Computación Numérica

Tercer Parcial - Mayo 2019

1. Sea el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Calcular $\mathbf{x}$ utilizando la factorización LU con pivote. Indicar, en cada paso, las operaciones por fila realizadas.

Escogemos el pivote entre los elementos que están debajo del pivote, es decir, el elemento a_{11}. Seleccionamos como pivote, el mayor en valor absoluto. Lo llevamos a la posición del pivote intercambiando filas. Intercambiamos las mismas filas en la matriz de permutaciones P.

$$\begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{array} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} f_1 \leftarrow f_4 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \leftarrow f_1 \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$P_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hacemos ceros por debajo del pivote sumando la primera fila multiplicada por un real.

$$\begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{lllll} f_1 & \leftarrow & f_1 & & \\ f_2 & \leftarrow & f_2 & - & \boxed{1/2} \; f_1 \\ f_3 & \leftarrow & f_3 & - & \boxed{1/2} \; f_1 \\ f_4 & \leftarrow & f_4 & - & \boxed{1/2} \; f_1 \end{array}$$

Los multiplicadores, que aparecen en rojo, son los elementos con los que construímos la matriz L. Los insertamos en la matriz, en lugar de los ceros creados. La matriz transformada es la siguiente. Como ahora el pivote, a_{22} y los elementos por debajo del pivote son iguales, no intercambiamos filas. Hacemos ceros por debajo del pivote

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & -2 \\ \boxed{1/2} & \mathbf{-1/2} & 0 & 1 \\ \boxed{1/2} & -1/2 & 1 & 0 \\ \boxed{1/2} & -1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{lllll} f_1 & \leftarrow & f_1 & & \\ f_2 & \leftarrow & f_2 & & \\ f_3 & \leftarrow & f_3 & - & \boxed{(-1/2)/(-1/2)} \; f_2 \\ f_4 & \leftarrow & f_4 & - & \boxed{(-1/2)/(-1/2)} \; f_2 \end{array}$$

La matriz transformada es la siguiente. Ahora el pivote es a_{33} y comparado con los elementos por debajo del pivote es el mayor en valor absoluto y no intercambiamos fila.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & -2 \\ \boxed{1/2} & -1/2 & 0 & 1 \\ \boxed{1/2} & \boxed{1} & \mathbf{1} & 0 \\ \boxed{1/2} & \boxed{1} & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{lcl} f_1 & \leftarrow & f_1 \\ f_2 & \leftarrow & f_2 \\ f_3 & \leftarrow & f_3 \\ f_4 & \leftarrow & f_4 \; - \; \boxed{0/1} \; f_2 \end{array}$$

La matriz que contiene tanto L como U queda

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & -2 \\ \boxed{1/2} & -1/2 & 0 & 1 \\ \boxed{1/2} & \boxed{1} & 1 & 0 \\ \boxed{1/2} & \boxed{1} & \boxed{0} & -1 \end{pmatrix}$$

Y las matrices L, U y P son:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{1/2} & 1 & 0 & 0 \\ \boxed{1/2} & \boxed{1} & 1 & 0 \\ \boxed{1/2} & \boxed{1} & \boxed{0} & 1 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & -1/2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora, teniendo en cuenta que queremos resolver $Ax = b$, $PAx = Pb$ y que $PA = LU$ podemos escribir $LUx = Pb$ y si llamamos $Ux = y$:

1. Resolvemos el sistema triangular inferior $Ly = Pb$ y obtenemos y. $Pb = (-4, -1, -3, -2)^t$ y por lo tanto

$$\begin{array}{lllllcr} y_1 & & & & = & -4 \\ (1/2)y_1 & +y_2 & & & = & -1 \\ (1/2)y_1 & +y_2 & +y_3 & & = & -3 \\ (1/2)y_1 & +y_2 & & +y_4 & = & -2 \end{array} \qquad \begin{array}{lcl} y_1 & = & -4 \\ y_2 & = & -1 - (1/2)y_1 = -1 + 2 = 1 \\ y_3 & = & -3 - (1/2)y_1 - y_2 = -3 + 2 - 1 = -2 \\ y_4 & = & -2 - (1/2)y_1 - y_2 = -2 + 2 - 1 = -1 \end{array}$$

2. Resolvemos el sistema triangular superior $Ux = y$ y obtenemos x, que era lo que buscábamos.

$$\begin{array}{llllcr} 2x_1 & +3x_2 & & -2x_4 & = & -4 \\ & (-1/2)x_2 & & +x_4 & = & 1 \\ & & x_3 & & = & -2 \\ & & & -x_4 & = & -1 \end{array} \qquad \begin{array}{lcl} x_4 & = & 1 \\ x_3 & = & -2 \\ x_2 & = & (1 - x_4)/(-1/2) = (1 - 1)/(-1/2) = 0 \\ x_1 & = & (-4 - 3x_2 + 2x_4)/2 = (-4 + 0 + 2)/2 = -1 \end{array}$$

2. $\boxed{\text{A partir de los determinantes de las matrices } L,\ U \text{ y } P \text{ calcular el determinante de } A. \text{ Enumerar las propiedades de los determinantes utilizadas.}}$

Tenemos que

$$PA = LU \quad \Longrightarrow |A| = (-1)^n \, |L| \, |U|$$

siendo n el número de permutaciones de filas. Por lo tanto

$$|A| = (-1)^1 (1 \times 1 \times 1 \times 1)(2 \times (-1/2) \times 1 \times (-1)) = -1$$

Las propiedades usadas son:

1. El determinante de un producto de matrices es el producto de los determinantes.
2. Si se intercambian dos filas el determinante cambia de signo.
3. El determinante de una matriz triangular es igual al producto de los elementos de su diagonal.

3. Dados los puntos

x	-1	1	4	5
y	3	-1	-2	3

encontrar el punto central (m_x, m_y) de forma que la suma de las distancias cuadráticas

$$D = \sum_{i=1}^{n} \left[(x_i - m_x)^2 + (y_i - m_y)^2 \right]$$

a dicho punto sea mínima.

$$\begin{aligned} D(m_x, m_y) &= d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 \\ D(m_x, m_y) &= [(-1 - m_x)^2 + (3 - m_y)^2] + [(1 - m_x)^2 + (-1 - m_y)^2] + \\ & \quad [(4 - m_x)^2 + (-2 - m_y)^2] + [(5 - m_x)^2 + (3 - m_y)^2] \end{aligned}$$

La condición necesaria de óptimo es que las derivadas parciales sean cero

$$\frac{\partial D}{\partial m_x} = 0$$
$$\frac{\partial D}{\partial m_y} = 0$$

Derivando

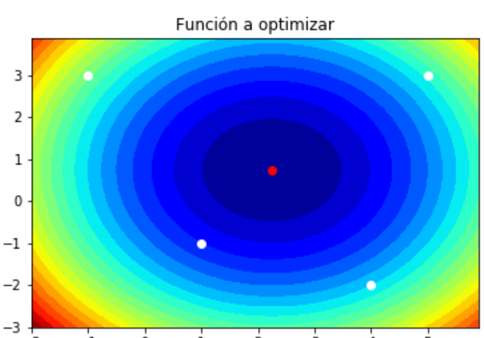
$$\begin{aligned} \frac{\partial D}{\partial m_x} = 0 \qquad 2(-1 - m_x) + 2(1 - m_x) + 2(4 - m_x) + 2(5 - m_x) &= 0 \\ \frac{\partial D}{\partial m_y} = 0 \qquad 2(3 - m_y) + 2(-1 - m_y) + 2(-2 - m_y) + 2(3 - m_y) &= 0 \end{aligned}$$

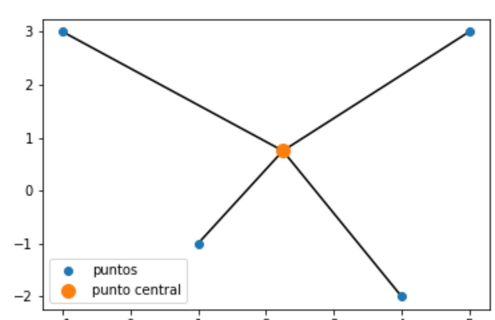
Reorganizamos las ecuaciones

$$\begin{aligned} (-1 + 1 + 4 + 5) &= 4m_x \\ (3 - 1 - 2 + 3) &= 4m_y \end{aligned}$$

La solución es

$$m_x = \frac{-1 + 1 + 4 + 5}{4} = \frac{9}{4} = 2.25$$
$$m_y = \frac{3 - 1 - 2 + 3}{4} = \frac{3}{4} = 0.75$$





4. Sea $f(x,y,z) = (x-1)^4 + (y-2)^2 + (z-3)^2$. Aproximar el mínimo utilizando el método de Newton y tomando como punto inicial $\left(x^{(0)}, y^{(0)}, z^{(0)}\right) = (0,0,0)$. Realizar una iteración.

Realizaremos una iteración por el método de Newton usando la fórmula

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_1 \end{pmatrix} - H^{-1}_{(x_0,y_0,z_0)} \cdot \nabla f_{(x_0,y_0,z_0)}$$

Si consideramos que

$$H_{(x_0,y_0,z_0)} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \nabla f_{(x_0,y_0,z_0)} \tag{1}$$

entonces

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = H^{-1}_{(x_0,y_0,z_0)} \cdot \nabla f_{(x_0,y_0,z_0)}$$

y escribiremos

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \tag{2}$$

donde $(c_1, c_2, c_3)^T$ es la solución del sistema (1).
Tenemos que

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}, \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}, \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} \right) = \left(4(x-1)^3, 2(y-2), 2(z-3)\right)$$

y

$$\nabla f_{(x_0,y_0,z_0)} = \nabla f_{(0,0,0)} = (-4,-4,-6)\,.$$

Además

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z\, \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z\, \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12(x-1)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

y

$$H_{(x_0,y_0,z_0)} = H_{(0,0,0)} = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

El sistema (1) es

$$\begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix}$$

y resolviéndolo

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto (2) es

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1/3 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Hemos mejorado porque $f\left(x_0, y_0, z_0\right) = f(0,0,0) = 1+4+9 = 14$ y $f\left(x_1, y_1, z_1\right) = f(1/3, 2, 3) \approx 0.2$ que es menor.