

5 Beispiele und Anwendung der DFT

Die DFT soll praktisch erprobt werden. In der Mehrzahl der Anwendungen liegen Messdaten vor, aus denen empirische Gesetze herauszulesen sind. Mit einem einfachen Programm lassen sich Datenlisten mit DFT in diskrete Spektren umrechnen. Die Kraft der Methode zeigt sich bei der Interpretation der Spektren. Oft genügt es nämlich, die dominanten Fourierkoeffizienten zu berücksichtigen und alle andern durch 0 zu ersetzen, um brauchbare Näherungsgesetze aus den Daten herzuleiten. Dieses Vorgehen ist typisch im Zusammenhang mit Anwendungen der DFT. Geometrisch gesprochen wird durch Normalprojektion eine «beste Näherung» gesucht, wobei jedoch gleichzeitig gewisse Informationen ausgeblendet werden. Oft sind es die hochfrequenten Schwingungsanteile, falls deren Amplituden (oder die entsprechenden «Energien») klein sind. In diesem Sinne ist nicht immer eine treue Rekonstruktion der Daten das Ziel, sondern eher eine systematische Reduktion der Datenmenge, wobei die «wesentlichen Aspekte» oder das «Signal» in guter Näherung erhalten bleiben sollen, während das «Rauschen» zu unterdrücken ist. Die Aufspaltung in «Signal» und «Rauschen» wird mit «Filterung» treffend umschrieben.

Neben den Erfolgen der Methode werden sich auch Probleme beim Umgang mit echten Daten zeigen, in denen Messverfahren oder Messfehler «Rauschen» erzeugen oder gewisse theoretische Vorgaben nicht exakt eingehalten werden.

Voraussetzungen

Praktisches Grundverständnis für DFT (Kapitel 4). Elementare Programmierkenntnisse.

Ziel

Verschiedene Anwendungen der DFT vorführen und DFT-Spektren interpretieren.

5.1 Ein DFT-Programm

Für die Bearbeitung der folgenden Beispiele und Anwendungen wird ein einfaches DFT-Programm entworfen. Es wird in einem Pseudocode formuliert. Ein Programm für den CAS-Rechner VoyageTM 200 wird im Kapitel 7 angegeben. Manche Rechner verfügen bereits über ein sogenanntes FFT-Programm, das denselben Zweck erfüllen kann. Die «schnelle Fouriertransformation» (FFT) ist ein sehr effizienter Algorithmus, um DFT auch mit großen Datenmengen auszuführen. Allerdings ist FFT oft an besondere Voraussetzungen über die Länge der Datenlisten gebunden. Das einfache DFT-Programm benötigt diese Voraussetzungen nicht.

Eingaben

Anzahl der Datenpunkte: N

Datenpunkte, Liste mit Index 0 bis N-1: DTA

Index des höchsten auszugebenden DFT-Koeffizienten: NMAX

Verarbeitung

Hilfsgrößen:

LET omega=2*PI/N

LET n2=MIN(INT(N/2), NMAX)

Koeffizientenberechnung:

```
FOR K=1 TO n2
  LET AK(K)=0
  LET BK(K)=0
  FOR J=0 TO N-1
    LET AK(K)=AK(K)+DTA(J)*COS(omega*K*J)
    LET BK(K)=BK(K)+DTA(J)*SIN(omega*K*J)
  NEXT J
  LET AK(K)=AK(K)*2/N
  LET BK(K)=BK(K)*2/N
NEXT K
LET A0=0
FOR J=0 TO N-1
  LET A0=A0+DTA(J)
NEXT J
LET A0=A0/N
IF n2=N/2 THEN
  LET AK(n2)=0
  LET s=-1
```

```

    FOR J=0 to N-1
        LET s=-s
        LET AK(n2)=AK(n2)+s*DTA(J)
    NEXT J
    LET AK(n2)=AK(n2)/N
END IF

```

Ausgabe

```

IF n2 < N/2 THEN
    PRINT A0, AK(1),...,AK(n2), BK(1),...,BK(n2)
ELSE
    PRINT A0, AK(1),...,AK(n2), BK(1),...,BK(n2-1)
END IF
END

```

5.2 Beispiele zur DFT

Zur Illustration werden verschiedenartige Beispiele betrachtet. Zuerst wird DFT bei der Termumformung benutzt, um ein trigonometrisches Polynom in die Standarddarstellung zu bringen. Der Vorteil dieses theoretischen Beispiels gegenüber echten Anwendungen besteht darin, dass die Daten frei von Messfehlern sind und dass das Ergebnis der Analyse auch algebraisch gewonnen werden kann.

Bei der praktischen Anwendung der DFT müssen in der Regel Kompromisse eingegangen werden. Fast immer sind die experimentellen Daten mit Messfehlern behaftet. Oft ist die genaue Periodenlänge nicht bekannt oder sie kann beim Messen nicht exakt eingehalten werden. Beispielsweise, weil die Sonne am Tag nur einmal aufgeht oder weil ein Jahr nicht genau eine ganze Zahl von Tagen umfasst. Die weiteren Beispiele stammen aus der Akustik, der Astronomie, der Klimatologie und der Biologie. Sie zeigen verschiedene Variationen zum Thema.

Rekonstruktion eines trigonometrischen Polynoms aus Abtastwerten

Es sei $p: t \mapsto (\sin(t))^3$. Aus der Formel $\sin(3t) = 3\sin(t) - 4(\sin(t))^3$ lässt sich die Darstellung $(\sin(t))^3 = 0.75\sin(t) - 0.25\sin(3t)$ algebraisch herleiten. Wir benutzen die Funktion p für den folgenden Test des DFT-Programmes: Die Funktion p wird in den N Punkten $t_k = k \cdot 2\pi/N$ mit $k = 0, \dots, N-1$ ausgewertet. Die Liste $[p(t_k)]$ liefert dann mit DFT bis auf Rechnergenauigkeit als Fourierkoeffizienten $\hat{b}_1 = 0.75$, $\hat{b}_2 = 0$ und $\hat{b}_3 = -0.25$, sobald $N > 6$ gewählt wird. Diese mit den diskreten Abtastwerten berechneten Koeffizienten stimmen mit den für die Funktion p algebraisch ermittelten Fourierkoeffizienten überein. Die Funktion p lässt sich aus $N > 6$ gleichabständigen Abtastwerten vollständig rekonstruieren.

A E I O U, Vokale aus dem Klang erkennen

Was macht den Klang der Stimme aus? Worin besteht der Unterschied, der uns erlaubt, ein «O» von einem «U» zu unterscheiden? Um dieser Frage nachzugehen, nahm ich Schallschwingungen mit einem Mikrofon auf. Die Daten wurden in Schritten von 0.25 Millisekunden abgetastet. Sie sind also schon diskretisiert. Die Auswertung wird zeigen, dass einige wenige «wichtige» Frequenzen charakteristische Eigenschaften der Schwingungsform erzeugen. Diese Frequenzen lassen sich durch objektive Kriterien erkennen und auslesen. Dabei wird das hochfrequente «Rauschen» in der Stimme unterdrückt.

Die Daten wurden mit einem Mikrofon und einem TI-CBL (Computer Based Laboratory System) erfasst. In der Abbildung 5.1 sind unbearbeitete Rohdaten aufgezeichnet. Ein ähnliches Bild lässt sich auf der Anzeige des Grafikrechners erzeugen. Die Bilder zeigen, dass die Schwingungen annähernd periodisch sind und jeder Vokal eine Schwingungsform mit eigener Periodenlänge und charakteristischer Gestalt erzeugt. Zufällig werden beim Vokal «U» gerade vier Perioden erfasst. Diese Daten eignen sich für die Auswertung mit dem DFT-Programm aus Kapitel 7. Deshalb wird nun die Spektralanalyse der Stimme beim Sprechen von «U» und die Synthese der Schwingungsform aus dem DFT-Spektrum vorgeführt.

Es ist nicht von vornherein klar, wie viele und welche Koeffizienten aus dem DFT-Spektrum «interessant» sind. Erinnern wir uns an die Vorbetrachtungen über harmonische Schwingungen in Kapitel 2. Dort wurde

erwähnt, dass die «Energie» E einer Schwingung $a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)$ proportional zu $a^2 + b^2$ ist. Es ist mindestens physikalisch plausibel, die Energieanteile der einzelnen harmonischen Schwingungen zu betrachten.

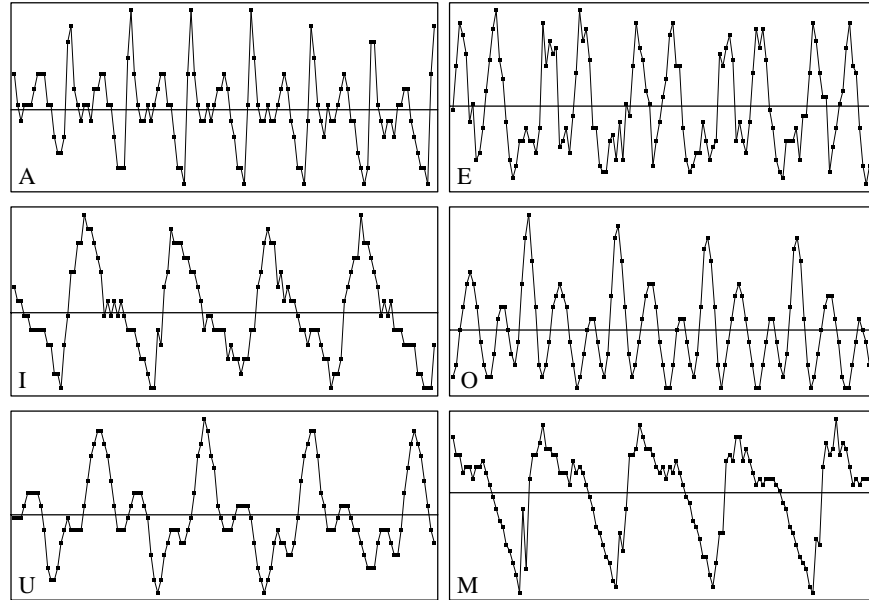


Abbildung 5.1: Druckamplituden beim Sprechen der Vokale A, E, I, O und U und des Konsonanten M (Rohdaten, ungefiltert, willkürliche Einheiten)

Wir berechnen also das «Energiespektrum» $\{E_k\} = \{\hat{a}_k^2 + \hat{b}_k^2\}$ zum DFT-Spektrum. Es zeigt an, wie sich die «Energien» auf die verschiedenen Oberschwingungen der Grundfrequenz verteilen. Im vorliegenden Falle konzentrieren sich die «Energien» $E_k = \hat{a}_k^2 + \hat{b}_k^2$ auf die Vierfachen der Grundfrequenz. Das ist plausibel und liegt daran, dass sich die Auswertung über vier volle Perioden erstreckt hat.

$E_{1...10}$	6	0.3	2	355	1	1.2	1.3	104	1.2	1
$E_{11...20}$	1.6	157	3.7	0.6	0.2	13.7	1.4	0.9	0.1	2.4

Tabelle 5.1: Energiespektrum E_1, \dots, E_{20} zum DFT-Spektrum des Vokals «U» (willkürliche Einheiten)

Die Tabelle 5.1 weist eine weitere Eigenschaft auf: Die hohen Frequenzanteile fallen rasch ab. Oberhalb von E_{16} sind die Energiewerte gering. Da

die Einheiten nicht festgelegt sind, sollen bloß die relativen Größen der Amplituden beachtet werden. Die DFT-Koeffizienten (in willkürlichen Einheiten) lauten:

$$\begin{array}{cccc} \hat{a}_4 \approx 1.18 & \hat{a}_8 \approx -1.02 & \hat{a}_{12} \approx -1.20 & \hat{a}_{16} \approx 0.37 \\ \hat{b}_4 \approx -1.47 & \hat{b}_8 \approx 0 & \hat{b}_{12} \approx 0.38 & \hat{b}_{16} \approx 0 \end{array}$$

Wird die Schwingung mit einem trigonometrischen Polynom vierter Ordnung

$$s(t) = \hat{a}_4 \cos(t) + \hat{b}_4 \sin(t) + \hat{a}_8 \cos(2t) + \dots + \hat{b}_{16} \sin(4t)$$

rekonstruiert, ergibt sich schon eine recht gute Näherung an die typische Gestalt der Schallschwingung. Der Graf der rekonstruierten Schwingung

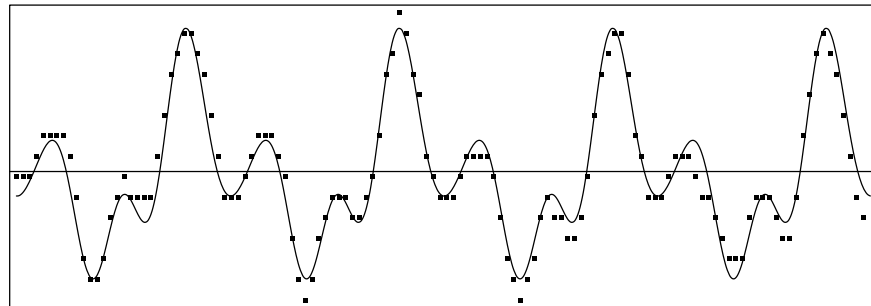


Abbildung 5.2: Graf des trigonometrischen Polynoms vom Grad 4 und Daten

zeigt einen ruhigeren Verlauf als die Daten, er ist zudem exakt periodisch. Die Auswahl der dominanten Fourierkoeffizienten zu den «niedrigen» Frequenzen hat die Daten geglättet. Das «Rauschen» wurde mit den hohen Frequenzen weggefiltert.

Es ist aber auch aufschlussreich, das Signal aus den verschiedenen harmonischen Bestandteilen *schrittweise* aufzubauen und die Ergebnisse grafisch darzustellen (Abbildung 5.3).

Der Vollständigkeit halber sei noch angefügt, dass die Periodenlänge $0.00025 * 126/4 \approx 0.00788$ Sekunden beträgt, entsprechend einer Frequenz der Grundschwingung von rund 127 Hz. Bei der Auswertung mit dem DFT-Programm ist darauf zu achten, dass sich die Daten möglichst genau über eine ganze Anzahl von Perioden erstrecken. Allenfalls müssten gewisse Daten nach der Aufnahme aufgrund des Augenscheins noch aus der Messreihe entfernt werden.

Die Verschiedenartigkeit der Schwingungsformen, die zu den einzelnen Vokalen gehören, zeigt sich klar in den zugehörigen DFT-Spektren. Anhand der Spektren lassen sich die Vokale unterscheiden. Andererseits werden dem Spektrum gewisse individuelle Eigenschaften der Stimme aufgeprägt. Es ergeben sich hier interessante Fragen, die Schülerinnen und Schüler bereits mit einer bescheidenen Laborausrüstung (z. B. TI-CBL mit Mikrofon) selbst untersuchen können.

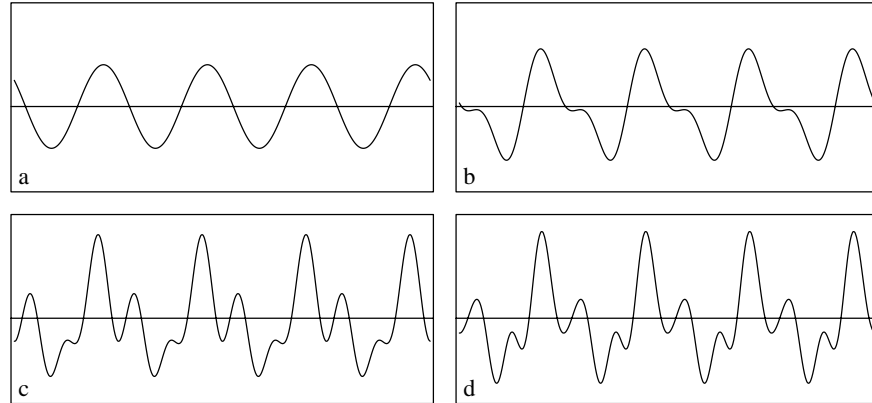


Abbildung 5.3: Grundschiwingung (a), Grundschiwingung und Oberschiwingungen bis zur Ordnung 2 (b), 3 (c) und 4 (d)

Jahresgang der Tageslänge

Für eine gegebene geografische Breite hängt die Tageslänge vom Datum ab. Mit «Tageslänge» soll beispielsweise die Zeitdifferenz zwischen Auf- und Untergang der Sonne über dem (astronomischen) Horizont verstanden werden. Die Tageslänge schwankt im Laufe des Jahres, aber abgesehen vom Polargebiet ist die tägliche Veränderung bescheiden. Wer der Sache auf den Grund gehen möchte, findet, dass die Schiefe der Erdachse gegenüber der Ekliptik und die Ellipsengestalt der Erdbahn die Veränderungen verursachen.

Hier soll am Beispiel gezeigt werden, wie DFT die rein phänomenologische Modellbildung unterstützt, die also ohne kausale Herleitung oder Begründung auskommt. An Stelle von Beobachtungsdaten mögen die Angaben eines Kalenders treten, der die Auf- und Untergangszeiten der Sonne verzeichnet. Als Tageslänge soll die Differenz dieser beiden Zeitpunkte gel-

ten. Im Sinne eines Experimentes werden bloß die Längen von 12 Tagen als Daten benutzt, die gleichmäßig über das Jahr verteilt sind (Tabelle 5.2). Die fehlenden 354 Tageslängen werden durch DFT rekonstruiert. Ob 12 Datenpunkte genügen werden, ist vorerst nicht klar. Ein Vergleich des Ergebnisses mit den Kalenderdaten erlaubt aber eine Kontrolle für jeden Tag.

Datum	1.1.	1.2.	2.3.	2.4.	3.5.	4.6.
[min]	465	540	657	786	906	994
Datum	4.7.	3.8.	2.9.	2.10.	2.11.	2.12
[min]	1000	923	812	691	570	478

Tabelle 5.2: Tageslänge für Berlin 1996

Die aus dem Kalender abgelesenen Werte sind nur angenähert gleichmäßig über das Jahr verteilt und die Kalenderdaten des Schaltjahres 1996 erstrecken sich über 366 Tage statt über eine exakte Periodenlänge von 365.2422 Tagen. Es ergeben sich dadurch Diskretisierungsfehler von höchstens 2 Minuten gegenüber den theoretisch idealen Werten. Durch Interpolation der nächstliegenden Kalenderdaten auf den theoretisch exakten Termin lassen sich die Daten noch verbessern.

n	0	1	2	3	4	5	6
$\hat{a}(n)$	735.17	-259.84	-2.83	-7.33	0.33	-0.32	-0.16
$\hat{b}(n)$	—	53.04	-2.31	6.33	-0.29	0.79	—

Tabelle 5.3: DFT-Koeffizienten zu den Daten der Tabelle 5.2

In der Tabelle 5.3 erscheint der Mittelwert \hat{a}_0 der Tageslänge. Anstatt der erwarteten 720 Minuten beträgt $\hat{a}_0 \approx 735$ Minuten, also 12.25 Stunden. Dies ist zunächst etwas überraschend, kann aber erklärt werden. Der hauptsächliche Einfluss stammt von der atmosphärischen Refraktion. Sie verursacht eine Krümmung der Lichtstrahlen. In Horizontnähe ist der Effekt von der Größenordnung des scheinbaren Sonnendurchmessers (ca. 30').

Die Tabelle 5.3 zeigt ferner, dass die Beträge der Koeffizienten \hat{a}_4 , \hat{a}_5 , \hat{a}_6 und \hat{b}_4 , \hat{b}_5 rasch abfallen. Die Größenordnung des Restfehlers Δ wird nach der Methode der kleinsten Quadrate bestimmt. Als Abschätzung ergibt sich $\Delta^2 \approx \hat{a}_4^2 + \dots + \hat{b}_5^2 < 1$. Es ist also eine minutengenaue Rekonstruktion der

Tageslänge durch ein trigonometrisches Polynom vom Grad 3 zu erwarten. Die Näherungsformel für die Tageslänge in Berlin $D(T)$ und am Tage mit der Nummer T ergibt sich demnach angenähert zu

$$D(T) = 735.17 - 259.84 \cos(\tau) + 53.04 \sin(\tau) - 2.83 \cos(2\tau) - 2.31 \sin(2\tau) - 7.33 \cos(3\tau) + 6.33 \sin(3\tau)$$

wobei zur Abkürzung $\tau = 2\pi T/365.2422$ verwendet wurde. Für manche Anwendungen ist die mit DFT anhand der Kalenderdaten gefundene Näherung brauchbar. Wer mit einer Toleranz von rund 10 Minuten zufrieden ist, kann sich sogar mit der Näherung durch eine rein harmonische Schwingung begnügen.

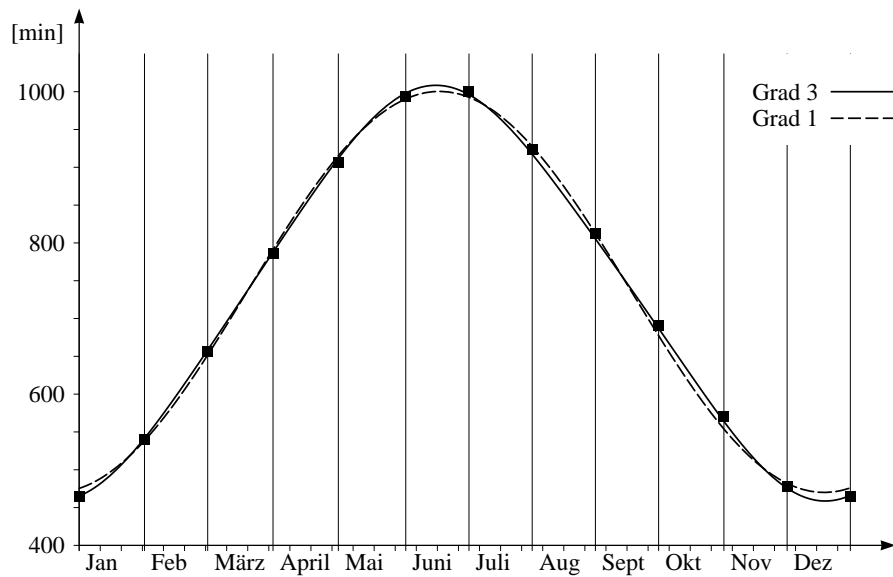


Abbildung 5.4: Grafen der besten Näherungen für die Tageslänge $D(T)$ durch trigonometrische Polynome vom Grad 1 und 3

Zeitgleichung

Der zeitliche Abstand von einem Meridiandurchgang der Sonne zum nächsten ist ein Sonnentag. Beobachtungen zeigen, dass die Länge eines Sonnentages im Vergleich zum Gang einer gleichmäßig laufenden Uhr etwas schwankt. Die Wahre Sonnenzeit, welche eine unkorrigierte ideale Sonnenuhr anzeigen würde, unterliegt im Jahresgang periodischen Schwankungen

im Vergleich zur Zeit, die mit modernen Uhren gemessen wird. Gleichmäßig laufende Uhren zeigen im Vergleich zum Gang der Sonne eine «mittlere Zeit» an. Die Differenz zwischen der Wahren Sonnenzeit und der mittleren Ortszeit wird als *Zeitgleichung* bezeichnet. Sie ist abhängig vom Datum und sie wiederholt sich immer wieder nach genau einem Jahr. Die Zeitgleichung ließe sich aus der Stellung der Erdachse zur Bahnebene (Ekliptik) und den Keplergesetzen erklären und berechnen. Ausgehend von einer grafischen Darstellung soll nun ein Näherungsgesetz für die Zeitgleichung mit DFT gefunden werden.

Datum	1.1.	1.2.	2.3.	2.4.	3.5.	3.6.
Δt	-3.2	-13.6	-12.3	-3.9	3.1	2.0
Datum	4.7.	3.8.	3.9.	3.10.	2.11.	2.12.
Δt	-4.1	-6.1	0.5	10.7	16.3	10.6

Tabelle 5.4: Zeitgleichung für 12 («gleichabständig») ausgewählte Tage, Δt in Minuten

\hat{a}_0	\hat{a}_1	\hat{a}_2	\hat{a}_3	\hat{a}_4	\hat{a}_5	\hat{a}_6
0	0.342	-3.575	0.083	-0.125	0.025	0.05
-	\hat{b}_1	\hat{b}_2	\hat{b}_3	\hat{b}_4	\hat{b}_5	-
-	-7.528	-9.165	-0.25	-0.159	-0.022	-

Tabelle 5.5: Mit DFT bestimmte Fourierkoeffizienten für ein Näherungsgesetz, das die Zeitgleichung darstellt

Welches Näherungsgesetz beschreibt die Zeitgleichung so gut, wie es der Genauigkeit einer sehr guten Sonnenuhr entspricht, das heißt mit einem Fehler von höchstens einer halben Minute? Wir verwenden als Daten 12 gleichmäßig verteilte Messpunkte (Tabelle 5.4). Ein interpolierendes trigonometrisches Polynom wird mit DFT gefunden. Die DFT-Koeffizienten sind in der Tabelle 5.5 enthalten.

Zur Kontrolle werden die Daten von der Tabelle 5.4 und die Rekonstruktion der Zeitgleichung mit der interpolierenden Funktion in der Abbildung 5.5 aufgezeichnet. Es zeigt sich, dass die so gefundenen und gerundeten Fourierkoeffizienten genügen, um die geforderte Genauigkeit zu erzielen. Der Wert $\hat{a}_0 = 0$ zeigt, dass die mittlere Abweichung der Sonnenzeit von der «Mittleren Ortszeit» erwartungsgemäß verschwindet.

Mit DFT gelingt es, die Zeitgleichung zu simulieren, ohne die dynamischen und geometrischen Ursachen für die Variation der Wahren Mittagszeit

im Vergleich zur Mittleren Ortszeit zu kennen. Es reicht in dieser Anwendung, rund einen Dreißigstel aller Daten zu kennen, um ein beachtlich genaues Näherungsgesetz zu finden. Allerdings ist auch anzumerken, dass die verwendeten Daten aus einer Grafik abgelesen wurden. Die ausgewählten Zeitpunkte sind möglichst gleichmäßig über ein Jahr verteilt; sie wurden aber auf ganze Tage gerundet.

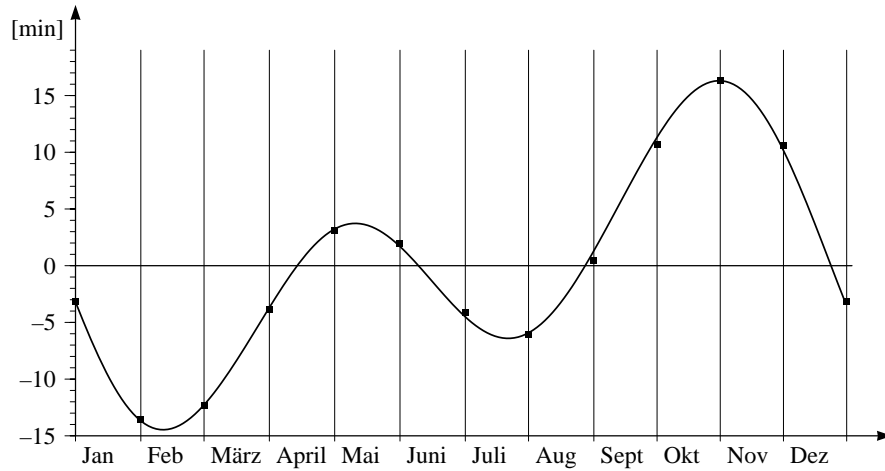


Abbildung 5.5: Grafische Darstellung der Zeitgleichung: Daten und Rekonstruktion

Jahresgang der mittleren Temperatur

In der Klimatologie interessiert man sich unter anderem für Temperaturmittel über gewisse Zeitintervalle (Stunden, Tage, Monate, ...) an verschiedenen Orten. Für einen festen Ort hängt der Wert dieser Mittel noch von der Epoche ab, über die gemittelt wurde. Je länger die Epoche ist, desto «stabiler» sollten die Mittelwerte sein, jedenfalls wenn man von der Annahme ausgeht, dass das Wetter an jedem Ort bloß Schwankungen um einen Gleichgewichtszustand verursacht. Berechnen wir Mittelwerte für einen bestimmten Tag oder einen bestimmten Monat mit den Daten der letzten 100 Jahre, so sind diese Werte nur ganz schwach veränderlich. Es bereitet Mühe, aus derartigen Mittelwerten langfristige Klimaschwankungen eindeutig zu erkennen. Dennoch deutet das stetige Zurückweichen der Gletscher in den Alpen eine Erwärmung an.

Im folgenden Experiment betrachten wir langjährige Monatsmittel der

Temperatur an verschiedenen Orten oder für verschiedene Epochen. Wir haben also Listen von 12 (fast) gleichmäßig über das Jahr verteilten Werten, die sich periodisch wiederholen (Tabelle 5.6). Mit DFT lassen sich die zugehörigen Fourierkoeffizienten bestimmen (Tabelle 5.7).

	Zürich 1901–1960	Zürich 1961–1990	Säntis 1961–1990	Jungfrauoch 1961–1990
Jan	−1.0	−0.5	−7.6	−13.6
Feb	0.2	0.9	−8.0	−14.2
März	3.9	4.2	−7.0	−13.1
April	7.7	7.9	−4.6	−10.8
Mai	12.1	12.2	−0.5	−6.6
Juni	15.0	15.4	2.4	−3.7
Juli	16.7	17.7	4.9	−1.2
Aug	16.0	16.8	4.9	−1.2
Sept	12.9	13.9	3.4	−2.6
Okt	7.8	9.2	1.0	−5.2
Nov	3.0	3.9	−4.2	−10.4
Dez	0.0	0.6	−6.4	−12.3

Tabelle 5.6: Monatsmittel der Temperatur

	Zürich 1901–1960	Zürich 1961–1990	Säntis 1961–1990	Jungfrauoch 1961–1990
\hat{a}_0	7.87	8.52	−1.81	−7.91
\hat{a}_1	−8.90	−8.96	−6.39	−6.38
\hat{a}_2	≈ 0	≈ 0	0.25	0.31
\hat{a}_3	≈ 0	≈ 0	0.27	0.32
\hat{a}_4	≈ 0	≈ 0	0.23	0.21
\hat{a}_5	≈ 0	≈ 0	−0.13	−0.14
\hat{a}_6	≈ 0	≈ 0	≈ 0	≈ 0
\hat{b}_1	−0.1	−0.51	−2.24	−2.27
\hat{b}_2	0.42	0.53	0.29	0.27
\hat{b}_3	≈ 0	≈ 0	0.25	0.20
\hat{b}_4	≈ 0	≈ 0	≈ 0	−0.1
\hat{b}_5	≈ 0	≈ 0	−0.31	−0.33

Tabelle 5.7: Fourierkoeffizienten des Jahresganges der Temperaturen, ausgehend von den Monatsmitteln der Temperatur

Der Koeffizient \hat{a}_0 entspricht dem Jahresmittel. Mehr Informationen über den Messort enthalten die andern Koeffizienten. Es fällt auf, dass die Fourierkoeffizienten von je zwei Messreihen außer \hat{a}_0 sehr gut übereinstimmen. Der mittlere Temperaturgang, der für Zürich rekonstruiert wurde, entspricht fast einer reinen harmonischen Schwingung mit der Periode von einem Jahr. Im Vergleich zur Mittellandstation Zürich SMA sind bei den beiden Bergstationen merkliche Anteile von höheren Frequenzen vorhanden und die Amplituden der Grundschiwingung sind geringer. Lässt sich der Unterschied in den Spektren der Station Zürich und der beiden Bergstationen physikalisch deuten? Hier ist ein Versuch: Die Landmassen im Mittelland erwärmen sich hauptsächlich durch die Sonneneinstrahlung und bestimmen die Monatsmittel der Lufttemperatur wesentlich.

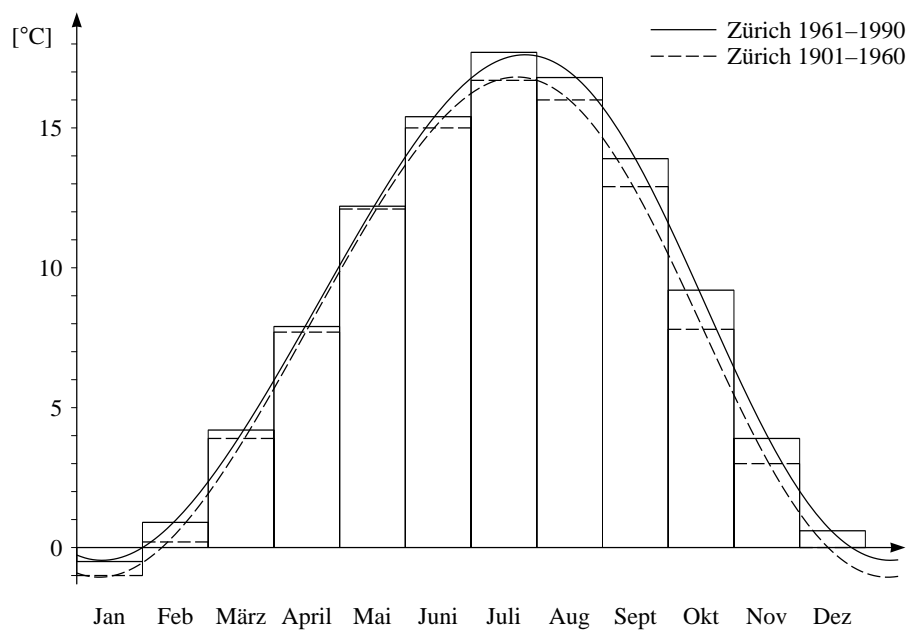


Abbildung 5.6: Rekonstruktion des Jahresganges der mittleren Tagestemperatur für die beiden Messreihen aus Zürich.

Es lässt sich vermuten, dass der mittlere Temperaturgang in Zürich wesentlich von der Sonneneinstrahlung und der Tageslänge diktiert wird. Gegenüber dem Sonnenstand (Maximum am 21.6.) hinkt das Temperatursignal hintennach. Die Verzögerung ist noch deutlicher erkennbar in der Grundschiwingung, die aus den Daten der Bergstationen abgeleitet wurde. In

diesen Daten treten auch noch deutliche Oberschwingungen zutage. Vielleicht sind sie Zeichen von großräumigen Wechsellinien in der Luftzirkulation, etwa dem Zustrom von warmer Luft im Herbst. Jedenfalls erzeugen die Oberschwingungen einen erkennbar unruhigeren Verlauf der Temperaturkurven von Säntis und Jungfraujoch im Vergleich zum Jahresgang der Temperatur von Zürich.

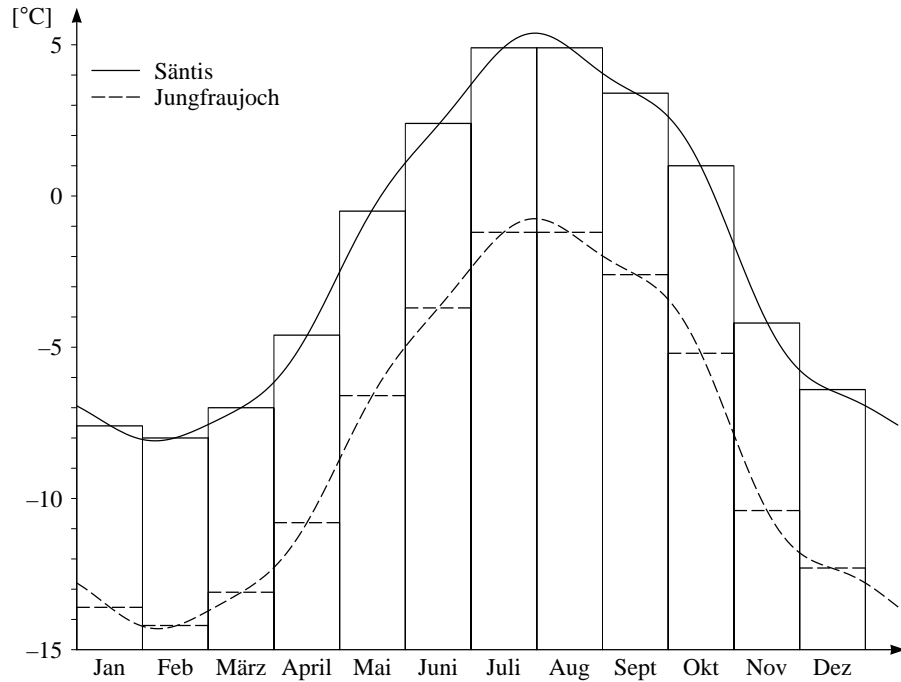


Abbildung 5.7: Rekonstruktion des Jahresganges der mittleren Tagestemperatur für die Messreihen Säntis und Jungfraujoch

Beim Versuch, von den Monatsmitteln auf die Tagesmittel zurückzuschließen, können die mittleren Monatstemperaturen nicht auf den Anfang des Monats bezogen werden. Es ist eine plausible Annahme, aber auch nicht mehr, dass die mittleren Monatstemperaturen etwa der mittleren Tagestemperatur in der Mitte des Monats entsprechen. In den Abbildungen 5.6 bis 5.8 ist dies berücksichtigt. Damit lassen sich die mittleren Tagestemperaturen angenähert aus den Mittelwerten der Monatstemperatur zurückgewinnen. Es ist klar, dass diese Rekonstruktionen höchstens für die Klimatologie interessant sein werden und nicht für die Beschreibung des aktuellen Wetters taugen.

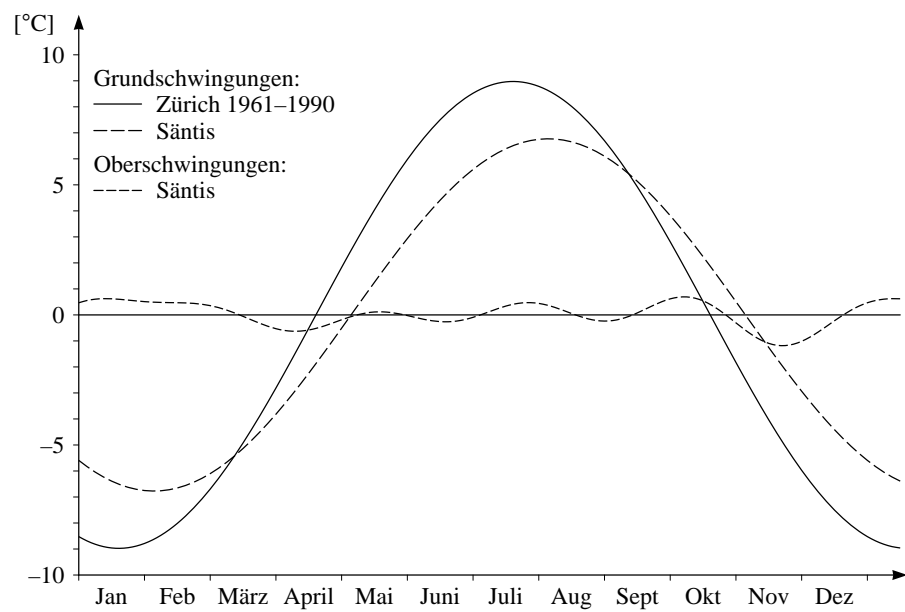
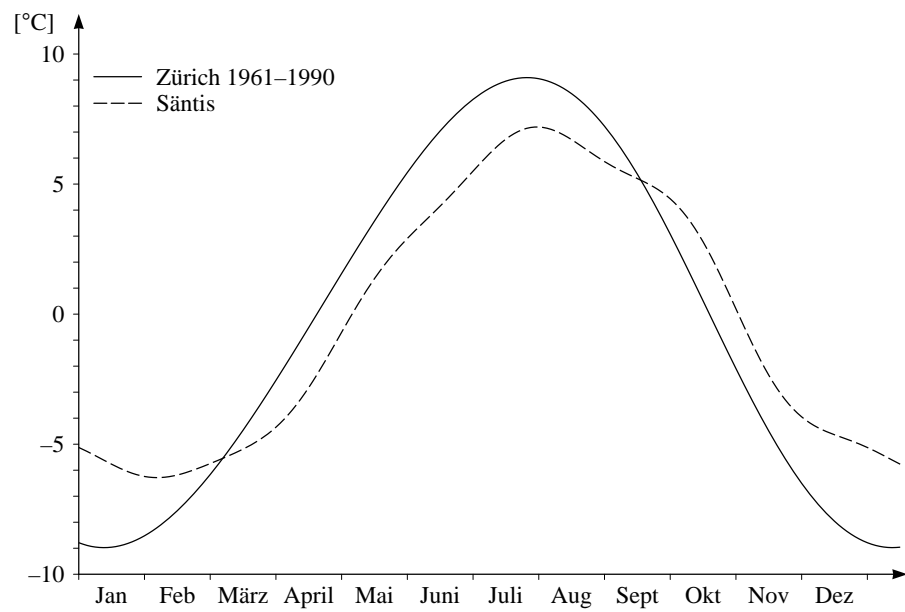


Abbildung 5.8: Abweichung der mittleren Tagestemperatur vom Jahresmittel für die beiden Messreihen Zürich und Säntis 1961–1990.

Hormonzyklen beim Rind

Der Brunstzyklus von Säugetieren wird hormonal gesteuert. Die Längen der Zyklen schwanken von Brunst zu Brunst und von Tier zu Tier. Bei der Beurteilung der Fruchtbarkeit spielen individuelle Hormonprofile eine Rolle und als Vergleichsgröße müssen «Normalprofile» berechnet werden. Um einen Vergleich verschiedener Hormonprofile zu erleichtern, wurde die Dauer jedes Brunstzyklus auf 21 Tage normalisiert. Als erster Zyklustag wurde der Brunsttermin gewählt.

Die Tabelle 5.8 enthält Progesteronwerte von 103 Rindern in ng pro ml Blutplasma. Der Reihe nach sind aufgeführt: Zyklustag nach Beginn der Brunst, Progesteronwerte (Maximalwert, 75%-, 50%-, 25%-Quartile, Minimalwert der Beobachtungsreihe).

Zyklustag	Max	Q_{75}	Q_{50}	Q_{25}	Min
1	1.18	0.27	0.17	0.12	0
2	1.59	0.24	0.17	0.12	0
3	1.62	0.52	0.33	0.18	0
4	3.17	1.46	0.94	0.63	0.13
5	5.52	2.39	1.79	1.43	0.44
6	6.27	3.88	3.03	2.09	0.83
7	8.64	4.91	4.08	3.27	1.29
8	10.76	6.22	4.82	3.94	1.85
9	11.19	6.60	5.26	4.57	3.28
10	11.84	7.51	6.35	4.80	3.25
11	14.65	8.09	6.62	5.30	2.22
12	10.96	8.64	7.25	5.67	3.71
13	11.32	8.71	7.31	6.15	3.64
14	12.34	9.09	7.89	6.38	3.50
15	13.09	9.24	7.85	6.77	0.77
16	12.34	8.82	7.92	6.54	0.11
17	13.21	8.87	7.66	6.14	0.02
18	13.61	7.49	5.72	3.18	0.04
19	8.89	4.70	1.34	0.48	0
20	4.72	0.78	0.36	0.20	0.01
21	1.58	0.23	0.14	0.09	0

Tabelle 5.8: Progesteronprofil von Rindern im Verlaufe eines normalisierten Brunstzyklus

Mit Hilfe von DFT soll aus diesen Daten ein «mittlerer Normalverlauf» der verschiedenen Quartile über einen normalisierten Brunstzyklus gefunden werden. Zu den Datenreihen *oberes Quartil* Q_{75} , *Median* Q_{50} , *unteres Quartil* Q_{25} lassen sich bis zu zehn Fourierkoeffizienten berechnen. Damit lassen sich mittlere Hormonprofile gewinnen, welche die Daten interpolieren oder angenähert wiedergeben. Die Abbildung 5.9 zeigt den Verlauf von Näherungsfunktionen zu Q_{75} , Q_{50} , Q_{25} , die sich ergeben, wenn die ersten fünf Fourierkoeffizienten berücksichtigt werden.

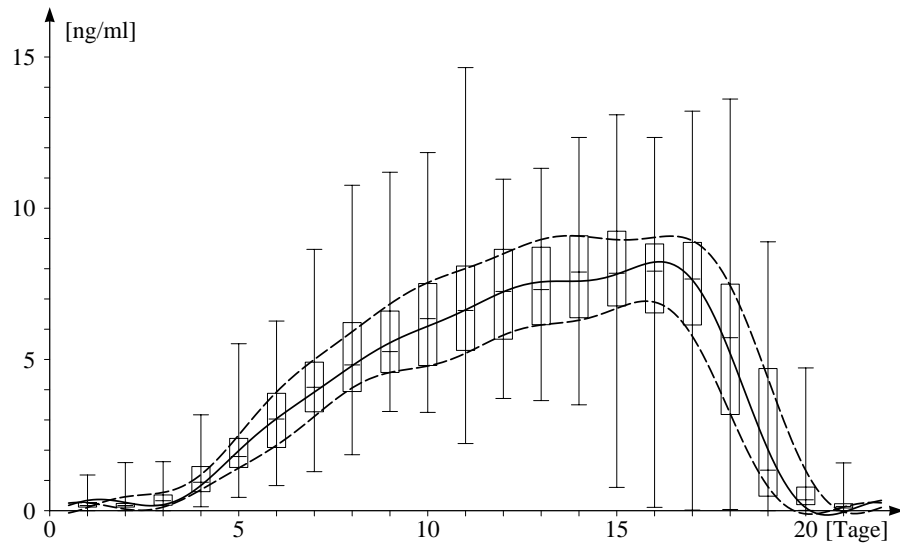


Abbildung 5.9: Boxplot des Progesterongehaltes im Blut von Rindern und rekonstruierter Normalverlauf der drei Quartile während eines Brunstzyklus

5.3 Aufgaben

1. Wie lauten die Fourierkoeffizienten der beiden folgenden Funktionen?
 $q: t \mapsto (\cos(t))^2$ und $r: t \mapsto (\cos(t))^4$
2. Die Tabelle 5.9 enthält die Zeiten (MEZ) des Sonnenaufgangs in Berlin für ausgewählte Daten des Jahres 1996 (Schaltjahr). Die Zeitangaben beruhen auf Näherungswerten, gerundet auf ganze Minuten. Sie wurden in dezimal geteilte Stunden umgerechnet. Wie lässt sich daraus die Zeit des Sonnenaufganges für jeden Tag ermitteln? Für welches Datum wird der früheste und für welches der späteste Sonnenaufgang vorausgesagt?

1	2	3	4	5	6
8.266	7.817	6.817	5.592	4.466	3.775
7	8	9	10	11	12
3.817	4.483	5.317	6.175	7.083	7.925

Tabelle 5.9: Zeit des Sonnenaufganges in Berlin für 1996

Bemerkung zu den Daten: Der erste Wert fällt auf den 1. 1. 96, die übrigen folgen im Abstand von 30.5 Tagen (entsprechend je einem Zwölftel der Länge des Kalenderjahres). Die Tabelle enthält interpolierte fiktive Aufgangszeiten, aus denen sich die wirklichen Aufgangszeiten mit DFT rekonstruieren lassen. Durch die Verwendung von exakt gleichabständig abgetasteten Werten wird die Genauigkeit der Rekonstruktion besser als 1 Minute. Ein systematischer Fehler ergibt sich jedoch, weil von 366 Tageswerten ausgegangen wird, während die Umlaufszeit der Erde um die Sonne mit 365.2422 Tagen der genauen Periodenlänge der analysierten Funktion entspricht.

3. Wie lassen sich aus den Monatsmitteln der Temperatur die Tagesmittel (angenähert) bestimmen? Warum funktioniert das Verfahren? Welche methodischen Fehler beinhaltet Ihre Lösung?
4. Ein Kreuzgelenk ist eine mechanische Einrichtung, um Drehmomente von einer Achse auf eine zweite, abgewinkelte Achse zu übertragen. Die Abbildung 5.10 zeigt das Prinzip. Bei einem Kreuzgelenk seien α

der Winkel zwischen den beiden Achsen und ω die konstante Winkelgeschwindigkeit, mit der die Eingangsachse dreht. Dann lässt sich die Winkelgeschwindigkeit Ω der Ausgangsachse wie folgt darstellen:

$$\Omega(t) = \frac{c\omega}{c^2 + (1 - c^2)(\cos(\omega t))^2}$$

wenn zur Abkürzung $c = \cos(\alpha)$ benutzt wird.

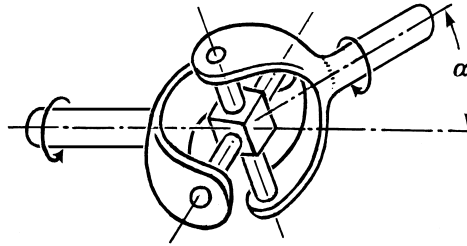


Abbildung 5.10: Kreuzgelenk

Ein Konstrukteur muss sich um die Vermeidung von Lärm und Vibrationen kümmern. Daher interessiert er sich für die Amplituden (oder die Energien) der harmonischen Schwingungen, welche die periodische Funktion Ω aufbauen. Die Antworten liefert die Fourierzerlegung von Ω . Da sich die Kreisfrequenz ω durch die Wahl einer neuen Zeiteinheit auf 1 normieren lässt, genügt es, die Frage im Fall $\omega = 1$ in Funktion von c abzuklären. In der Praxis begnügt man sich mit einer Liste von diskreten Werten für c .

- a) Weshalb sind nur die Kosinuskoeffizienten von Ω interessant?
 - b) Berechnen Sie die ersten fünf Kosinuskoeffizienten für die Winkel $\alpha = 10^\circ$, $\alpha = 20^\circ$ und $\alpha = 30^\circ$ numerisch.
5. Zufallsrauschen: Erzeugen Sie eine Liste von 128 gleichverteilten Zufallszahlen aus dem Intervall $[0, 1[$, die als Abtastwerte einer periodischen Funktion interpretiert werden. Bestimmen Sie die Koeffizienten \hat{a}_0 , \hat{a}_1 , \hat{b}_1 , \hat{a}_2 , \hat{b}_2 numerisch mit DFT. Welche bemerkenswerte Eigenschaft zeichnet das Ergebnis aus? Was zeigt sich, wenn der Versuch mit andern Zufallszahlen wiederholt wird?