Computación Numérica

Segundo Parcial - Mayo 2021

1. Dada la tabla

x_k	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$y_k = \ln(1+x_k^2)$	0,1484	0,2231	0,3075	0,3988	0,4947

   a) Si $f(x) = \ln(1+x^2)$, calcular la derivada en $x_0 = 0{,}6$ con $h = 0{,}1$ usando las fórmulas progresiva y regresiva de orden 1 y la fórmula centrada de orden 2.

   b) Dada la integral

$$\int_{0{,}4}^{0{,}8} f(x)\,dx$$

   con $f(x) = \ln(1+x^2)$, aproximarla usando 5 nodos y las fórmulas compuestas de los Trapecios y Simpson.

(a)
La fórmula aproximada de derivación *progresiva de orden uno* es

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Y para $x_0 = 0{,}6$ con $h = 0{,}1$

$$f'(0) \approx \frac{f(0{,}6+0{,}1) - f(0{,}6)}{h} = \frac{f(0{,}7) - f(0{,}6)}{h} = \frac{0{,}3988 - 0{,}3075}{0{,}1} = \boxed{0.9130}$$

La fórmula aproximada de derivación *regresiva de orden uno* es

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0) - f(x_0-h)}{h}$$

Y para $x_0 = 0{,}6$ con $h = 0{,}1$

$$f'(0{,}6) \approx \frac{f(0{,}6) - f(0{,}6-0{,}1)}{0{,}1} = \frac{f(0{,}6) - f(0{,}5)}{0{,}1} = \frac{0{,}3075 - 0{,}2231}{0{,}1} = \boxed{0.8440}$$

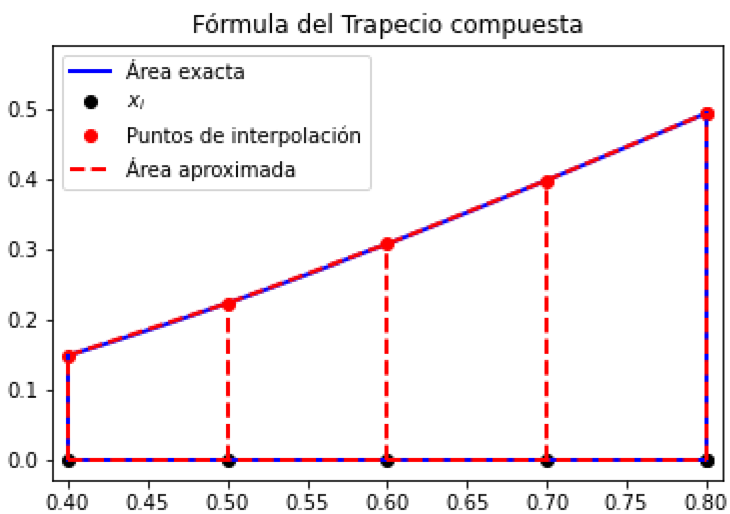
La fórmula aproximada de derivación *centrada de orden dos* es

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}$$

Y para $x_0 = 0{,}6$ con $h = 0{,}1$

$$f'(0) \approx \frac{f(0{,}6+0{,}1) - f(0{,}6-0{,}1)}{2(0{,}1)} = \frac{f(0{,}7) - f(0{,}5)}{0{,}2} = \frac{0{,}3988 - 0{,}2231}{0{,}2} = \boxed{0.8785}$$

(b)



Para tener 5 nodos con la *Regla del Trapecio Compuesta* hemos de dividir el intervalo en 4 subintervalos, es decir $n = 4$ y entoces, si $a = 0{,}4$ y $b = 0{,}8$, se tiene que

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{0{,}8 - 0{,}4}{4} = \frac{0{,}4}{4} = 0{,}1$$

y los nodos serían

$$\begin{aligned} x_0 &= a = 0{,}4 \\ x_1 &= x_0 + h = 0{,}4 + 0{,}1 = 0{,}5 \\ x_2 &= x_1 + h = 0{,}5 + 0{,}1 = 0{,}6 \\ x_3 &= x_2 + h = 0{,}6 + 0{,}1 = 0{,}7 \\ x_4 &= x_3 + h = 0{,}7 + 0{,}1 = 0{,}8 = b \end{aligned}$$

entonces

$$\int_a^b f dx =$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_3} f(x)dx + \int_{x_3}^{x_4} f(x)dx \approx$$

$$\approx \frac{h}{2}(f(x_0)+f(x_1))+\frac{h}{2}(f(x_1)+f(x_2))+\frac{h}{2}(f(x_2)+f(x_3))+\frac{h}{2}(f(x_3)+f(x_4)) =$$

$$= \frac{h}{2}\left(f(x_0) + 2(f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)) + f(x_4)\right) =$$

$$= \frac{0{,}1}{2}\left(f(0{,}4) + 2(f(0{,}5) + f(0{,}6) + f(0{,}7)) + f(0{,}8)\right) =$$

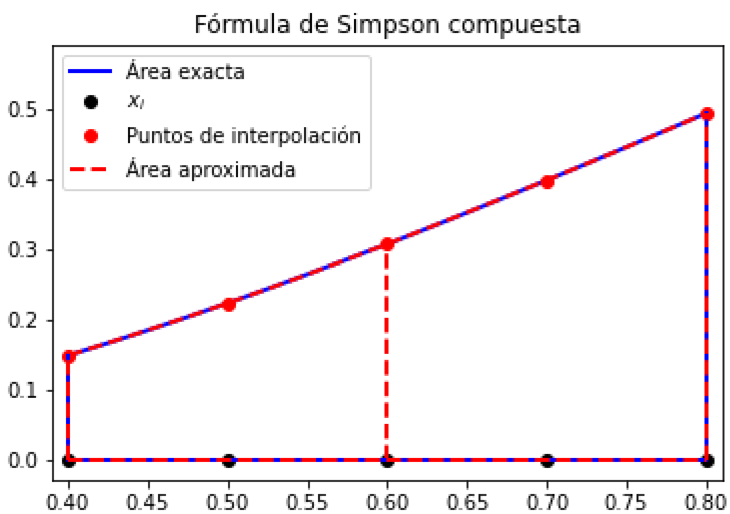
$$= 0{,}05\,(0{,}1484 + 2(0{,}2231 + 0{,}3075 + 0{,}3988) + 0{,}4947) = \boxed{0.1251}$$

La fórmula de Simpson simple es, por ejemplo, para el intervalo $[x_0, x_2]$ con punto medio x_1 y si la longitud de los intervalos $[x_0, x_1]$ y $[x_1, x_2]$ es h

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \frac{x_2 - x_0}{6}\left(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right)$$

entonces

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \frac{2h}{6}\left(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right)$$



Para tener 5 nodos con la *fórmula de Simpson Compuesta* hemos de dividir el intervalo en 4 subintervalos, es decir $n = 4$ y entoces, si $a = 0{,}4$ y $b = 0{,}8$, se tiene que

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{0{,}8 - 0{,}4}{4} = \frac{0{,}4}{4} = 0{,}1$$

y los nodos serían

$$\begin{array}{rcl} x_0 & = & a = 0{,}4 \\ x_1 & = & x_0 + h = 0{,}4 + 0{,}1 = 0{,}5 \\ x_2 & = & x_1 + h = 0{,}5 + 0{,}1 = 0{,}6 \\ x_3 & = & x_2 + h = 0{,}6 + 0{,}1 = 0{,}7 \\ x_4 & = & x_3 + h = 0{,}7 + 0{,}1 = 0{,}8 = b \end{array}$$

entonces

$$\int_a^b f(x)dx =$$

$$= \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx \approx$$

$$\approx \frac{h}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)) + \frac{h}{3}(f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)) =$$

$$= \frac{h}{3}\left(f(x_0) + 4(f(x_1) + f(x_3)) + 2f(x_2) + f(x_4)\right) =$$

$$= \frac{h}{3}\left(f(0{,}4) + 4(f(0{,}5) + f(0{,}7)) + 2f(0{,}6) + f(0{,}8)\right) =$$

$$= \frac{0{,}1}{3}\left(0{,}1484 + 4(0{,}2231 + 0{,}3988) + 2(0{,}3075) + 0{,}4947\right) = \boxed{0.1249}$$

2. Sea el sistema $Ax = b$ con las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

a) ¿Es A diagonal dominante por filas?

b) Calcular la norma infinito, la norma uno de la matriz de iteración de Jacobi B_J.

c) Calcular los autovalores de B_J..

d) A partir de cada uno de los apartados anteriores ¿qué podemos concluir acerca de la convergencia del método de Jacobi?

e) Realizar 2 iteraciones por Jacobi comenzando con $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0, 0)^T$.

(a) ¿Es A diagonal dominante por filas?

Se dice que una matriz A de n filas y n columnas es diagonal dominante por filas si

$$\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| < |a_{ii}| \quad i = 1, \ldots, n$$

Para nuestra matriz A

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{2} & 0 & 1 \\ 1 & \boxed{2} & 1 \\ 1 & 0 & \boxed{2} \end{pmatrix} \begin{array}{l} |0| + |1| < |2| \\ |1| + |1| \not< |2| \\ |1| + |0| < |2| \end{array}$$

Y $\boxed{\text{no es diagonal dominante por filas}}$ puesto que para la segunda fila no verifica la desigualdad estricta.

(b) Calcular la norma infinito, la norma uno de B_J.

Se tiene que $B_J = -D^{-1}(L + U)$. O también:
1. Dividimos cada fila por el correspondiente elemento de la diagonal.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Cambiamos todos los elementos de signo.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & -1 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

3. Ponemos ceros en la diagonal principal.

$$B_J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Norma infinito. Si A es una matriz $m \times n$ su norma infinito viene dada por:

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

Y la norma infinito de B_J viene dada por

$$B_J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 0+0+1/2 = 1/2 \\ 1/2+0+1/2 = 1 \\ 1/2+0+0 = 1/2 \end{matrix}$$

Por lo tanto

$$||B_J||_\infty = \text{Max}\,(1/2, 1, 1/2) = \boxed{1}$$

Norma uno. Si A es una matriz $m \times n$ su norma uno viene dada por:

$$B_J^T = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 0+1/2+1/2 = 1 \\ 0+0+0 = 0 \\ 1/2+1/2+0 = 1 \end{matrix}$$

Por lo tanto

$$||B_J||_1 = \text{Max}\,(1, 0, 1) = \boxed{1}$$

(c) Calcular los autovalores de B_J sabiendo que son todos enteros.

Autovalores. Calculamos los autovalores de B_J calculando las raíces de $|B_J - \lambda I| = 0$

$$\begin{vmatrix} 0-\lambda & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 0-\lambda & -1/2 \\ -1/2 & 0 & 0-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -\lambda \begin{vmatrix} 0-\lambda & -1/2 \\ 0 & 0-\lambda \end{vmatrix} - (0) \begin{vmatrix} -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 0-\lambda \end{vmatrix} + (-1/2) \begin{vmatrix} -1/2 & 0-\lambda \\ -1/2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -\lambda\left(\lambda^2\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{\lambda}{2}\right) = \frac{\lambda}{4} - \lambda^3 = \lambda\left(\frac{1}{4} - \lambda^2\right)$$

con lo que

$$\lambda = 0 \qquad \frac{1}{4} - \lambda^2 = 0$$

Y los autovalores son

$$\lambda = 0 \quad \text{o} \quad \lambda = \pm\sqrt{\frac{1}{4}} = \pm\frac{1}{2} = \pm 0{,}5$$

es decir

$$\boxed{\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = 0{,}5 \quad \lambda_3 = -0{,}5}$$

(d) A partir de cada uno de los apartados anteriores ¿qué podemos concluir acerca de la convergencia del método de Jacobi?

1. Es condición suficiente para la convergencia del método de Jacobi que la matriz de coeficientes A sea diagonal dominante por filas: Como A no es diagonal dominante, no podemos concluir nada.

2. Es condición suficiente para la convergencia del método de Jacobi que alguna norma de la matriz de iteración B_J sea menor que 1. Como $||B_J||_\infty \not< 1$ no podemos concluir nada. Como $||B_J||_1 \not< 1$ no podemos concluir nada.

3. Es condición necesaria y suficiente para la convergencia del método de Jacobi que todos los autovalores de la matriz de iteración B_J en valor absoluto sean menores que 1. Como todos los autovalores de B_J son menores que uno en valor absoluto podemos concluir que el Método de Jacobi será convergente para cualquier valor inicial.

(e) Realizar 2 iteraciones por Jacobi comenzando con $\mathbf{x}^{(0)} = (0,0,0)^T$.

El sistema es $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Si escribimos las ecuaciones

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & & & + & z & = & 4 \\ x & + & 2y & + & z & = & 2 \\ x & & & + & 2z & = & 4 \end{array}$$

En la primera ecuación despejamos la primera incógnita, x, en la segunda, la segunda incógnita, y, y finalmente, z.

$$\begin{aligned} x &= \frac{4-z}{2} \\ y &= \frac{2-x-z}{2} \\ z &= \frac{4-x}{2} \end{aligned}$$

Realizamos las iteraciones asumiendo que todos los valores a la derecha son los valores obtenidos en la iteración anterior

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= \frac{4-z^{(0)}}{2} \\ y^{(1)} &= \frac{2-x^{(0)}-z^{(0)}}{2} \\ z^{(1)} &= \frac{4-x^{(0)}}{2} \end{aligned}$$

Realizamos una iteración, tomando como valor inicial, el vector nulo

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= \frac{4-0}{2} = 2 \\ y^{(1)} &= \frac{2-0-0}{2} = 1 \\ z^{(1)} &= \frac{4-0}{2} = 2 \end{aligned}$$

Segunda iteración:

$$\begin{aligned} x^{(2)} &= \frac{4-z^{(1)}}{2} = \frac{4-2}{2} = 1 \\ y^{(2)} &= \frac{2-x^{(1)}-z^{(1)}}{2} = \frac{2-2-2}{2} = -1 \\ z^{(2)} &= \frac{4-x^{(1)}}{2} = \frac{4-2}{2} = 1 \end{aligned}$$

3. Aproxima el mínimo de la función

$$f(x,y) = (x-1)^2 + (y-1)^2 + x\,y$$

a) Haciendo una iteración con el método de Newton con $\mathbf{x}^{(0)} = (0,1)^T$.

b) Haciendo dos iteraciones con el método del gradiente con tasa de aprendizaje 0.2 con $\mathbf{x}^{(0)} = (0,1)^T$.

(a) Método de Newton.
Como nuestra función es de dos variables, realizaremos una iteración por el método de Newton usando la fórmula

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} - H^{-1}\left(x_0, y_0\right) \cdot \nabla f\left(x_0, y_0\right)$$

Si consideramos que

$$H\left(x_0, y_0\right) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \nabla f\left(x_0, y_0\right) \qquad (1)$$

entonces

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = H^{-1}\left(x_0, y_0\right) \cdot \nabla f\left(x_0, y_0\right)$$

y escribiremos

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \qquad (2)$$

donde $\left(c_1, c_2\right)^T$ es la solución del sistema (1). En general, tiene más sentido resolver el sistema (1) que calcular la matriz inversa de H y luego multiplicarla por el gradiente, porque calcular la inversa de una matriz equivale a resolver n sistemas (aunque con la misma matriz de coeficientes) y de esta forma estamos resolviendo solo un sistema.

La función a minimizar es

$$f(x,y) = (x-1)^2 + (y-1)^2 + x\,y$$

y empezaremos con el punto inicial $(0,1)$. Tenemos que

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right) = (2(x-1)+y, 2(y-1)+x)$$

y

$$\nabla f\left(x_0, y_0\right) = \nabla f\left(0,1\right) = (2(0-1)+1, 2(1-1)+0) = (-1,0)\,.$$

Además

$$H = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\,\partial x} & \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\,\partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\,\partial x} & \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\,\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

y

$$H(x_0, y_0) = H(0,1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

El sistema (1) es

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_2 \leftarrow e_2 - \tfrac{1}{2} e_1$$

y resolviéndolo por Gauss

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$c_2 = \frac{1}{3} \qquad c_1 = \frac{-1 - c_2}{2} = \frac{-1 - 1/3}{2} = \frac{-4/3}{2} = -\frac{2}{3}$$

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto (2) es

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}.$$

Hemos mejorado porque $f(x_0, y_0) = f(0,1) = 1$ y $f(x_1, y_1) = f(2/3, 2/3) = 2/3$ que es menor. En este caso, hemos llegado al mínimo con una sola iteración.

(b) Gradiente con tasa de aprendizaje 0.2

En cada paso usamos la fórmula

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} - \eta \nabla f_{(x_0, y_0)}$$

Como

$$\nabla f = (f_x, f_y) = (2(x-1) + y, 2(y-1) + x)$$

tenemos

$$f(x_0, y_0) = f(0,1) = (0-1)^2 + (1-1)^2 + (0)(1) = 1$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} - \eta \begin{pmatrix} 2(x_0 - 1) + y_0 \\ 2(y_0 - 1) + x_0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 0{,}2 \begin{pmatrix} 2(0 - 1) + 1 \\ 2(1 - 1) + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 0{,}2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f(x_1, y_1) = f(0{,}2, 1) = (0{,}2 - 1)^2 + (1 - 1)^2 + (0{,}2)\,(1) = 0{,}84$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} - \eta \begin{pmatrix} 2(x_1 - 1) + y_1 \\ 2(y_1 - 1) + x_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}2 \\ 1 \end{pmatrix} - 0{,}2 \begin{pmatrix} 2(0{,}2 - 1) + 1 \\ 2(1 - 1) + 0{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}2 \\ 1 \end{pmatrix} - 0{,}2 \begin{pmatrix} -0{,}6 \\ 0{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}32 \\ 0{,}96 \end{pmatrix}$$

$$f(x_2, y_2) = f(0{,}32, 0{,}96) = (0{,}32 - 1)^2 + (0{,}96 - 1)^2 + (0{,}32)\,(0{,}96) = 0{,}77$$