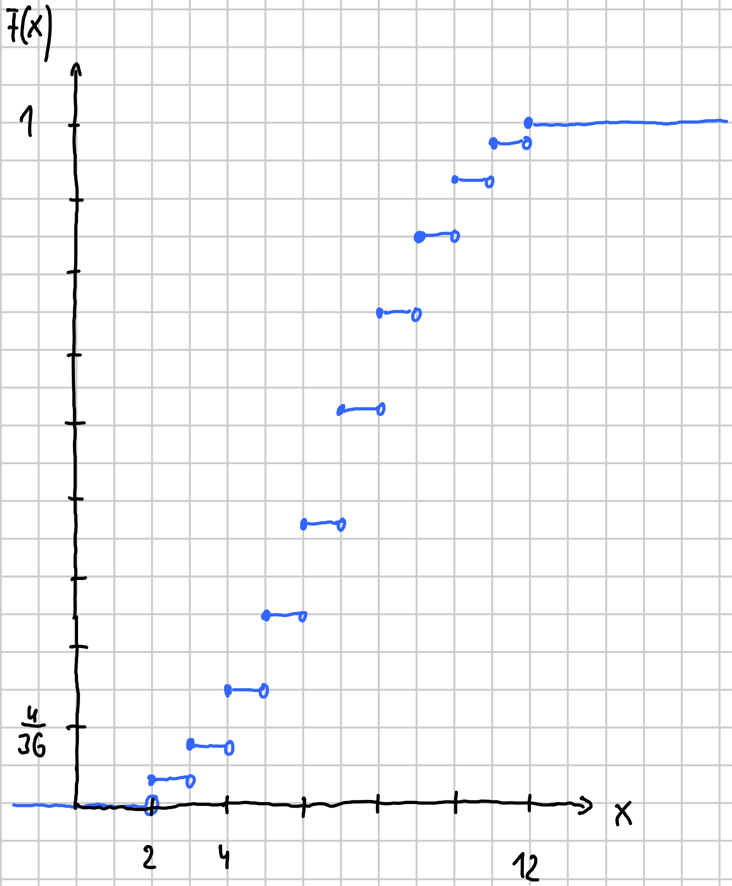
6

Wahrscheinlichkeitsfkt.:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{36} & \text{für } x=2 \lor x=12 \\ \frac{2}{36} & \text{für } x=3 \lor x=11 \\ \frac{3}{36} & \text{für } x=4 \lor x=10 \\ \frac{4}{36} & \text{für } x=5 \lor x=9 \\ \frac{5}{36} & \text{für } x=6 \lor x=8 \\ \frac{6}{36} & \text{für } x=7 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Verteilungsfkt: $F(x)$



3.2.2 Stetige Zufallsvariablen

Im Gegensatz zu einer diskreten ZV, deren Werte man durch Zählen bzw. mit Hilfe von Kombinatorik erhält, resultieren die Werte einer stetigen ZV aus einem Messvorgang und liegen in einem Bereich $I \subseteq \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ überabzählbar unendl. viele Werte

Für die Verteilungsfkt. einer stetigen ZV gilt:

(1) $P(X = x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^+} F(x) - \lim\limits_{x \to x_0^-} F(x) = 0$, da Verteilungsfkt. $F(x)$ stetig

(2) $P(X \in I) = 1$

Definition 3.4: Wahrscheinlichkeitsdichte

Sei X eine stetige ZV.
Eine nichtnegative Funktion $f: \mathbb{R} \longrightarrow [0; \infty[$, die für jedes Intervall $]a; b[\subseteq \mathbb{R}$ erfüllt:
$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\, dx$$
heißt Wahrscheinlichkeitsdichte von X.

Eigenschaften:

(1) $f(x) \geq 0$

(2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$

Bemerkungen:

(1) Für eine stetige ZV gilt im Gegensatz zu einer diskreten ZV

$$P(a<X<b) = P(a\le X<b) = P(a\le X\le b) = P(a<X\le b)$$

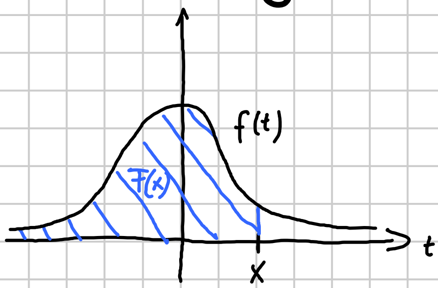
$\| $ s. Def. 3.4 $\qquad\qquad \|$ Bem. zu Def. 3.2

$$\int_a^b f(x)\,dx \qquad\qquad F(b)-F(a)$$

Begründung: $P(X=a) = \int_a^a f(x)\,dx = 0$ $\qquad$ F ist Stammfkt von f

(2) Zusammenhang Wahrscheinlichkeitsdichte — stetige Verteilungsfkt.

$$F(x) = P(X\le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$



Falls f selbst stetig ist, dann folgt aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung: $\quad F'(x) = f(x)$

Beispiel: Mit welcher Wahrscheinlichkeit muss eine Person, die zu einem zufälligen Zeitpunkt an eine Bushaltestelle kommt, bei der die Busse im 10 min - Takt fahren, x min auf den nächsten Bus warten?

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Person zw. 3 und 5 Minuten warten muss?

ZV X: "Wartezeit in min", $\quad X\in[0,10]$

Gleichverteilung, d.h. $\quad f(x) = \begin{cases} c, & x\in[0;10] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_0^{10} c\,dx = 10\cdot c \Rightarrow c = \frac{1}{10}$$

$$P(3<X<5) = \int_3^5 \frac{1}{10}\,dx = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

Beispiel 2: Gegeben

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & -1 < x < 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Bestimmen Sie die zugehörige Verteilungsfkt

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ \frac{1}{2}x + c, & -1 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

$F(x)$ muss stetig sein. $\Rightarrow c = \frac{1}{2}$

3.2.3 Mehrdimensionale Zufallsvariablen

Definition 3.5. Gemeinsame Verteilungsfunktion

Die gemeinsame Verteilungsfunktion von zwei Zufallsvariablen (X, Y) ist definiert durch

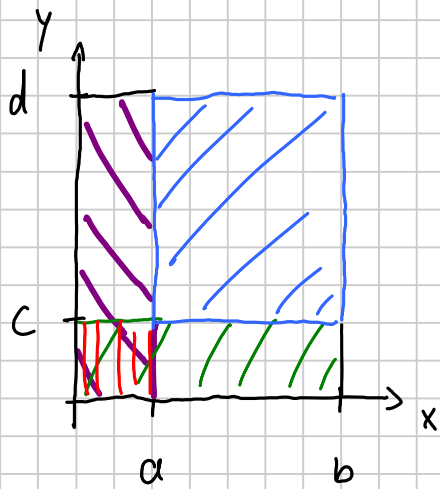
$$F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y).$$

Dabei handelt es sich um eine Funktion $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow [0,1]$.

Bemerkungen:

(1) $P(X \leq a, Y \leq c) = P(\{X \leq a\} \cap \{Y \leq c\})$

(2) $P(a < X \leq b, c < Y \leq d) = F(b,d) - F(b,c) - F(a,d) + F(a,c)$



(3) Berechnung von Randverteilungen F_X und F_Y für die ZV X, Y:

$$F_X(a) = P(X \leq a, Y < \infty) = P(X \leq a)$$

$$F_Y(c) = P(X < \infty, Y \leq c) = P(Y \leq c)$$

Im Folgenden betrachten wir nur zweidimensionale diskrete Zufallsvariablen mit $X \in \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $Y \in \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ und $(X, Y) \in \{x_1, \dots, x_n\} \times \{y_1, \dots, y_m\}$.

Definition 3.6: Gemeinsame Wahrscheinlichkeitsfunktion

Die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsfkt. einer zweidimensionalen ZV (X, Y) ist definiert durch:

$$p(x_i, y_j) = P(X = x_i, Y = y_j)$$

Bemerkungen:

(1) Berechnung der gemeinsamen Verteilung

$$F(a, c) = P(X \leq a, Y \leq c) = \sum_{x_i \leq a} \sum_{y_j \leq c} p(x_i, y_j)$$

(2) Berechnung der Randverteilungen

$$F_X(a) = P(X \leq a) = \sum_j \sum_{x_i \leq a} p(x_i, y_j)$$

$$F_Y(c) = P(Y \leq c) = \sum_i \sum_{y_j \leq} p(x_i, y_j)$$

(3) Berechnung der Randwahrscheinlichkeiten

$$p_X(x_i) = P(X = x_i) = \sum_j p(x_i, y_j)$$

$$p_Y(y_j) = P(Y = y_j) = \sum_i p(x_i, y_j)$$

Eigenschaften der gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsfkt. und Verteilung:

(1) $0 \leq p(x_i, y_j) \leq 1$, $0 \leq F(x, y) \leq 1$

(2) $\sum_j \sum_i p(x_i, y_j) = 1$

(3) $F(x, y)$ ist monoton wachsend

Beispiel: In der untersuchten Gruppe von Familien sind die Wahrscheinlichkeiten für 0, 1, 2 bzw. 3 Kinder 15%, 20%, 35% bzw. 30%. Die Wahrscheinlichkeit einen Jungen oder ein Mädchen zu haben ist jeweils 50%.

Gesucht sind die gemeinsamen Wahrscheinlichkeiten für $(X,Y) =$ ("Anzahl der Jungen", "Anzahl der Mädchen") in den Familien

$p(x,y)$:

$x_i \backslash y_j$	0	1	2	3	p_X
0	0,15	0,10	0,0875	0,0375	$P(X=0) = \sum_{j=0}^{3} p(0,y_j) = 0{,}375$
1	$0{,}2 \cdot \frac{1}{2} = 0{,}10$	$0{,}35 \cdot \frac{1}{2} = 0{,}175$	0,1125	0	$P(X=1) = 0{,}3875$
2	$0{,}35 \cdot \frac{1}{4} = 0{,}0875$	$0{,}3 \cdot \frac{3}{8} = 0{,}1125$	0	0	$P(X=2) = 0{,}2$
3	$0{,}3 \cdot \frac{1}{8} = 0{,}0375$	0	0	0	$P(X=3) = 0{,}0375$
p_Y	$P(Y=0) = \sum_{i=0}^{3} p(x_i,0)$	0,3875	0,2	0,0375	1

$F(x,y)$:

$x \backslash y$	0	1	2	3
0	0,15	0,25	0,3375	$0{,}375 = F_X(0)$
1	0,25	0,525	0,725	0,7625
2	0,3375	0,725	0,925	0,9625
3	$0{,}375 = F_Y(0)$	0,7625	0,9625	1

$$F(2,1) = \sum_{y_j=0}^{1} \sum_{x_i=0}^{2} p(x_i,y_j)$$

$$= p(0,0) + p(1,0) + p(2,0) + p(0,1) + p(1,1) + p(2,1)$$

$$= 0{,}725$$

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig aus der Gruppe gewählte Familie mind. ein Mädchen hat.

3.3 Erwartungswerte

Definition 3.8: Erwartungswert

Der Erwartungswert einer ZV X (Schreibweise: $\mu = E[X]$) ist ein mit den Wahrscheinlichkeiten gewichteter Mittelwert von X:

Für diskrete ZV: $\quad E[X] = \sum_i x_i \cdot p(x_i)$

Für stetige ZV: $\quad E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx$

Beispiele:

(1) Bei einem Gewinnspiel mit 2 Würfeln ist der Gewinn gleich der maximal gewürfelten Augenzahl. Um an dem Spiel teilzunehmen, ist ein Einsatz von d EUR zu zahlen. Wie groß sollte d sein, damit der Einsatz dem zu erwartenden Gewinn entspricht, also das Spiel fair ist?

$X \in \{1, \dots, 6\}$

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{36} & , x = 1 \\ \frac{3}{36} & , x = 2 \\ \vdots & \vdots \\ \frac{11}{36} & , x = 6 \end{cases}$$

Ges.: $d = E[X] = \sum_{x_i = 1}^{6} x_i \cdot p(x_i)$

$= \frac{1}{36} + \frac{3}{36} \cdot 2 + \frac{5}{36} \cdot 3 + \frac{7}{36} \cdot 4 + \frac{9}{36} \cdot 5 + \frac{11}{36} \cdot 6$

$= \frac{161}{36} \approx 4{,}47$

(2) Wartezeit auf den Bus: Stetige ZV $X \in [0;10]$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10} & , 0 \leq x \leq 10 \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

Berechnen Sie die durchschnittl. Wartezeit auf den Bus:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx = \int_0^{10} x \cdot \frac{1}{10}\, dx = \frac{1}{10} \left[\frac{1}{2} x^2\right]_0^{10} = 5$$