Computación Numérica

Primer Parcial B - Marzo 2016

1. La función $f(x) = xe^{-x}$ tiene una única raíz $\alpha = 0$. Demostrar que para cualquier $x_0 > 1$ las iteraciones de Newton se alejan de la raíz α.

La función f tiene por derivada

$$f'(x) = e^{-x} + x\,e^{-x}(-1) = (1-x)e^{-x}.$$

Y la primera iteración definida por el método de Newton será

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_0 - \frac{x_0\,e^{-x_0}}{(1-x_0)\;e^{-x_0}} = \frac{x_0\,(1-x_0) - x_0}{1-x_0} = \frac{x_0^2}{x_0-1}.$$

es decir

$$x_1 = x_0 \frac{x_0}{x_0-1}.$$

Si $x_0 > 1$ tanto el numerador como el denominador de la fracción

$$\frac{x_0}{x_0-1}$$

son positivos y además el numerador es mayor que el numerador, por lo que

$$\frac{x_0}{x_0-1} > 1$$

y podemos escribir

$$x_1 = x_0 \frac{x_0}{x_0-1} > x_0 \times 1 = x_0.$$

Es decir, $x_1 > x_0$. De forma análoga demostraríamos que $x_2 > x_1$ y así sucesivamente con lo que $x_{k+1} > x_k$ para todo $k \geq 0$ y la sucesión es creciente. Como $x_0 > 1$ nos alejamos cada vez más de la raíz $\alpha = 0$.

2. Sea la ecuación

$$f(x) = x^3 - 5 + \ln(1 + x^2) = 0$$

(a) Demostrar que en $[1, 2.5]$ existe una única raíz.

(b) Partiendo del intervalo del apartado anterior, aproximar la raíz por bisección haciendo tres iteraciones.

(c) Dar una cota del error cometido al calcular esta raíz.

(a) Las condiciones (suficientes, no necesarias) que ha de cumplir f en $[1, 2.5]$ para que exista una única raíz en el intervalo son:
1. f continua: f es continua porque es la suma de un logaritmo compuesto con un polinomio y un polinomio.
2. f tiene distinto signo en los extremos del intervalo: $f(1) = -3.3$ y $f(2.5) = 12.6$
3. $f' > 0$ o $f' < 0$ en $(1, 2.5)$:

$$f'(t) = 3x^2 + \frac{2x}{1 + x^2} = \frac{3x^4 + 3x^2 + 2x}{1 + x^2}$$

y tanto el numerador como el denominador son positivos para cualquier valor de $x \in (1, 2.5)$ y por lo tanto $f' > 0$ en $(1, 2.5)$.

(c)

k	a	c	b	$f(a)$	$f(c)$	$f(b)$	*cota de error*
0	1	$(a+b)/2 = (1+2.5)/2 = 1.75$	2.5	-3.3	1.76	12.6	$2.5 - 1 = 1.5$
1	1	$(a+b)/2 = (1+1.75)/2 = 1.375$	1.75	-3.3	-1.33	1.76	$1.75 - 1 = 0.75$
2	1.375	$(a+b)/2 = (1.375+1.75)/2 = 1.5625$	1.75	-1.33	0.05	1.76	$0.5 - 0.25 = 0.25$
3	1.375		1.5625	-1.33		1.76	$1.5625 - 1.375 = 0.1875$

Y podemos dar como raíz aproximada 1.5625 (la solución verdadera es $1.55634 \in [1.375, 1.5625]$)

(c) La raíz está en el intervalo $[1.375, 1.5625]$ por lo tanto la cota de error es $1.5625 - 1.375 = 0.1875$.

(La raíz es $\alpha = 1.55634$)

3. Demostrar que si tenemos la ecuación del ejercicio anterior y consideramos sus raíces en el intervalo $[1, 2]$:

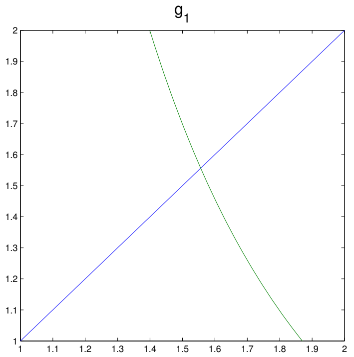
(a) La ecuación $f(x) = 0$ tiene la misma raíz que $g_i(x) = x$ con $i = 1, 2$ siendo

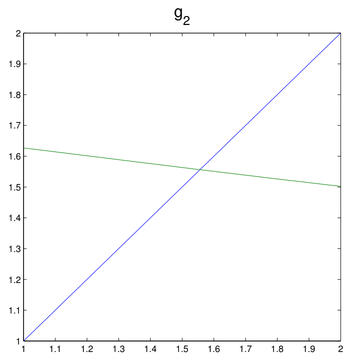
$$g_1(x) = \frac{5 - \ln(1 + x^2)}{x^2} \qquad g_2(x) = \sqrt[3]{5 - \ln(1 + x^2)}$$

(b) Enunciar las condiciones del teorema de la aplicación contractiva.

(c) Utilizándolo y teniendo en cuenta las gráficas, escoger, una de las dos funciones para aproximar la solución por el método de iteración de punto fijo comenzando en $x_0 = 1$.

(d) Realizar dos iteraciones con la función escogida.





(a) Queremos demostrar que $f(x) = 0 \Longleftrightarrow g_i(x) = x$. Para la primera función de iteración

$$g_1(x) = x \Longleftrightarrow \frac{5 - \ln(1 + x^2)}{x^2} = x \Longleftrightarrow 5 - \ln(1 + x^2) = x^3 \Longleftrightarrow x^3 - 5 + \ln(1 + x^2) = 0 \Longleftrightarrow f(x) = 0.$$

Y para la segunda

$$g_2(x) = x \Longleftrightarrow \sqrt[3]{5 - \ln(1 + x^2)} = x \Longleftrightarrow 5 - \ln(1 + x^2) = x^3 \Longleftrightarrow x^3 - 5 + \ln(1 + x^2) = 0 \Longleftrightarrow f(x) = 0.$$

(b) Sea g una función definida en el intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ y $x_0 \in [a, b]$ una aproximación inicial de la iteración de punto fijo dada por $x_{k+1} = g(x_k)$, con $k \geq 0$.

1. $g(x) \in [a, b]$ para todo $x \in [a, b]$,
2. g es diferenciable en $[a, b]$ y existe una constante $k < 1$ tal que $|g'(x)| \leq k$ para todo $x \in [a, b]$.

(c)
La función g_1 no cumple las condiciones: no cumple la condición 1 porque la gráfica de g_1 no está, en el intervalo $[1, 2]$ totalmente contenida entre las rectas $y = 1$ y $y = 2$. Y no cumple la condición 2 porque la gráfica tiene una pendiente mayor en valor absoluto que la recta $y = -x$ que tiene pendiente menos uno.

La función g_2 sí cumple las condiciones: cumple la condición 1 porque la gráfica de g_2 está, en el intervalo $[1, 2]$ totalmente contenida entre las rectas $y = 1$ y $y = 2$. Y cumple la condición 2 porque la gráfica tiene una pendiente menor en valor absoluto que la recta $y = -x$ que tiene pendiente menos uno.

Por lo tanto escogeríamos la función g_2 para aproximar la solución por el método de iteración de punto fijo.

(d)
$x_1 = g_2(x_0) = \sqrt[3]{5 - \ln(1 + x_0^2)} = \sqrt[3]{5 - \ln(1 + 1)} = 1.627$
$x_2 = g_2(x_1) = \sqrt[3]{5 - \ln(1 + x_1^2)} = \sqrt[3]{5 - \ln(1 + 1.627)} = 1.54752$
(El punto fijo es $\alpha = 1.55634$)

Computación Numérica

Primer Parcial B - Marzo 2016

1. La función $f(x) = xe^{-x}$ tiene una única raíz $\alpha = 0$. Demostrar que para cualquier $x_0 > 1$ las iteraciones de Newton se alejan de la raíz α.

La función f tiene por derivada

$$f'(x) = e^{-x} + x\,e^{-x}(-1) = (1-x)e^{-x}.$$

Y la primera iteración definida por el método de Newton será

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_0 - \frac{x_0\,e^{-x_0}}{(1-x_0)\;e^{-x_0}} = \frac{x_0\,(1-x_0) - x_0}{1-x_0} = \frac{x_0^2}{x_0-1}.$$

es decir

$$x_1 = x_0 \frac{x_0}{x_0-1}.$$

Si $x_0 > 1$ tanto el numerador como el denominador de la fracción

$$\frac{x_0}{x_0-1}$$

son positivos y además el numerador es mayor que el numerador, por lo que

$$\frac{x_0}{x_0-1} > 1$$

y podemos escribir

$$x_1 = x_0 \frac{x_0}{x_0-1} > x_0 \times 1 = x_0.$$

Es decir, $x_1 > x_0$. De forma análoga demostraríamos que $x_2 > x_1$ y así sucesivamente con lo que $x_{k+1} > x_k$ para todo $k \geq 0$ y la sucesión es creciente. Como $x_0 > 1$ nos alejamos cada vez más de la raíz $\alpha = 0$.

2. Sea la función

$$h(t) = \left(t^3 + t - 1\right) e^{-t}.$$

(a) Demostrar que esta función tiene un único extremo en $[2, 3]$.

(b) Aproximar el extremo utilizando el método de Newton. Utilizar como punto inicial $x_0 = 3$ y realizar 2 iteraciones.

(a) Para que el punto α será un extremo de h es necesario que $h'(\alpha) = 0$. Como

$$h'(t) = e^{-t}\left(1 + 3t^2\right) - e^{-t}\left(t^3 + t - 1\right) = -e^{-t}\left(t^3 - 3t^2 + t - 2\right)$$

Como $e^{-t} > 0$, si tomamos $f(x) = t^3 - 3t^2 + t - 2$ entonces

$$h \quad \text{tiene un extremo en } [2,3] \Longleftrightarrow f \quad \text{tiene una raíz en } [2,3].$$

O lo que es lo mismo

$$h'(t) = 0 \quad \text{en } [2,3] \Longleftrightarrow f(t) = 0 \quad \text{en } [2,3].$$

Las condiciones (suficientes, no necesarias) que ha de cumplir f en $[2, 3]$ para que exista una única raíz en el intervalo son:

1. f continua: f es continua porque es un polinomio.
2. f tiene distinto signo en los extremos del intervalo: $f(2) = -4$ y $f(3) = 1$
3. f es estrictamente creciente $f' > 0$ o decreciente $f' < 0$ en $(2, 3)$:

$$f'(t) = 3t^2 - 6t + 1.$$

Calculamos las raíces de este polinomio de segundo grado

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{6 \pm \sqrt{6^2 - 4(3)(1)}}{2(3)} \qquad x_1 = 0.18 \quad x_2 = 1.81$$

Si factorizamos:

$$f'(t) = 3t^2 - 6t + 1 = 3(x - x_1)(x - x_2) = 3(x - 0.18)(x - 1.81) > 0$$

porque los tres factores son siempre positivos para $x \in (2, 3)$.

(b) La sucesión se define

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \qquad x_0 = 3$$

o lo que es lo mismo

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^3 - 3x_k^2 + x_k - 2}{3x_k^2 - 6x_k + 1} \qquad x_0 = 3.$$

Por lo tanto

$$x_1 = x_0 - \frac{x_0^3 - 3x_0^2 + x_0 - 2}{3x_0^2 - 6x_0 + 1} = 3 - \frac{3^3 - 3(3^2) + 3 - 1}{3(3^2) - 6(3) + 1} = 3 - \frac{1}{10} = 2.9$$

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1^3 - 3x_1^2 + x_1 - 2}{3x_1^2 - 6x_1 + 1} = 2.9 - \frac{2.9^3 - 3(2.9^2) + 2.9 - 1}{3(2.9^2) - 6(2.9) + 1} = 2.8933$$

(La raíz es $\alpha = 2.89329$)

3. $\boxed{\text{Aproximar utilizando el método de la secante } r = \sqrt[4]{3}\text{. Utilizar como puntos iniciales } x_0 = 1 \text{ y } x_1 = 2\text{. Realizar 2 iteraciones. Si } r = 1.3161\text{, calcular el error absoluto y relativo de la aproximación.}}$

Si tenemos $x = \sqrt[4]{3} \Rightarrow x^4 = 3 \Rightarrow x^4 - 3 = 0$ y nuestra función puede ser $f(x) = x^4 - 3$.
Si iteramos usando el método de la Secante usaremos la fórmula

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

Por lo tanto

$$x_{k+1} = x_k - \frac{(x_k^4 - 3)(x_k - x_{k-1})}{(x_k^4 - 3) - (x_{k-1}^4 - 3)}$$

o lo que es lo mismo

$$x_{k+1} = x_k - \frac{(x_k^4 - 3)(x_k - x_{k-1})}{(x_k^4 - x_{k-1}^4)}$$

Si $x_0 = 1$ y $x_1 = 2$

$$x_2 = 2 - \frac{(2^4 - 3)(2 - 1)}{(2^4 - 1^4)} = 2 - \frac{(16 - 3)(1)}{(16 - 1)} = 2 - \frac{13}{15}$$

Si $x_1 = 2$ y $x_2 = 1.1333$

$$x_3 = 1.133 - \frac{(1.133^4 - 3)(1.133 - 2)}{(1.133^4 - 2^4)} = 1.2149$$

Los errores absoluto y relativo son

$$e_a = |x - x^*| = |1.3161 - 1.2149| = 0.1012 \qquad e_r = \frac{e_a}{\sqrt[4]{3}} = \frac{0.1012}{1.3161} = 0.08$$