④

wegen ZGWS

**Geg.:** $\bar{X} \sim N_{R,\frac{4}{n}}$ $\left( E[X_i] = R, \; Var[X_i] = 4 \right)$

$\frac{\sigma^2}{n}$

$$\Longrightarrow \frac{\bar{X} - R}{\frac{2}{\sqrt{n}}} \sim N_{0,1}$$

**Ges.:** $n$, so dass $P\left(R - 0.5 < \bar{X} < R + 0.5\right) \geq 0.95$

$$P(R - 0.5 < \bar{X} < R + 0.5) \overset{\text{Standardisierung}}{=} P\left(\frac{-0.5}{\frac{2}{\sqrt{n}}} < \frac{\bar{X} - R}{\frac{2}{\sqrt{n}}} < \frac{0.5}{\frac{2}{\sqrt{n}}}\right)$$

$$= P\left(-\frac{\sqrt{n}}{4} < \underbrace{\frac{\bar{X} - R}{2/\sqrt{n}}}_{\sim N_{0,1}} < \frac{\sqrt{n}}{4}\right) = \phi\left(\frac{\sqrt{n}}{4}\right) - \underbrace{\phi\left(-\frac{\sqrt{n}}{4}\right)}_{1 - \phi\left(\frac{\sqrt{n}}{4}\right)}$$

wegen Symmetrie von $\phi$

$$= 2\,\phi\left(\frac{\sqrt{n}}{4}\right) - 1 \geq 0.95$$

$$\Longleftrightarrow \phi\left(\frac{\sqrt{n}}{4}\right) \geq 0.975 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\sqrt{n}}{4} \geq \underbrace{\phi^{-1}(0.975)}_{\text{qnorm}(0.975, [0,1]) \approx 1.96}$$

optional

$$\Longrightarrow n \geq 62$$

## 5.4 Stichprobenverteilungen für normalverteilte Grundgesamtheiten

Seien $X_i$ unabhängige, normalverteilte ZVen mit EW $\mu$ Varianz $\sigma^2$, d.h. $\boxed{X_i \sim N_{\mu,\sigma^2}}$. Voraussetzung

Dann gilt:

(1) $\bar{X} \sim N_{\mu,\frac{\sigma^2}{n}}$ und $\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N_{0,1}$ Folgerung: $\bar{X}$ ist normalverteilt

(2) $\frac{(n-1)\,S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$ Folgerung: $\frac{(n-1)\,S^2}{\sigma^2}$ ist chiquadrat-verteilt

(3) $\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim t_{n-1}$

**Beispiel:** Bei einem Server ist die Bearbeitungsdauer für einen bestimmten Auftragstyp normalverteilt mit Erwartungswert $\mu = 20s$ und Standardabweichung $\sigma = 3s$.
Es wird eine Stichprobe von $n = 15$ Aufträgen untersucht.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Stichprobenvarianz $S^2$ größer als $12\,s^2$ ist?

Ges.: $P(S^2 > 12)$

Wir wissen: $X_i \sim N_{20,9} \overset{(2)}{\Longrightarrow} \frac{\overset{n-1}{14}\cdot S^2}{\underset{=\sigma^2}{9}} \sim \chi^2_{14}$

$$P(S^2 > 12) = P\left(\frac{14\,S^2}{9} > \underset{=\frac{56}{3}}{\frac{14\cdot 12}{9}}\right) = 1 - P\left(\frac{14\,S^2}{9} \le \frac{56}{3}\right)$$

$$= 1 - \text{pchisq}\left(\frac{56}{3}, 14\right)$$

$$\approx 17.8\,\%$$