北京大学量化交易协会2020级培训

衍生品

友情指导：周驰

胡潇尹 李琳雄 苏南 薛岚天 余佳豪

4/12/2021

衍生品

基础知识

定义

- 期权（Option）：双方关于未来买卖权利达成的合约，期权的**买方**（权利方）通过向**卖方**（义务方）支付一定的费用（权利金），获得一种**权利**，即**有权在约定的时间以约定的价格向期权卖方买入或卖出约定数量的特定资产**。当然，**买方（权利方）也可以选择放弃行使权利。如果买方决定行使权利，卖方就有义务配合**。期权的标的资产是指选择购买或出售的资产。它包括股票、政府债券、货币、股票指数、商品期货等。

- 远期合约（Forward）是指双方同意在**未来日期**按照**固定价格**交换金融资产的合约，**远期合约是必须履行的协议。**期货（Future）是指以约定的时间和价格，买卖某种大众产品如棉花、大豆、石油等及金融资产如股票、债券等的可交易合约。
- 远期合约与期货的区别：**前者合约条件是为买卖双方量身定制的，通过场外交易(OTC)达成，而后者则是在交易所买卖的标准化合约。**

术语

- **看涨期权（call option）**：给期权持有者在将来某个日期以一定价格买入某资产的权利
- **看跌期权（put option）**：给期权持有者在将来某个日期以一定价格卖出某资产的权利
- **到期日T（maturity date）**：合约中注明的日期
- **执行价格K（strike price）**：合约中注明的价格
- **期权头寸**：**买入期权方为多头（long），卖出期权方为空头（short）**。卖出期权方在最初收取期权费用，但该方在今后有潜在的义务，其盈亏曲线与权利方相反。
- **欧式期权（European option）**：在到期日方可执行的期权
- **美式期权（American option）**：在到期日之前的任何时可均可执行的期权

基础知识（续）

术语

- ATM（at-the-money）：执行期权时股票价格S=执行价格K。实值期权（in-the-money）、虚值期权（out-of-the-money）
- 指数期权：以股票指数为标的资产的期权
- 认股权证（warrants）：有金融机构或非金融机构发行的期权

Standard & Poors 500 Index

2021-04-09 16:14:59 ET (Delayed)　Bid: **4090.8601**　Ask: **4160.8599**　Vol: **0**　Last: **4,128.8**　Change: +31.6298 (+0.7661%)

Filters By:

Volume: All　Expiration Type: All　Options Range: Near the Money　Size: 3　Expiration: 2021 四月　View Chain

Options Chain

Total Records: 60

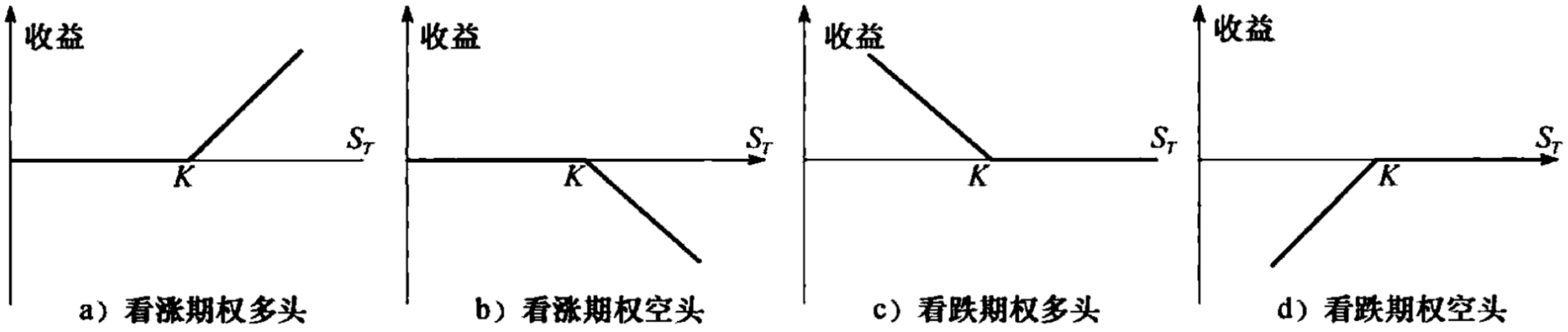
Calls　Fri Apr 09 2021　Puts

Last	Net	Bid	Ask	Vol	IV	Delta	Gamma	Int	Strike	Last	Net	Bid	Ask	Vol	IV	Delta	Gamma	Int
14.7	+12.025	12.6	14	17,847	0.02	0.91	0.02	3451	SPXW 4115.000	0.05	-21.95	0	0.05	5,990	0.36	-0.15	0.02	116
10.9	+9.075	7.2	11.7	33,607	0.02	0.91	0.02	3901	SPXW 4120.000	0.05	-26.1	0	0.05	5,374	0.42	-0.28	0.02	76
3.58	+2.38	2.9	4	30,972	0.02	0.86	0.06	5631	SPXW 4125.000	0.15	-30.4	0.05	0.75	2,730	0.53	-0.42	0.02	40
0.15	-0.65	0.05	0.2	23,003	0.04	0.3	0.22	3415	SPXW 4130.000	2.21	-32.94	0.2	3.5	901	0.66	-0.51	0.02	17
0.05	-0.5	0	0.05	12,695	0.1	0.07	0.03	4206	SPXW 4135.000	3.7	-36.2	6.4	11.8	151	0.8	-0.57	0.01	20
0.05	-0.3	0	0.05	5,615	0.14	0.02	0.01	2201	SPXW 4140.000	13.5	-31.2	9	17.1	89	0.94	-0.62	0.01	21

基础知识（续）

欧式期权收益（无手续费）

- 看涨期权多头（Long call option） $\max(S_T - K, 0)$
- 看涨期权空头（Short call option） $-\max(S_T - K, 0) = \min(K - S_T, 0)$
- 看跌期权多头（Long put option） $\max(K - S_T, 0)$
- 看跌期权空头（Short put option） $-\max(K - S_T, 0) = \min(S_T - K, 0)$



美式期权与提前执行

- **永远不要提前执行一份无分红的美式看涨期权**

$$\text{Holding Value } = \left(S_t - K \times R_f^{-(T-t)}\right)^+ > Exercise\ Value = (S_t - K)^+ \qquad t < T$$

Intuition：拥有期权而不是股票是加上是对持有者提供了股票价格不会低于执行价格的保险，一旦行权将失去这一保险；货币的时间价值。当有股息时可能在分红时刻执行美式看涨期权时最优选择

- **提前行使无股息股票看跌期权有时可能是最优的**

Intuition：股票价格不能为负，当股价足够低时应提前执行

$$\text{Holding Value } = \left(K \times R_f^{-(T-t)} - S_0\right)^+ < Exercise\ Value = (K - S_t)^+ \qquad t < T$$

基础知识（续）

期权定价

- 本质：无套利原则
- **Put-Call Parity：**

$$C_0 + K \times R_f^{-T} + D = P_0 + S_0$$

表 11-2　组合 A 和组合 C 在时间 *T* 的价值

		$S_T > K$	$S_T < K$
组合 A	看涨期权	$S_T - K$	0
	零息债券	K	K
	总和	S_T	K
组合 B	看跌期权	0	$K - S_T$
	股票	S_T	S_T
	总和	S_T	K

基本思想：购买一份看涨期权和一份执行价格加分红的债券收益 = 购买一份看跌期权和一份对应标的股票的收益

影响期权价格的因素

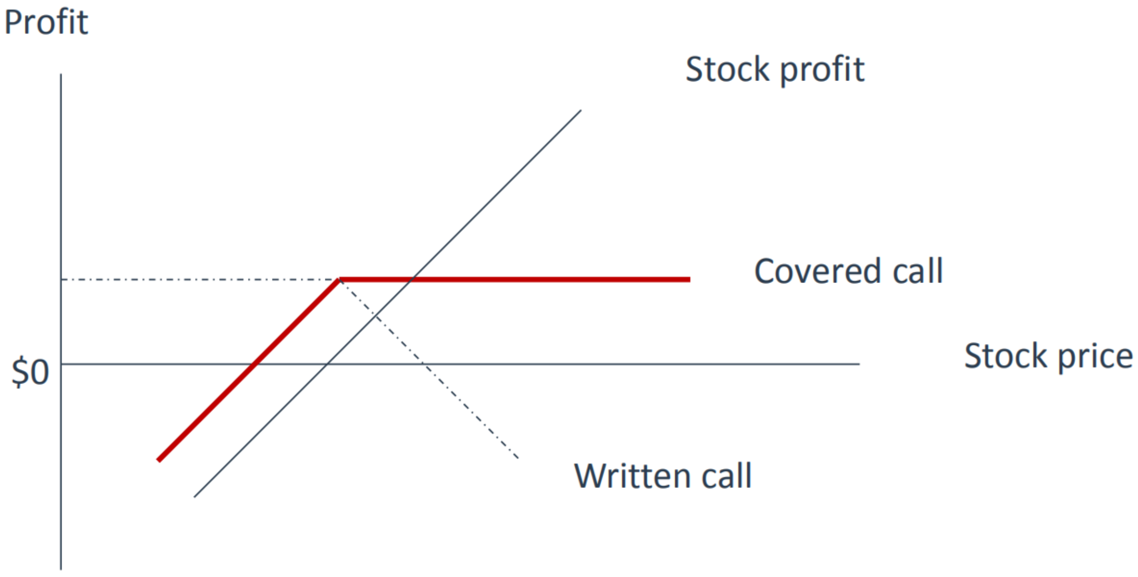
表 11-1　当一个变量增加而其他变量保持不变时，对于股票期权价格的影响

变量	欧式看涨	欧式看跌	美式看涨	美式看跌
当前股票价格	+	−	+	−
执行价格	−	+	−	+
时间期限	?	?	+	+
波动率	+	+	+	+
无风险利率	+	−	+	−
股息数量	−	+	−	+

Covered call

策略原理

- 有担保的看涨期权；
- 持有股票的多头并卖出看涨期权。



Profit profile for a covered call

- 损益情况可以表示为：

$$(S_T-S_0)-\max\{0,(S_T-X)\}+C$$

- 当股票价格S_T涨到期权协议价X以上时，可得最大利润：

$$(S_T-S_0)-\max\{0,(S_T-X)\}+C=(S_T-S_0)-(S_T-X)+C=X-S_0+C$$

- 当股票价格跌到0时，损失最大：

$$(S_T-S_0)-\max\{0,(S_T-X)\}+C=(0-S_0)-0+C=C-S_0$$

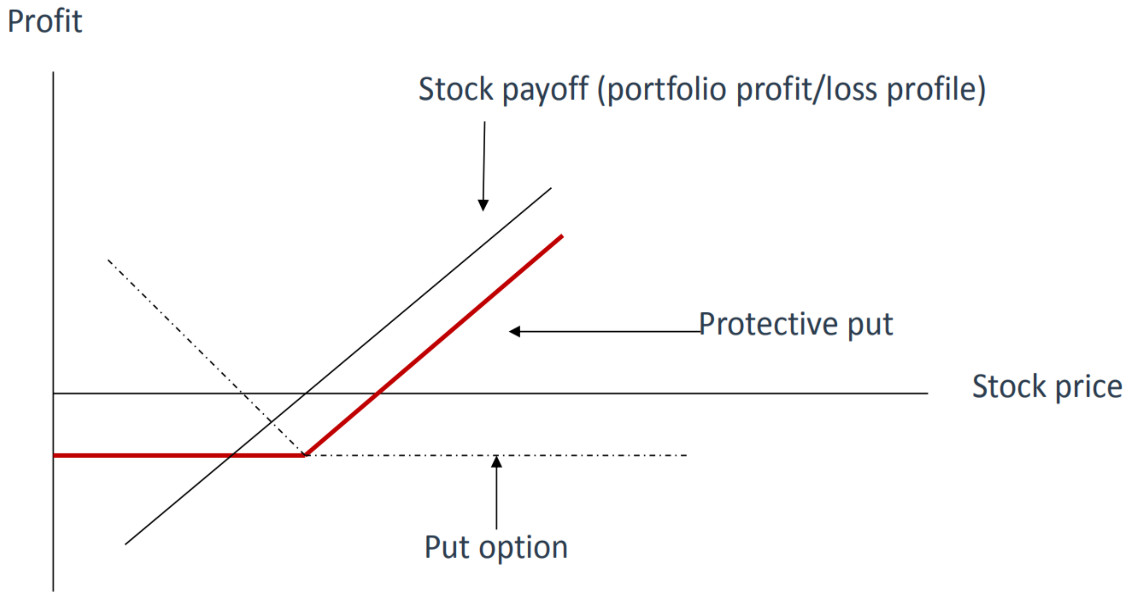
- 盈亏平衡点为：

$$S_T=S_0-C$$

Protective put

策略原理

- 有保护的看涨股票；
- 持有股票的多头并买入看跌期权。



Protective put strategy

- 损益情况可以表示为：

$$(S_T - S_0) + \max\{0, (X - S_T)\} - P$$

- 当股票价格S_T涨到期权协议价x以上时，可得利润无上限：

$$(S_T - S_0) + P$$

- 当股票价格跌到0时，损失最大：

$$(S_T - S_0) + \max\{0, (X - S_T)\} - P = 0 - S_0 + X - P = X - S_0 - P$$

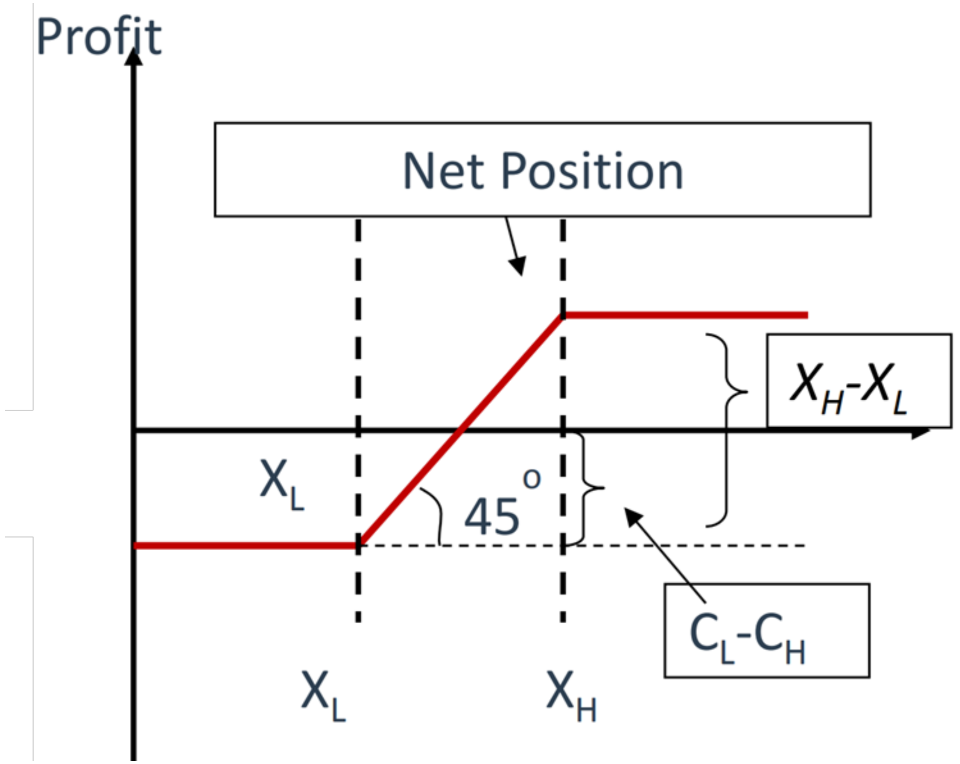
- 盈亏平衡点为：

$$S_T = S_0 + P$$

Bull spread

策略原理

- 牛市看涨差价期权；
- 买入低执行价看涨期权，卖出高执行价看涨期权。



- 由两份资产标的相同、到期日相同但执行价不同的看涨期权构成，具体为买入执行价低的看涨期权，卖出执行价高的看涨期权，其损益表示为：

$$\max\{0,(S_T-X_L)\}-\max\{0,(S_T-X_H)\}-C_L+C_H$$

- 当股票价格S_T涨到期权协议价X_H以上时，可得最大利润：

$$(S_T-X_L)-(S_T-X_H)-C_L+C_H=X_H-X_L+C_H-C_L$$

- 当资产价格S_T跌到X_L以下时，损失最大：

$$0-0-C_L+C_H=C_H-C_L$$

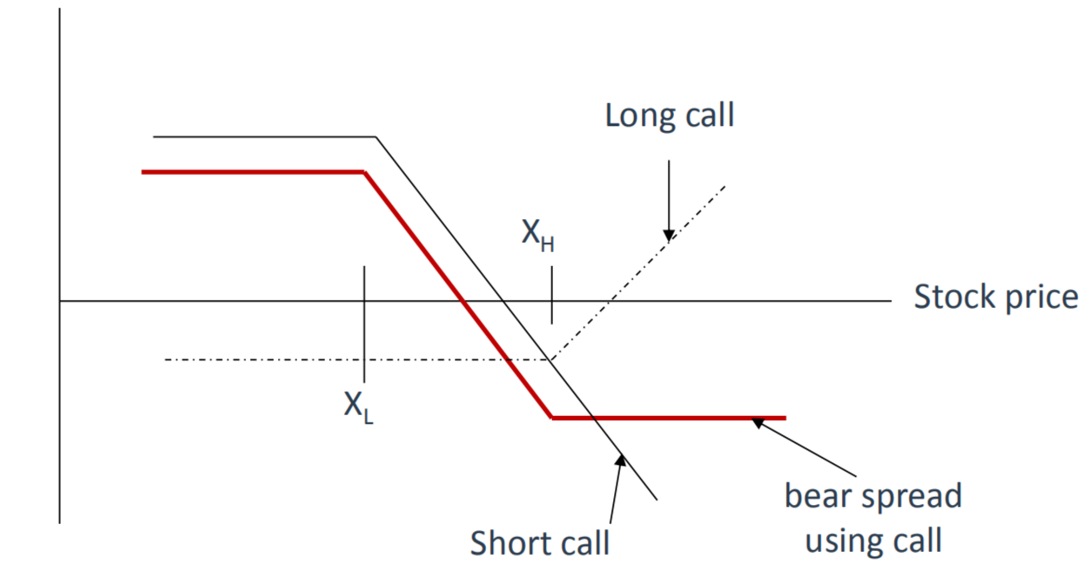
- 盈亏平衡点为：

$$S_T=X_L+C_L-C_H$$

Bear spread

策略原理

- 熊市看涨差价期权；
- 买入高执行价看涨期权，卖出低执行价看涨期权。



bear spread using call

- 买入执行价格高的看涨期权，卖出执行价低的看涨期权，损益如下：

  $\max(0,S_T-X_H)-\max(0,S_T-X_L)+C_L-C_H$

- 当资产价格S_T跌到执行价格X_L以下时，获得最大利润：

  $0-0+C_L-C_H=C_L-C_H$

- 当资产价格S_T涨到执行价格X_H以上时，损失最大：

  $(S_T-X_H)-(S_T-X_L)+C_L-C_H=X_L-X_H+C_L-C_H$

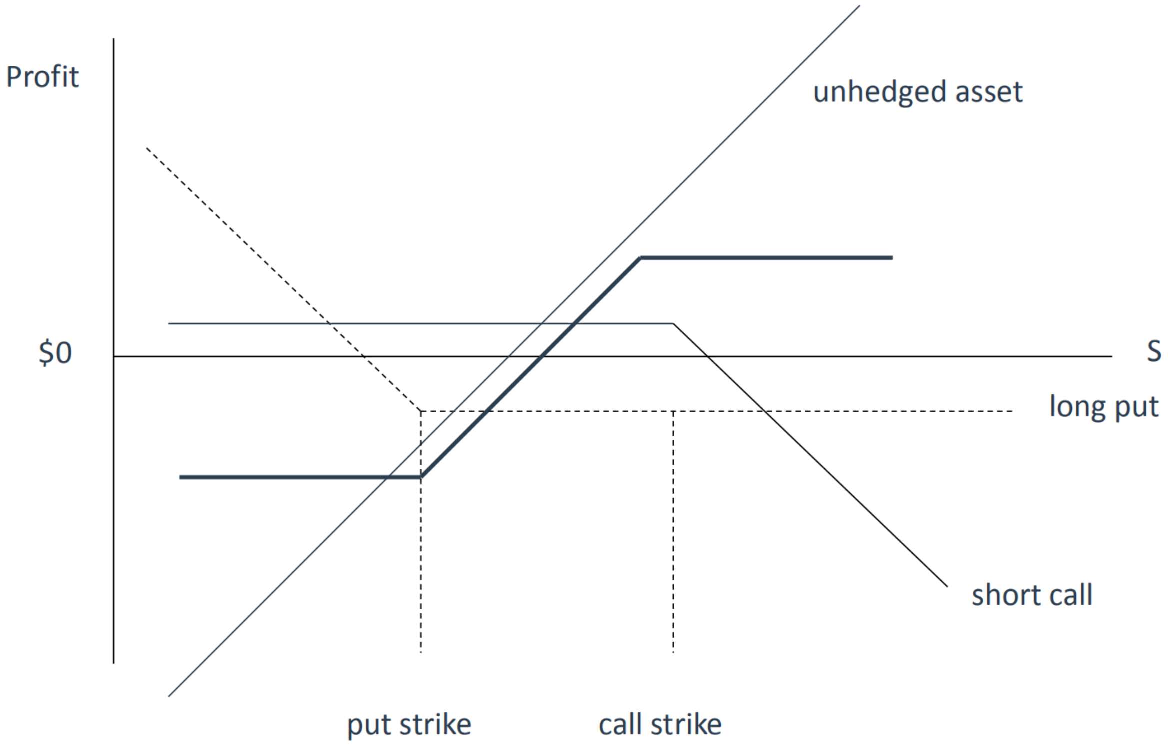
- 盈亏平衡点为：

  $S_T=X_L+C_L-C_H$

Collar

策略原理

- 有保护的看涨股票；
- 在Protective put的基础上卖出看涨期权支付权费。



- 损益情况可以表示为：

  S_T-S_0+max{0,X_L-S_T}-P_0-max{0,S_T-X_H}+C_0

- 当股票价格S_T涨到看涨期权执行价以上时，可得最大利润：

  X_H-S_0-P_0+C_0

- 当股票价格跌到看跌期权执行价以下时，损失最大：

  S_0-X_L+P_0-C_0

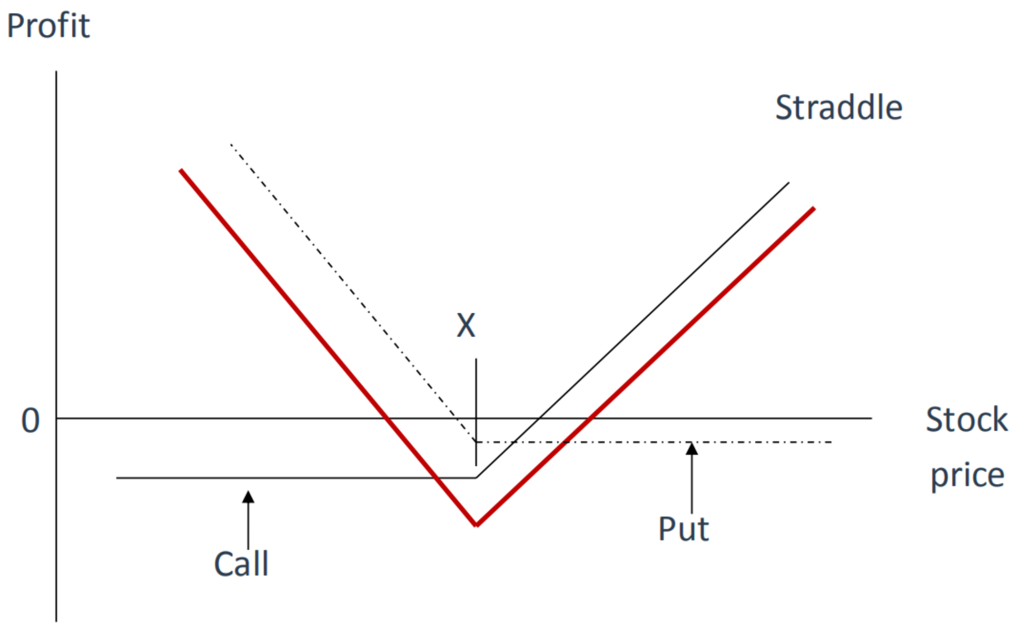
- 盈亏平衡点为：

  S_0+P_0-C_0

Straddle

策略原理

- 认为股票价格波动较大；
- 同时买入看涨、看跌期权。



Long straddle profit/loss

- 损益情况可以表示为：

  $\max\{S_T\text{-}X,\ X\text{-}S_T\}\text{-}P_0\text{-}C_0$

- 当股票价格S_T涨到看涨期权执行价以上时，可得最大利润：

  $\max\{S_T\text{-}X,\ X\text{-}S_T\}\text{-}P_0\text{-}C_0$

- 当股票价格跌到看跌期权执行价以下时，损失最大：

  P_0+C_0

- 盈亏平衡点为：

  $X\text{-}(P_0+C_0)$或$X+(P_0+C_0)$

The Greek Letters

定义

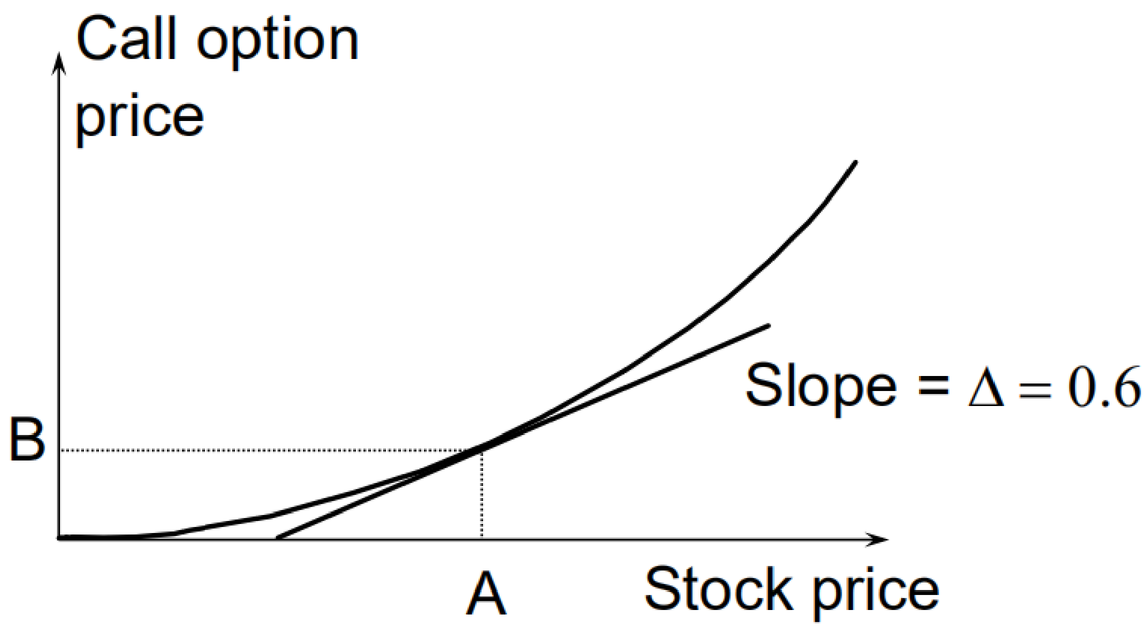
- 每一个希腊字母值都是用来度量期权头寸的某种特定风险，而交易员的目标就是管理这些值，从而将风险保持在一个可以接受的范围之内。
- Black-Scholes-Merton模型具有五个自变量：基础资产价格，波动率，无风险利率，到期时间和执行价格。每个自变量和欧式期权价格之间的关系都可以通过以希腊字母为代表的敏感性因子来获得。

希腊字母	对应因素	对看涨期权影响	对看跌期权影响
Delta	标的价格	正相关 (Delta>0)	负相关 (Delta<0)
Vega	波动率	正相关 (Vega>0)	正相关 (Vega>0)
Rho	无风险利率	正相关 (Rho>0)	负相关 (Rho<0)
Theta	剩余时间	负相关 Theta<0	负相关* Theta<0
-	执行价格	负相关	正相关

Delta

定义

- Delta是期权价格与标的资产价格变动的比率。
- $Delta_{call} = dC/dS$
- $Delta_{put} = dP/dS$



- 与BSM的联系：

  $Delta_{call}$=等于BSM中的$N(d_1)$
  $Delta_{put}$=等于BSM中的$N(d_1)-1$
- 直接解释体现“近似于期权被执行的概率”，期权被执行的概率越大越像股票，随着无股息欧式期权深入价内，$Delta_{call}$越接近于1， $Delta_{put}$越接近于-1，反之则接近于0。
- Delta对冲

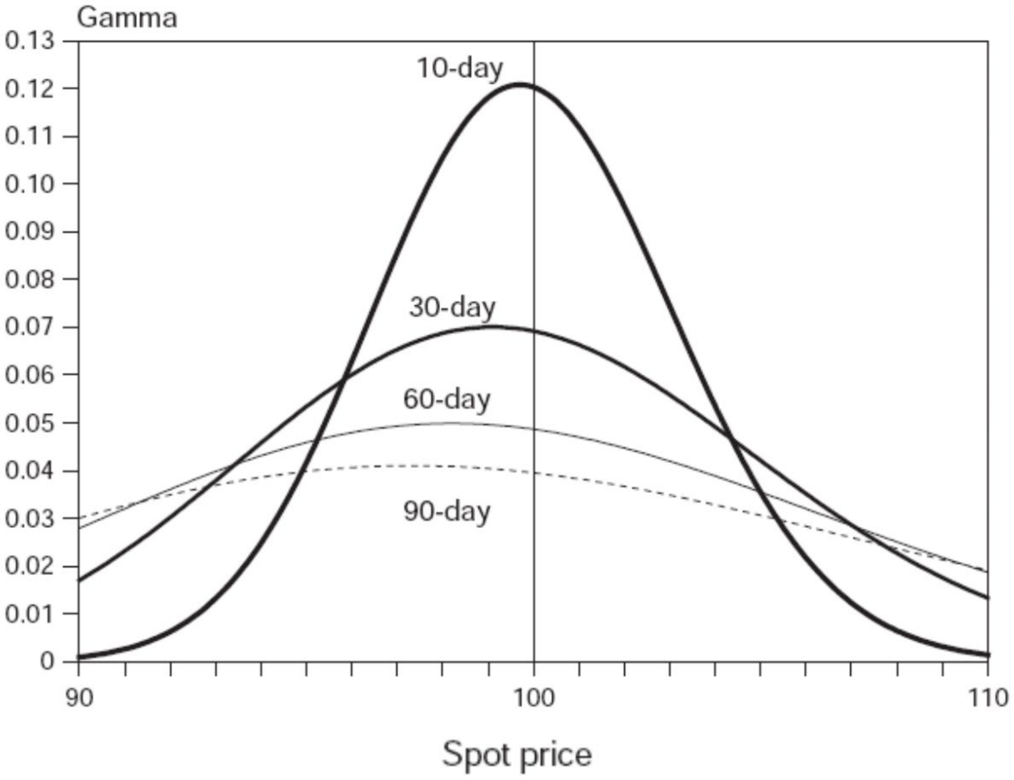
  期权头寸的受益/损失被股票头寸的受益/损失抵消，Delta 随着股票价格和时间变化而变化，对冲头寸因此必须动态调整。

  $$\frac{number\ of\ shares\ hedged}{delta\ of\ call\ option}$$

Gamma

定义

- Gamma是delta的变化与标的资产价格变动的比率；
- Gamma=d(delta)/dS



- 当股票价格接近期权执行价格时，期权的Gamma最大，在深度价内或深度价外时趋近于0。

$$\Gamma = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial S^2} \qquad \Gamma = \frac{N'(d_1)}{S_0 \sigma \sqrt{T}}$$

- 对Delta对冲的影响：
  当标的价格接近行权价，Gamma最大，这意味着delta对价格变动十分敏感，这导致需要频繁调整对冲组合，从而产生更高的交易费用，并容易产生误差。

Other Greek Letters

Theta

- 时间损耗
- 衍生品（组合）的Theta是它的价值随时间变化的比率;
- 看涨或看跌期权的theta通常为负。如果时间流逝，标的资产的价格和波动率保持不变，看涨（跌）期权的长头寸的价值下降。

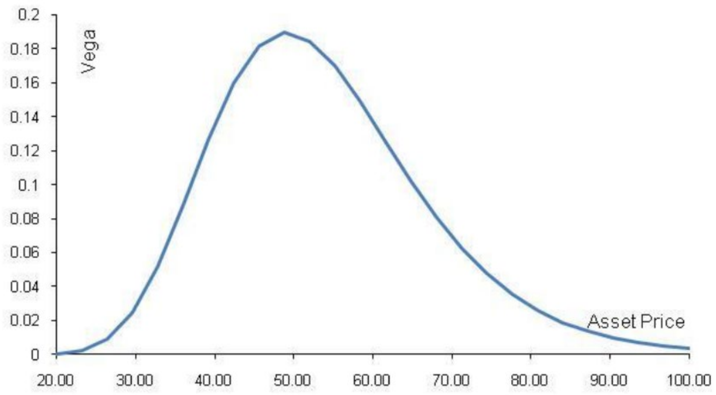
$$\Theta(\text{call}) = -\frac{S_0 N'(d_1)\sigma}{2\sqrt{T}} - rKe^{-rT}N(d_2)$$

$$\Theta(\text{put}) = -\frac{S_0 N'(d_1)\sigma}{2\sqrt{T}} + rKe^{-rT}N(-d_2)$$

Vega

- Vega是期权价值变化相对于波动率的敏感程度，对long方为正。

$$\mathcal{V} = \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma}$$



K=50, s = 25%, r = 5%, T = 1

Rho

- Rho定义了期权价值对无风险利率变化的敏感性;
- 在相对短期的时间内，利率的变动不频繁且变动不大。但是对于长期到期期权（LEAPS）的交易，Rho仍然有着重要的意义,随着到期日的不断临近，Rho值逐渐趋向于0;
- 国内一直奉行较为稳健的货币政策，无风险利率走势相对比较平稳，因此Rho影响较小。

$$\text{rho (call)} = KTe^{-rT}N(d_2)$$

$$\text{rho (put)} = -KTe^{-rT}N(-d_2)$$

The Greek Letters

相互联系

- 对一个以股息率为q的股票为标的资产的衍生品投资组合，由B-S-M偏微分方程 （对delta中性的组合，可以把theta作为gamma的近似）：

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t} + rS\frac{\partial \Pi}{\partial S} + \tfrac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 \Pi}{\partial S^2} = r\Pi$$

$$\Theta = \frac{\partial \Pi}{\partial t}, \qquad \Delta = \frac{\partial \Pi}{\partial S}, \qquad \Gamma = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial S^2}$$

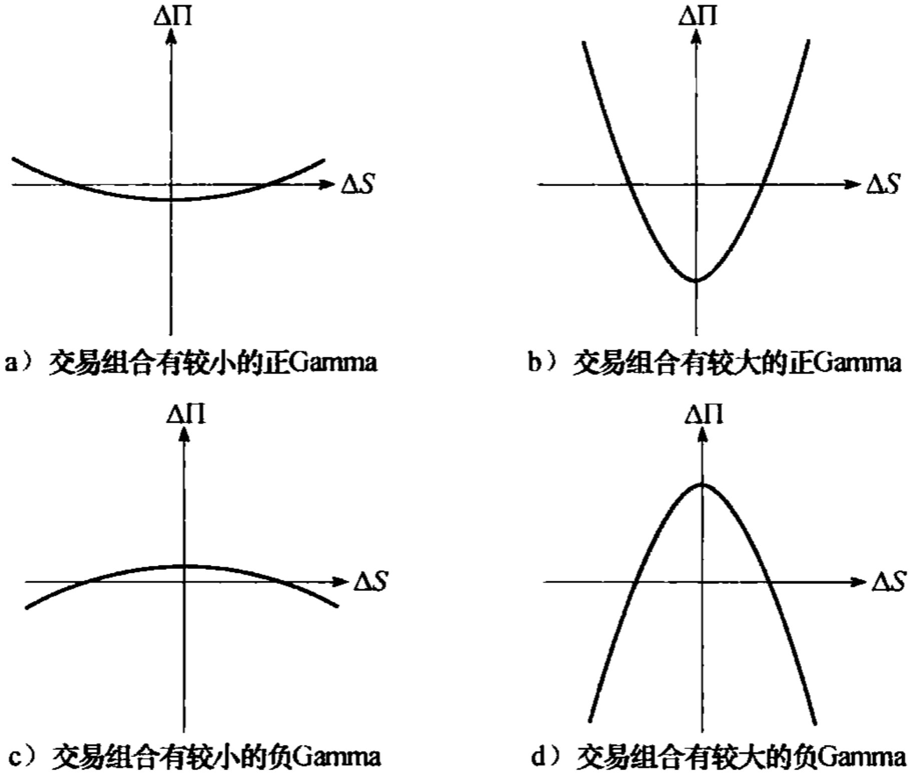
$$\Theta + rS\Delta + \tfrac{1}{2}\sigma^2 S^2 \Gamma = r\Pi$$

- 对于delta中性组合：

$$\Delta = 0 \qquad \Theta + \tfrac{1}{2}\sigma^2 S^2 \Gamma = r\Pi$$

Delta中性交易组合

- ΔΠ与ΔS在Δt时间内变化的几种关系图：



波动率微笑Volatility Smiles

定义

- 特定期限期权的隐含波动率和执行价格之间的关系；
- 欧式看涨期权的和欧式看跌期权的波动率微笑正好相同，为何？
- Put-call Parity
  $p + S_0e^{-qT}=c+Ke^{-rT}$ 对期权市场价格和BSM推出的价格都成立
  $p_{mkt}- p_{bs}=c_{mkt}- c_{bs}$
- 因此若$p_{mkt}= p_{bs}$则$c_{mkt}= c_{bs}$

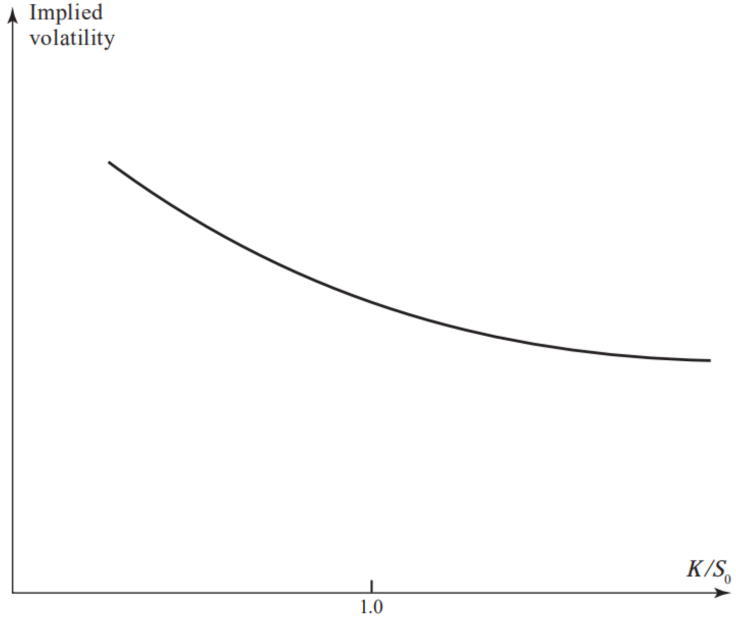
股票市场的波动率微笑

- 这种形式的波动率微笑也被称为波动率倾斜Volatility skew,波动率是执行价格的递减函数；
- 隐含概率分布：对于某一时间到期的期权波动率微笑，可以确定的在同一时间资产价格的风险中性概率分布；
- 将隐含概率分布与一个与隐含概率分布有相同均值和标准差的对数正态分布对比。

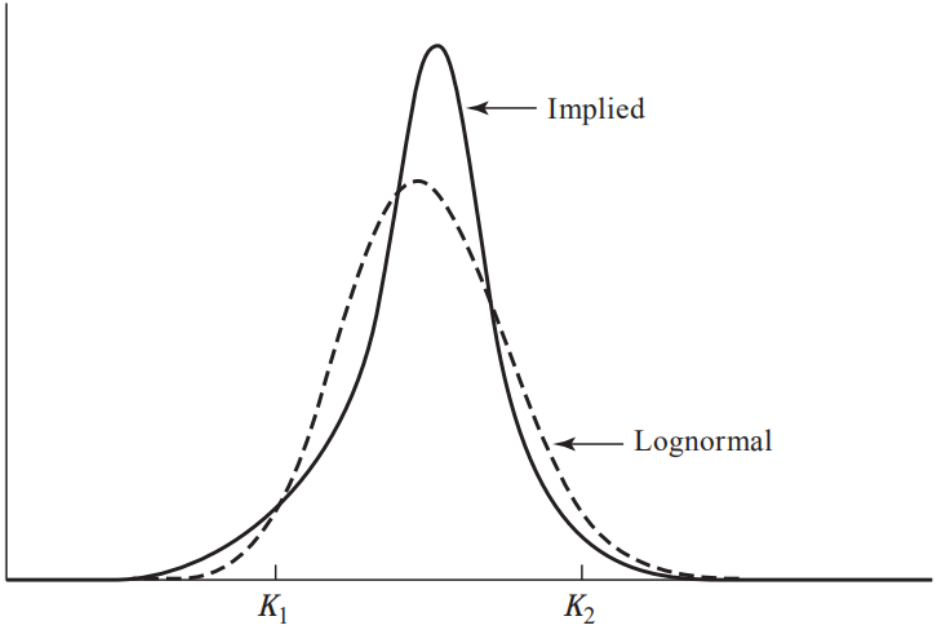
波动率微笑Volatility Smiles

解释

- 右图说明执行价格为K_2的深度虚值看涨期权在假设隐含概率分布时的价格低于在假设对数正态分布时的价格，这是因为这一期权只有在股票价格高于K_2时才会产生收益，持有人会期望隐含概率分布得出的期权价格会低于由对数正态分布得出的期权价格，而较低的价格对应较低的隐含波动率，与左图对应；
- 股票期权波动率微笑存在的原因：杠杆效应、暴跌恐惧。



股票的波动性微笑（K=行使价，S_0=当前股票价格）



股票期权的隐含分布和对数正态分布

期权定价模型——二叉树与风险中性

定义

- 二叉树代表在期权期限内可能会出现的股票价格变动路径图形。这种方法假设了股票价格服从RW，在树形上的每一步，股票价格S会以概率p向上移动至uS，或以概率1-p向下移动至dS。（**然而p并不重要**）

一步二叉树与无套利

- 当股价以二叉树形式波动时，单位时间后执行的call option利润对应有两种可能

$$S \nearrow uS \quad \text{with probability } \pi; \qquad S \searrow dS \quad \text{with probability } 1-\pi$$

$$c \nearrow c_u \equiv \max(0, uS - K) \text{ with probability } \pi; \qquad c \searrow c_d \equiv \max(0, dS - K) \text{ with probability } 1-\pi$$

- 根据无套利原则，用股票+债券的投资组合复制该期权即可得期权定价

$$\Delta S + B \nearrow \Delta uS + R_f B \text{ with probability } \pi; \qquad \Delta S + B \searrow \Delta dS + R_f B \quad \text{with probability } 1-\pi$$

$$c = \frac{\hat{\pi} c_u + (1-\hat{\pi}) c_d}{R_f}$$

Risk-neutral probability

Where $\hat{\pi} \equiv \frac{R_f - d}{u-d}$, $1-\hat{\pi} \equiv \frac{u-R_f}{u-d} \in (0,1)$

N步二叉树

$$c_t = \frac{1}{R_f^n}\left[\sum_{j=0}^{n} \frac{n!}{j!\,(n-j)!} \hat{\pi}^j (1-\hat{\pi})^{n-j} c_{t+n}^j\right] \equiv \frac{1}{R_f^n} \hat{E}[c_{t+n}]$$

Where $c_{t+n}^j \equiv \max[0, u^j d^{n-j} S_t - K]$

期权定价模型——Bachelier Model & Black-Scholes-Metron Model

Brownian motion & Itô formula

- Brownian motion （BM）：

A continuous-time stochastic process $\{B_t, 0 \leq t \leq \mathrm{T}\}$ is called a Standard Brownian Motion on [0, T) if (i) $B_0 = 0$, (ii) The increments of B_t , i.e., $B_{t_2} - B_{t_1}, B_{t_3} - B_{t_1}, \ldots$ for $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \cdots$, are independent, (iii) the increment, $B_t - B_s$, for s ≤ t has the Gaussian distribution with mean 0 and standard deviation $\sqrt{t-s}$, and (iv) B_t is a continuous function.

- Itô formula

$$df(t, B_t) = \frac{\partial f(t, B_t)}{\partial B_t} dB_t + \left(\frac{\partial f(t, B_t)}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(t, B_t)}{\partial B_t^2}\right)dt$$

Bachelier Model (Normal Model)

$$S_t = S_0 + \sigma_N B_t \quad (SDE: dS_t = \sigma_N dB_t)$$

- Present call option value:

$$C_0(K) = e^{-(r-d)T} E\big((S_T - K)^+\big) = e^{-(r-d)T}\big((S_0 - K)N(d) + \sigma_N \sqrt{T} n(d)\big)$$

where $d = (S_0 - K)/\sigma_N\sqrt{T}$, n(X) and N(x) are the PDF and CDF of normal distribution

BSM Model

$$S_t = S_0 \exp(\sigma_{BSM} B_t - \frac{1}{2}\sigma_{BSM}^2 t) \qquad (SDE: \frac{\mathrm{d}S_t}{S_t} = \sigma_{BSM} dB_t), \sigma_N = S_0 \times \sigma_{BSM}$$

- Present call option value:

$$C_0(K) = e^{-(r-d)T}(S_0 N(d_1) - KN(d_2)), \quad \text{where } d_{1,2} = \frac{\log(S_0/k)}{\sigma_{BSM}\sqrt{T}} \pm \frac{1}{2}\sigma_{BSM}\sqrt{T}$$

期权定价模型——SABR Model & Heston Model

LV & SV

- Local volatility: volatility depending on the current location of S_t

$$BSM: \frac{dS_t}{S_t} = \sigma_{BSM} f_{BSM}(S_t) dB_t, where f_{BSM}(S_t)=1 \quad \text{NM: } dS_t = \sigma_N f_N(S_t) dB_t, where f_N(S_t)=1$$

- Limitation: Option trading desk (market-making/sell-side) usually accumulates option positions with different strikes. For better risk management, we need models which can capture the volatility smile. **How to model smile? SV**
- **Stochastic volatility (SV)**: volatility changing over time

SABR (Stochastic-alpha-beta-rho) Model

$$\frac{dS_t}{S_t^{\beta}} = \sigma_t dW_t$$

$$\frac{d\sigma_t}{\sigma_t} = \alpha dZ_t$$

$$dW_t dZ_t = \rho dt$$

Heston Model

$$dS_t = \mu S_t \, dt + \sqrt{v_t} S_t dz_{1,t}$$

$$dv_t = \kappa[\theta - v_t] \, dt + \sigma \sqrt{v_t} dz_{2,t}$$

where the correlation between $z_{1,t}$ and $z_{2,t}$ is ρ

MC

- 绝大多数期权定价模型没有解析解，需要用MC模拟S_T

有解析解的NM和BSM

Standard BM: $W_T \sim \sqrt{T} Z_1$ where Z_1 is a standard normal RV.

Arithmetic Brownian motion (Bachelier model)

- $$dF_t = \sigma_N \, dW_t \quad \Rightarrow \quad F_T \sim F_0 + \sigma_N \sqrt{T} Z_1$$
- From $t = S$ to $t = T$: $F_T \sim F_S + \sigma_N \sqrt{T - S} Z_1$
- For N assets: $\boldsymbol{F}_T = \boldsymbol{F}_0 + \boldsymbol{L} \sqrt{T}\, Z$, where $\boldsymbol{L}\boldsymbol{L}^T = \boldsymbol{\Sigma}$

Geometric Brownian motion (BSM model)

- $$\frac{dF_t}{F_t} = \sigma \, dW_t \quad \Rightarrow \quad F_T \sim F_0 \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 T + \sigma \sqrt{T} Z_1\right)$$
- From $t = S$ to $t = T$: $F_T \sim F_S \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 (T - S) + \sigma \sqrt{(T - S)} Z_1\right)$
- For N assets: $F_k(T) = F_k(0) \exp\left(-\frac{1}{2} T \Sigma_{kk} + \boldsymbol{L}_{k*} \sqrt{T}\, Z\right)$, where $\boldsymbol{L}\boldsymbol{L}^T = \boldsymbol{\Sigma}$ and $\boldsymbol{L}_{k*}$ is the k-th row vector of $\boldsymbol{L}$.

MC（续）

SABR model (Euler Discretization)

Divide the interval $[0,T]$ into N small steps, $t_k = (k/N)T$ and $\Delta t_k = T/N$ and simulate each time step with

$$S_t : \begin{cases} \beta = 0 : \; S_{t_{k+1}} = S_{t_k} + \sigma_{t_k} W_1 \sqrt{\Delta t_k} \\ \beta = 1 : \; \log S_{t_{k+1}} = \log S_{t_k} + \sigma_{t_k} \sqrt{\Delta t_k}\, W_1 - \frac{1}{2}\sigma_{t_k}^2 \Delta t_k, \end{cases}$$

$$\sigma_t : \sigma_{t_{k+1}} = \sigma_{t_k} \exp\left(\alpha \sqrt{\Delta t_k}\, Z_1 - \frac{1}{2}\alpha^2 \Delta t_k\right),$$

where $W_1,\ Z_1 \sim N(0,1)$ with correlation ρ.

Hetson model

$$\ln S_{t+\Delta t} = \ln S_t + \left(r - \frac{1}{2}v_t\right)\Delta t + \sqrt{v_t}\sqrt{\Delta t}\varepsilon_{S,t+1}$$

$$\ln v_{t+\Delta t} = \ln v_t + \frac{1}{v_t}\left(\kappa(\theta - v_t) - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t + \sigma\frac{1}{\sqrt{v_t}}\sqrt{\Delta t}\varepsilon_{v,t+1}.$$

where the correlation between $\epsilon_{S,t+1}$ and $\epsilon_{v,t+1}$ is ρ

衍生品

1 股权衍生品

2 **利率衍生品**

3 商品及其衍生品

利率衍生品

等价鞅测度

为什么用鞅测度?

- 实际上鞅测度是考虑卖掉手上的期权后买什么产品（例如货币）
- **鞅**有很好的性质，**没有漂移项**
- 利用等价鞅测度后才可以用Bachelier model和BSM模型（用Brownian motion模拟）
- 一个资产在以另一个资产为计价单位并且**风险价格**为该资产的波动率的测度下，比值是鞅，可以通过这个鞅对资产进行定价

等价鞅测度

风险市场价格

- 考虑一个变量 θ 的衍生品，其中 θ 服从的过程为：

$$\frac{d\theta}{\theta} = m dt + s dz$$

其中 m 和 s 分别表示 θ 的预期增长率和波动率。

- 假定 f_1 和 f_2 是只依赖于 θ 的衍生产品价格，且在考虑时间区间中不提供任何收入，他们服从过程：

$$\frac{df_1}{f_1} = \mu_1 dt + \sigma_1 dz$$

$$\frac{df_2}{f_2} = \mu_2 dt + \sigma_2 dz$$

其中 μ_1 、μ_2 、σ_1 和 σ_2 都是 θ 和 t 的函数，这里的 dz 应与 θ 过程中的 dz 含义一致。

等价鞅测度

风险市场价格

- 把 f_1 和 f_2 过程离散化：

$$\Delta f_1 = \mu_1 f_1 \Delta t + \sigma_1 f_1 \Delta z$$

$$\Delta f_2 = \mu_2 f_2 \Delta t + \sigma_2 f_2 \Delta z$$

可以利用 $\sigma_2 f_2$ 单位的第一个衍生产品和 $-\sigma_1 f_1$ 单位的第二个衍生产品建立一个瞬时无风险交易组合，它必须赚取无风险利率，解得：

$$\frac{\mu_1 - r}{\sigma_1} = \frac{\mu_2 - r}{\sigma_2} = \lambda$$

通常称 λ 为 θ 的**风险市场价格。**它只可能依赖于θ 和 t 而不依赖衍生产品f 。

$$\frac{df}{f} = \mu dt + \sigma dz \text{，} \quad \frac{\mu - r}{\sigma} = \lambda$$

证券 f 的波动率是 $|\sigma|$ 。

- 对于依赖于 θ 的证券，变量 θ 的**风险市场价格**是对其风险与收益之间平衡关系的一种度量。

等价鞅测度

风险市场价格决定的其他世界

- 传统风险中性世界：风险市场价格为0

$$df = \mu f dt + \sigma f dz \Rightarrow df = rfdt + \sigma f dz$$

- 其他内在一致世界：

$$\mu = r + \lambda\sigma$$

$$df = (r + \lambda\sigma) f dt + \sigma f dz$$

当从一个风险市场价格换成另一个时，证券价格预期增长率会改变，但是波动率不会改变

- 中性测度相当于用货币对冲风险（用卖掉期权的钱买货币）

等价鞅测度

等价鞅测度

- 鞅是一个没有漂移的随机过程，即若一个变量 θ 具有形式：

$$d\theta = \sigma dz$$

则该变量就是一个鞅。dz 是个维纳过程，变量 σ 可以是随机的，依赖于 θ 和其他随机变量。
- 鞅在将来任何时间的期望都等于今天的值。
- 定义相对价格：

$$\phi = f / g$$

则 ϕ 是鞅，且证券价格 g 被称为计价单位
- 以"由计价单位 g 定义的世界" 表示当选取 g 的波动率 σ_g 作为风险市场价格的世界。

等价鞅测度

附（一）：证明f/g是鞅

- **伊藤引理**：

$$dx = a(x,t)dt + b(x,t)dz$$

dz 是个维纳过程，若 x 遵循伊藤过程，则 x 和 t 的函数 G 遵循：

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial x}a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}b^2\right)dt + \frac{\partial G}{\partial x}bdz$$

- 假设可交易证券 f 和 g 的波动率分别为 σ_f 和 σ_g，当一个世界里的风险市场价格是 σ_g 时：

$$df = (r + \sigma_g\sigma_f)fdt + \sigma_f fdz$$

$$dg = (r + \sigma_g^2)gdt + \sigma_g gdz$$

- 由伊藤引理：

$$d\ln f = (r + \sigma_g\sigma_f - \frac{\sigma_f^2}{2})dt + \sigma_f dz$$

$$d\ln g = (r + \frac{\sigma_g^2}{2})dt + \sigma_g dz$$

等价鞅测度

附（二）：证明f/g是鞅

- 两式相减：

$$d(\ln f-\ln g)=(\sigma_g\sigma_f-\frac{\sigma_f^2}{2}-\frac{\sigma_g^2}{2})dt+(\sigma_f-\sigma_g)dz$$

即

$$d(\ln\frac{f}{g})=-\frac{(\sigma_f-\sigma_g)^2}{2}dt+(\sigma_f-\sigma_g)dz$$

- 由伊藤引理：

$$d(\frac{f}{g})=(\sigma_f-\sigma_g)\frac{f}{g}dz$$

满足鞅的表达形式，即 f/g 是鞅。

等价鞅测度

几种计价单位

- **货币市场账户**作为计价单位（以美元货币市场账户证券为例，它在0时刻价值为1美元，任何时刻赚取瞬时无风险利率）：

$$dg = rgdt$$

$$f_0 = g_0 \hat{E}\left(\frac{f_T}{g_T}\right)$$

在这里有：

$$g_0 = 1\,,\quad g_T = e^{\int_o^T rdt}$$

即有

$$f_0 = \hat{E}(e^{-\bar{r}T} f_T)$$

这里的 $\hat{E}(\cdot)$ 表示**传统风险中性世界**里的期望。

- 在传统风险中性世界里对短期利率 r 进行模拟，在每个实验中计算收益，并用短期利率 r 在模拟样本路线上的平均值进行贴现。

等价鞅测度

几种计价单位

- **零息债券价格**作为计价单位（定义一个在时间T收益为1美元的零息债券在时间t价格为 $P(t,T)$ ），此时有：

$$g_T = P(T,T) = 1\ ,\ \ g_0 = P(0,T)$$

故：

$$f_0 = P(0,T)E_T(f_T)$$

考虑非利率的变量 θ，在到期日为 T 的收益为 θ_T - K 的合约，用 f 表示该远期合约的价值。

$$f_0 = P(0,T)[E_T(\theta_T) - K]$$

θ 的远期价格 F 是使 f_0 等于零的 K 值，故有：

$$P(0,T)[E_T(\theta_T) - F] = 0 \Rightarrow F = E_T(\theta_T)$$

- 在一个由 $P(t,T)$ 作为计价单位的世界里，任何变量（利率除外）的远期价格都等于它未来即期价格的期望值。在计算期望收益时，可以假定标的变量的期望值等于其远期价格。

等价鞅测度

几种计价单位

- **年金因子**作为计价单位（考虑一个从时间 T 开始的利率互换，付款时间是 T_1，$T_2, \cdots$，T_N，定义 $T_0 = T$ 假设互换本金是1美元，在时间$t(t \leq T)$ 的远期互换率为$s(t)$ ）：
  互换合同对于支付固定利率方的价值为：
  $$s(t)A(t)$$
  其中：
  $$A(t) = \sum_{i=0}^{N-1}(T_{i+1} - T_i)P(t, T_{i+1})$$
  定义互换对浮动利率方的价值为 $V(t)$ ，则由固定方与浮动方价值相等：
  $$s(t)A(t) = V(t) \Rightarrow s(t) = \frac{V(t)}{A(t)}$$
  令 f 为$V(t)$, g 为 $A(t)$ ，利用等价鞅测度：
  $$s(t) = E_A[s(T)]$$
- 在年金因子作为计价单位定义的世界里，将来互换率的期望等于现在的互换率。

等价鞅测度

等价鞅测度应用实例：改进布莱克模型

- BSM模型假设无股息股票在短时间内的百分比变化具有正态分布，假设在Δt 时间内股票收益满足：

$$\frac{\Delta S}{S} \sim \phi(\mu\Delta t, \sigma^2 \Delta t)$$

即对 S_T 有对数正态分布假设：

$$\ln S_T \sim \phi(\ln S_0 + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})T, \sigma^2 T)$$

该看涨期权收益期望：

$$E[\max(V-K,0)] = E(V)N(d_1) - KN(d_2)$$

风险中性世界定价： $c = e^{-rT}[F_0 N(d_1) - KN(d_2)] = e^{-rT}[S_0 e^{rT} N(d_1) - KeN(d_2)]$

代入得：

$$d_1 = \frac{\ln(\hat{E}(S_T)/K) + \sigma_F^2 T/2}{\sigma_F \sqrt{T}} = \frac{\ln(S_0/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(\hat{E}(S_T)/K) - \sigma_F^2 T/2}{\sigma_F \sqrt{T}} = \frac{\ln(S_0/K) + (r - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

等价鞅测度

等价鞅测度应用实例：改进布莱克模型

- 考虑一个标的资产上执行价格为 K ，期限为 T 的欧式看涨期权。这个看涨期权的价格为：

$$c = P(0,T)E_T[\max(S_T - K,0)]$$

定义 F_0 和 F_T 分别是在0 时刻和 T 时刻的远期价值，因为 $S_T = F_T$ ：

$$c = P(0,T)E_T[\max(F_T - K,0)]$$

$$(*) \qquad E_T[\max(F_T - K,0)] = E_T(F_T)N(d_1) - KN(d_2)$$

$$(**) \qquad E_T(F_T) = E_T(S_T) = F_0$$

则：

$$c = P(0,T)[F_0 N(d_1) - KN(d_2)]$$

其中：

$$d_1 = \frac{\ln(F_0 / K) + \sigma_F^2 T / 2}{\sigma_F \sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(F_0 / K) - \sigma_F^2 T / 2}{\sigma_F \sqrt{T}}$$

利率衍生品

债券期权

内含债券期权

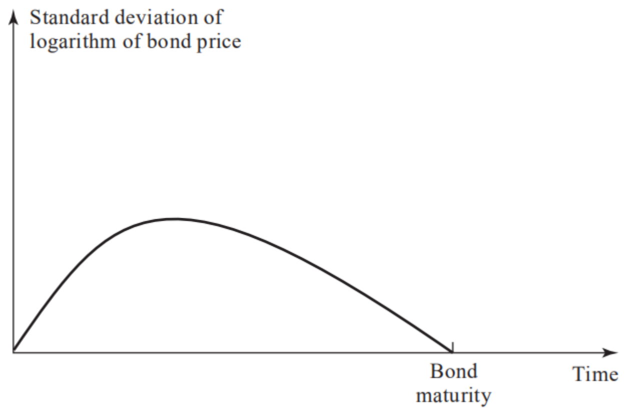
- **债券期权**是指在将来某一确定价格买入或卖出一个债券的权利。除了在场外交易市场交易外，债券期权常包含于一些债券内。其作用是在债券发行时达到吸引发行者或投资者的目的。
- **内含债券期权**：含有允许发行债券公司在将来以某时刻以事先约定价格买回债券的条款。故该债券的持有人向发行人卖出了一个看涨期权。（锁定区间）
- **可退还债券**：含有允许债券持有人在将来某一时间内以预先约定的价格提前讲债券退还给债券发行人并收回现金的条款（也称可撤销债券）。债券持有人在买入债券的同时也买入了债券的看跌期权。
- **贷款许诺**：由银行或其他金融机构提供，可被看作关于债券的看跌期权。（利率上升时客户会将手里债券卖给银行）

债券期权

欧式债券期权

- 基本定价公式：

$$c = P(0,T)[F_B N(d_1) - KN(d_2)]$$
$$p = P(0,T)[KN(-d_2) - F_B N(-d_1)]$$

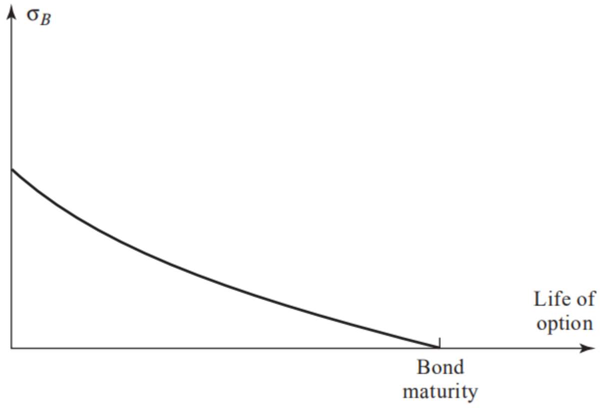


- 其中：

$$d_1 = \frac{\ln(F_B / K) + \sigma_B^2 T / 2}{\sigma_B \sqrt{T}} \text{，} \quad d_2 = d_1 - \sigma_B \sqrt{T}$$

- 这里的F_B 可以利用下式计算：

$$F_B = \frac{B_0 - I}{P(0,T)}$$



- 而波动率 σ_B 应该被取成：

$$\frac{\text{期权到期时债券价格对数值的标准差}}{\sqrt{\text{期权的期限}}}$$

债券期权

利率上限和下限

- **上限利率**保证了LIBOR高于某个上限值时的收益。（只有在LIBOR>利率上限时等于溢价乘以面值）
- 考虑一个期限为 T 、本金为 L 、上限利率为 R_K 的利率上限，其**利率重置日**为 $t_1,t_2,\cdots,t_n$ ，且定义 $t_{n+1}=T$ 和 R_k 为在 t_k 在 t_{k+1} 之间的LIBOR $(1\le k\le n)$ 。这个利率上限在 $t_{k+1}(k=1,2,\cdots,n)$ 收益为：

$$L\delta_k \max(R_k-R_K,0)$$

- 其中：

$$\delta_k=t_{k+1}-t_k$$

  且复利频率均等于重置日的频率。
- 时刻 t_{k+1} 的收益等价于：

$$\frac{L\delta_k}{1+R_k\delta_k}\max(R_k-R_K,0)\Leftrightarrow \max[L-\frac{L(1+R_K\delta_k)}{1+R_K\delta_k},0]$$

  收益等价于一个基于时间 t_k 所观察得LIBOR但收益发生在 t_{k+1} 的看涨期权。
- **利率下限**在 $t_{k+1}(k=1,2,\cdots,n)$ 收益为：

$$L\delta_k \max(R_K-R_k,0)$$

债券期权

利率上限和下限

- **上限单元定价**：

$$L\delta_k P(0,t_{k+1})[F_k N(d_1)-R_K N(d_2)]$$

$$d_1=\frac{\ln(F_k/R_K)+\sigma_k^2 t_k/2}{\sigma_k\sqrt{t_k}}$$

$$d_2=\frac{\ln(F_k/R_K)-\sigma_k^2 t_k/2}{\sigma_k\sqrt{t_k}}=d_1-\sigma_k\sqrt{t_k}$$

其中 F_k 是在时间0所观察到的在时间 t_k 和 t_{k+1} 之间的远期利率，σ_k 是它的波动率。

- **下限单元定价**：

$$L\delta_k P(0,t_{k+1})[R_K N(-d_2)-F_k N(-d_1)]$$

债券期权

欧式互换期权

- 考虑互换期权：持有者有权在 T 年后进入为期 n 年的互换交易，在互换中付出的利率为 S_k，同时收入LIBOR。假设互换的名义本金为 L，每年支付 m 次。
- 该互换期权的收益

$$\frac{L}{m}\max(s_k - s_K, 0)$$

- 标准市场模型下的定价：

$$\sum_{i=1}^{mn}\frac{L}{m}P(0,T_i)[s_F N(d_1) - s_K N(d_2)]$$

$$d_1 = \frac{\ln(s_F / s_K) + \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(s_F / s_K) - \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

其中 s_F 是在0时刻的远期互换利率，σ 为远期互换利率的波动率。相当于每笔现金流是执行价格为 s_K，标的变量为 s_T 的看涨期权收益。

债券期权

欧式互换期权

- 定义 A 为在 T_i 时刻支付 $1/m$ $(1 \le i \le mn)$ 数量现金的合约价值，即

$$A = \sum_{i=1}^{mn} \frac{1}{m} P(0, T_i)$$

- 则期权价值表示为：

$$LA[s_F N(d_1) - s_K N(d_2)]$$

- 若互换期权持有者有权收取 s_k 而不是付出 s_k，此时收益为：

$$\frac{L}{m}\max(s_K - s_k, 0)$$

- 该种期权在标准市场模型下定价：

$$LA[s_K N(-d_2) - s_F N(-d_1)]$$

利率衍生品

利率期限结构——短期利率模型

概 念

- 目的：对利率随时间变化描述，解决美式互换期权、可赎回债券等路径依赖的衍生品问题
- 方法：刻画短期利率r（t），构造利率期限结构R（t0，T）

$$R(t_0,T)=-\frac{1}{T-t0}lnP(t,T)=-\frac{1}{T-t0}lnE[e^{-\int_{t0}^{T}r(t)dt}]$$

$$dr=m(r)dt+s(r)dz$$

- $m(r)=\mu r; s(r)=\sigma r,$ $Rendleman\&Bartter$模型
- $m(r)=a(b-r); s(r)=\sigma,$ $Vasicek$模型
- $m(r)=a(b-r); s(r)=\sigma\sqrt{r},$ CIR模型

- 对利率顶、欧式债券期权和欧式互换定价，只需考虑到期日的利率概率分布
- 根据等价鞅，可推出基于零息债券价格的风险中性世界；在传统风险中性世界，短期利率r(t)为常数

利率通常具有均值回转特性，显然R&B模型不太合适

Vasicek模型

模型原理

- SDE如下：

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dz_t$$

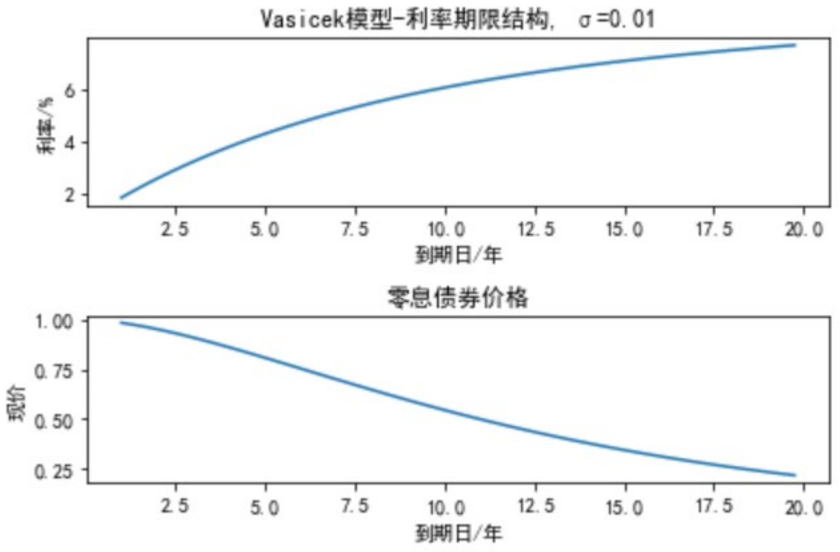
- 可解得：

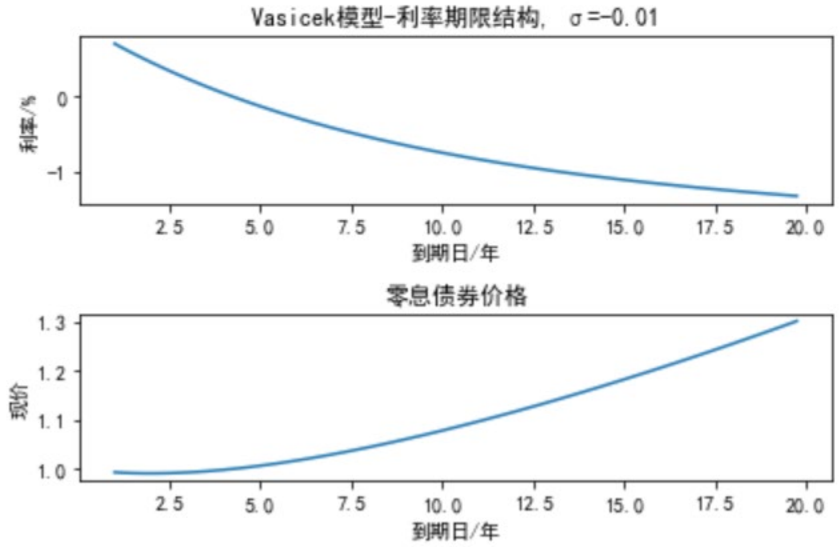
$$P(t,T) = A(t,T)e^{-B(t,T)r(t)}$$

$$\text{其中，} B(t,T) = \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a}$$

$$A(t,T) = exp\{\frac{[B(t,T) - (T-t)][a^2 b - \sigma^2/2]}{a^2} - \frac{\sigma^2 B^2(t,T)}{4a}\}$$

右上：σ>0，期限结构呈向上形状；右下：σ<0，期限结构呈向下形状





Vasicek模型

求解过程

- 解r(t)：

$$令X(t)=r(t)-b, 则SDE变为dX(t)=-aX(t)dt+\sigma dz(t)$$

$$又d(e^{at}X_t)=ae^{at}X_t dt+e^{at}dX_t=\sigma e^{at}dz_t$$

$$\Rightarrow e^{at}X_t=X_0+\sigma\int_0^s e^{as}dz_s$$

$$E(X_t)=e^{-at}X_0,\quad Var(X_t)=\frac{\sigma^2}{2a}(1-e^{-2at})$$

$$\Rightarrow X_t \xrightarrow{F} N\left(0,\frac{\sigma^2}{2a}\right)$$

$$\Rightarrow r_t=X_t+b=b+e^{-at}(r_0-b)+\frac{\sigma e^{-at}}{\sqrt{2a}}B'_{e^{2at}-1}, 其中B'是标准BM$$

- 求期望：

$$\Rightarrow P(t_0,T)=E[e^{-\int_{t_0}^T r(t)dt}]$$

$$=exp\{-b(T-t_0)+\frac{r_0-b}{a}(e^{-aT}-e^{-at_0})\}E\left[exp\{\int_{t_0}^T\frac{\sigma e^{-at}}{\sqrt{2a}}B_{e^{2at}-1}dt\}\right]$$

$$=exp\left\{-b(T-t_0)+\frac{r_0-b}{a}(e^{-aT}-e^{-at_0})+\frac{\sigma^2}{4a^3}\left[2a(T-t_0)-2-e^{-2aT}-e^{-2at_0}+4e^{-a(T-t_0)}-2e^{-a(T+t_0)}(e^{2at_0}-1)\right]\right\}$$

CIR模型

模型原理

- SDE如下：

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dz_t$$

- 可解得：

$$P(t,T) = A(t,T)e^{-B(t,T)r(t)}$$

其中，$B(t,T) = \dfrac{2(e^{\gamma(T-t)} - 1)}{(\gamma + a)(e^{\gamma(T-t)} - 1) + 2\gamma}$

$$A(t,T) = \left[\frac{2\gamma e^{(a+\gamma)(T-t)/2}}{(\gamma + a)(e^{\gamma(T-t)} - 1) + 2\gamma}\right]^{\frac{2ab}{\sigma^2}}$$

$$\gamma = \sqrt{a^2 + 2\sigma^2}$$

结论：

- 利用远期利率公式，将P(t，T)代入：

$$R(t,T) = -\frac{1}{T-t}lnA(t,T) + \frac{1}{T-t}B(t,T)r(t)$$

  - Vasicek与CIR模型的远期瞬时利率均是关于当前r(t)的线性函数关系
  - 若a、b、σ均确定，在初始时刻的短期利率r(t)确定了期限结构的大小

参数估计方法：

- 利用短期利率过去变动来估计：线性回归和MLE
- 利用市场上交易债券的价格估计：参数校正

CIR模型的解析解与Vasicek模型相似；CIR注重对利率的波动率有调整

参数估计

参数估计——MLE

- 以Vasicek模型为例，SDE的离散过程如下：

$$\Delta r = a(b - r)\Delta t + \sigma \varepsilon \sqrt{\Delta t}$$

- 似然函数：

$$f(a, b, \sigma; r_i, t) = \sum_{i=1}^{m} \left(-ln(\sigma^2 \Delta t) - \frac{[r_i - r_{i-1} - a(b - r_{i-1})\Delta t]^2}{\sigma^2 \Delta t} \right)$$

结论：

- 第一种估计方法：

　　采用历史数据作回归或MLE，提供的是现实世界的参数估计，用于情形分析

- 第二种估计方法：

　　采用当前交易市场的零息债券价格作校正，提供的是风险中性世界的参数估计，用于MC模拟期限结构

衍生品

1 股权衍生品

2 利率衍生品

3 **商品及其衍生品**

商品衍生品概述

特点及衍生品

- **商品特点**
  - 价格决定方式：供需
  - 风险来源：产量、现货价格、消费、全球增长、天气条件
  - 套利与对冲的困难性：时间/空间转换、地理限制.
- **常见衍生品**
  - 远期
  - 期货
  - 期权
  - 互换

$$f^T(t) = S(t)\, e^{(r-y)(T-t)}$$

$$F^T(t) = E[S(T)/\mathcal{F}_t]$$

$$f^T(t) = F^T(t)$$

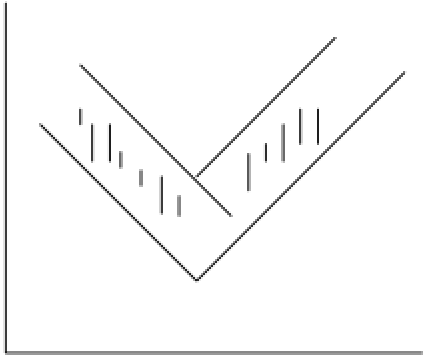
Spot trading	Forward contracts	Futures contracts
◆ *commercial contract* ◆ flexible covenants	◆ *bilateral agreement* ◆ flexible covenants	◆ *standardized instrument* ◆ necessity of a physical delivery or termination of the position before maturity
◆ juridical commitments of the buyer and seller until execution of the contract	◆ replace spot transactions on many occasions (e.g., in the case of a non-storable commodity such as electricity)	◆ buyer and seller only refer to the clearing house
⇩	⇩	⇩
◆ long transaction	◆ form of contracting totally appropriate for commodities	◆ central clearing mechanism generating "market prices"
◆ illiquid and discontinuous market	◆ credit risk fully present	◆ price transparency
◆ allows the transfer of goods in conditions suiting the demand	◆ flexibility regarding the optimal transfer of goods	◆ liquidity
		◆ low transaction costs

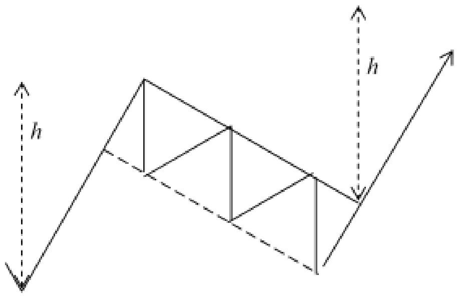
参考文献：commodity and commodity derivatives. Helyette geman

商品市场概览

常见市场

- **农产品市场（谷物、饮料、牲畜）**
  - 决定因素：供给、需求与库存
    - 供给：往期存储、当期产量和进口量
    - 需求：国内需求、出口需求
  - 分析关键
    - 基本面：供需、carry-over、天气
    - 技术手段：channel, flag, Fibonacci，etc.





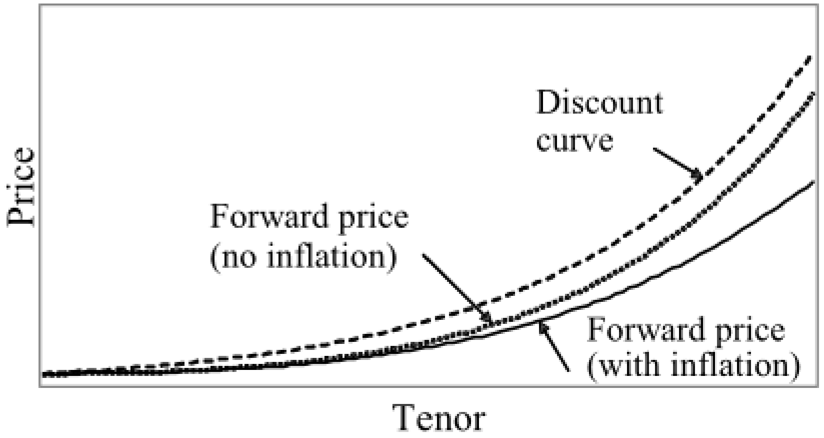
参考文献：commodity and commodity derivatives. Helyette geman

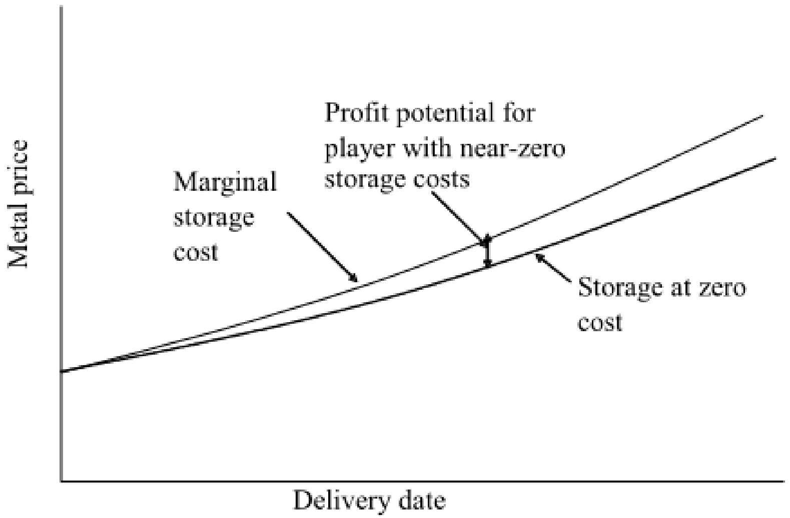
商品市场概览

常见市场

- **金属市场（铝、铜、铅、镍、锡）**
  - 特点：可分割、可提取、易存储
  - 价格影响因素：下游消费者可得性、存储产品能力、市场壁垒、议价能力
  - 互换、远期等

$$f^T(t) = S(t)\, e^{(r-y)(T-t)}$$





参考文献：commodity and commodity derivatives. Helyette geman

商品市场概览

常见市场

- **石油市场**
  - 石油的直接价格已经对整个能源系统(成品油、煤、天然气、电力)产生了深远的影响。
  - 大多数石油交易都与等级、地点、市场和交付期之间的价差有关
  - 密度及硫化物内容；原油流及标准（WTI, Brent blend and Dubai）；
  - Forward market: short maturities（15 days brent）
  - Financial swaps (CFDs)

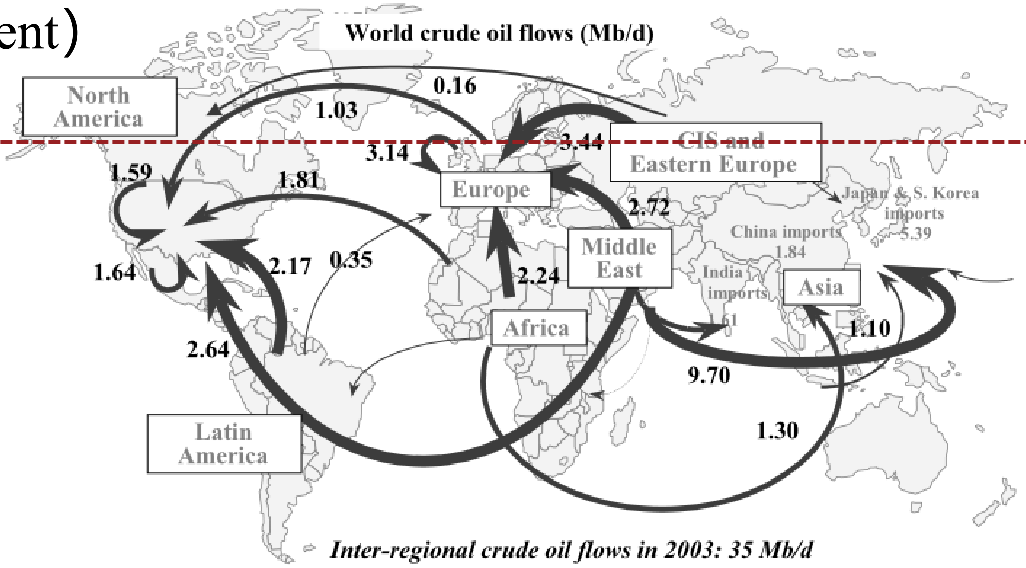


Figure 9.3 The global crude oil market.
Source: Total, *Platt's*.

参考文献：commodity and commodity derivatives. Helyette geman

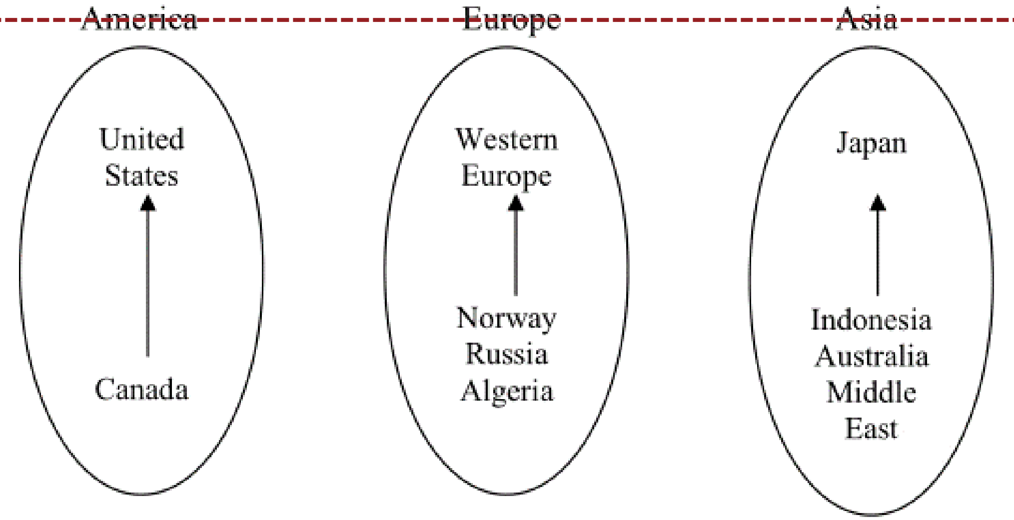
商品市场概览

常见市场

- **天然气市场（natural gas, LNG）**
  – 增长最快的能源商品，大洲之间存在套利机会
  – 价格决定因素：质量、地域、开采成本、运输成本、竞品（石油、电力等）

$$P = P_0 + a(X - X_0) + b(Y - Y_0)$$
$$P(\text{ex-ship}) = P_0 + a_1(\text{JCC} - \text{JCC}_0) + a_2(\text{Inflation} - \text{Inflation}_0)$$

  – 期货、期权（NYMEX, KCBOT, IPE, NGX）



参考文献：commodity and commodity derivatives. Helyette geman

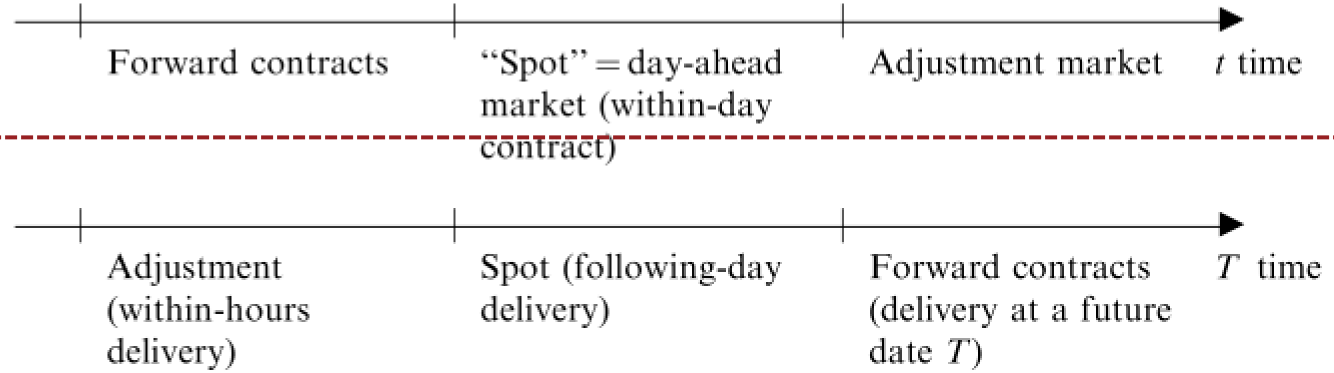
商品市场概览

常见市场

- **电力市场**
  - 特点：必要，不可存储，物理传输——需求的无弹性，没有库存缓冲效应
  - 现货定价

$$\begin{cases} \ln S(t) = f(t) + X(t) + Y(t) \\ dX(t) = [\alpha - kX(t)]\,dt + \sigma_1\,dW^1(t) + J(t)\,dN(t) \\ dY(t) = [\beta - Y(t)]\,dt + \sigma_2\,dW_2(t) \end{cases}$$

  - 衍生品类型
    - 远期合约（不可存储性） $F^T(t) = E_p[S(T)/F_t] + \text{Risk premium}$
    - 期货（Nord Pool, EEX）
    - 期权：相对较少，算术平均



参考文献：commodity and commodity derivatives. Helyette geman

商品市场概览

衍生市场

- **Emissions**
  - 全球变暖，环保意识增加
  - green certificates及以其为标的的交易市场

- **Weather （温度、雨水、湿度等）**
  - 对除金属外的商品影响巨大 （农产品产量及质量、电力运输产生等）
  - 相应衍生品可以用于对冲受影响市场的波动
  - CME（芝加哥商品交易所）进行月度或季度交易

$$(\mathrm{HDD})_{\mathrm{day}\,j} = \max(0, 65^{\circ}\mathrm{F} - \text{Average temperature}_j)$$

$$P(T) = \text{Nominal amount} \times \max(0, k - \text{Cum HDD}(T))$$

$$\text{Cum HDD} = \sum_{j=1}^{90} (\mathrm{HDD})_j$$

$$C(T) = A \max(0, \text{Cum HDD}(T) - k)$$

参考文献：commodity and commodity derivatives. Helyette geman

重要期权形式

能源市场

- **互换与互换期权**
  - $V_{\text{swap}}(t) = \sum_{i=1}^{q} e^{-r(t_j - t)} Q[F^{t_j}(t) - G]$
  - $C_{\text{swap}}(t) = e^{-r(T-t)} E_Q[\max(0, V_{\text{swap}}(T))/F_t]$

- **差价期权 （spread options）**
  - 商品价差、期限价差

- **波动期权（swing options）**
  - 对于天然气及电力市场尤为适用

$$m \le q_t \le M \qquad A \le \sum_t q_t \le B$$

参考文献：commodity and commodity derivatives. Helyette geman

北京大学量化交易协会