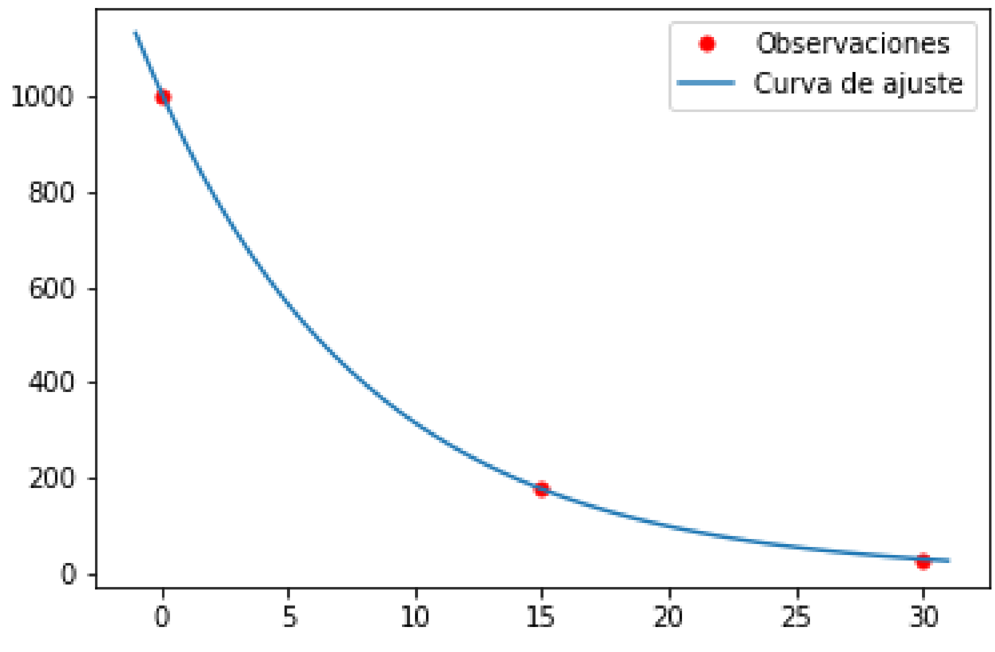
$$a_0 = 6.915 \quad a_1 = -0.116$$

y teniendo en cuenta que

$$a = e^{a_0} = 1007 \quad b = -a_1 = 0.116$$

y la curva de ajuste es

$$Q(t) = 1007\, e^{-0.116\, t}$$



3. Utilizando fórmulas de derivación numérica centradas, calcular la derivada primera y segunda de la función

$$f(x) = \sqrt{x}$$

en $x_0 = 1.1$ usando un paso $h = 0.1$

(a)

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} = \frac{f(1.1 + 0.1) - f(1.1 - 0.1)}{2(0.1)} =$$

$$= \frac{f(1.2) - f(1)}{0.2} = \frac{\sqrt{1.2} - \sqrt{1}}{0.2} = \frac{1.095 - 1}{0.2} = 0.477$$

(b)

$$f''(x_0) \approx \frac{f\left(x_0 + h\right) - 2\, f\left(x_0\right) + f\left(x_0 - h\right)}{h^2} = \frac{f\left(1.1 + 0.1\right) - 2\, f\left(1.1\right) + f\left(1.1 - 0.1\right)}{\left(0.1\right)^2} =$$

$$= \frac{f\left(1.2\right) - 2\, f\left(1.1\right) + f\left(1\right)}{(0.01)} = \frac{\sqrt{1.2} - 2\sqrt{1.1} + \sqrt{1}}{(0.01)} = \frac{1.095 - 2\left(1.049\right) + 1}{(0.01)} = -0.217$$

4. Calcular
$$\int_0^1 \cos(x^2)dx$$
usando la fórmula de cuadratura gaussiana con tres nodos:
$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \frac{5}{9} f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9} f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$$

Queremos hacer un cambio de variable que nos lleve del intervalo $[a,b]$ al intervalo donde está definida la fórmula de cuadratura gaussiana $[-1,1]$. Si hacemos un cambio de variable lineal de la forma
$$x = m\,t + n,$$
si $x = a$, entonces $t = -1$ y
$$a = -m + n.$$
Y si $x = b$, entonces $t = 1$ y
$$b = m + n.$$
La solución a este sistema es
$$m = \frac{b-a}{2} \qquad n = \frac{a+b}{2}.$$
Y por lo tanto, el cambio de variable es
$$x = \frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2} \qquad dx = \frac{b-a}{2}dt.$$
Y
$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2}\right)dt$$
Y utilizando la fórmula de cuadratura gaussiana de tres nodos, la aproximación será
$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2}\sum_{i=0}^{2}\omega_i\, f\left(\frac{b-a}{2}t_i + \frac{a+b}{2}\right)$$
siendo ω_i los pesos y t_i los nodos de la fórmula. En este caso, como $[a,b] = [0,1]$
$$\frac{b-a}{2} = 0.5 \qquad \frac{a+b}{2} = 0.5$$
y tenemos que
$$\int_0^1 f(x)\,dx = 0.5\int_{-1}^{1} f(0.5\,t + 0.5)\,dt \approx$$

$$\approx 0.5\left(\frac{5}{9}f\left(-0.5\sqrt{\frac{3}{5}}+0.5\right)+\frac{8}{9}f\left(0.5(0)+0.5\right)+\frac{5}{9}f\left(0.5\sqrt{\frac{3}{5}}+0.5\right)\right)=$$

$$=0.5\left(\frac{5}{9}f(0.1127)+\frac{8}{9}f(0.5)+\frac{5}{9}f(0.8873)\right)=$$

$$0.5\left(\frac{5}{9}\cos(0.1127^2)+\frac{8}{9}\cos(0.5^2)+\frac{5}{9}\cos(0.8873^2)\right)=0.9044$$

(Solución exacta $I_e = 0.9045$)