

# Kapitel 1

## Die Diskrete Fouriertransformation (DFT)

### 1.1 Einleitung

Zerlegt man Signale in sinusoidale (oder komplex exponentielle) Komponenten, dann spricht man von der Darstellung der Signale im Frequenzbereich. In Anlehnung an die Physik wird diese Darstellung auch Spektraldarstellung genannt.

- Die bekannteste Form der Darstellung im Frequenzbereich ist die *Zerlegung* von periodischen kontinuierlichen Signalen in Fourierreihen.
- Die *Zusammensetzung* von zeitbegrenzten kontinuierlichen Signalen aus sinusoidalen Komponenten führt zur Fouriertransformation.
- Die *Diskrete Fouriertransformation* (DFT) ist eine Rechenvorschrift zur Bestimmung der Spektralkomponenten von *periodischen diskreten* Signalen.

Mit Hilfe der diskreten Fouriertransformation sind wir in der Lage, (digitale) Signale auf eine Art und Weise zu verarbeiten (analysieren, synthetisieren, verändern), wie es bei kontinuierlichen Signalen nicht möglich ist. Bei kontinuierlichen Signalen ist man auf die Möglichkeiten der analytischen Behandlung eingeschränkt. Die analytische Behandlung liefert zwar tiefe Einsichten in das Verständnis von Signalen und Systemen, in vielen Fällen ist aber eine analytische Berechnung nicht möglich und man ist auf numerische Verfahren angewiesen.

Fourierreihe, Fouriertransformation und DFT sind einander vom mathematischen Kern sehr ähnlich, was man in der Tabelle »Gegenüberstellung Fourierreihe, Fouriertransformation, DFT« leicht sehen kann. Bei jeder dieser Transformationen gibt es das Transformationspaar:

- Zusammensetzung eines Zeitsignals<sup>1</sup> aus seinen spektralen Komponenten, *Frequenzsynthese* oder Übergang vom Frequenz- in den Zeitbereich genannt.
- Bestimmung des spektralen Inhalts eines Zeitsignals, *Frequenzanalyse* oder Übergang vom Zeit- in den Frequenzbereich genannt.

Da das Rechnen mit sinusoidalen Komponenten im Reellen aufwendig ist, bedient man sich bei der Signalverarbeitung der komplexen Darstellung und rechnet bei Bedarf auf reellwertige Darstellung um. Die Umrechnung auf reellwertige Signale erfolgt durch Realteilbildung oder durch Darstellung in konjugiert komplexer Form. Ob ein Signal reell- oder komplexwertig ist, kann aus dem Zusammenhang erkannt werden. Um leichter unterscheiden zu können verwenden wir gelegentlich  $x(t)$  für reellwertige,  $\bar{x}(t)$  für komplexwertige Signale.

$$\bar{x}(t) = Ae^{j(\omega_0 t + \varphi)} = A \cos(\omega_0 t + \varphi) + jA \sin(\omega_0 t + \varphi) \quad (1.1)$$

$$x(t) = \operatorname{Re} \left\{ Ae^{j(\omega_0 t + \varphi)} \right\} = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$Ae^{j(\omega_0 t + \varphi)} = \underbrace{Ae^{j\varphi}}_X \cdot e^{j\omega_0 t} \quad (1.2)$$

$$x(t) = \frac{X}{2} e^{j\omega_0 t} + \frac{X^*}{2} e^{-j\omega_0 t} \quad (1.3)$$

Zu beachten ist, dass in  $X$  die Phase  $\varphi$  scheinbar verschwunden ist. Dafür ist die Amplitude komplex, da die Phase  $\varphi$  durch Herausheben mit der Amplitude zusammengefasst wird. Damit spart man sich Schreibarbeit.

### Gegenüberstellung Fourierreihe, Fouriertransformation, DFT

	Synthese	Analyse
<b>Fourierreihe</b>	$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk\omega_0 t}$	$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$ $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \dots$ Periodendauer
<b>Fouriertransformation</b>	$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$	$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$ $\omega = -\infty, \dots, \infty$
<b>DFT (1)</b>	$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{jk\hat{\omega}_0 n}$ $\hat{\omega}_0 = \frac{2\pi}{N}$	$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-jk\hat{\omega}_0 n}$
<b>DFT (2)</b>	$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j(2\pi k/N)n}$ $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$	$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j(2\pi n/N)k}$ $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$

<sup>1</sup>Wir können uns bei der Signalverarbeitung auf Zeitsignale beschränken und sprechen von Zeit- und Frequenzbereich. Die dargestellten Methoden können aber auch auf andere Zusammenhänge angewandt werden. In diesen Fällen sprechen wir vom Original- und Bildbereich.

Bei der *Fouriersynthese* (Übergang vom Frequenz- in den Zeitbereich) werden die Frequenzkomponenten  $X_n e^{j\omega_n t}$  des Signals addiert. Jede Frequenzkomponente  $\omega_n$  hat die zugehörige (komplexe)  $X_n$  Amplitude .

- *Fourierreihe*: Bei periodischen Signalen treten diskrete (endlich oder unendlich viele) Spektrallinien (Frequenzkomponenten) auf, aus denen das Signal zusammengesetzt (aufgebaut) ist.
- *Fouriertransformation*: Bei zeitlich begrenzten (aperiodischen) Signalen tritt ein kontinuierliches Spektrum (unendlich nahe beieinander liegende Spektrallinien) auf, das Aufsummieren erfolgt daher über die Integration.

**Anmerkung 1.1** *Zeitlich begrenzte Signale haben für begrenzte Zeit Werte ungleich Null, vorher und nachher ist der Signalwert Null. Wir verwenden zum Aufbauen unserer Signale aber sinusoidale Aufbaufunktionen, die sich von  $-\infty$  bis  $+\infty$  erstrecken, also (außer in den Nulldurchgängen) ungleich Null sind. Um zu erreichen, dass der Signalwert Null wird, müssen sich die Aufbaufunktionen durch Überlagerung auslöschen. Das ist nur möglich, wenn man unendlich viele Aufbaufunktionen verwendet, die unendlich dicht liegen.*

- *DFT (1)*: Bei der DFT treten endlich viele diskrete Spektrallinien auf, die summiert werden müssen. Um die einzelnen Frequenzkomponenten besser zu erkennen und um sich die Darstellung besser merken zu können, wurde in DFT (1) die (unübliche) Schreibweise mit  $\hat{\omega}$  gewählt. In der Literatur ist die Schreibweise DFT (2) gebräuchlich.

Bei der *Fourieranalyse* werden die in  $x(t)$  enthaltenen Zeiger in die Gegenrichtung »gedreht«, also mit  $e^{-jk\omega_0 t}$  multipliziert, wodurch die Komponente  $k$  angehalten wird, während alle anderen Komponenten sich mit Vielfachen von  $\omega_0$  drehen. Bildet man nun den Mittelwert über die Periode  $T_0$ , so ergibt sich  $X_k$  für angehaltene Komponente, für alle anderen Komponenten ist der Mittelwert Null.

Bei der Fourierreihe und der Fouriertransformation treten zeitkontinuierliche Signale auf, der Mittelwert wird daher mit Integration bestimmt. Bei der DFT treten zeitdiskrete Signale auf, der Mittelwert wird daher durch Summenbildung bestimmt.

## 1.2 Zeitdiskrete sinusoidale Signale

Wir können zeitdiskrete sinusoidale Signale in folgenden Formen darstellen<sup>2</sup>

$$x[n] = A \cos(\omega_0 n + \varphi) \quad \text{bzw.} \quad \bar{x}[n] = X e^{j\omega_0 n} \quad -\infty < n < \infty$$

<sup>2</sup>Bei zeitkontinuierlichen Signalen verwenden wir  $\omega$  zur Darstellung der Frequenz, bei zeitdiskreten Signalen verwenden wir zur Unterscheidung  $\hat{\omega}$ . Wenn eine Verwechslung auszuschließen ist, verwenden wir wegen der einfacheren Schreibweise nur  $\omega$ .

Zum Unterschied von kontinuierlichen sinusoidalen Signalen gibt es für zeitdiskrete sinusoidale Signale Einschränkungen, die wir im Folgenden näher betrachten wollen.

Periodizität mit der Periodendauer  $N$  ist nur dann gegeben, wenn

$$x[n + N] = x[n] \quad \text{für alle } n$$

Den kleinsten Wert von  $N$ , für den diese Beziehung gilt, nennt man Grundperiodendauer. Für die komplexe Exponentialfunktion erhalten wir

$$e^{j\omega_0(n+N)} = e^{j\omega_0 n} e^{j\omega_0 N} = e^{j\omega_0 n}$$

Damit diese Gleichung stimmt, muss gelten

$$e^{j\omega_0 N} = 1 = e^{jk2\pi} \quad k \text{ beliebige ganze Zahl}$$

Aus obiger Gleichung folgt  $\omega_0 N = 2\pi f_0 N = 2\pi k$  und es ist daher

$$f_0 = \frac{k}{N}$$

Ein zeitdiskretes sinusoidales Signal ist nur dann periodisch, wenn seine Frequenz  $f_0$  das Verhältnis von zwei ganzen Zahlen, also eine rationale Zahl ist.

Für die Periodendauer  $N$  existieren nur  $N$  unterscheidbare komplexe Exponentialfolgen.

Die zeitdiskrete sinusoidale Schwingung kann also nur dann periodisch sein, wenn  $f_0$  das Verhältnis von zwei ganzen Zahlen, also rational, ist. Wir können daher schreiben

$$e^{j\omega_0 n} = e^{j\frac{2\pi k}{N} n}$$

Bei gegebener Periodendauer  $N$  können wir unterschiedliche komplexe Exponentialfolgen durch Änderung von  $k$  erzeugen. Es gibt allerdings nur  $N$  unterschiedliche Frequenzen, da

$$e^{j\frac{2\pi(k+N)}{N} n} = e^{j\frac{2\pi k}{N} n} e^{j2\pi n} = e^{j\frac{2\pi k}{N} n}$$

Der Bereich von  $k$  kann daher auf  $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$  eingeschränkt werden.

$$x[n] = e^{j\frac{2\pi k}{N} n}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

Die Abbildung 1.1 zeigt den Realteil von komplexen Exponentialfolgen mit der Periodendauer  $N = 8$  (Punkte  $0 \dots 7$ ). Zur besseren Erkennbarkeit der Periodizität ist der Punkt 8, der erste Punkt der neuen Periode, ebenfalls dargestellt.

Die Folgen  $1 \leftrightarrow 7$ ,  $2 \leftrightarrow 6$  und  $3 \leftrightarrow 5$  sind aus Symmetriegründen identisch. Für  $k > N-1$  wiederholen sich die Folgen:  $8 \leftrightarrow 0$ ,  $9 \leftrightarrow 1$ ,  $10 \leftrightarrow 2$ ,  $11 \leftrightarrow 3$ .

### 1.3 Eigenschaften der diskreten Fouriertransformation

DFT/iDFT sind, abgesehen vom negativen Vorzeichen und der Skalierung  $1/N$ , identisch.

Ermittlung des spektralen Inhalts eines Signals  $x[n]$

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi n}{N} k} \quad k = 0, 1, 2, \dots, (N-1) \quad \text{DFT}$$

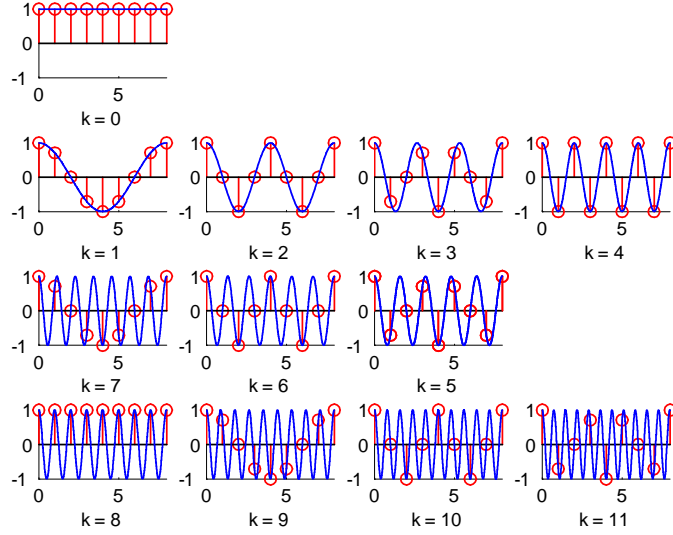


Abbildung 1.1: Realteil komplexe Exponentialfolge

Berechnung des Signals aus seinen Spektralkomponenten

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j(2\pi k/N)n} \quad n = 0, 1, 2, \dots, (N-1) \quad \text{inverse DFT}$$

Diese Schreibweise der DFT führt zu einer sehr kompakten Darstellung. Um zu »sehen«, was hinter der kompakten Darstellung steckt, lösen wir die Reihendarstellung auf und erhalten

$$\begin{aligned} X[k] &= x[0]e^{-j(2\pi 0/N)k} & k = 0, 1, 2, \dots, (N-1) \\ &+ x[1]e^{-j(2\pi 1/N)k} \\ &+ x[2]e^{-j(2\pi 2/N)k} \\ &\vdots \\ &+ x[N-1]e^{-j([2\pi(N-1)/N])k} \end{aligned}$$

Wir wählen als Beispiel  $N = 4$  und erhalten unter Verwendung der Euler'schen Beziehung  $e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \sin \varphi \rightarrow e^{-j\varphi} = \cos \varphi - j \sin \varphi$

$$X[k] = \sum_{n=0}^3 x[n] \{ \cos(2\pi nk/4) - j \sin(2\pi nk/4) \}$$

$$\begin{aligned}
X[0] &= x[0] \{ \cos(2\pi \cdot 0 \cdot 0/4) - j \sin(2\pi \cdot 0 \cdot 0/4) \} \\
&\quad + x[1] \{ \cos(2\pi \cdot 1 \cdot 0/4) - j \sin(2\pi \cdot 1 \cdot 0/4) \} \\
&\quad + x[2] \{ \cos(2\pi \cdot 2 \cdot 0/4) - j \sin(2\pi \cdot 2 \cdot 0/4) \} \\
&\quad + x[3] \{ \cos(2\pi \cdot 3 \cdot 0/4) - j \sin(2\pi \cdot 3 \cdot 0/4) \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X[1] &= x[0] \{ \cos(2\pi \cdot 0 \cdot 1/4) - j \sin(2\pi \cdot 0 \cdot 1/4) \} \\
&\quad + x[1] \{ \cos(2\pi \cdot 1 \cdot 1/4) - j \sin(2\pi \cdot 1 \cdot 1/4) \} \\
&\quad + x[2] \{ \cos(2\pi \cdot 2 \cdot 1/4) - j \sin(2\pi \cdot 2 \cdot 1/4) \} \\
&\quad + x[3] \{ \cos(2\pi \cdot 3 \cdot 1/4) - j \sin(2\pi \cdot 3 \cdot 1/4) \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X[2] &= x[0] \{ \cos(2\pi \cdot 0 \cdot 2/4) - j \sin(2\pi \cdot 0 \cdot 2/4) \} \\
&\quad + x[1] \{ \cos(2\pi \cdot 1 \cdot 2/4) - j \sin(2\pi \cdot 1 \cdot 2/4) \} \\
&\quad + x[2] \{ \cos(2\pi \cdot 2 \cdot 2/4) - j \sin(2\pi \cdot 2 \cdot 2/4) \} \\
&\quad + x[3] \{ \cos(2\pi \cdot 3 \cdot 2/4) - j \sin(2\pi \cdot 3 \cdot 2/4) \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X[3] &= x[0] \{ \cos(2\pi \cdot 0 \cdot 3/4) - j \sin(2\pi \cdot 0 \cdot 3/4) \} \\
&\quad + x[1] \{ \cos(2\pi \cdot 1 \cdot 3/4) - j \sin(2\pi \cdot 1 \cdot 3/4) \} \\
&\quad + x[2] \{ \cos(2\pi \cdot 2 \cdot 3/4) - j \sin(2\pi \cdot 2 \cdot 3/4) \} \\
&\quad + x[3] \{ \cos(2\pi \cdot 3 \cdot 3/4) - j \sin(2\pi \cdot 3 \cdot 3/4) \}
\end{aligned}$$

Jeder  $X[k]$ -Term ist die Summe des Punkt-für-Punkt-Produkts der Eingangsfolge  $x[n]$  und der komplexen Exponentialfolge (hier in kartesischer Schreibweise).

Die Frequenz  $k$  der sinusoidalen Folgen hängt ab von der Abtastfrequenz des Originalsignals und der Zahl der Abtastpunkte. Bei einer Abtastfrequenz von 480 Hz und 16 Punkten ist der Frequenzraster

$$\begin{aligned}
\frac{f_s}{N} &= \frac{480}{16} = 30 \\
X[0] &= 0 \text{ Hz}, X[1] = 30 \text{ Hz}, X[2] = 60 \text{ Hz}, \dots, X[15] = 450 \text{ Hz}
\end{aligned}$$

Wie man sieht, steckt hinter der DFT ein beachtlicher Rechenaufwand, den man hinter der kompakten Notation  $X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j \frac{2\pi n}{N} k}$  nicht vermuten würde.

Als Beispiel berechnen wir das Spektrum des Signals  $x(t) = \sin(2\pi \cdot 1000 \cdot t) + \sin(2\pi \cdot 2000 \cdot t + \frac{3}{4}\pi)$ , dargestellt in Abbildung 1.2, mit

### 1.3. EIGENSCHAFTEN DER DISKRETEN FOURIERTRANSFORMATION 7

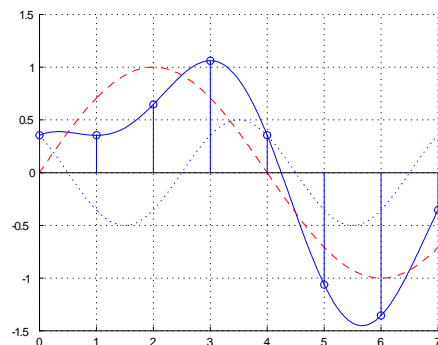


Abbildung 1.2:  $x(t) = \sin(2\pi \cdot 1 \cdot t) + \frac{1}{2} \sin(2\pi \cdot 2 \cdot t + 3\pi/4)$

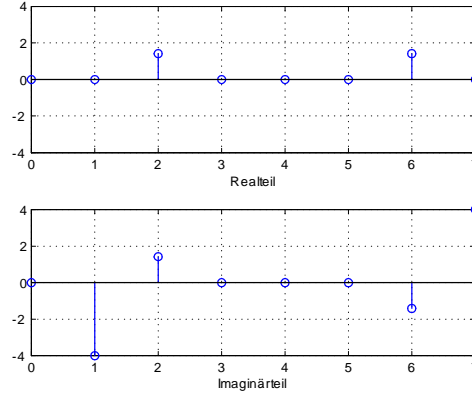
Hilfe einer Tabellenkalkulation. Das Signal wird mit der Abtastfrequenz  $f_s = 8$  kHz abgetastet. Es werden nur acht Punkte berechnet, um den Rechenaufwand gering zu halten.

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \left\{ \cos\left(\frac{2\pi}{N}kn\right) - j \sin\left(\frac{2\pi}{N}kn\right) \right\}$$

$x[n]$	$\frac{2\pi}{N} = \frac{2\pi}{8}$	$n$	$\frac{2\pi}{8}1 \cdot n$	$\cos(\frac{2\pi}{8}1 \cdot n)$	$\sin(\frac{2\pi}{8}1 \cdot n)$	$x[n] \cos()$	$x[n] \sin()$
0.3535	0.785398	0	0.000	1.000	0.000	0.354	0.000
0.3535		1	0.785	0.707	0.707	0.250	0.250
0.6464		2	1.571	0.000	1.000	0.000	0.646
1.0607		3	2.356	-0.707	0.707	-0.750	0.750
0.3535		4	3.142	-1.000	0.000	-0.354	0.000
-1.0607		5	3.927	-0.707	-0.707	0.750	0.750
-1.3535		6	4.712	0.000	-1.000	0.000	1.354
-0.3535		7	5.498	-0.707	-0.707	-0.250	0.250
<b>X[k=1]</b>						<b>0.000</b>	<b>-j 4.000</b> <b>4∠-90°</b>

Wiederholt man obigen Rechenoperationen für  $k = 0, 2 - 7, 8, 9$ , so ergeben sich die Werte der folgenden Tabelle. Insbesondere kann man sehen, dass  $X[0] = X[8], X[9] = X[1], \dots$ : Das Spektrum ist periodisch.

	Realteil	Imaginärteil	Betrag∠Phase
$X[k=1]$	0.000	-j4.000	4∠-90°
$X[k=2]$	1.414	j1.414	2∠45°
$X[k=3]$	0.000	j0.000	0∠0°
$X[k=4]$	0.000	j0.000	0∠0°
$X[k=5]$	0.000	j0.000	0∠0°
$X[k=6]$	1.414	-j1.414	2∠-45
$X[k=7]$	0.000	j4.000	4∠90
$X[k=0, 8]$	0.000	j0.000	0∠0°
$X[k=9, 1]$	0.000	-j4.000	4∠-90°

Abbildung 1.3: Spektrum von  $x[n] = [0.35 \ 0.35 \ 0.64 \ 1.06 \ 0.35 \ -1.06 \ -1.35 \ -0.35]$ 

Das Spektrum des abgetasteten Signals  
 $x[n] = [0.3536 \ 0.3536 \ 0.6464 \ 1.0607 \ 0.3536 \ -1.0607 \ -1.3536 \ -0.3536]$   
 kann einfacher mit der Matlabfunktion  $\mathbf{X} = \mathbf{fft}(\mathbf{x})$  berechnet werden. Das ermittelte Spektrum ist in Abbildung 1.3 dargestellt.

Die Spektralkomponente  $X[0] = 0$ , da der Gleichanteil des Signals Null ist. Der Betrag der Spektralkomponente  $|X[1] = 4|$  und der Betrag der Spektralkomponente  $|X[2] = 2|$ .

### 1.3.1 DFT Amplituden

Das Auftreten der Amplituden  $|X[1] = 4|$  und  $|X[2] = 2|$  ist überraschend, da die Amplituden unseres kontinuierlichen Ausgangssignals 1 bzw. 0.5 waren.

Das ist eine Besonderheit der DFT: Enthält ein reellwertiges Signal eine sinusoidale Komponente der Amplitude  $A$ , wird die zugehörige Spektralkomponente  $X_A^r = A \frac{N}{2}$ . (Bei komplexwertigen Signalen mit sinusoidaler Komponente wird  $X_A^k = AN$ .)

Da man in der Regel an den relativen und nicht an den absoluten Amplituden der Signale interessiert ist, spielt dieser Skalierungsfaktor keine wichtige Rolle.

### 1.3.2 Periodizität

Für das  $N$ -Punkt DFT Paar  $x[n]$  und  $X[k]$  folgt aus den Beziehungen der DFT bzw. der iDFT unmittelbar

$$\begin{aligned} x[n + N] &= x[n] \quad \text{für alle } n \\ X[k + N] &= X[k] \quad \text{für alle } k \end{aligned}$$



Sowohl Spektrum als auch Zeitfunktion sind periodisch fortgesetzt, es gibt also keine DFT für aperiodische Folgen.

Sowohl Zeitfolge als auch Spektrum sind bei der DFT periodisch. Es gibt keine DFT für eine aperiodische Folge!

### 1.3.3 Symmetrieeigenschaften der DFT

Für die Spektralkomponenten der DFT gilt:  $X[k] = X^*[N - k]$

$$\operatorname{Re}\{X[k]\} = \operatorname{Re}\{X[N - k]\}, \operatorname{Im}\{X[k]\} = -\operatorname{Im}\{X[N - k]\}$$

Beispiel  $N$  gerade:  $N = 8$ :  $X_1 = X_7^*, X_2 = X_6^*, X_3 = X_5^*, X_4 = \text{reell}$ ,  
 $N$  ungerade:  $N = 7$ :  $X_1 = X_6^*, X_2 = X_5^*, X_3 = X_4^*$ .<sup>3</sup>

Die Symmetrieeigenschaft lässt sich mit Hilfe der komplexen Exponentialfunktion sehr einfach beweisen, in dem wir  $N - k$  für  $k$  ersetzen.

$$\begin{aligned} X[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j \frac{2\pi n}{N} k} \Rightarrow X[N - k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j \frac{2\pi n}{N} (N-k)} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \underbrace{e^{-j 2\pi n}}_1 e^{j \frac{2\pi n}{N} k} \\ X[N - k] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{j \frac{2\pi n}{N} k} = X^*[k] \end{aligned}$$

Aus dieser Eigenschaft können wir noch ablesen, dass der Realteil von  $X[k]$  eine gerade Funktion ist, der Imaginärteil von  $X[k]$  ungerade ist, der Betrag von  $X[k]$  gerade und die Phase von  $X[k]$  ungerade ist. Für die praktische Berechnung bedeutet das, dass wir nur  $\frac{N}{2} + 1$  Komponenten berechnen müssen, die restlichen Komponenten ergeben sich aus der Symmetrie.

Diese Eigenschaft gilt nur für reellwertige Zeitfolgen, was bei technischen Signalen immer der Fall ist.

### 1.3.4 Linearität der DFT

Die DFT besitzt die Eigenschaft der Linearität wir können daher den Überlagerungssatz anwenden. Deshalb können komplexe Signale in sinusoidale Komponenten zerlegt und dann die DFT angewandt werden.

$$\begin{aligned} x_1[n] + x_2[n] &= X_1[k] + X_2[k] \\ X_{1+2}[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} \{x_1[n] + x_2[n]\} e^{-j \frac{2\pi n}{N} k} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x_1[n] e^{-j \frac{2\pi n}{N} k} + \sum_{n=0}^{N-1} x_2[n] e^{-j \frac{2\pi n}{N} k} = X_1[k] + X_2[k] \end{aligned}$$

### 1.3.5 Frequenzachse der DFT

Durch die Abtastung der Signale geht die Frequenzachse verloren. Am Beispiel

Ohne Kenntnis der Abtastfrequenz können wir das Signal nicht eindeutig rekonstruieren!

<sup>3</sup>Die DFT berechnet das Spektrum von  $0 - 2\pi$ . Häufig ist es anschaulicher das Spektrum von  $-\pi$  bis  $\pi$  darzustellen. Mit Hilfe der Matlab-Funktion `fftshift(X)` kann das erreicht werden.

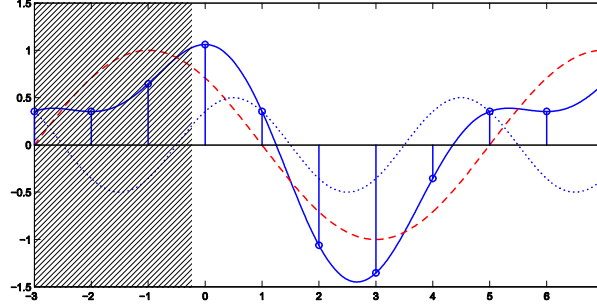


Abbildung 1.4: Abbildung 1.2 zeitverschoben

der Kosinusschwingung sehen wir, dass  $x[n] = x(nT) = A \cos(\omega n T_s + \varphi) = A \cos(\hat{\omega} n + \varphi)$  und wir erhalten die normalisierte Kreisfrequenz  $\hat{\omega} = n T_s$ .

Von der diskreten Darstellung finden wir zur kontinuierlichen Darstellung über die Beziehung  $f_{\text{kontinuierlich}} = k \frac{f_s}{N}$ . Der Abstand der Spektrallinien der DFT ist daher  $\frac{f_s}{N}$ , außerhalb dieses Rasters treten keine Spektrallinien auf.

### 1.3.6 (Zirkuläre ) Verschiebung im Zeitbereich

Wenn die DFT des Signals  $x[n] \Leftrightarrow X[k]$  ist, dann gilt für das zeitverschobene Signal

$$x[n - m] \Leftrightarrow X_{\text{verschoben}}[k] = X[k] e^{-j \frac{2\pi k}{N} m}$$

Das Spektrum des zeitverschobenen Signals errechnet sich also aus  $X[k]$ , wobei jede Spektralkomponente  $k$  eine frequenzproportionale (lineare) Phasenverschiebung von  $e^{-j \frac{2\pi k}{N} m}$  erfährt. Das Amplitudenspektrum des zeitverschobenen Signals bleibt – wenig überraschend – unverändert.

Für unser Beispiel Abbildung 1.2 haben wir Betrags- und Phasenspektrum berechnet und erhalten die Phasen  $k = 1 \rightarrow -90^\circ$ ,  $k = 2 \rightarrow +45^\circ$

Verschieben wir unser Signal nach links, in Abbildung 1.4 um  $n = -3$ , dann erhalten wir

$$x[n] = [1.0607 \quad 0.3536 \quad -1.0607 \quad -1.3536 \quad -0.3536 \quad 0.3536 \quad 0.3536 \quad 0.6464]$$

Das zugehörige Spektrum ist in Abbildung 1.5 dargestellt.

Das Betragsspektrum ist unverändert, das neue Phasenspektrum ergibt sich durch Multiplikation mit  $e^{j \frac{2\pi k}{N} m} \rightarrow e^{j \frac{2\pi 1}{8} 3} = 135^\circ$  und  $e^{j \frac{2\pi 2}{8} 3} = 270^\circ$  aus den Phasen des nichtverschobenen Signals

$$-90^\circ + 135^\circ = 45^\circ \text{ und } +45^\circ + 270^\circ = 315^\circ = -45^\circ.$$

Liegt ein Signal spiegelsymmetrisch um den Nullpunkt, ist die Phase immer Null.

Ein zweites Beispiel, dargestellt in Abbildung 1.6, zeigt die Verschiebung einer Dreiecksfolge. Liegt die Dreiecksfolge symmetrisch um  $n = 0$ , dann ist die Phase Null. Bei Verschiebung nach rechts wird die Phase negativ, bei Verschiebung nach links positiv.

### 1.3. EIGENSCHAFTEN DER DISKRETEN FOURIERTRANSFORMATION 11

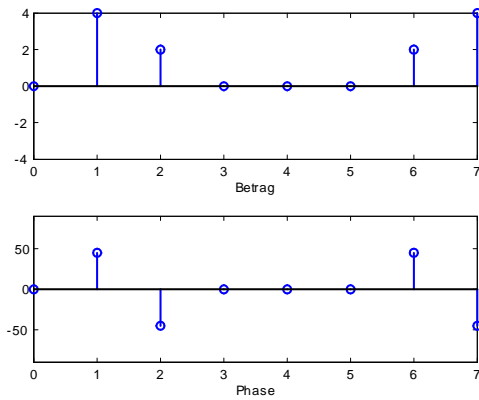


Abbildung 1.5: Spektrum von  $x[n] = [1.06 \ 0.35 \ -1.06 \ -1.35 \ -0.35 \ 0.35 \ 0.35 \ 0.64]$

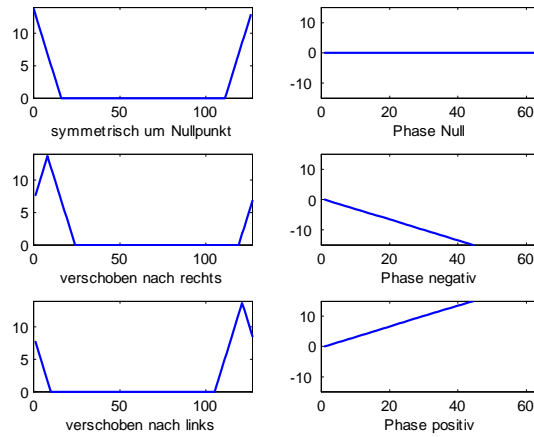


Abbildung 1.6: Verschiebung Dreiecksfunktion

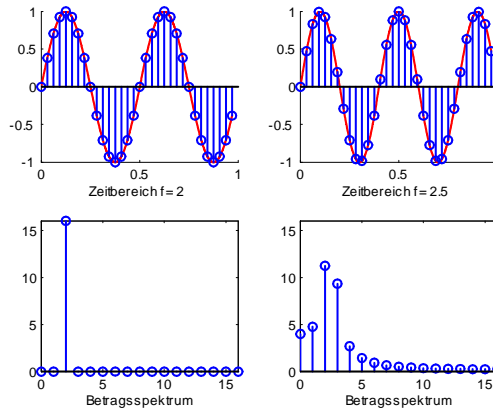


Abbildung 1.7: Darstellung des Leckeffekts

## 1.4 Anwendung der DFT

### 1.4.1 Frequenzachse der DFT (Teil 2)

Die Spektralkomponenten der DFT können nur im Abstand von  $\frac{f_s}{N}$  liegen. Enthält das Signal Frequenzkomponenten, die nicht auf Spektrallinien liegen, dann »näht« die DFT diese Frequenzen durch benachbarte Frequenzen an.

Darstellung 1.7 zeigt links ein Signal der Frequenz  $f = 2$  mit einer 32-Punkt DFT (nur die Hälfte des Spektrums ist dargestellt).

In Fall von  $f = 2$  liegt die Spektrallinie wie erwartet auf  $k = 2$ . Das zweite Signal (rechts in der Abbildung) hat die Frequenz  $f = 2.5$ , die nicht auf dem Frequenzraster liegt, da  $k = 0, 1, 2, \dots, 16$  sein muss. Das Spektrum kann daher nur »angenähert« werden.

Durch Wahl eines größeren  $N$  kann das Frequenzraster feiner gemacht werden. Da aber die spektrale Zusammensetzung eines praktischen Signals in der Regel nicht bekannt ist, ist es unwahrscheinlich, dass die Spektralkomponenten auf dem Raster liegen. Daher ist das mit Hilfe der DFT ermittelte Spektrum in der Regel nur eine Näherung.

Den Effekt, der durch die Rasterung der Spektrallinien auftritt, nennt man Leck-Effekt oder Leakage.

### 1.4.2 Leck-Effekt (Leakage)

Um zu einem besseren Verständnis des Leck-Effekts zu gelangen, untersuchen wir die DFT der komplexen Exponentialfolge  $\bar{x}[n] = e^{j(\hat{\omega}_0 n + \varphi)}$   $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$  im Detail und erhalten

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \bar{x}[n] e^{-j(2\pi/N)kn} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j(\hat{\omega}_0 n + \varphi)} e^{-j(2\pi/N)kn}$$

Wir heben  $e^{j\varphi}$  heraus, fassen zusammen und schreiben die Reihe aus

$$e^{j\varphi} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j(\frac{2\pi k}{N} - \hat{\omega}_0)n} = e^{j\varphi} \left[ e^{-j(0)} + e^{-j(\frac{2\pi k}{N} - \hat{\omega}_0)1} + e^{-j(\frac{2\pi k}{N} - \hat{\omega}_0)2} + \dots + e^{-j(\frac{2\pi k}{N} - \hat{\omega}_0)(N-1)} \right]$$

Unter Verwendung der Reihensumme  $\sum_{m=0}^L x^m = \begin{cases} \frac{1-x^{L+1}}{1-x} & x \neq 1 \\ L+1 & x = 1 \end{cases}$  wird

aus dem obigen Ausdruck in eckiger Klammer

$$X[k] = e^{j\varphi} \frac{1 - e^{-j(\frac{2\pi k}{N} - \hat{\omega}_0)N}}{1 - e^{-j(\frac{2\pi k}{N} - \hat{\omega}_0)}}$$

Zur Vereinfachung der Schreibweise führen wir die Abkürzung

$$\Psi = \left( \frac{2\pi k}{N} - \hat{\omega}_0 \right) \text{ ein und erhalten } e^{j\varphi} \frac{1 - e^{-j\Psi N}}{1 - e^{-j\Psi}}.$$

Heben wir jetzt im Nenner  $e^{-j\Psi N/2}$  und im Zähler  $e^{-j\Psi/2}$  heraus wird daraus

$$e^{j\varphi} \frac{e^{-j\Psi \frac{N}{2}} \left( e^{j\Psi \frac{N}{2}} - e^{-j\Psi \frac{N}{2}} \right)}{e^{-j\Psi \frac{1}{2}} \left( e^{j\Psi \frac{1}{2}} - e^{-j\Psi \frac{1}{2}} \right)} = e^{j\varphi} e^{-j\Psi \frac{N-1}{2}} \frac{\left( e^{j\Psi \frac{N}{2}} - e^{-j\Psi \frac{N}{2}} \right)}{\left( e^{j\Psi \frac{1}{2}} - e^{-j\Psi \frac{1}{2}} \right)}$$

Unter Verwendung der Euler'schen Beziehung  $\sin \Psi = \frac{e^{j\Psi} - e^{-j\Psi}}{2j}$  wird aus dem obigen Ausdruck

$$e^{j\varphi} e^{-j\Psi \frac{N-1}{2}} \frac{\sin\left(\Psi \frac{N}{2}\right)}{\sin\left(\Psi \frac{1}{2}\right)} \text{ und nach Rücksubstitution von } \Psi \text{ erhalten wir}$$

$$X[k] = \underbrace{e^{j\varphi} e^{-j\Psi \frac{N-1}{2}} \left( \frac{2\pi k}{N} - \hat{\omega}_0 \right)}_{\text{nur Phase}} \underbrace{\frac{\sin\left[\frac{N}{2} \left( \frac{2\pi k}{N} - \hat{\omega}_0 \right)\right]}{\sin\left[\frac{1}{2} \left( \frac{2\pi k}{N} - \hat{\omega}_0 \right)\right]}}_{\text{Diriclet'sche Funktion}}$$

Der Teil  $e^{-j(\dots)}$  stellt eine Phasenbeziehung dar, der zweite Teil des Ausdrucks ist als Diriclet'sche Funktion (DF) oder periodische **sinc**-Funktion bekannt.

Damit haben die DFT berechnet und können für  $\hat{\omega}_0$  auswerten.

Abbildung 1.8 zeigt die Diriclet'sche Funktion für  $N = 8$ , ausgewertet für den Wertebereich von  $0 \dots 2\pi$ .

$$\text{Wie wir sehen, besteht } X[k] = \underbrace{e^{j\varphi} e^{-j\Psi \frac{N-1}{2}} \left( \frac{2\pi k}{N} - \hat{\omega}_0 \right)}_{\text{nur Phase}} \underbrace{\frac{\sin\left[\frac{N}{2} \left( \frac{2\pi k}{N} - \hat{\omega}_0 \right)\right]}{\sin\left[\frac{1}{2} \left( \frac{2\pi k}{N} - \hat{\omega}_0 \right)\right]}}_{\text{Diriclet'sche Funktion}} \text{ aus}$$

»Proben« der DF. Wir berechnen nun  $X[k]$ , wobei wir uns nur für die Amplituden der Spektralkomponenten interessieren und daher den Phasenterm weglassen. Für die Komponente mit  $f = 3$  erhalten wir Abbildung 1.9

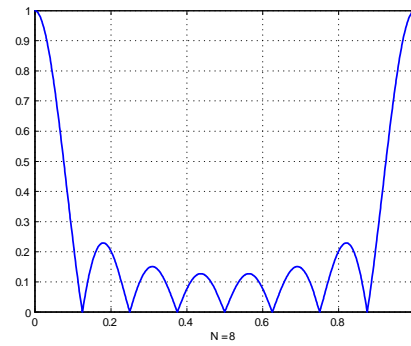


Abbildung 1.8: Diriclet'sche Funktion

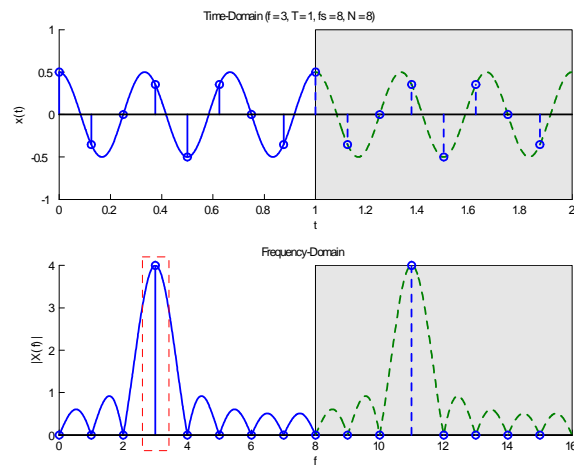
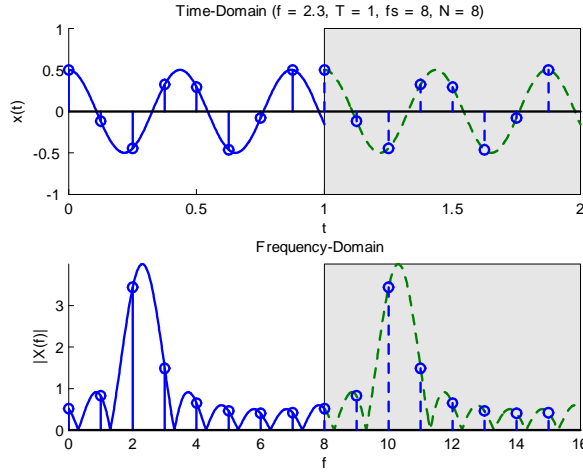


Abbildung 1.9: Frequenz auf Raster  $\Rightarrow$  kein Auftreten von Leakage

Abbildung 1.10: Frequenz nicht auf Raster  $\Rightarrow$  Leakage

Als zweites Beispiel (Abbildung 1.10) werten wir für  $f = 2.3$  aus, also einer Frequenz, die *nicht* auf dem Raster der DFT liegt.

Die DF wird wieder im Frequenzraster  $0, 1, 2, \dots, 15$  ausgewertet, da die DFT nur für diese Frequenzen existiert. Das Hauptmaximum der DF Funktion liegt aber bei  $f = 2.3$ , die DF ist gegenüber dem vorherigen Beispiel ( $f = 3$ ) verschoben. Die Anteile der DF werden in den Punkten  $0, 1, 2, \dots, 15$  nicht Null! Das Spektrum für wird mit Hilfe aller Spektralkomponenten »angenähert«.

In den beiden Beispielen sind die kontinuierlichen Signale als Referenz eingezeichnet, das Ausgangssignal in Blau, die periodische Fortsetzung in Grün. Im Beispiel mit  $f = 3$  sehen wir, dass die periodische Fortsetzung des Signal (grau markierter Bereich) das Originalsignal kontinuierlich, ohne Sprung, weiterführt. Das ist immer dann der Fall, wenn die Signalfrequenz im Raster der Abtastung liegt. Im Beispiel mit  $f = 2.3$  sehen wir, dass die periodische Fortsetzung des Signals (grau markierter Bereich) zu einem Sprung am Ende der Periodendauer führt.

Das der DFT zu Grunde liegende Signal ist auf Grund der Abtastung immer periodisch. Es gibt keine DFT einer aperiodischen Funktion!

*Das bedeutet mit anderen Worten, dass die DFT nicht das Spektrum der Kosinusfunktion mit Frequenz  $f = 2.3$  ermittelt, sondern das Spektrum der abgeschnittenen und periodisch fortgesetzten Kosinusfunktion.* Für diese »abgeschnittene und periodisch fortgesetzte« Kosinusfunktion wird das Spektrum korrekt berechnet!

Anhand der beiden Beispiele können wir den Leck-Effekt besser verstehen. Das hilft allerdings bei der Berechnung der Spektren wenig:  
*Die nicht auf dem Frequenzraster liegenden Signalkomponenten können nur näherungsweise dargestellt werden.*

In unseren beiden Beispielen haben wir zur einfacheren Rechnung das komplexe Signal  $\bar{x}[n] = e^{j(\hat{\omega}_0 + \varphi)}$  verwendet. Für den (reellwertige) Kosinus ist aber

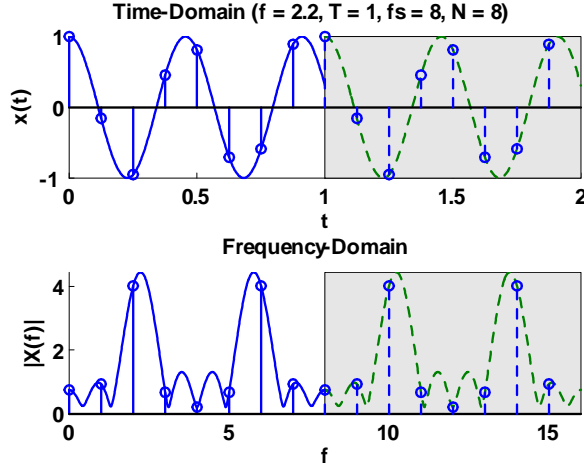


Abbildung 1.11: Leakage (reelwertiger) Kosinus

$x[n] = \frac{1}{2} (e^{j(\hat{\omega}_0 n + \varphi)} + e^{-j(\hat{\omega}_0 n + \varphi)})$ , wir müssen daher die Spektren von  $e^{j(\hat{\omega}_0 n + \varphi)}$  und  $e^{-j(\hat{\omega}_0 n + \varphi)}$  überlagern. Das Ergebnis dieser Berechnung ist in Abbildung 1.11 dargestellt.

### 1.4.3 Spektrum nichtperiodischer Signale

Die DFT beruht auf periodischen Folgen, die *Signaldarstellung ist im Zeit- und im Frequenzbereich daher immer periodisch*. Es gibt keine DFT einer aperiodischen Funktion!

In praktischen Anwendungen gibt es aber keine periodischen Signale, jedes Signal hat seinen Anfang und sein Ende. Da die DFT nur für periodische Signale definiert ist, helfen wir uns damit, dass wir an das periodische Signal Nullen anhängen, um Nichtperiodizität anzunähern. Wir müssen uns aber immer darüber im Klaren sein, dass wir es mit periodischen Signalen zu tun haben, auch wenn wir für die Berechnung nur eine Periodendauer brauchen.

Wenn wir das Einfügen von Nullen (zero-padding) verwenden wollen, stellt sich natürlich die Frage, wie viele Nullen wir einfügen sollen. Je mehr Nullen desto größer der Rechenaufwand, wir wollen also die Zahl der eingefügten Nullen gering halten, aber dennoch Nichtperiodizität gut annähern.

Wir stellen die Zusammenhänge anhand eines Beispiels dar.

$$x[n] = \begin{cases} 0.5 \left(1 - \cos \frac{2\pi}{L} n\right) & 0 \leq n \leq L-1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Zunächst wollen wir keine Nullen einfügen und erhalten Abbildung 1.12

Wir stellen nur eine Periodendauer dar, müssen uns das Signal aber periodisch fortgesetzt denken. Im Spektrum sehen wir den Gleichanteil und die



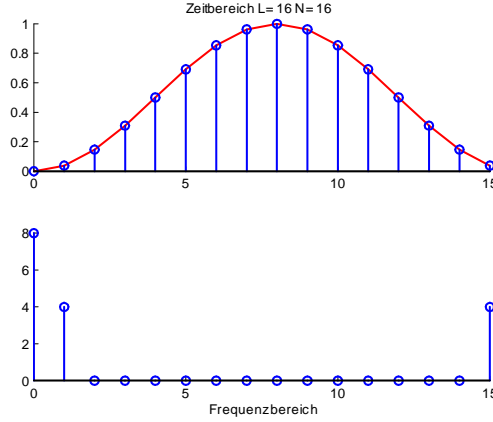


Abbildung 1.12: Ohne Zero Padding

Spektralkomponente der Kosinusfunktion.

Im zweiten Beispiel fügen wir 16 Nullen an und erhalten Abbildung 1.13. Wir sehen, dass nur die ersten sechs Spektrallinien erkennbar sind, für höhere Frequenzen werden die Amplituden sehr klein.

Erhöhen wir  $N$  wird die Darstellung zwar feiner, aber am prinzipiellen Verlauf ändert sich nichts, wie in Abbildung 1.14 gezeigt.

Lassen wir  $N \rightarrow \infty$  gehen, wird aus der DFT die zeitdiskrete Fouriertransformation (Discrete Time Fourier Transform) DTFT

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

Die DTFT hat eine aperiodische und diskrete Zeitfunktion und ein periodisches kontinuierliches Spektrum.

Das in Abbildung 1.15 gezeigte Beispiel zeigt das Ergebnis der DTFT der Folge

$$x[n] = (0.5)^n \delta_{-1}[n] \quad \Leftrightarrow \quad X(\omega) = \frac{1}{1 - 0.5e^{-j\omega}}$$

Die DTFT ist in der digitalen Signalverarbeitung vor allem von theoretischem Interesse, da ein kontinuierliches Spektrum nicht gespeichert und mit dem Rechner verarbeitet werden kann. Die DFT entsteht durch Abtastung des Spektrums aus der DTFT in den Punkten  $\omega \rightarrow \frac{2\pi}{N}k \quad k = 0, 1, \dots, N-1$ .

Zero Padding liefert selbstverständlich keine zusätzliche Information über das Spektrum des Signals, es »verbessert« lediglich die Darstellung der DFT.

Um die spektrale Auflösung von zwei Signalen zu verbessern, müssen bei der Abtastung mehr Signalproben ungleich Null genommen werden. Das Frequenzspektrum einer  $N$ -Punkt DFT besteht aus  $N/2+1$  Spektrallinien zwischen Null

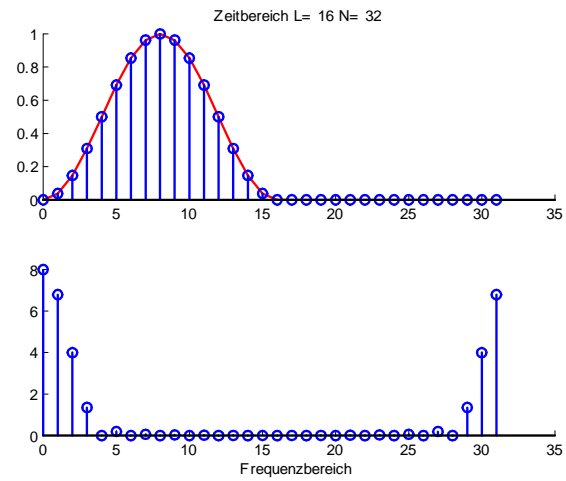


Abbildung 1.13: Anfügen von 16 Nullen

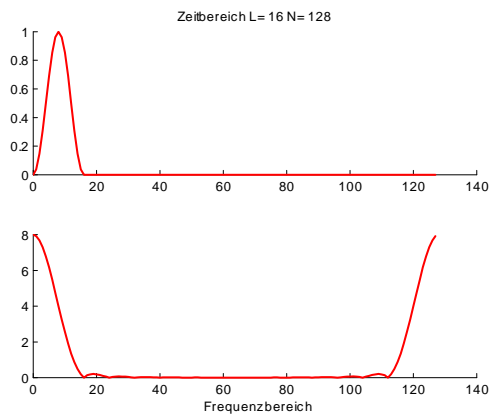


Abbildung 1.14: Anfügen von 128 Nullen

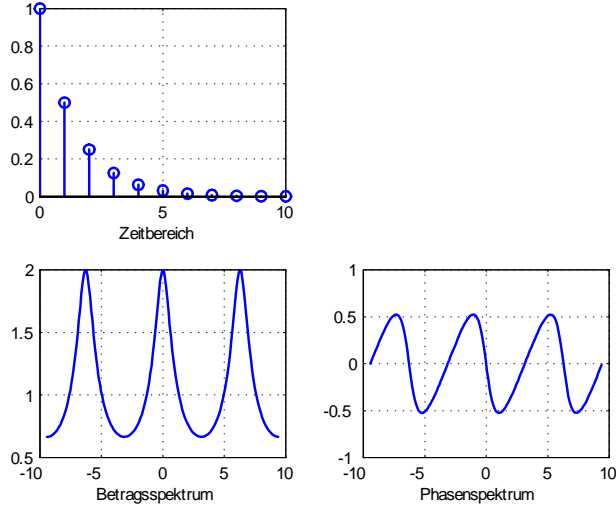


Abbildung 1.15: Diskretzeit Fouriertransformation

und der halben Abtastfrequenz. Um zwei benachbarte Spektrallinien auflösen zu können, muss der Abstand der Spektrallinien  $\geq$  dem Abstand des Frequenzrasters sein, wie in Abbildung 1.16 gezeigt

In Abbildung 1.16 liegen die Spektrallinien (zufällig) auf dem Frequenzraster. Verschieben wir die beiden Spektrallinien um ein Viertel des Frequenzrasters, tritt Leakage auf und wir erhalten das Spektrum in Abbildung 1.17

Im Beispiel Abbildung 1.18 liegt eine Spektrallinie auf dem Frequenzraster, eine zweite Spektrallinie im Abstand von einem Viertel der Rasterfrequenz und kann daher nicht mehr aufgelöst werden.

#### 1.4.4 Fenstertechnik

Den Ausdruck

$$X[k] = \frac{\sin \left[ \frac{N}{2} \left( \frac{2\pi k}{N} - \hat{\omega}_0 \right) \right]}{\sin \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{2\pi k}{N} - \hat{\omega}_0 \right) \right]}$$

können wir, wie bei Filtern, als »Amplitudengang« der DFT interpretieren:

Die komplexe Exponentialfolge  $\bar{x}[n] = e^{j(\hat{\omega}_0 + \varphi)}$  wird im Zeitbereich mit der Rechteckfunktion (Rechteckfenster) multipliziert. Einer Rechteckfunktion im Zeitbereich entspricht aber immer eine (periodische) **sinc**-Funktion im Frequenzbereich und umgekehrt. Das Rechteckfenster bzw. dessen DFT helfen uns, den Leckeffekt zu verstehen.

Wir wollen nun an Stelle des Rechteckfensters andere Fenster verwenden und deren Einfluss auf die DFT untersuchen. Die Zusammenhänge bei der Feste-

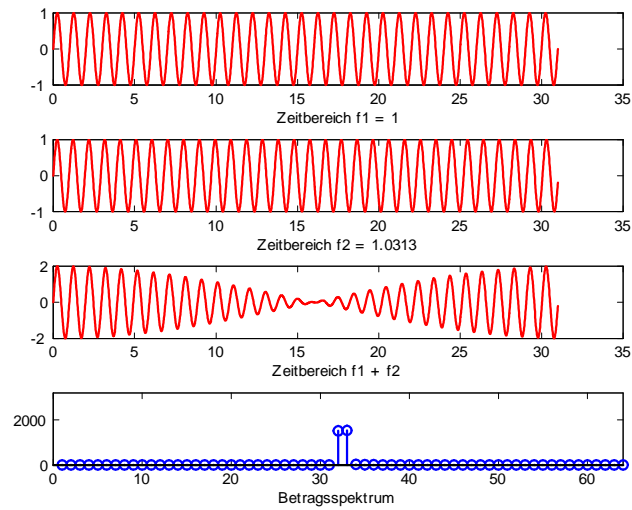


Abbildung 1.16: Spektrallinien liegen auf Frequenzraster

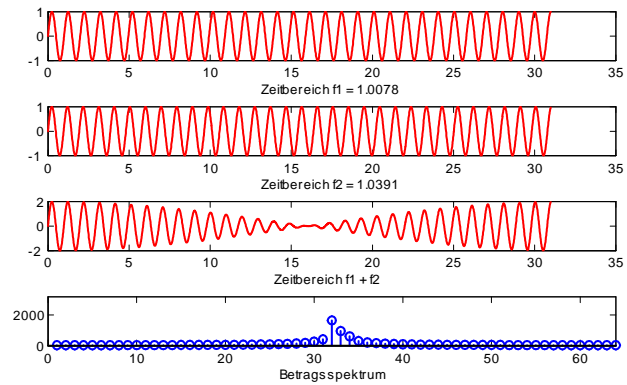


Abbildung 1.17: Spektrallinien aus 1.16 um ein Viertel im Raster verschoben

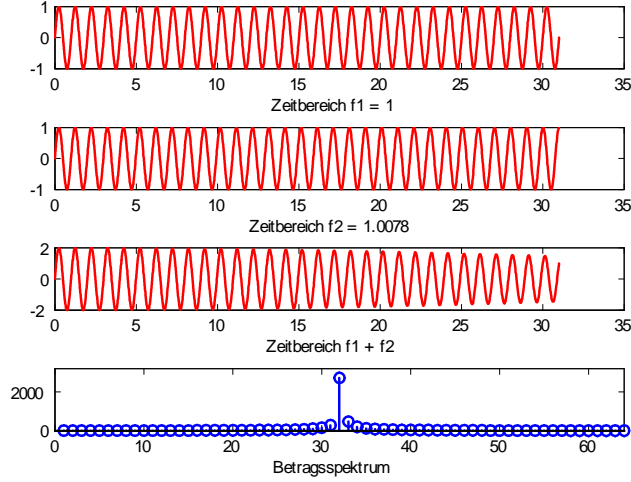


Abbildung 1.18: Eine Spektrallinie auf Raster, zweite um ein Viertelraster verschoben

rung sind in Abbildung 1.19 dargestellt.

Es mag seltsam erscheinen, dass wir die Kosinusfunktion nicht einfach mit einem Rechteckfenster beschneiden, sondern ein Dreiecksfenster

$$w_D = \begin{cases} \frac{n}{N/2} & n = 0, 1, 2, \dots, N/2 \\ 2 - \frac{n}{N/2} & n = N/2, \dots, N-1 \end{cases},$$

ein von Hann-Fenster

$$w_{Hn} = 0.5 \left[ 1 - \cos \left( \frac{2\pi}{N-1} n \right) \right], \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

oder ein Hammingfenster

$$w_{Hm} = 0.54 - 0.46 \cos \left( \frac{2\pi}{N-1} n \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

verwenden.

Wir werden aber sehen, dass die Verwendung von Fenstern einen vorteilhaften Einfluss auf den Leck-Effekt hat.

Bei Verwendung eines Fensters wird die DFT

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} w[n]x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$$

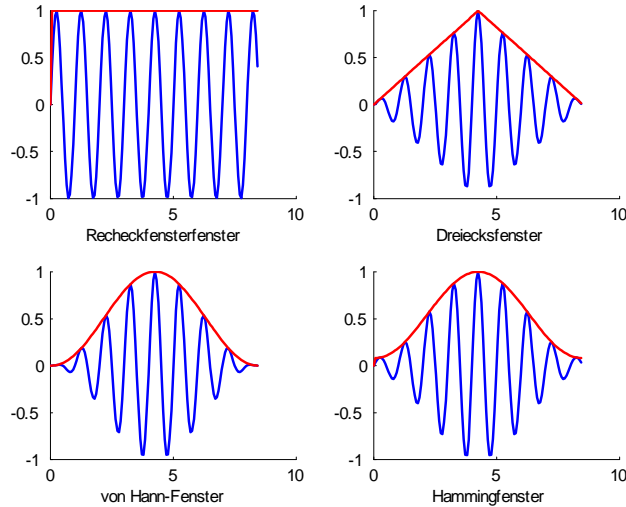


Abbildung 1.19: Fenster im Zeitbereich

Die Fenster sind in Abbildung 1.20 im Zeit- und im Frequenzbereich dargestellt<sup>4</sup>, wobei im Frequenzbereich, zur besseren Bewertbarkeit, die Amplituden logarithmisch dargestellt sind.

Wir sehen, dass das Rechteckfenster im Frequenzbereich die schmalste Hauptkeule aufweist. Die genaue Auswertung zeigt, dass die Breite der Hauptkeule  $f_s/N$  ist. Das Maximum der ersten Nebenkeule ist aber nur  $-13$  dB unter der Hauptkeule, das ist der schlechteste Wert von allen Fenstern. Das Dreiecksfenster hat eine stärkere Dämpfung der ersten Nebenkeule,  $-26$  dB, allerdings ist die Hauptkeule doppelt ( $2f_s/N$ ) so breit.

Die Höhe der Nebenkeulen liefert ein Maß für den Leck-Effekt, je größer die Dämpfung, desto geringer der Leck-Effekt. Die Breite der Hauptkeule ist ein Maß für die Selektivität der DFT, je schmaler die Keule, desto selektiver.

Das von Hann-Fenster zeichnet sich durch eine große Dämpfung der ersten Nebenkeule,  $-32$  dB, aus, die weiteren Nebenkeulen sind noch stärker gedämpft, allerdings auch um den Preis, dass die Breite der Hauptkeule  $2f_s/N$  beträgt.

Das Hamming-Fenster hat eine stärkere Dämpfung der ersten Nebenkeule,  $-48$  dB. Die geringste Nebenkeulendämpfung, die bei der dritten Nebenkeule auftritt, beträgt  $-42$  dB. Auch das Hamming-Fenster hat eine Hauptkeule deren Breite  $2f_s/N$  beträgt.

#### Auswirkung der Fenster

Abbildung 1.21 zeigt die Auswirkung des Rechteck- und des von Hann-Fensters auf eine Spektrallinie, die auf dem Frequenzraster liegt. Wir sehen, dass das Rechteckfenster, wie zu erwarten, eine Spektrallinie anzeigt, während das

<sup>4</sup>Matlab stellt dazu die Funktion `wvtool` und `wintool` zur Verfügung.

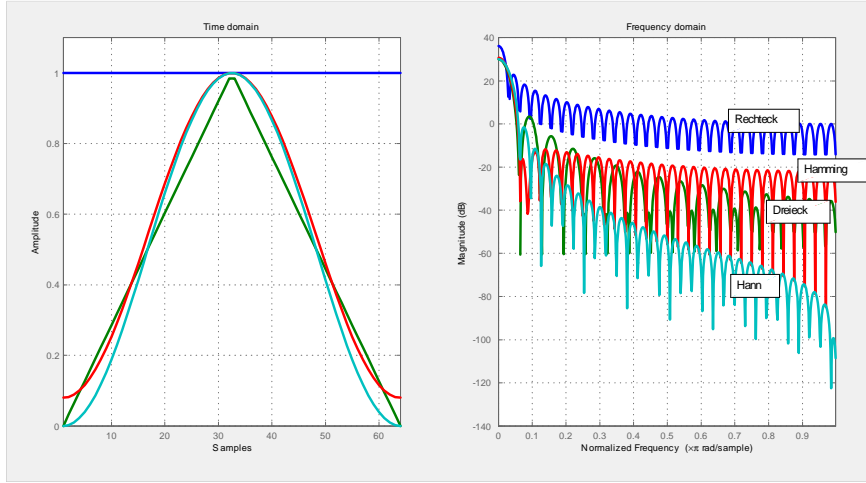


Abbildung 1.20: Rechteck-, Dreieck-, Hamming-, Hann-Fenster

von Hann-Fenster nicht eine einzige Spektrallinie, sondern ein breiteres Spektrum anzeigt, was in diesem Fall ein Nachteil ist.

Abbildung 1.22 zeigt ein einzelnes Signal, das nicht auf dem Raster liegt. Wir sehen, dass das Hann-Fenster eine vorteilhafte schärfere spektrale Auflösung zeigt, während beim Rechteckfenster das Spektrum verschmierter ist.

In Abbildung 1.23 sehen wir das Spektrum zweier nahe beisammen liegende Spektrallinien, die beide auf dem Frequenzraster liegen. Die Amplituden des Signale verhalten sich wie 1 : 0.5. Auf Grund der schmälere Hauptkeule trennt das Rechteckfenster die beiden Spektrallinien schärfer als das Hann-Fenster.

Abbildung 1.24 zeigt als letztes Beispiel zwei benachbarte Signalkomponenten (Amplituden 1 : 0.5), die beide nicht auf dem Frequenzraster liegen. Wir sehen, dass das Hann-Fenster die beiden Spektrallinien noch gut separiert, während beim Rechteckfenster die Trennung wesentlich schlechter ist. Der Grund für die deutlichere Trennung des Hann-Fensters ist die stärkere Dämpfung der Nebenkeulen.

Wir halten fest, dass nur das Rechteckfenster eine Hauptkeulenbreite von  $f_s/N$  aufweist, was aus Sicht der Selektivität ein Vorteil ist. Alle anderen hier vorgestellten Fenster haben eine Hauptkeulenbreite von  $2f_s/N$ , allerdings ist die Dämpfung der Nebenkeulen bei diesen Fenstern größer, was letztlich zu einer höheren Selektivität bei Signalkomponenten, die nicht auf dem Frequenzraster liegen (und das ist die Regel) führt.

Es ist zu beachten, dass bei Folgen mit Zero Padding das Fenster nur auf den Bereich der Werte ungleich Null angewendet werden darf!

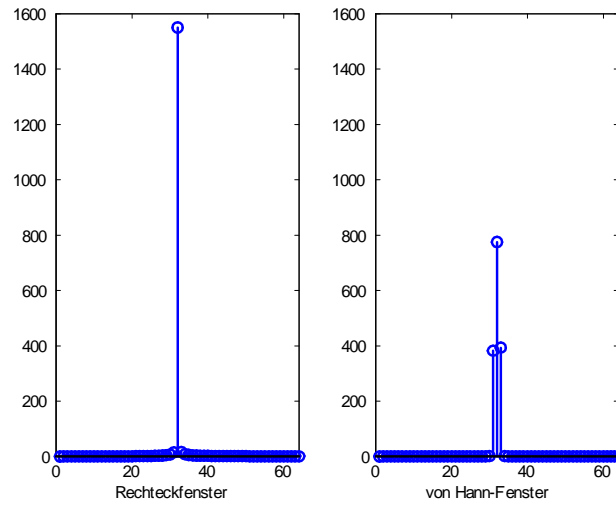


Abbildung 1.21: Einzelsignal auf Frequenzraster

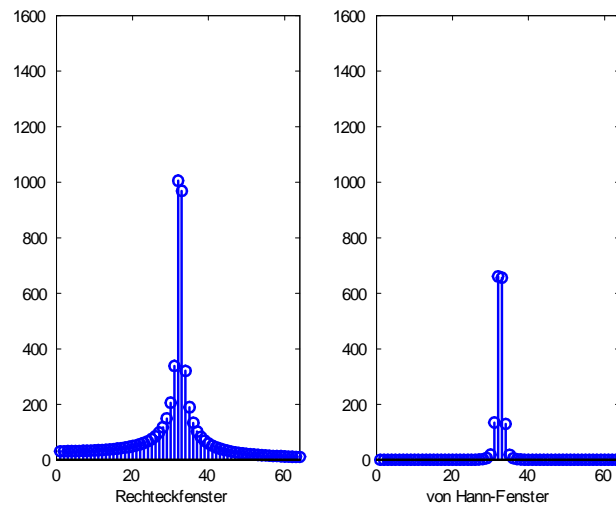


Abbildung 1.22: Einzelsignal NICHT auf Raster



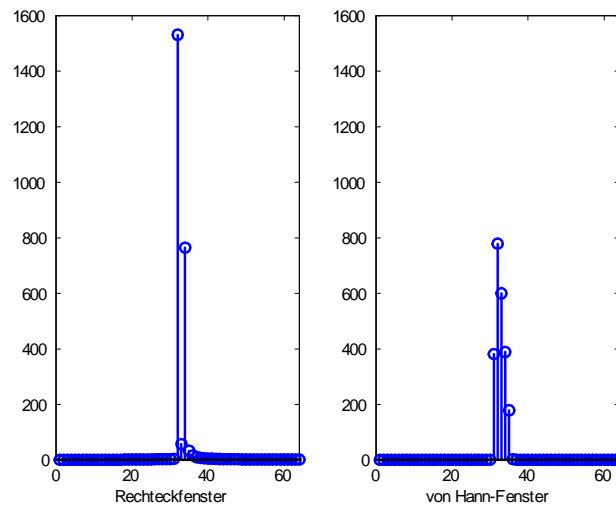


Abbildung 1.23: Zwei Signale, beide auf Frequenzraster

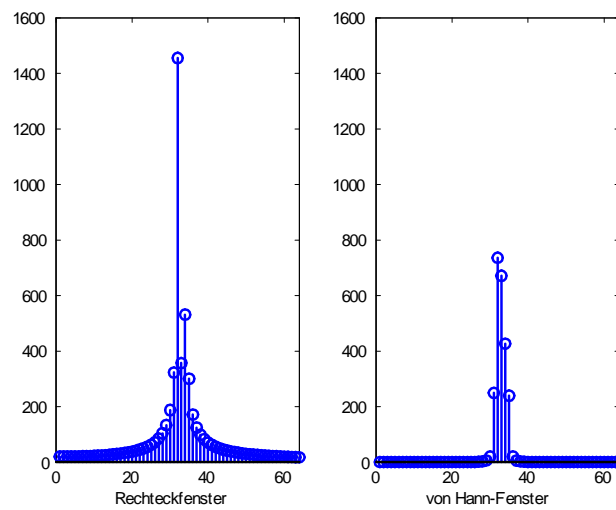


Abbildung 1.24: Beide Signale NICHT auf dem Frequenzraster

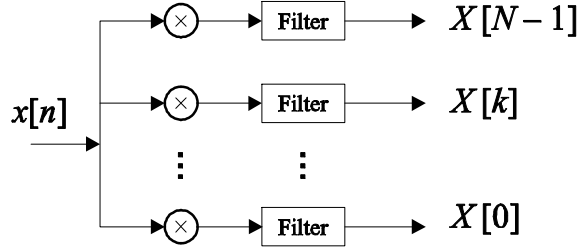


Abbildung 1.25: DFT als Filterbank

### 1.4.5 DFT als Filterbank

Die DFT ermittelt die Spektralkomponenten eines Signals. Man kann die DFT daher auch als »Spektrumanalysator« auffassen, der mit Hilfe von zahlreichen Filtern die Frequenzkomponenten des Signals ermittelt. Diesen Zusammenhang macht Abbildung 1.25 deutlich.

Für jede Spektrallinie gibt es ein Filter, wobei die Filtercharakteristik dem Frequenzgang der DFT (mit Fenster) entspricht.

### 1.4.6 Matrixdarstellung der DFT

Führt man bei der Darstellung der DFT/iDFT

$$\begin{aligned}
 X[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j \frac{2\pi n}{N} k} \quad k = 0, 1, 2, \dots, (N-1) && \mathbf{DFT} \\
 x[n] &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j(2\pi k/N)n} \quad n = 0, 1, 2, \dots, (N-1) && \mathbf{inverse DFT}
 \end{aligned}$$

die Abkürzung  $W_N = e^{-j2\pi/N}$  ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
 X[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn} \quad k = 0, 1, 2, \dots, (N-1) && \mathbf{DFT} \\
 x[n] &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] W_N^{-kn} \quad n = 0, 1, 2, \dots, (N-1) && \mathbf{inverse DFT}
 \end{aligned}$$

Wir schreiben die Summendarstellung aus und erhalten

$$\begin{aligned}
X[0] &= x[0] \cdot 1 + x[1] \cdot 1 + x[2] \cdot 1 + \dots + x[N-1] \cdot 1 \\
X[1] &= x[0] \cdot 1 + x[1] \cdot W_N^1 + x[2] \cdot W_N^2 + \dots + x[N-1] \cdot W_N^{N-1} \\
X[2] &= x[0] \cdot 1 + x[1] \cdot W_N^2 + x[2] \cdot W_N^4 + \dots + x[N-1] \cdot W_N^{2(N-1)} \\
&\vdots \\
X[N-1] &= x[0] \cdot 1 + x[1] \cdot W_N^{N-1} + x[2] \cdot W_N^{2(N-1)} + \dots + x[N-1] \cdot W_N^{(N-1)(N-1)} \\
W_N^0 &= 1
\end{aligned}$$

Diesen Ausdruck können wir in Matrixschreibweise darstellen und erhalten

$$\begin{aligned}
\mathbf{X} &= \mathbf{W}_N \cdot \mathbf{x} \\
\begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ X[2] \\ \vdots \\ X[N-1] \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & W_N^1 & W_N^2 & \dots & W_N^{N-1} \\ 1 & W_N^2 & W_N^4 & \dots & W_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & W_N^{N-1} & W_N^{2(N-1)} & \dots & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Wir sehen, dass die Matrix symmetrisch um die Hauptdiagonale ist und die Elemente  $W_N^1, W_N^2, \dots, W_N^{(N-1)(N-1)}$  hat. Diese Symmetrieeigenschaft kann man vorteilhaft bei der Berechnung der DFT ausnützen.

Die inverse DFT erhalten wird durch Matrixinversion. Die Matrixinversion ist sehr leicht durchzuführen, da die inverse  $\mathbf{W}_N^{-1}$  nur die konjugiert komplexe Matrix multipliziert mit  $1/N$  ist.

$$\mathbf{x} = \mathbf{W}_N^{-1} \mathbf{X} \quad \text{wobei} \quad \mathbf{W}_N^{-1} = \frac{1}{N} \mathbf{W}_N^*$$

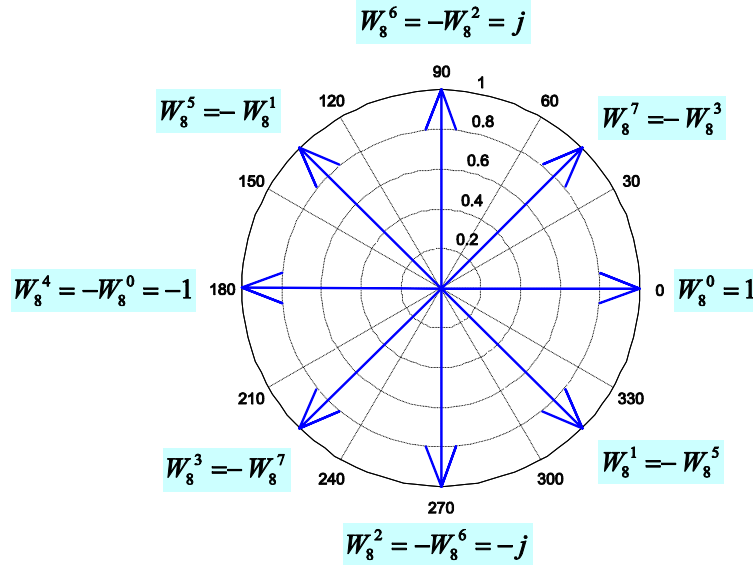
Die Matlabfunktion `dftmtx(N)` erzeugt die DFT-Matrix. Die Werte der DFT-Matrix für  $N = 8$  sind in folgender Tabelle dargestellt.

1	1 + 0i	1 + 0i	1 + 0i	1 + 0i	1 + 0i	1 + 0i	1 + 0i
1	0.7 - 0.7i	0 - 1i	-0.7 - 0.7i	-1 + 0i	-0.7 + 0.7i	0 + 1i	0.7 + 0.7i
1	0 - 1i	-1 + 0i	0 + 1i	1 + 0i	0 - 1i	-1 + 0i	1 + 0i
1	-0.7 - 0.7i	0 + 1i	0.7 - 0.7i	-1 + 0i	0.7 + 0.7i	0 - 1i	-0.7 + 0.7i
1	-1 + 0i	1 + 0i	-1 + 0i	1 + 0i	-1 + 0i	1 + 0i	-1 + 0i
1	-0.7 + 0.7i	0 - 1i	0.7 + 0.7i	-1 + 0i	0.7 - 0.7i	0 + 1i	-0.7 - 0.7i
1	0 + 1i	-1 + 0i	0 - 1i	1 + 0i	0 + 1i	-1 + 0i	0 - 1i
1	0.7 + 0.7i	0 + 1i	-0.7 + 0.7i	-1 + 0i	-0.7 - 0.7i	0 - 1i	0.7 - 0.7i

Abbildung 1.26 stellt die Werte der  $N = 8$  mit Hilfe von `compass(dftmtx(8))` dar.

Wir können aus der DFTMTX und dem Zeigerdiagramm gut erkennen, dass Symmetrien vorliegen. Diese Symmetrien werden in der Schnellen Fouriertransformation ausgenützt, um den Rechenaufwand zu minimieren.

Die FFT ist identisch mit der DFT. Sie ist lediglich eine besonders effektive Berechnung der DFT, die auf Folgen, deren Länge ein ganzzahliges Vielfache von 2 betragen muss, eingeschränkt ist.

Abbildung 1.26: Werte der DFT-Matrix für  $N = 8$ 

### 1.4.7 Periodische (zirkuläre) Faltung

Die Faltung ist eine wichtige Operation bei der Signalverarbeitung, die allerdings sehr rechenaufwendig ist. Die Faltung ist eine Operation im Zeitbereich. Es ist aber auch möglich, die Faltung im Frequenzbereich zu berechnen. Dazu müssen die zu faltenden Folgen mit Hilfe der DFT in den Frequenzbereich transformiert werden, dort miteinander multipliziert werden und dann wieder in den Zeitbereich zurücktransformiert werden. In Erinnerung an den hohen Rechenaufwand bei der DFT mag diese Vorgangsweise aufwendig erscheinen. Durch die Verwendung der Fast Fouriertransformation (FFT) ist aber die Rechenzeit bei großem  $N$  auf diesem Weg kürzer.

Die Berechnung der Faltung rufen wir uns mit einem Beispiel in Erinnerung

$$f = [0 \ 0.02 \ 0.08 \ 0.18 \ 0.32 \ 0.51 \ 0.73 \ 1.00]$$

$$g = [0 \ 0.14 \ 0.29 \ 0.43 \ 0.57 \ 0.71 \ 0.86 \ 1.00]$$

$$\text{conv}(f, g) = [0 \ 0 \ 0.0028 \ 0.017 \ 0.057 \ 0.1428 \ 0.3014 \ 0.5643$$

$$0.97 \ 1.3566 \ 1.6634 \ 1.8469 \ 1.8478 \ 1.59 \ 1.0]$$

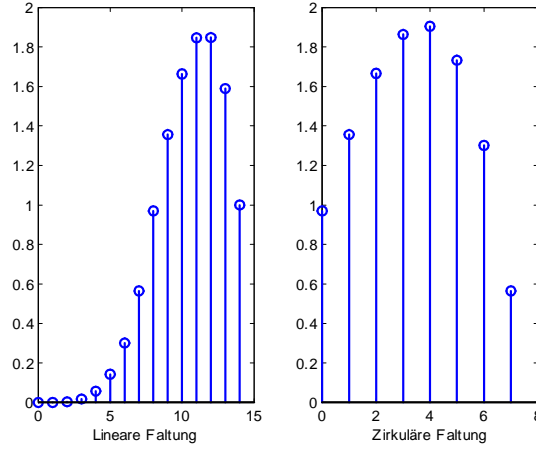
Die Länge des Faltungsprodukts  $\text{Länge}(f * g) = \text{Länge}(f) + \text{Länge}(g) - 1$ .

Berechnen wir nun die Faltung über die DFT, so erhalten wir `ifft(fft(f).*(fft(g)))`

`[0.97 1.3566 1.6662 1.8639 1.9048 1.7328 1.3014 0.5643]`

also ein anderes Ergebnis als bei der Faltung im Zeitbereich. Abbildung 1.27 stellt die unterschiedlichen Faltungsergebnisse dar.

Die Erklärung finden wir, wenn wir uns die Periodizität der DFT in Erinne-

Abbildung 1.27: Lineare  $\Leftrightarrow$  zirkuläre Faltung

rung rufen. Die Operation, die wir ausführen, ist die zyklische Faltung. Abbildung 1.28 erklärt den Zusammenhang: Die Werte von  $f$  sind auf dem inneren Kreis angeordnet, die Werte von  $g$  auf dem äußeren. Zum Zeitpunkt  $n = 0$  werden die gegenüberliegenden Werte multipliziert und summiert.  $(f \otimes g)_0 = f_0g_0 + f_1g_3 + f_2g_2 + f_3g_1$ . Dann wird der äußere Kreis um eine Position verdreht und wieder multipliziert und addiert  $(f \otimes g)_1 = f_0g_1 + f_1g_0 + f_2g_3 + f_3g_2$ .

Allgemein gilt

$$f[n] \otimes g[n] = \sum_{l=0}^{N-1} f[l]g[n-l] = \sum_{l=0}^{N-1} g[l]f[n-l]$$

Zur Unterscheidung notieren wir die aperiodische Faltung mit  $*$ , die zyklische Faltung mit  $\otimes$ .

Wenn wir die DFT zur Berechnung der aperiodisch Faltung verwenden wollen, müssen wir uns durch Anhängen von  $N_g - 1$  Nullen an  $f$  und  $N_f - 1$  Nullen an  $g$  behelfen. Dann erhalten wir die aperiodische Faltung im Frequenzbereich, durch Rücktransformation die aperiodische Faltung im Zeitbereich.

```
F = fft([f zeros(1,length(g)-1)])
G = fft([g zeros(1,length(f)-1)])
conv(f,g) = ifft(F.*G)
= [0 0 0.0028 0.017 0.057 0.1428 0.3014 0.5643
0.97 1.3566 1.6634 1.8469 1.8478 1.59 1]
```

### 1.4.8 Lange Signale – Schnelle (FFT) Faltung

Bei der Berechnung der Systemantwort im Zeitbereich ist bekanntlich das Signal mit der Impulsantwort zu falten. Lange Signale, z.B. Audio-Signale im

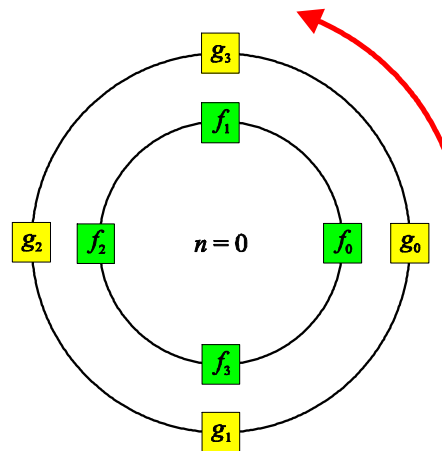


Abbildung 1.28: Zyklische Faltung

Minutenbereich, werden wegen des hohen Rechenaufwands und um Ergebnisse in »Echtzeit« zu erhalten, in kürzere Zeitabschnitte zerlegt. Bei der Berechnung bedient man sich vorteilhaft der schnellen Faltung mit Hilfe der FFT.

Die Vorgangsweise wird an einem einfachen Beispiel demonstriert:

Signal  $s[n] = [2 \ 3 \ 2 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1]$ , Impulsantwort  $h[n] = [1 \ 1]$

Wir zerlegen das Signal in Blöcke gleicher Länge<sup>5</sup>

$$s[n] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Da wir die aperiodische Faltung brauchen, müssen wir, um die DFT korrekt verwenden zu können, Nullen anhängen: An die Abschnitte von  $s[n]$  müssen wir  $\text{Länge}(h[n]) - 1 = 1$  Nullen anhängen, an  $h[n]$  müssen wir  $\text{Länge}(\text{Abschnitte von } s[n]) - 1 = 2$  Nullen anhängen

$$s[n] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad h[n] = [1 \ 1 \ 0 \ 0]$$

Die Ergebnisse der Faltung der einzelnen Abschnitte werden dann wieder zusammengesetzt

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \dots \\ 2 & 5 & 5 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \dots \end{bmatrix}$$

Diese Operation tritt sehr häufig auf und Matlab bietet dafür die Funktion `fftfilt` an

```
s=[2 3 2 1 0 1 0 1 1];
h=[1 1];
y=fftfilt(h,s,3)
```

<sup>5</sup>In praktischen Anwendungen kann die Blöcklänge viele hundert Elemente lang sein.

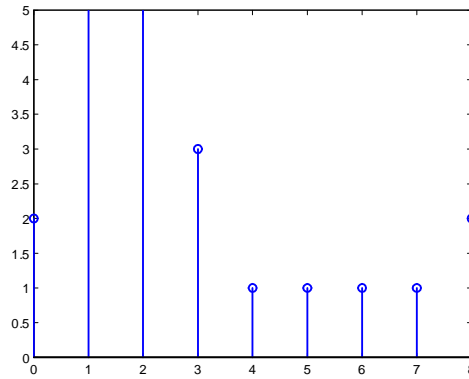
Abbildung 1.29: Faltung mit Hilfe von `fftfilt`

Abbildung 1.29 zeigt das Ergebnis der Faltung mit Hilfe von `fftfilt`.

## 1.5 Die schnelle Fouriertransformation (FFT)

Es gibt eine Vielzahl von Algorithmen zur Berechnung der schnellen Fouriertransformation, die auf Basis 2, 4 oder gemischten Basen beruhen, die Dezimation im Zeit- oder im Frequenzbereich durchführen, mit reeller oder komplexer Darstellung arbeiten. Wir beschäftigen uns nur mit dem Radix-2-Algorithmus.

Das Grundprinzip ist die Aufteilung (Dezimation) von  $N$ -Punkt  $\rightarrow N/2$ -Punkt  $\rightarrow N/4$ -Punkt  $\rightarrow \dots \rightarrow 2$ -Punkt Folgen und die Ausnutzung der Symmetrieeigenschaften und der Periodizität von  $W_N^k = e^{-j2\pi k/N}$ .

Da  $W_N^k$  eine wichtige Rolle bei der Signalverarbeitung spielt, stellt Matlab die Funktion `dftmtx(N)` zur Verfügung, die die Elemente der Matrix  $\mathbf{W}_N$  berechnet<sup>6</sup>. Abbildung 1.26 zeigt die Werte von  $W_N^k = e^{-j2\pi k/N}$   $k = 0, 1, \dots, N-1$

Unter Verwendung der Funktion `dftmtx(N)` kann die Berechnung der DFT entsprechend der Matrixschreibweise durchgeführt werden:

Das folgende Beispiel und Abbildung 1.30 zeigen die Schritte der Berechnung des Spektrum einer Rechteckfolge

```
sig=[1 1 1 1 0 0 0 0];
N=length(sig);
SIG=sig*dftmtx(N);
sigrueck=(1/N)*(SIG*conj(dftmtx(N)));
```

Die Symmetrieeigenschaften der DTFT\_Matrix, die bei der Berechnung der FFT vorteilhaft ausgenutzt werden können, sind in Abbildung 1.26 dargestellt

- $W_8^0$  wiederholt sich nach Vielfachen von  $N$

<sup>6</sup>Wegen der gedrehten Zeiger wird  $W_N^k$  in der Literatur auch Twiddle-Faktor genannt.

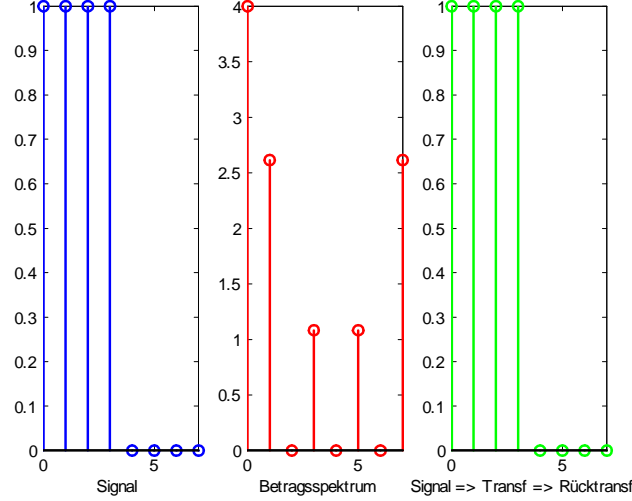


Abbildung 1.30: Rechtecksignal: Zeit- → Frequenz- → Zeitsignal

- $W_8^0 = W_8^8 = W_8^{16} = \dots \Rightarrow W_N^k = W_N^{k+iN} \quad i = 0, 1, \dots, N-1$
- Die Zeiger von  $W_N^k$  unterscheiden sich nur in der Phase
- Zeiger in der Gegenphase haben unterschiedliches Vorzeichen  $W_N^k = -W_N^{k+\frac{N}{2}}$

Diese Eigenschaften verwenden wir bei der Dezimation im Zeitbereich. Zunächst teilen wir  $x[n] \quad n = 0, 1, \dots, N-1$  in eine Folge mit geraden ( $g$ ) und eine Folge mit ungeraden ( $u$ ) Indizes auf

$$x_g = x[2m] \quad x_u = x[2m+1] \quad m = 0, 1, \dots, \left(\frac{N}{2} - 1\right)$$

Damit wird

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn} = \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2m] W_N^{2km} + \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2m+1] W_N^{k(2m+1)}$$

In der zweiten Summe teilen wir den Exponenten in zwei Teile und können  $W_N^k$  vor die Summe schreiben, da es nicht von  $m$  abhängt. Wir erhalten daher

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn} = \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} \underbrace{x[2m]}_{x_g[m]} W_N^{2km} + W_N^k \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} \underbrace{x[2m+1]}_{x_u[m]} W_N^{2km}$$

Aus der Zeigerdarstellung von  $W_N^k$  sehen wir, dass  $W_N^2 = e^{-j\frac{2\pi^2}{N}} = e^{-j\frac{2\pi}{N/2}} \Rightarrow W_N^2 = W_{\frac{N}{2}}$ , sodass wir substituieren können



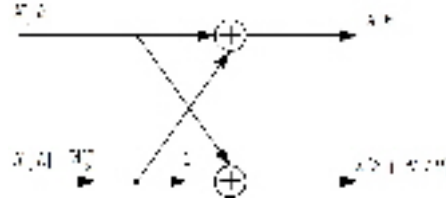


Abbildung 1.31: FFT »Butterfly«

$$X[k] = \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2m] W_N^{km} + W_N^k \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2m+1] W_N^{2km} \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

Die Teilsummen obiger Gleichung stellen jeweils eine DFT der Länge  $N/2$  dar und wir können schreiben

$$\begin{aligned} X[k] &= \mathbf{DFT}_{\frac{N}{2}} \{x_g[m]\} + W_N^k \cdot \mathbf{DFT}_{\frac{N}{2}} \{x_u[m]\} \\ &= X_g[m] + W_N^k X_u[m] \end{aligned} \quad (1.4)$$

Wir haben die Berechnung der DFT von  $x[n]$   $n = 0, 1, \dots, N-1$  aufgeteilt in die Berechnung der DFT von  $x_g = x[2m]$   $x_u = x[2m+1]$   $m = 0, 1, \dots, (\frac{N}{2}-1)$ .

Gleichung 1.4 muss für alle  $k$  berechnet werden. Die Spektren  $X_g[m]$  und  $X_u[m]$  sind periodisch in  $N/2$  und können daher einfach periodisch fortgesetzt werden. Aus der Beziehung der Gegenphase  $W_N^{k+\frac{N}{2}} = -W_N^k$  wird schließlich

$$\begin{aligned} X[k] &= X_g[k] + W_N^k X_u[k] \quad k = 0, 1, \dots, \left(\frac{N}{2}-1\right) \\ X\left[k + \frac{N}{2}\right] &= X_g[k] - W_N^k X_u[k] \quad k = 0, 1, \dots, \left(\frac{N}{2}-1\right) \end{aligned}$$

$X_g$  ist die  $N/2$ -Punkt DFT von  $x_g[n]$  und  $X_u$  ist die  $N/2$ -Punkt DFT von  $x_u[n]$ . Der Signalflussgraph in Abbildung 1.31 stellt die Zusammenhänge grafisch dar

Das Aufteilen in »gerade« und »ungerade« Anteile lässt sich ausgehend von  $N$  solange fortsetzen, bis  $N = 2$  ist. Das soll am Beispiel für  $N = 8$  in Abbildung 1.32 gezeigt werden.

Im nächsten Schritt wird in 2-Punkt DFTs zerlegt, wie in Abbildung 1.33 gezeigt.

Wie man sieht, muss  $x[n]$  etwas ungewohnt  $[0 \ 4 \ 2 \ 6 \ 1 \ 5 \ 3 \ 7]$  indiziert werden, um die FFT zu starten. Diese Adressierung wird von Signalprozessoren hardwareunterstützt durchgeführt und ist relativ einfach zu implementieren, wenn man folgenden Zusammenhang berücksichtigt

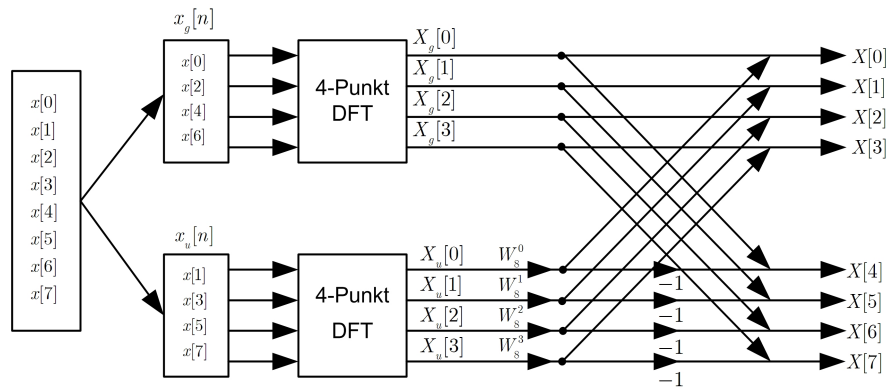


Abbildung 1.32: Aufteilung der 8-Punkt DFT

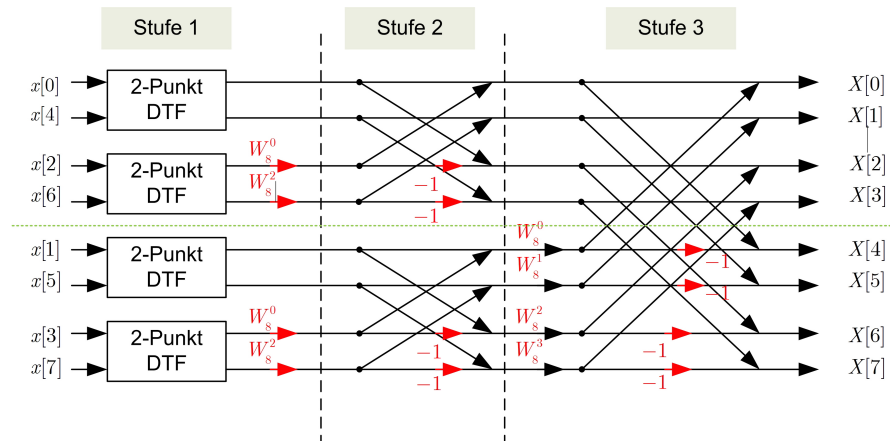


Abbildung 1.33: Aufteilung in 2-Punkt DFTs

Dezimal- Index	Binär- Index	Bit- reversed	Dez. Bit- reversed
0	000	000	0
1	001	100	4
2	010	010	2
3	011	110	6
4	100	001	1
5	101	101	5
6	110	011	3
7	111	111	7

Die Berechnung des »geraden« und »ungeraden« Teils  $X_g[k]$  und  $X_u[k]$  verlangt  $2 \left(\frac{N}{2}\right)^2$  komplexe Operationen, die Berechnung von  $W_N^k X_u[k]$  verlangt zusätzlich  $N/2$  Operationen, das ergibt insgesamt  $(N^2 + N)/2$  Operationen. Bei großem  $N$  wird  $(N^2 + N)/2 \rightarrow N^2/2$ , die Zahl der Operationen durch die Aufteilung in »geraden« und »ungeraden« Teil halbiert sich also. Für die Berechnung der DFT  $X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\frac{2\pi n}{N}k}$  sind ungefähr  $N^2$  komplexe Multiplikationen erforderlich. Bei der FFT reduziert sich die Zahl der komplexen<sup>7</sup> Multiplikationen auf  $\frac{N}{2} \log_2(N)$ .

### 1.5.1 Inverse DFT

DFT und inverse DFT unterscheiden sich lediglich durch den Skalierungsfaktor  $1/N$  und das negative Vorzeichen in der Exponentialfunktion

$$\begin{aligned}
 X[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\frac{2\pi n}{N}k} & \mathbf{DFT} \\
 x[n] &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k]e^{j(2\pi k/N)n} & \mathbf{inverse\ DFT}
 \end{aligned}$$

Häufig liegen Software-Routinen oder dedizierte Hardware vor, die den FFT-Algorithmus implementieren und man möchte die vorliegenden Lösungen auch für die iFFT verwenden. Wir untersuchen, wie die iFFT mit Hilfe der FFT durchgeführt werden kann. Dazu konjugieren wir zunächst beide Seiten der iFFT; die Konjugierte des Produktes kann durch das Produkt der Konjugierten ersetzt werden und wir erhalten

$$x[n]^* = \left\{ \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k]e^{j(2\pi k/N)n} \right\}^* = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k]^* e^{-j(2\pi k/N)n}$$

Daraus wird schließlich, wie in Abbildung 1.34 gezeigt.

<sup>7</sup>Darunter sind auch Multiplikationen mit 1 bzw.  $-1$ .

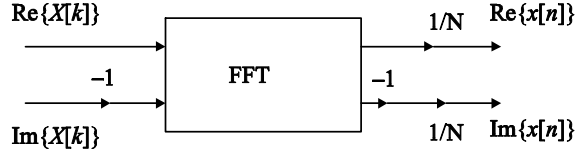


Abbildung 1.34: Berechnung der iFFT mit Hilfe der FFT

$$x[n] = \left\{ \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k]^* e^{-j(2\pi k/N)n} \right\}^*$$

Die Konjugierte von  $X[k]$  wird durch Negation des Imaginärteils berechnet, dann wird die FFT durchgeführt, das Ergebnis mit  $1/N$  skaliert und die Konjugierte von  $x[n]$  wieder durch Negation gebildet. Bei reellen Zeitfolgen ist der Imaginärteil von  $x[n]$  Null, die Multiplikation mit  $-1$  und  $1/N$  kann daher entfallen.

Eine weitere Möglichkeit der Berechnung der iFFT durch die FFT ist in Abbildung 1.35 dargestellt

$$\begin{aligned}
 x[n] &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j\frac{2\pi}{N}n} \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \{X_{\text{Re}}[k] + jX_{\text{Im}}[k]\} \left\{ \cos\left(\frac{2\pi}{N}n\right) + j \sin\left(\frac{2\pi}{N}n\right) \right\} \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ X_{\text{Re}}[k] \cos\left(\frac{2\pi}{N}n\right) - X_{\text{Im}}[k] \sin\left(\frac{2\pi}{N}n\right) \right\} \\
 &\quad + j \left\{ X_{\text{Re}}[k] \sin\left(\frac{2\pi}{N}n\right) + jX_{\text{Im}}[k] \cos\left(\frac{2\pi}{N}n\right) \right\}
 \end{aligned} \tag{1.5}$$

Gleichung 1.5 ist der allgemeine Ausdruck für die FFT. Tauschen wir nur am Eingang des FFT-Blocks Real- und Imaginärteil  $X_{\text{tausch}} = X_{\text{Im}}[k] + jX_{\text{Re}}[k]$  und berechnen die FFT, erhalten wir

$$\begin{aligned}
 X_{\text{tausch}} &= \sum_{k=0}^{N-1} \{X_{\text{Im}}[k] + jX_{\text{Re}}[k]\} \left\{ \cos\left(\frac{2\pi}{N}n\right) + j \sin\left(\frac{2\pi}{N}n\right) \right\} \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ X_{\text{Im}}[k] \cos\left(\frac{2\pi}{N}n\right) - X_{\text{Re}}[k] \sin\left(\frac{2\pi}{N}n\right) \right\} \\
 &\quad + j \left\{ X_{\text{Re}}[k] \cos\left(\frac{2\pi}{N}n\right) + X_{\text{Im}}[k] \sin\left(\frac{2\pi}{N}n\right) \right\}
 \end{aligned}$$

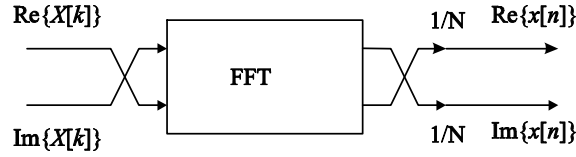


Abbildung 1.35: Berechnung der iFFT mit Hilfe der FFT

Tauschen wir nun am Ausgang des FFT-Blocks Real- und Imaginärteil des Ergebnisses, erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ X_{\text{Re}}[k] \cos\left(\frac{2\pi}{N}n\right) + X_{\text{Im}}[k] \sin\left(\frac{2\pi}{N}n\right) \right\} \\ + j \left\{ X_{\text{Im}}[k] \cos\left(\frac{2\pi}{N}n\right) - X_{\text{Re}}[k] \sin\left(\frac{2\pi}{N}n\right) \right\} \end{aligned} \quad (1.6)$$

Gleichung 1.6 stellt die iFFT dar, wenn wir noch Real- und Imaginärteil mit  $1/N$  multiplizieren. Wir sehen, dass wir mit diesem Vorgehen die iFFT mit Hilfe der FFT berechnen können, wie in Abbildung 1.35 gezeigt.

### 1.5.2 Anfügen von Nullen

Wie wir gesehen haben, spielt das Anfügen von Nullen (Zero-padding) im Zeitbereich eine wichtige Rolle bei der Berechnung der Faltung über die Schnelle Fouriertransformation.

- Durch Zero-padding können wir die Faltung im Frequenzbereich mit Hilfe der FFT berechnen.
- Wenn die Länge von Signalen keine Potenz von zwei ist, kann die FFT nicht verwendet werden. In derartigen Fällen bringt man das Signal durch Anfügen von Nullen auf die geeignete Länge.
- Schließlich wird Zero-padding im Zeitbereich verwendet, um mehr Punkte im Frequenzbereich zu erhalten. Damit erhält man keine zusätzlichen Informationen über das Signal, es wird lediglich im Spektralbereich interpoliert.

## 1.6 Zusammenfassung

Die diskrete Fouriertransformation ist einer der wichtigsten Algorithmen in der digitalen Signalverarbeitung (DSP). Manche Aufgabenstellungen lassen sich gut im Zeitbereich lösen, andere wiederum lassen besser oder überhaupt nur im Frequenzbereich lösen. Daher ist der Übergang Zeitbereich  $\rightarrow$  Frequenzbereich  $\rightarrow$  Zeitbereich eine Operation, die immer wieder ausgeführt werden muss.

Von besonderer Bedeutung ist die Schnelle Fouriertransformation (FFT), die sich aus Sicht der Operation nicht von der DFT unterscheidet, die aber durch geschicktes Ausnützen von Symmetrien in der DFT mit weit weniger Rechenoperationen auskommt. Ohne die FFT gäbe es viele der heutigen DSP-Anwendungen nicht.

Das Verständnis und die Beherrschung der DFT und ihrer Artefakte ist eine wesentliche Voraussetzung für die erfolgreiche Anwendung digitale Signalverarbeitung.