Computación Numérica

Primer Parcial A - Mayo 2017

Una máquina almacena números en punto flotante en base 2 en 15 bits, siguiendo un criterio similar al de la norma IEEE 754. El primer bit se usa para el signo del número, los nueve siguientes para el exponente sesgado y los últimos cinco bits para la mantisa.

1. Calcular los exponentes máximo y mínimo.
2. Calcular el valor mínimo y máximo desnormalizados. Expresarlos en binario y en decimal. ¿Qué precisión tendría cada uno?
3. ¿Cuántos números positivos desnormalizados se pueden representar con este formato? Razonarlo.
4. Calcular el número siguiente en base 10.

signo	exponente	mantisa
1	100000001	00100

5. Calcular el número 206 en este formato. Redondear al par más cercano. ¿Qué error cometemos al redondearlo (dar el resultado en decimal)?

1. El número de exponentes que podemos representar con m bits sería

$$2^m = 2^9 = 512$$

Si no tenemos en cuenta el signo van desde

$$[0, 1, \ldots, 510, 511]$$

y teniendo en cuenta que el primero y el último están reservados

$$[R, 1, \ldots, 510, R]$$

Pero los enteros representados serían los anteriores menos el $sesgo = 2^{m-1} - 1 = 2^{9-1} - 1 = 2^8 - 1 = 255$, es decir, el rango de números a representar sería

$$[R, 1-255, \ldots, 510-255, R] = [R, -254, \ldots, 255, R]$$

por lo tanto

Solución:

$$\boxed{e_{min} = -254 \text{ y } e_{max} = 255}$$

2. Los números desnormalizados tienen 0 como bit escondido y el exponente es el mínimo de los normalizados. Sabemos que un número es desnormalizado porque todos los bits de su exponente son 0.

   El valor mínimo tiene mantisa mínima y se representa en binario

signo	exponente	mantisa
0	000000000	00001

   que se corresponde con

$$0.00001 \times 2^{-254} \longrightarrow 2^{-5} \times 2^{-254} = 2^{-5-254} = 2^{-259} \approx 1.08 \times 10^{-78}$$

   Solución:

$$\boxed{\text{Mínimo número desnormalizado: } 1.08 \times 10^{-78}}$$

   El valor máximo tiene mantisa máxima. Se representa en binario

signo	exponente	mantisa
0	000000000	11111

   que se corresponde con

$$0.1111 \times 2^{-254} \longrightarrow \left(2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + 2^{-4} + 2^{-5}\right) \times 2^{-254} \approx 3.35 \times 10^{-77}$$

   Solución:

$$\boxed{\text{Máximo número desnormalizado: } 3.35 \times 10^{-77}}$$

   La precisión del numero mínimo es 1 porque los ceros a la izquierda no cuentan a efecto de precisión y la del número máximo es 5

   Solución:

$$\boxed{p_{min} = 1 \text{ y } p_{max} = 5}$$

3. Como exponente es siempre -254 el número de números desnormalizados representables es el número de mantisas posibles. Cómo sólo podemos variar los elementos de 5 bits (el otro sería el bit escondido que es siempre 0) serán en total $2^5 = 32$ mantisas distintas. Y si no consideramos el 0 un número desnormalizado, serán $32 - 1 = 31$ mantisas distintas y por lo tanto

   Solución:

$$\boxed{\text{31 números desnormalizados}}$$

4. El número es

`signo`	`exponente`	`mantisa`
1	100000001	00100

SIGNO: El número es negativo porque el bit del signo es 1.

EXPONENTE: Vimos en el apartado (a) que el $sesgo = 255$.

$$e = (100000001)_2 \longrightarrow 2^8 + 2^0 = 257,$$

y el exponente es $257 - sesgo = 257 - 255 = 2$.

MANTISA: Teniendo en cuenta el bit escondido

$$\mathbf{1}.00100 \times 2^2 \longrightarrow \left(1 + 2^{-3}\right) \times 2^2 = 4.5$$

Y teniendo en cuenta el signo

Solución:

$$\boxed{-4.5}$$

5. Calcular el número 204 en este formato.

MANTISA:

$$\begin{array}{lrrrrrrrr} \text{Cociente} & 206 & 103 & 51 & 25 & 12 & 6 & 3 & 1 \\ \text{Resto} & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & \swarrow \end{array}$$

Por lo que tenemos

$$(206)_{10} = (11001110)_2 \longrightarrow 1.1001110 \times 2^7$$

Redondeando al par más cercano la mantisa, como está equidistante de dos números representables, que son 1.10011 o $1.10011 + 0.00001 = 1.10100$, redonedea al que acaba en cero. Por lo tanto la matisa sería 1.10100 siendo el primero el bit escondido.

EXPONENTE: Como $sesgo = 255$ representaremos

$$7 + 255 = 262$$

$$\begin{array}{lrrrrrrrrr} \text{Cociente} & 262 & 131 & 65 & 32 & 16 & 8 & 4 & 2 & 1 \\ \text{Resto} & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \swarrow \end{array}$$

y el exponente en binario es $(100000110)_2$ y la representación completa será

`signo`	`exponente`	`mantisa`
0	100000110	10100

Hemos representado 206 con

$$1.10100 \times 2^7$$

por lo que el error es

$$\left|206 - (1 + 2^{-1} + 2^{-3}) \times 2^7\right| = |206 - 208| = 2$$

Computación Numérica

Primer Parcial B - Mayo 2017

1. Aproximar utilizando el método de Newton $r = \sqrt[4]{60}$. Utilizar como punto inicial $x_0 = 3$, realizar dos iteraciones. Redondear a 5 cifras decimales en cada paso.

$$x = \sqrt[4]{60} \quad \Rightarrow \quad x^4 = 60 \quad \Rightarrow \quad x^4 - 60 = 0$$

Por lo tanto $f(x) = x^4 - 60$ y $f'(x) = 4x^3$ y la función de iteración será

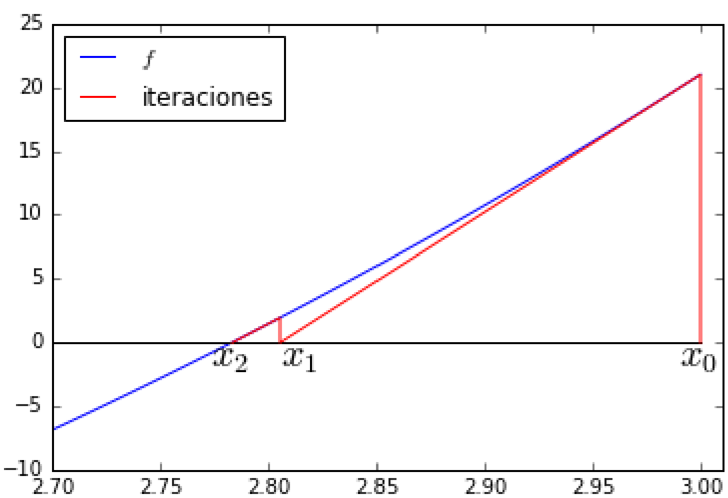
$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^4 - 60}{4x_k^3}$$

Si $x_0 = 3$

$$x_1 = x_0 - \frac{x_0^4 - 60}{4x_0^3} = 3 - \frac{3^4 - 60}{4(3^3)} = 3 - \frac{81 - 60}{4(27)} = 3 - \frac{21}{108} = 3 - 0.19444 = 2.80556$$

Si $x_1 = 2.80556$

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1^4 - 60}{4x_1^3} = 2.80556 - \frac{2.80556^4 - 60}{4(2.80556^3)} = 2.80556 - 0.02214 = 2.78342$$



2. Sean las funciones

$$f(x) = x - \cos\frac{x}{2} \qquad g_1(x) = \cos\frac{x}{2} \qquad g_2(x) = 2x - \cos\frac{x}{2}$$

(a) Demostrar que la ecuación $f(x) = 0$ tiene la misma raíz que $g_i(x) = x$ con $i = 1, 2$.

(b) Enunciar el teorema de la aplicación contractiva.

(c) Demostrar analíticamente que la función g_1 cumple las condiciones del teorema de la aplicación contractiva el intervalo con $[0, 2]$.

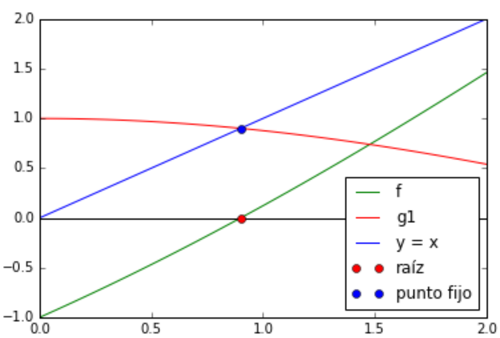
(d) Demostrar analíticamente que la función g_2 no cumple las condiciones del teorema de la aplicación contractiva el intervalo con $[0, 2]$.

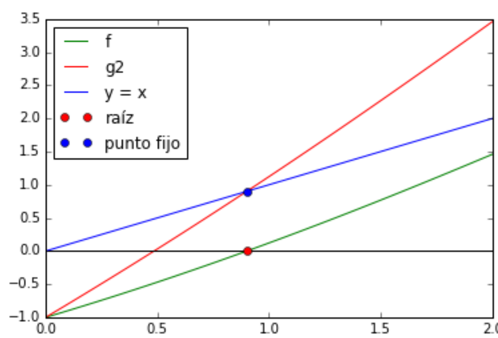
(e) Hacer dos iteraciones con g_1 tomando como punto inicial $x_0 = 0$

(a)

$$g_1(x) = \cos\frac{x}{2} \Longleftrightarrow x = \cos\frac{x}{2} \Longleftrightarrow x - \cos\frac{x}{2} = 0 \Longleftrightarrow f(x) = x - \cos\frac{x}{2}$$

$$g_2(x) = 2x - \cos\frac{x}{2} \Longleftrightarrow x = 2x - \cos\frac{x}{2} \Longleftrightarrow 0 = x - \cos\frac{x}{2} \Longleftrightarrow f(x) = x - \cos\frac{x}{2}$$





(b)

El Teorema de la aplicación contractiva dice: sea g derivable definida en el intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ y $x_0 \in [a, b]$ un punto del intervalo. Si

1. $x \in [a, b] \quad \Rightarrow \quad g(x) \in [a, b]$
2. $|g'(x)| \leq k < 1$ para todo $x \in [a, b]$

Entonces g tiene un único punto fijo $\alpha \in [a, b]$, y la sucesión x_n definida como $x_{i+1} = f(x_i)$ que tiene como punto inicial x_0 converge a α con orden al menos lineal.

(c)

Empecemos por la **condición 2**

$$|g_1'(x)| = \left|-\frac{1}{2}\text{sen}\frac{x}{2}\right| = \frac{1}{2}\left|\text{sen}\frac{x}{2}\right|$$

Como la función seno está siempre comprendida entre -1 y 1, en valor absoluto es siempre menor que 1 y

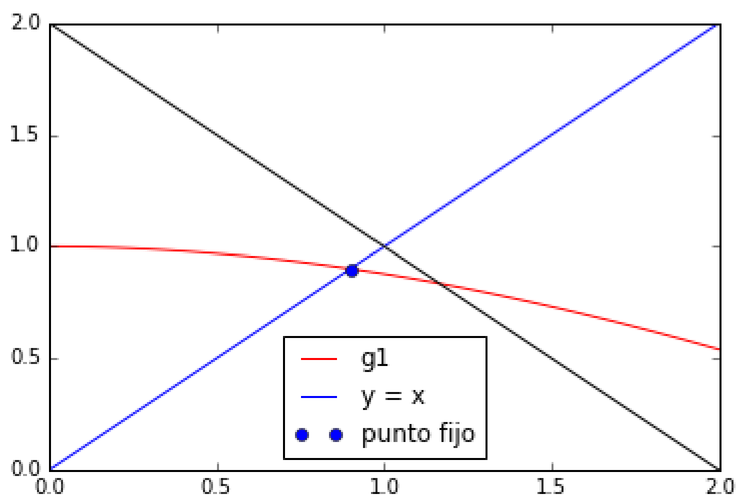
$$|g_1'(x)| = \left|-\frac{1}{2}\text{sen}\frac{x}{2}\right| = \frac{1}{2}\left|\text{sen}\frac{x}{2}\right| \leq \frac{1}{2} \times 1 = 0.5 \quad \text{en} \quad [0, 2]$$

y se cumple la segunda condición 2.

Veamos la **condición 1**. Como la función coseno $\cos\frac{x}{2}$ es positiva en $[0, 2]$ y está siempre comprendida entre -1 y 1.

$$x \in [0, 2] \;\Rightarrow\; 0 \leq \cos\frac{x}{2} \leq 1 \;\Rightarrow\; g(x) \in [0, 1] \subset [0, 2]$$

y se cumple también la primera condición.

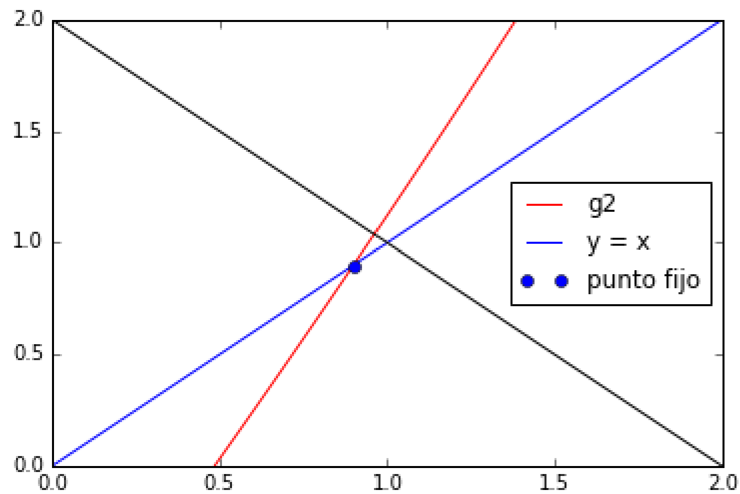


(d)

Empecemos por la **condición 2**.

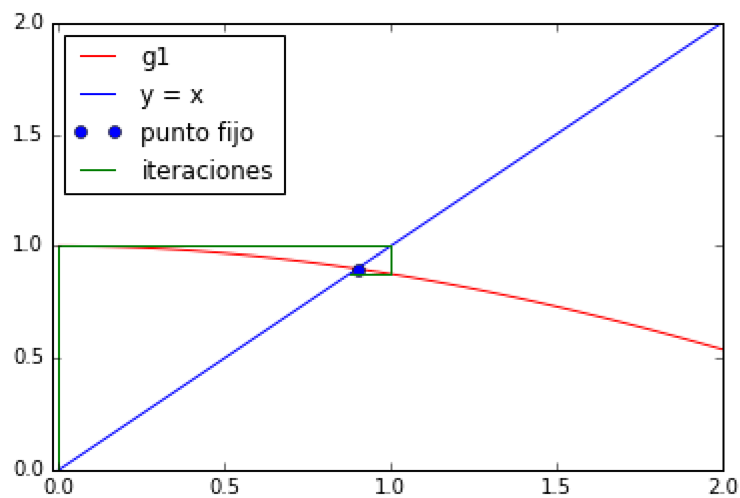
$$|g_2'(x)| = 2 + \frac{1}{2}\text{sen}\frac{x}{2} \geq 2 \quad \text{en} \quad [0, 2]$$

puesto que en $[0, 2]$ se verifica que $\text{sen}\frac{x}{2}$ es positivo. Y no se cumple la segunda condición, por lo que no cumple las condiciones del teorema de la aplicación contractiva.



(e)

k	$x_{k+1} = g_1(x_k)$
0	$x_0 = 0$
1	$x_1 = g_1(x_0) = g_1(0) = \cos(0/2) = 1$
2	$x_2 = g_1(x_1) = g_1(1) = \cos(1/2) = 0.8776$



Computación Numérica

Segundo Parcial - Mayo 2017

1. Tenemos los siguientes datos del movimiento de un cuerpo

$t(s)$	0	1	2	3	4	5
$v(m/s)$	0	14	32	48	56	50

¿Cuál será la velocidad a los 4.5 s? Usar interpolación polinomial cuadrática con el polinomio interpolante en la forma de Newton. ¿Y la aceleración? Utilizar derivación numérica con $h = 0.2$.

Para interpolar con un polinomio de grado dos, necesitamos tres puntos. Los t más próximos a 4.5 son 3, 4 y 5. Además el intervalo $[3, 5]$ contiene a 4.5.

Para usar la notación habitual $x = t$ y $f(x) = v(t)$. Construimos la tabla de diferencias divididas con $x_0 = 3$, $x_1 = 4$ y $x_2 = 5$:

$$
\begin{array}{cccc}
x & f(x) & & \\
3 & 48 & & \\
 & & \frac{56-48}{4-3} = 8 & \\
4 & 56 & & \frac{(-6)-8}{5-3} = -7 \\
 & & \frac{50-56}{5-4} = -6 & \\
5 & 50 & &
\end{array}
$$

Ya tenemos

$$f[x_0] = 48, \quad f[x_0, x_1] = 8, \quad f[x_0, x_1, x_2] = -7$$

Construímos el polinomio interpolante en la forma de Newton

$$
\begin{aligned}
P_2(x) =& f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\
P_2(x) =& 48 + 8(x - 3) + (-7)(x - 3)(x - 4)
\end{aligned}
$$

y entonces

$$v(4.5) \approx P_2(4.5) = 48 + 8(4.5 - 3) + (-7)(4.5 - 3)(4.5 - 4) = 54.75\,\mathrm{m/s}$$

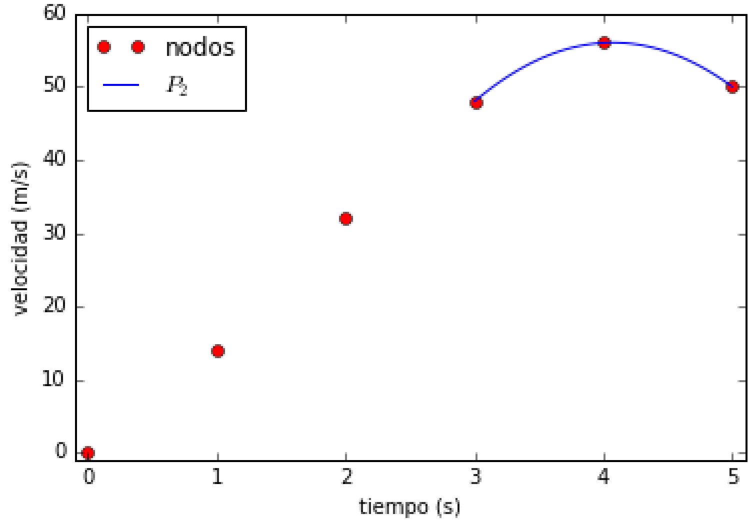
$$v(4.5) \approx 54.75\,\mathrm{m/s}$$

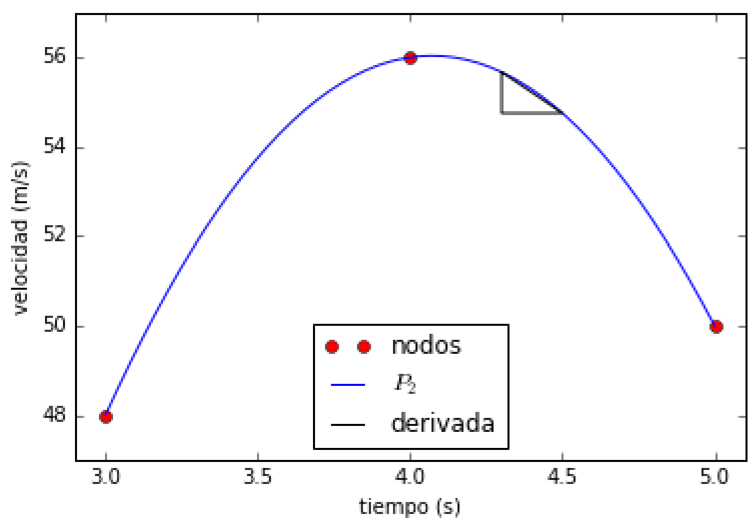
Podemos aproximar la derivada de una función usando la fórmula centrada:

$$f'(t) \approx \frac{1}{2h}(f(t+h) - f(t-h))$$

Si $f = P_2$, $t_0 = 4.5$ y $h = 0.2$

$$a(4.5) \approx \frac{1}{2h}(P_2(t_0+h) - P_2(t_0+h)) = \frac{1}{2(0.2)}(P_2(4.5+0.2) - P_2(4.5+0.2)) = \frac{1}{2(0.2)}(53.27 - 55.67) = -6\,\mathrm{m/s}^2$$


nodos
P_2
velocidad (m/s)
tiempo (s)


nodos
P_2
derivada
velocidad (m/s)
tiempo (s)

2. $\boxed{\text{Calcular el desarrollo de Fourier usando la base } \{1, \cos 2x, \operatorname{sen}2x\} \text{ para la función } f \text{ de periodo } \pi \text{ que en el intervalo } [0,\pi] \text{ se define como } f(x) = x(\pi - x).}$

La base es $\{1, \cos 2x, \operatorname{sen}2x\}$ y la función f está definida en $[0,\pi]$ por lo que el producto escalar

$$\langle f(x), g(x)\rangle = \int_0^\pi f(x)g(x)dx$$

La función aproximada será de la forma

$$P(x) = \frac{a_0}{2}\cdot 1 + a_1\cdot\cos 2x + b_1\cdot\operatorname{sen}2x$$

Obtenemos los coeficientes a_0, a_1 y b_1 como solución del sistema lineal

$$\begin{pmatrix} \langle 1,1\rangle & \langle 1,\cos 2x\rangle & \langle 1,\operatorname{sen}2x\rangle \\ \langle \cos 2x,1\rangle & \langle \cos 2x,\cos 2x\rangle & \langle \cos 2x,\operatorname{sen}2x\rangle \\ \langle \operatorname{sen}2x,1\rangle & \langle \operatorname{sen}2x,\cos 2x\rangle & \langle \operatorname{sen}2x,\operatorname{sen}2x\rangle \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{a_0}{2} \\ a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle 1, f(x)\rangle \\ \langle \cos 2x, f(x)\rangle \\ \langle \operatorname{sen}2x, f(x)\rangle \end{pmatrix}$$

Como la base es ortogonal

$$\begin{pmatrix} \langle 1,1\rangle & 0 & 0 \\ 0 & \langle \cos 2x,\cos 2x\rangle & 0 \\ 0 & 0 & \langle \operatorname{sen}2x,\operatorname{sen}2x\rangle \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{a_0}{2} \\ a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle 1, f(x)\rangle \\ \langle \cos 2x, f(x)\rangle \\ \langle \operatorname{sen}2x, f(x)\rangle \end{pmatrix}$$

y por lo tanto

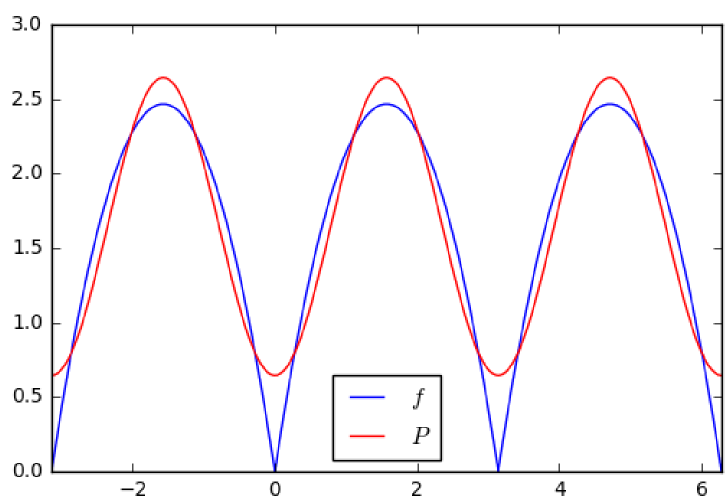
$$\frac{a_0}{2} = \frac{\langle 1, f(x)\rangle}{\langle 1,1\rangle} \quad a_1 = \frac{\langle \cos 2x, f(x)\rangle}{\langle \cos 2x, \cos 2x\rangle} \quad b_1 = \frac{\langle \operatorname{sen}2x, f(x)\rangle}{\langle \operatorname{sen}2x, \sin x\rangle}$$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{\int_0^\pi 1\cdot f(x)dx}{\int_0^\pi 1\cdot 1dx} = \frac{\pi^3/6}{\pi} = \frac{\pi^2}{6} \quad a_1 = \frac{\int_0^\pi f(x)\,\cos 2x\,dx}{\int_0^\pi (\cos 2x)^2\,dx} = \frac{-\pi/2}{\pi/2} = -1 \quad b_1 = \frac{\int_0^\pi f(x)\operatorname{sen}2x\,dx}{\int_0^\pi (\operatorname{sen}2x)^2\,dx} = \frac{0}{\pi/2} = 0$$

Y por lo tanto

$$P(x) = \frac{\pi^2}{6}\cdot 1 + (-1)\cdot\cos 2x + (0)\cdot\operatorname{sen}2x$$

$$P(x) = \frac{\pi^2}{6} - \cos 2x$$



3. (a) Deducir la fórmula del Punto Medio Simple para aproximar la integral

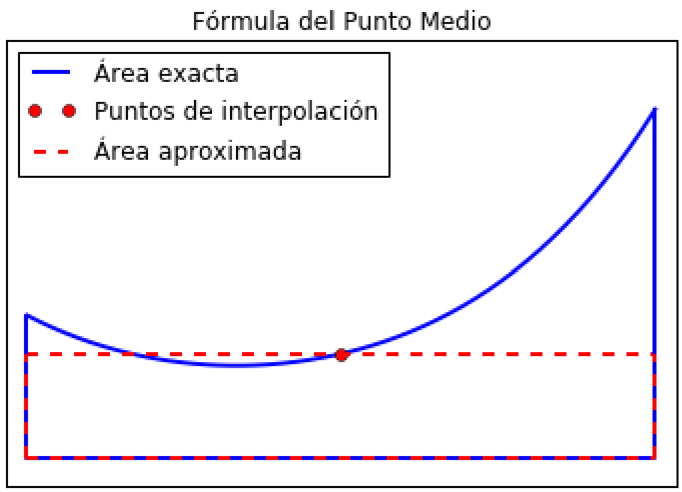
$$\int_a^b f(x)\,dx$$

(b) Demostrar que su orden de precisión es 1.

(c) Aplicar la fórmula compuesta del Punto Medio con tres subintervalos para calcular la integral

$$\int_{-1}^{2} \left(1+x^3\right) dx$$

(a)



La fórmula del Punto Medio se obtiene integrando el polinomio de grado 0 que pasa por el punto medio del intervalo de integración. Si escribimos este polinomio en la forma de Lagrange

$$P_0(x) = f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

y entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b P_0(x)\,dx = \int_a^b f\left(\frac{a+b}{2}\right)\,dx = f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b 1\,dx = f\left(\frac{a+b}{2}\right)[x]_a^b = f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)$$

Por lo tanto, la regla del punto medio simple es

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx (b-a)\,f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

Y si llamamos $h=b-a$ a la longitud del intervalo de integración, podemos escribir la fórmula

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx hf\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

(b)

Para que una fórmula de cuadratura sea exacta para un polinomio P_n de grado n, o lo que es lo mismo, tenga precisión n, dicha fórmula ha de ser exacta para las funciones 1, x, x^2, ..., x^n y no serlo para x^{n+1}.

Veamos la fórmula del Punto Medio:

¿Es exacta para $f(x)$ =1? Sí, porque

$$\int_a^b 1\,dx = b-a$$

y para este intervalo y esta función la fórmula del punto medio es

$$(b-a)\,f\left(\frac{a+b}{2}\right) = (b-a)\,1 = b-a$$

¿Es exacta para $f(x)=x$? Sí, porque

$$\int_a^b x\,dx = \frac{b^2-a^2}{2}$$

y para este intervalo y esta función la fórmula de los trapecios es

$$(b-a)\,f\left(\frac{a+b}{2}\right) = (b-a)\,\frac{a+b}{2} = \frac{(b+a)\,(b-a)}{2} = \frac{b^2-a^2}{2}$$

¿Es exacta para $f(x)=x^2$? No, porque

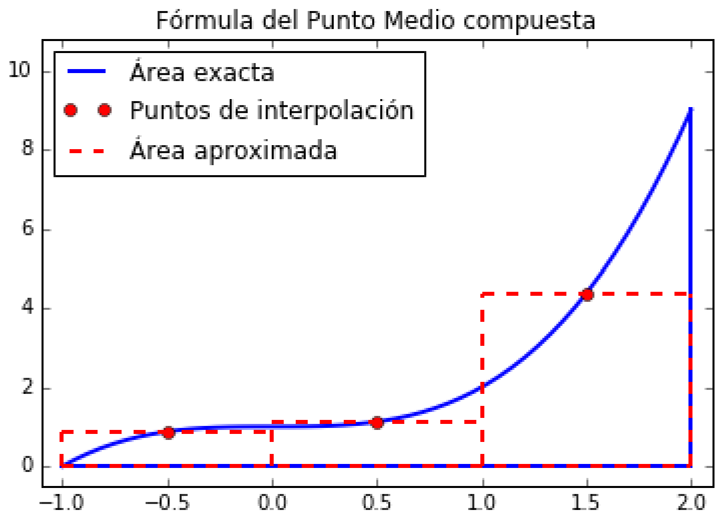
$$\int_a^b x^2\,dx = \frac{b^3-a^3}{3}$$

y para este intervalo y esta función la fórmula de los trapecios es

$$(b-a)\,f\left(\frac{a+b}{2}\right) = (b-a)\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{b^3+ab^2-a^2b-a^3}{4}$$

Como es exacta para 1 y x pero no para x^2, es exacta para polinomios de hasta grado 1 pero no para grado 2 y la precisión de la fórmula es 1.

(c)



Aplicar la regla del Punto Medio Compuesta con tres subintervalos equivale a decir que dividamos el intervalo de intergración, en este caso $[-1, 2]$, en tres subintervalos iguales y apliquemos la fórmula del Punto Medio simple en cada uno de ellos. Para $n = 3$ intervalos, la longitud de cada subintervalo será

$$h = \frac{b-a}{3} = \frac{2-(-1)}{3} = 1$$

Los nodos se calculan

$$\begin{aligned} x_0 &= a + h/2 = -1 + 1/2 = 0.5 \\ x_1 &= x_0 + h = 0.5 + 1 = 1.5 \\ x_2 &= x_1 + h = 1.50 + 1 = 2.5 \end{aligned}$$

Aplicando la regla del Punto Medop a cada uno de los tres subintervalos tenemos

$$\int_{-1}^{2} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \int_{x_2}^{x_3} f(x)\,dx \approx$$

$$\approx h\,f(x_0) + h\,f(x_1) + h\,f(x_2) = h\,(f(x_0) + f(x_1) + f(x_2)) =$$

$$= h\left(\left(1 + x_0^3\right) + \left(1 + x_1^3\right) + \left(1 + x_2^3\right)\right) = 1\left(3 + (-0.5)^3 + 0.5^3 + 1.5^3\right) = 3 + 1.5^3 = 6.375$$

Computación Numérica

Tercer Parcial - Mayo 2017

1. Dado el sistema $Ax = b$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

   (a) Calcular la matriz de iteración de Gauss-Seidel, B_{G-S}. Utilizar Gauss-Jordan para calcular matrices inversas.

   (b) Calcular la norma uno e infinito de B_{G-S} ¿Qué podemos concluir acerca de la convergencia del método para resolver el sistema?

   (c) Determinar si el método de Gauss-Seidel para resolver este sistema converge o no.

   (d) Realizar dos iteraciones.

(a)

La matriz $B_{G-S} = -(L+D)^{-1}U$ con

$$A = L + D + U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo que

$$L + D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculemos por Gauss-Jordan $(L+D)^{-1}$

$$\begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{lcll} f_1 & \to & f_1 & \\ f_2 & \to & f_2 & -(1/1)f_1 \\ f_3 & \to & f_3 & -(0/1)f_1 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \qquad f_2 \;\rightarrow\; f_2/3$$

$$\begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \qquad \begin{array}{lll} f_1 & \rightarrow & f_1 \;\; -(0/1)f_2 \\ f_2 & \rightarrow & f_2 \\ f_3 & \rightarrow & f_3 \;\; -(1/1)f_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \end{array} \right)$$

Por lo tanto

$$(L+D)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$B_{G-S} = -(L+D)^{-1}U = -\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

(b)

Calculamos la norma infinito

$$B_{G-S} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{array}{l} 0+1+0=1 \\ 0+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3} \\ 0+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3} \end{array}$$

$$||B_{G-S}||_\infty = \text{Max}\left(1, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = 1$$

Como $||B_{G-S}||_\infty < 1$ es condición suficiente, no necesaria, de convergencia, no podemos asegurar ni que converge ni que no converge.

Calculamos la norma uno

$$B_{G-S}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{array}{l} 0+0+0=0 \\ 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{5}{3} \\ 0+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3} \end{array}$$

$$||B_{G-S}||_1 = \text{Max}\left(0, \frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right) = \frac{5}{3}$$

Como $||B_{G-S}||_\infty < 1$ es condición suficiente, no necesaria, de convergencia, no podemos asegurar ni que converge ni que no converge.

(c)

Para determinar si el método converge o no, calculamos los autovalores de B_{G-S}

$$\begin{vmatrix} 0-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}-\lambda & -\frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Calculando el determinante obtenemos el polinomio característico, que igualamos a cero

$$-\lambda\left(\frac{1}{3}-\lambda\right)\left(\frac{1}{3}-\lambda\right)-\left(-\frac{1}{9}\lambda\right) = -\lambda\left(\frac{1}{9}-\frac{2}{3}\lambda+\lambda^2-\frac{1}{9}\right) =$$

$$= -\lambda\left(-\frac{2}{9}\lambda+\lambda^2\right) = -\lambda^2\left(-\frac{2}{3}+\lambda\right) = 0$$

Y los autovalores son

$$\lambda_{1,2} = 0, \quad \lambda_3 = \frac{2}{3}$$

La condición necesaria y suficiente para que el método de Gauss-Seidel converja es que todos los autovalores, en valor absoluto, sean menores que 1. Como esta condición se cumple, el método converge.

(d)El sistema es

$$\begin{array}{rrrcr} x & +y & & = & 1 \\ x & +3y & +z & = & 2 \\ & y & +z & = & -1 \end{array}$$

En la primera ecuación despejamos la primera incógnita, x, en la segunda, la segunda incógnita, y, y finalmente, z.

$$\begin{array}{rcl} x & = & 1-y \\ y & = & (2-x-z)/3 \\ z & = & -1-y \end{array}$$

Realizamos una iteración

$$\begin{array}{rcll} x^{(1)} & = & 1-y^{(0)} = 1-0 = 1 & \\ y^{(1)} & = & \left(2-x^{(1)}-z^{(0)}\right)/3 = (2-1-0)/3 & = 1/3 = 0.33 \\ z^{(1)} & = & -1-y^{(1)} = -1-1/3 = -4/3 = -1.33 & \end{array}$$

Realizamos otra iteración

$$\begin{array}{rcll} x^{(2)} & = & 1-y^{(1)} = 1-1/3 = 2/3 = 0.67 & \\ y^{(2)} & = & \left(2-x^{(2)}-z^{(1)}\right)/3 = (2-2/3-(-4/3))/3 & = 8/9 = 0.89 \\ z^{(2)} & = & -1-y^{(2)} = -1-8/9 = -17/9 = -1.89 & \end{array}$$

2. Dada la función

$$f(x,y) = x^2y^2 + x^2 + y^2 + x + y$$

Aproximar el mínimo de la función comenzando por el punto inicial $(0,0)$ y utilizando el método de Newton (una iteración).

Realizaremos una iteración por el método de Newton usando la fórmula

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} - H^{-1}_{(x_0,y_0)} \cdot \nabla f_{(x_0,y_0)}$$

Si consideramos que

$$H_{(x_0,y_0)} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \nabla f_{(x_0,y_0)} \tag{1}$$

entonces

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = H^{-1}_{(x_0,y_0)} \cdot \nabla f_{(x_0,y_0)}$$

y escribiremos

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \tag{2}$$

donde $(c_1, c_2)^T$ es la solución del sistema (1).

Tenemos que

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \right) = \left(1 + 2x + 2xy^2, 1 + 2y + 2x^2y\right)$$

y

$$\nabla f_{(x_0,y_0)} = \nabla f_{(0,0)} = (1,1)\,.$$

Además

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\,\partial x} & \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\,\partial y} \\ \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\,\partial x} & \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\,\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + 2y^2 & 4xy \\ 4xy & 2 + 2x^2 \end{pmatrix}$$

y

$$H_{(x_0,y_0)} = H_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

El sistema (1) es

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

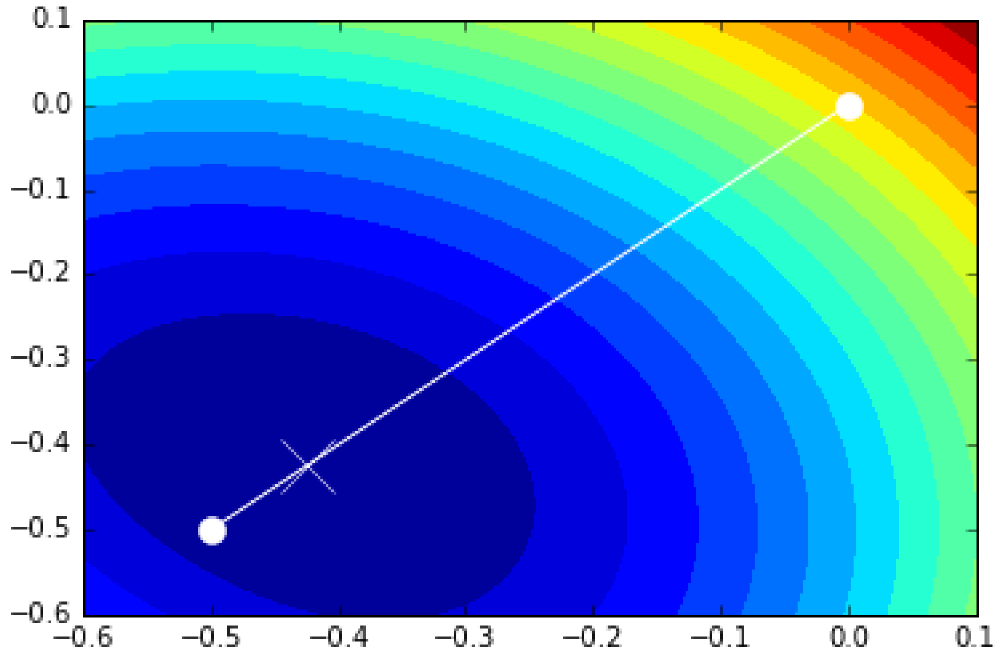
y resolviéndolo

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto (2) es

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.5 \\ -0.5 \end{pmatrix}.$$

Hemos mejorado porque $f(x_0, y_0) = f(0,0) = 0$ y $f(x_1, y_1) = f(-0.5, -0.5) = -0.4375$ que es menor. (El mínimo está en $(-0.424, -0.424)$, señalado con una cruz en el gráfico).



3. Dos almacenes, A_1 y A_2, tienen en stock, respectivamente, 35 y 50 unidades de un cierto producto. Este se distribuye a tres ciudades C_1, C_2 y C_3 en cantidades de 30, 30 y 25 unidades, respectivamente. Las ganancias unitarias vienen dadas, en euros por unidad, en la tabla siguiente.

	C_1	C_2	C_3
A_1	35	45	70
A_2	20	25	35

Determinar cómo hay que distribuir las unidades para que las ganancias sean máximas.

Las unidades se distribuyen

Unidades	Hasta C_1	Hasta C_2	Hasta C_3	
Desde A_1	x	y	$35-x-y$	35
Desde A_2	$30-x$	$30-y$	$x+y-10$	50
	30	30	25	

Y teniendo en cuenta el cuadro del enunciado, las ganancias serán

$$G = 35x + 45y + 70(35-x-y) + 20(30-x) + 25(30-y) + 35(x+y-10)$$

que simplificando queda

$$G = 3450 - 20x - 15y.$$

Por otro lado, si hacemos que todos los elementos del cuadro anterior sean mayores o iguales que cero

$x \geq 0$	$y \geq 0$	$35-x-y \geq 0$
$30-x \geq 0$	$30-y \geq 0$	$x+y-10 \geq 0$

llegaremos a que el problema a resolver es:

Maximizar la función $f(x,y) = 3450 - 20x - 15y$ con las restricciones

$$\begin{cases} x+y & \leq 35, \\ x+y & \geq 10, \\ x & \leq 30, \\ y & \leq 30, \\ x,y & \geq 0. \end{cases}$$

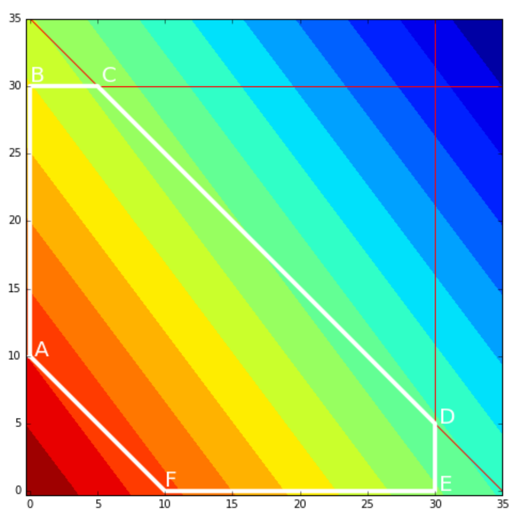
Las condiciones $x \geq 0$ e $y \geq 0$ significan que la región del plano que describen las condiciones está en el primer cuadrante. Dibujamos las demás fronteras de la región donde ha de encontrarse la solución. Tenemos cuatro rectas, r_1, r_2, r_3 y r_4.

$$r_1 \qquad x+y=35 \qquad \rightarrow \qquad \frac{x}{35}+\frac{y}{35}=1$$

$$r_2 \qquad x+y=10 \qquad \rightarrow \qquad \frac{x}{10}+\frac{y}{10}=1$$

y entonces r_1 corta al eje OX en $x=35$ y al eje OY en $y=35$. Análogamente r_2 corta al eje OX en $x=10$ y al eje OY en $y=10$. La recta $r_3 : x=30$ es la recta vertical que pasa por el punto $(30,0)$ y la recta $r_4 : y=30$ es la recta horizontal que pasa por el punto $(0,30)$.

Cada una de estas rectas divide el plano en dos regiones, una que verifica la condición y otra que no. Basta por lo tanto con probar con un punto y si este punto cumple la condición, la región del plano donde se encuentra este punto es pertenece a la región. Por simplicidad, probamos con el origen $(0,0)$. El origen cumple la condición $x+y\leq 35$ porque $0+0\leq 35$. Y pero no cumple la condición $x+y\geq 10$ porque $0+0\geq 10$. El origen también cumple las codiciones $x\leq 30$ y $y\leq 30$ Así que la región será la representada en la siguiente figura.



El máximo estará en uno de los vértices del polígono blanco que son

Vértice	x	y	$f(x,y)$
A	**0**	**10**	**3450**
B	0	30	3000
C	5	30	2900
D	30	5	2775
E	30	0	2850
F	10	0	3250

El máximo está en A, $x = 0$ $y = 10$ puesto que es el punto de la región donde la función toma el valor mayor. Y finalmente, las unidades se distribuyen

Unidades	Hasta C_1	Hasta C_2	Hasta C_3	
Desde A_1	0	10	25	35
Desde A_2	30	20	0	50
	30	30	25	