Rückblick:

Laplace-Experiment: Für ein Elementarereignis $\omega \in \Omega$ gilt:

$$P(\{\omega\}) = \frac{1}{|\Omega|}$$

Für ein Ereignis $A \subset \Omega$ gilt:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{Anzahl der für } A \text{ günstigen Elementarereignisse}}{\text{Anzahl der möglichen Elementarereignisse}}$$

Mächtigkeit von Ereignissen $\longrightarrow$ Kombinatorik

Beispiel: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kartenspieler genau ein Ass bekommt, wenn mit einem Kartenspiel mit 52 Karten und 4 Spielern gespielt wird (alle Karten werden ausgeteilt)?

A_i: "Kartenspieler i bekommt ein Ass"

$$|\Omega| = \binom{52}{13}$$

13-elementige Teilmenge von 52 Karten (Ziehen ohne Zurücklegen, Reihenfolge spielt keine Rolle)

Möglichkeiten 1 Ass von 4 zu ziehen

$$|A_i| = \binom{4}{1} \cdot \binom{48}{12}$$

Möglichkeiten 12-mal kein Ass zu ziehen

Zählprinzip

$$P(A_i) = \frac{\binom{4}{1} \cdot \binom{48}{12}}{\binom{52}{13}}$$

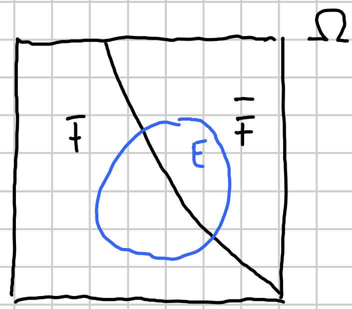
2.6 Bedingte Wahrscheinlichkeit

Die Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis E kann sich verändern, wenn man über zusätzliche Informationen verfügt, z.B. dass ein anderes Ereignis F eingetreten ist

Definition 2.3:

Seien $E, F \subseteq \Omega$ Ereignisse mit $P(F) > 0$.

Dann heißt
$$P(E|F) = P_F(E) := \frac{P(E \cap F)}{P(F)}$$
die <u>bedingte</u> <u>Wahrscheinlichkeit</u> von E unter F.



$$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{|E \cap F|}{|\Omega|}}{\frac{|F|}{|\Omega|}} = \frac{|E \cap F|}{|F|}$$

<u>Vorteil:</u> Häufig sind die Wahrscheinlichkeiten für Ereignisse gegeben und die Mächtigkeiten nicht bekannt. Dann lässt sich die bedingte Wahrscheinlichkeit als Verhältnis der Wahrscheinlichkeiten berechnen!

<u>Bemerkung:</u> Durch die Bedingung, dass ein Ereignis F eingetreten ist, reduziert sich der Ergebnisraum auf F und das kann die Wahrscheinlichkeit für E verändern.

Beispiel: Zweimaliges Werfen einer Münze

$\Omega = \{(K,K),(K,Z),(Z,K),(Z,Z)\}$ K: Kopf
Z: Zahl

(a) Wahrscheinlichkeit für E = "Zweimal Kopf"

$P(E) = \frac{1}{4}$

(b) Wahrscheinlichkeit für E, wenn beim 1. Wurf Kopf geworfen wurde

F = " Beim 1. Wurf Kopf "

$F = \{(K,K),(K,Z)\}$, $E \cap F = \{(K,K)\}$

$$P(E|F) = \frac{|E\cap F|}{|F|} = \frac{1}{2} = \frac{P(E\cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{4}} = \frac{1}{2}$$

Wahrscheinlichkeit hat sich vergrößert

(c) Wahrscheinlichkeit für E, wenn beim 1. Wurf Zahl aufgetreten ist

F_2 = " Beim 1. Wurf Zahl "

$P(E|F_2) = 0$ Wahrscheinlichkeit hat sich verkleinert

Beispiel 2: Frau Meier erfährt, dass ihre Firma mit 30 % Wahrscheinlichkeit eine Zweigstelle in Wasserburg aufmacht. ($P(F)$)
Wenn das der Fall ist, dann wird sie mit 60 % Wahrscheinlichkeit Leiterin der Zweigstelle. ($P(E|F)$)
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Frau Meier die Zweigstellenleiterin von Wasserburg wird?

W bedeutet "Zweigstelle Wasserburg eröffnet"

M bedeutet "Frau Meier ist Leiterin der Zweigstelle"

$$\Omega = \{ (W, M), (W, \bar{M}), (\bar{W}, \bar{M}) \}$$

Elemente sind nicht gleichwahrscheinlich!

Wir betrachten die Ereignisse

E = "Frau Meier wird Zweigstellenleiterin" $= \{(W,M)\}$

F = "Zweigstelle in Wasserburg wird eröffnet" $= \{(W,M), (W,\bar{M})\}$

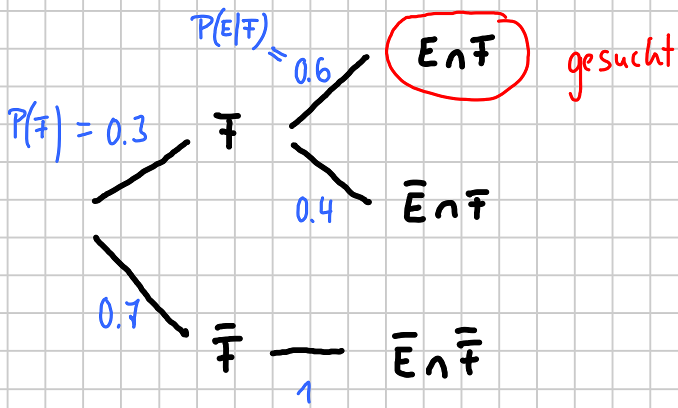
__Gegeben:__ $P(F)$, $P(E|F)$

__Gesucht:__ $P(E \cap F)$

$$\underbrace{P(E|F)}_{0.6} = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} \quad P(F) = 0.3 \quad \Longrightarrow \quad P(E \cap F) = P(E|F) \cdot P(F)$$

$$= 0.6 \cdot 0.3 = 0.18$$

Alternativ mit Wahrscheinlichkeitsbaum:



Satz 2.2: Multiplikationsregel

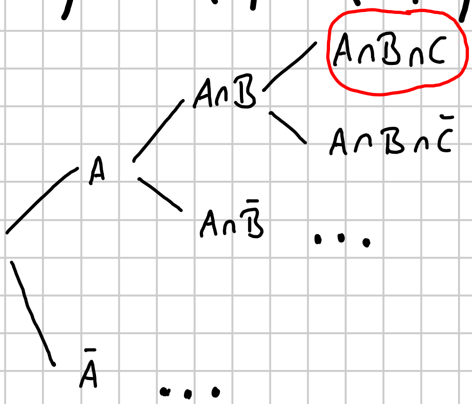
(1) $P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$ $\quad$ (falls $P(B) > 0$)

(2) $P(A \cap B) = P(B|A) \cdot P(A)$ $\quad$ (falls $P(A) > 0$)

Erklärung: $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ bzw. $P(B|A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$

Diese Regel lässt sich beliebig erweitern (k-stufiges Zufallsexperiment)

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C|A \cap B)$$



<u>Beispiel:</u> Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat jeder der 4 Spieler bei obigem Kartenspiel genau ein Ass?

A_i = "i-ter Spieler hat genau ein Ass"

Gesucht: $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4)$

$$= P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot P(A_4|A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

$$= \frac{\binom{4}{1} \cdot \binom{48}{12}}{\binom{52}{13}} \cdot \frac{\binom{3}{1}\binom{36}{12}}{\binom{39}{13}} \cdot \frac{\binom{2}{1} \cdot \binom{24}{12}}{\binom{26}{13}} \cdot \underbrace{\frac{\binom{1}{1} \cdot \binom{12}{12}}{\binom{13}{13}}}_{=1}$$