2.5 Kombinatorik

2.5.1 Allgemeines Zählprinzip

Wenn eine Aufgabe aus der Hintereinanderausführung von k Schritten besteht mit n_i $(1 \le i \le k)$ verschiedenen Varianten für den i-ten Schritt, dann gibt es

$$n_1 \cdot n_2 \dots \cdot n_k$$

verschiedene Möglichkeiten für die Durchführung der Aufgabe.

k-stufiges Zufallsexperiment: Anzahl der Blätter des Baums

2.5.2 Permutationen

Mögliche Anordnungen aller n Objekte einer Menge mit Beachtung der Reihenfolge.

(a) Unterscheidbare Objekte

Anzahl der Permutationen: $n! = n \cdot (n-1) \dots 2 \cdot 1$

(b) Mehrere Klassen mit gleichen Objekten

Für k Klassen mit je n_i $(1 \le i \le k)$ gleichen Objekten $\left(\sum_{i=1}^{k} n_i = n\right)$

$$\frac{n!}{n_1! \, n_2! \dots n_k!}$$

2.5.3 Variationen

k-maliges Ziehen aus n verschiedenen Objekten mit Beachtung der Reihenfolge

(a) Ohne Zurücklegen $(k \le n)$

$$n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

(Wissenschaftl. TR: n nPr k)

(b) Mit Zurücklegen: n^k $(n < k$ möglich$)$

2.5.4 Kombinationen

k-maliges Ziehen aus n verschiedenen Objekten ohne Beachtung der Reihenfolge

(a) Ohne Zurücklegen ($k \leq n$)

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \binom{n}{n-k}$$

(Wissenschaftl. TR: n nCr k)

Binomialkoeffizient

"n über k" oder "k aus n"

(b) Mit Zurücklegen ($n < k$ möglich)

$$\binom{n+k-1}{k}$$

Zusammenfassung: k-maliges Ziehen aus einer n-elementigen Menge

	Reihenfolge spielt eine Rolle	Reihenfolge spielt keine Rolle
ohne Zurücklegen	$\frac{n!}{(n-k)!}$	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$
mit Zurücklegen	n^k	$\binom{n+k-1}{k}$

Beispiele:

(1) Anzahl der Möglichkeiten, dass ein Kleinkind 5 ($k=5$) verschiedene Kleinbuchstaben ($n=26$) auf einer Tastatur tippt

ohne Zurücklegen, Reihenfolge spielt eine Rolle: $\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{26!}{21!}$

(2) Wieviel verschiedene Passwörter der Länge 8 ($k=8$) lassen sich aus Klein- und Großbuchstaben und Ziffern ($n=62$) bilden?

mit Zurücklegen, Reihenfolge spielt eine Rolle: $n^k = 62^8$

(3) Wieviel Möglichkeiten gibt es, eine Saftkiste, die 12 ($k=12$) Flaschen fasst, aus 3 ($n=3$) Saftsorten zusammenzustellen.

mit Zurücklegen, Reihenfolge spielt keine Rolle: $\binom{n+k-1}{k} = \binom{14}{12}$

(4) Anzahl der Reihenfolge des Zieleinlaufs bei einem Pferderennen mit 7 ($n=k=7$) Pferden

ohne Zurücklegen, Reihenfolge spielt eine Rolle: $n! = 7!$

(5) Anzahl der Möglichkeiten, 6 ($=k$) verschiedene Zahlen aus 49 ($=n$) zu ziehen (Lotto)

ohne Zurücklegen, Reihenfolge spielt keine Rolle: $\binom{n}{k} = \binom{49}{6}$

(6) Anzahl der verschiedenen Barcodes bestehend aus 4 dicken, 3 mittleren und 2 dünnen Linien

Permutationsmöglichkeiten für 3 Klassen mit $n_1 = 4$, $n_2 = 3$ und $n_3 = 2$
$n = 9$

$$\frac{n!}{n_1!\, n_2!\, n_3!} = \frac{9!}{5!\,3!\,2!} = 1260$$