Computación Numérica

Primer Parcial B - Marzo 2014

Sea la ecuación:

$$\ln(1+x) + x^2 + 5x - 1 = 0$$

1. **Demostrar que en $[0,1]$ existe una única raíz.**

   Las condiciones (suficientes, no necesarias) que ha de cumplir $f(x) = \ln(1+x) + x^2 + 5x - 1$ en $[0,1]$ para que exista una única raíz en el intervalo son:
   a) f continua: f es continua porque es la suma de funciones continuas, el polinomio lo es siempre y $\ln(1+x)$ es continua en todo su dominio.
   b) f tiene distinto signo en los extremos del intervalo: $f(0) = -1$ y $f(1) = 5.7$
   c) $f' > 0$ o $f' < 0$ en $(0,1)$:

   $$f'(x) = 2x + 5 + \frac{1}{1+x} = \frac{2x^2 + 7x + 6}{1+x}.$$

   Como $1+x$ es positivo en $[0,1]$ hace falta estudiar el signo del numerador. Si calculamos las raíces del numerador y factorizamos:

   $$2x^2 + 7x + 6 = 2(x+2)(x+\frac{3}{2})$$

   Como $(x+2)$ es siempre positivo en $(0,1)$ y $(x+\frac{3}{2})$ también $2x^2 + 7x + 6 > 0$ en $(0,1)$. Y recordamos que el denominador también era positivo.
   Por lo tanto $f' > 0$ en $(0,1)$.

2. **¿Se puede calcular por el método de bisección partiendo de dicho intervalo?**
   Si porque se cumplen las condiciones necesarias, que son las condiciones a) y b) de la pregunta anterior.

3. **Aproximar la raíz haciendo tres iteraciones.**

k	*a*	*c*	*b*	*f(a)*	*f(c)*	*f(b)*	*cota de error*
0	0		1	-1		5.7	1-0=1
1	0	(a+b)/2=(0+1)/2=0.5	1	-1	2.15	5.7	0.5-0=0.5
2	0	(a+b)/2=(0+0.5)/2=0.25	0.5	-1	0.54	2.15	0.25-0=0.25
3	0	(a+b)/2=(0+0.25)/2=0.125	0.25	-1	-0.24	0.54	0.25-0.125=0.125

   Y podemos dar como raíz aproximada 0.125 (la raíz verdadera es $0.164201 \in [0.125, 0.25]$).

4. **Dar una cota del error cometido al calcular esta raíz.**

   La raíz está en el intervalo $[0.125, 0.25]$ por lo tanto la cota de error es $0.25 - 0.125 = 0.125$

5. **Si** $f(x) = \ln(1+x) + x^2 + 5x - 1$**, demostrar que la raíz de** $f(x) = 0$ **y de** $x = g(x)$ **en** $[0,1]$ **es la misma, siendo** $g(x) = \dfrac{1 - x^2 - \ln(1+x)}{5}$**.**

   $$f(x) = 0 \Rightarrow \ln(1+x) + x^2 + 5x - 1 = 0 \Rightarrow 5x = 1 - x^2 - \ln(1+x) \Rightarrow x = \frac{1 - x^2 - \ln(1+x)}{5}$$

   que si llamamos $g(x) = \dfrac{1 - x^2 - \ln(1+x)}{5}$ equivale a $x = g(x)$

6. **Hacer 4 iteraciones partiendo de** $x_0 = 0$**. ¿Cuántas cifras de la solución obtenida serán correctas? ¿Por qué?**

k	$x_{k+1} = g(x_k)$
0	$x_0 = 0$
1	$x_1 = g(x_0) = g(0) = 0.2$
2	$x_2 = g(x_1) = g(0.2) = 0.1555$
3	$x_3 = g(x_2) = g(0.1555) = 0.1663$
4	$x_1 = g(x_0) = g(0.1663) = 0.1637$

   Podemos suponer que las cifras 0.16 pertenecen a la solución exacta porque se repiten en las dos últimas iteraciones. (La raíz verdadera es 0.164201)

1. **Sea la función**

$$h(x) = x^2 - 5x + \frac{1}{x}$$

(a) **Demostrar que esta función tiene al menos un extremo en $[2,3]$.**

Para que el punto α será un extremo de h es necesario que $h'(\alpha) = 0$. Como

$$h'(x) = 2x - 5 - \frac{1}{x^2} = \frac{2x^3 - 5x^2 - 1}{x^2}$$

Y si tomamos $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 1$ entonces

$$h \quad \text{tiene un extremo en } [2,3] \Longleftrightarrow f \quad \text{tiene una raíz en } [2,3].$$

O lo que es lo mismo

$$h'(x) = 0 \quad \text{en } [2,3] \Longleftrightarrow f(x) = 0 \quad \text{en } [2,3].$$

Las condiciones (suficientes, no necesarias) que ha de cumplir f en $[2,3]$ para que exista al menos una raíz en el intervalo son:
a) f continua: f es continua porque es un polinomio.
b) f tiene distinto signo en los extremos del intervalo: $f(2) = -5$ y $f(3) = 8$

(b) **Aproximar el mínimo utilizando el Método de Bisección y realizar 3 iteraciones.**

k	a	c	b	$f(a)$	$f(c)$	$f(b)$	*cota de error*
0	2		3	-5		8	3-2=1
1	2	(a+b)/2=(2+3)/2=2.5	3	-5	-1	8	3-2.5=0.5
2	2.5	(a+b)/2=(2.5+3)/2=2.75	3	-1	2.78	8	3-2.75=0.25
3	2.5	(a+b)/2=(2.5+2.75)/2=2.625	2.75	-1	0.72	2.78	2.625-2.5=0.125

Y podemos dar como raíz aproximada 2.625 (la solución verdadera es $2.57539 \in [2.5, 2.625]$)

(c) **Dar una cota del error.**

La raíz está en el intervalo $[2.5, 2.625]$ por lo tanto la cota de error es $0.2625 - 2.5 = 0.125$.

2. **Aproximar utilizando el Método de Newton $r = \sqrt[5]{5}$. Utilizar como punto inicial $x_0 = 1$ y realizar 3 iteraciones.**

   Queremos resolver la ecuación

$$x = \sqrt[5]{5} \Longleftrightarrow x^5 = 5 \Longleftrightarrow x^5 - 5 = 0.$$

   Y la ecuación a resolver es $f(x) = 0$ donde $f(x) = x^5 - 5$.
   Para iterar usaremos

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k^5 - 5}{5x_k^4} = \frac{5x_k^5 - x_k^5 + 5}{5x_k^4} = \frac{4x_k^5 + 5}{5x_k^4}$$

k	$x_{k+1} = \dfrac{4x_k^5 + 5}{5x_k^4}$
0	$x_0 = 1$
1	$x_1 = \dfrac{4(1)^5 + 5}{5(1)^4} = 1.8$
2	$x_2 = \dfrac{4(1.8)^5 + 5}{5(1.8)^4} = 1.5352$
3	$x_3 = \dfrac{4(1.5352)^5 + 5}{5(1.5352)^4} = 1.4082$

   (La solución exacta es 1.37973)