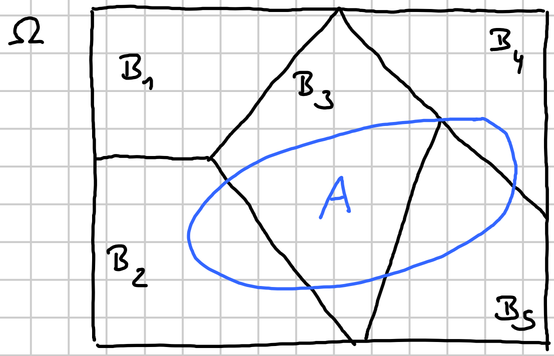
2.7 Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit

Grundlage bildet die Zerlegung von Ω in paarweise disjunkte Ereignisse $B_1, B_2, \ldots, B_n$:

$$\Omega = \dot{\bigcup_{i=1}^{n}} B_i \quad \text{mit} \quad B_i \cap B_j = \emptyset \quad \text{für } i \neq j$$

$$\text{und} \quad P(B_i) > 0 \qquad (\text{"Partition" von } \Omega)$$



Satz 2.3: Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i) \cdot P(B_i)$$

Beispiel: In einem Behälter befinden sich drei Typen von äußerlich nicht unterscheidbaren Batterien im Verhältnis 20 : 30 : 50.
Die Wahrscheinlichkeit für eine Funktionsdauer > 100 h ist bei Typ 1 0.7, bei Typ 2 0.4 und bei Typ 3 0.3.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird die Funktionsdauer einer beliebig ausgewählten Batterie > 100 h sein?

A : "Batterie hat Funktionsdauer > 100 h"

B_i : "Batterie ist vom Typ i"

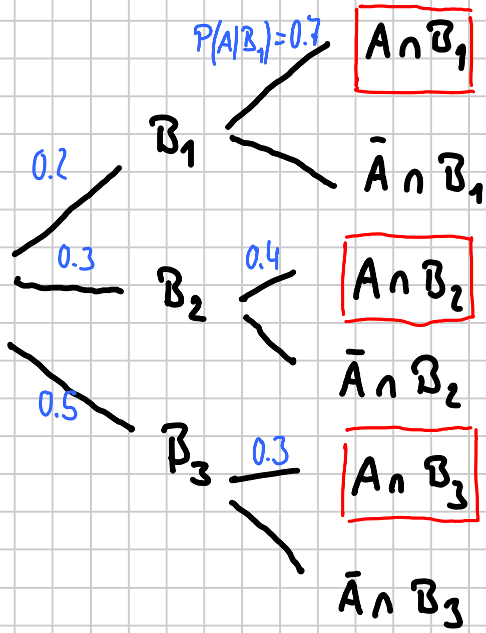
Geg.: $P(B_1) = 0.2$, $P(B_2) = 0.3$, $P(B_3) = 0.5$

$P(A|B_1) = 0.7$, $P(A|B_2) = 0.4$, $P(A|B_3) = 0.3$

Ges.: $P(A)$

Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit:

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + P(A \cap B_3)$$
$$= P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) + P(A|B_3) \cdot P(B_3)$$
$$= 0.41$$



Spezialfall: $\Omega = B \cup \bar{B}$

Vierfeldertafel:

	A	$\bar{A}$	Σ
B	$P(A \cap B)$	$P(\bar{A} \cap B)$	$P(B)$
$\bar{B}$	$P(A \cap \bar{B})$	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$	$P(\bar{B})$
Σ	$P(A)$	$P(\bar{A})$	1

$$P(A|B) \cdot P(B)$$
$$\parallel$$
$$P(A \cap B) = P(B) - P(\bar{A} \cap B)$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

$$P(\bar{A}|B) = 1 - P(A|B)$$

2.8 Formel von Bayes

Bei manchen Problemstellungen sind wie in Abschnitt 2.7 die bedingten Wahrscheinlichkeiten $P(A|B_i)$ für eine Partition $\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$ gegeben und die umgekehrten bedingten Wahrscheinlichkeiten $P(B_i|A)$ gesucht. Für solche Probleme ist die Formel von Bayes hilfreich.

Satz 2.4: Formel von Bayes

Sei $\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$ mit $B_i \cap B_j = \emptyset$ für $i \neq j$ und $P(B_i) > 0$.

Dann gilt für $A \subseteq \Omega$ mit $P(A) > 0$:

$$P(B_j|A) = \frac{\overbrace{P(A|B_j)\cdot P(B_j)}^{P(B_j \cap A)}}{\underbrace{\sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)\,P(B_i)}_{= P(A)}}$$

mit Satz von totaler Wahrscheinlichkeit

Fortsetzung des Beispiels:

Mit welcher Wahrscheinlichkeit handelt es sich um eine Batterie vom Typ j, wenn die Batterie eine Funktionsdauer $> 100\,h$ hat?

Ges.: $P(B_j|A)$

$$P(B_1|A) = \frac{P(A|B_1)\cdot P(B_1)}{P(A)} = \frac{0.7\cdot 0.2}{0.41} \approx 34.1\,\%$$

$$P(B_2|A) = \quad \ldots \quad \approx 29.3\,\%$$

$$P(B_3|A) = \quad \ldots \quad \approx 36.6\,\%$$

Beispiele:

(1) Diagnostische Tests

Ein Bluttest entdeckt zu 95% eine Krankheit, wenn sie tatsächlich vorhanden ist, liefert aber zu 1% ein falsches positives Ergebnis. Wenn 0.5% der Bevölkerung erkrankt sind, mit welcher Wahrscheinlichkeit ist dann eine Person, deren Bluttest positiv ist, tatsächlich erkrankt?

K: "getestete Person ist erkrankt", T: "Bluttest positiv"

	T	$\bar{T}$	
K	0.475%	0,025%	0.5%
$\bar{K}$	0.995%	98.505%	99.5%
	1.47%	98.53%	100%

Geg.: $P(T|K) = 0.95$

$P(T|\bar{K}) = 0.01$

$P(K) = 0.005$

Ges.: $P(K|T)$

Formel von Bayes:

$$P(K|T) = \frac{P(T|K)\cdot P(K)}{P(T|K)\cdot P(K) + P(T|\bar{K})\cdot P(\bar{K})} = \frac{\overbrace{0.95\cdot 0.005}^{P(K\cap T)}}{0.95\cdot 0.005 + \underbrace{0.01\cdot 0.995}_{P(\bar{K}\cap T)}} \approx 32.3\%$$

(2)

In einer Großstadt liegen folgende Daten über die Fahrgäste der U-Bahn vor:

(i) Umfangreiche Kontrollen ergaben einen Schwarzfahreranteil von 54%.

(ii) 70% der Fahrgäste sind Stadtbewohner (mit Wohnsitz in der Stadt)

(iii) Der Anteil der Nicht-Stadtbewohner unter den Schwarzfahrern ist $\frac{2}{9}$.

Berechnen Sie

(a) den Prozentsatz der Schwarzfahrer unter den Stadtbewohnern.

(b) die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fahrgast Stadtbewohner und kein Schwarzfahrer ist.

S : " Schwarzfahrer" , C : " Stadtbewohner" (City)

Geg.: $P(S) = 0.054$, $P(C) = 0.7$, $P(\bar{C}|S) = \frac{2}{9}$

$\Rightarrow P(C|S) = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$

Ges.:

a) $P(S|C)$

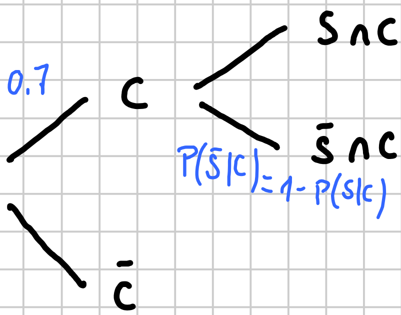
b) $P(C \cap \bar{S})$

<u>Lösung</u>:

a) $P(S|C) = \frac{P(S \cap C)}{P(C)} = \frac{P(C|S) \cdot P(S)}{P(C)} = \frac{\frac{7}{9} \cdot 0.054}{0.7} = 6\%$

b) $P(C \cap \bar{S}) = P(C) \cdot P(\bar{S}|C) = P(C) \cdot (1 - P(S|C)) =$

$= 0.7 \cdot 0.94 = 65.8\%$



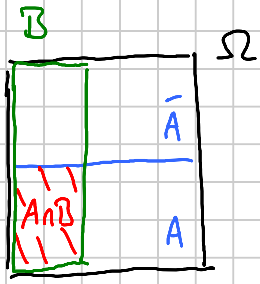
2.9 Unabhängige Ereignisse

Definition 2.4:

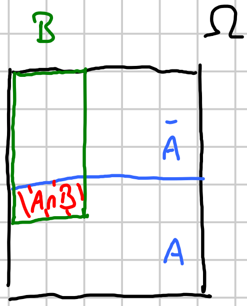
Zwei Ereignisse A, B heißen (stochastisch) unabhängig, wenn

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

bzw. $P(A|B) = P(A)$



A, B unabhängig, da $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)$



A, B (stochastisch) abhängig

Satz 2.5:

Sind A, B unabhängige Ereignisse, dann sind auch
(i) $A, \bar{B}$, (ii) $\bar{A}, B$, (iii) $\bar{A}, \bar{B}$ unabhängig.

Beweis für (i): Geg.: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Zu zeigen: $P(A \cap \bar{B}) = P(A) \cdot P(\bar{B})$

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A) \cdot P(B) = P(A) \cdot (1 - P(B))$$
$$= P(A) \cdot P(\bar{B}) \quad \checkmark$$

Beispiel: Kartenspiel mit 52 Karten; es wird eine Karte gezogen
Sind die Ereignisse A: "Karte ist ein Ass"
B: "Karte hat Farbe Herz"
stochastisch unabhängig?

$P(A) = \frac{4}{52}$, $P(B) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$

$P(A \cap B) = \frac{1}{52} = P(A) \cdot P(B)$, d.h. A, B sind unabhängig

Bemerkungen:

(1) Aus der Disjunktheit von zwei nichtleeren Ereignissen A, B folgt nicht deren (stochastische) Unabhängigkeit,

da $P(A \cap B) = 0$, aber $P(A) \cdot P(B) \neq 0$

(2) Stochastische Abhängigkeit bedeutet nicht notwendig kausale Abhängigkeit.

Bsp.: 2-maliges Ziehen aus Urne mit 2 weißen und 2 schwarzen Kugeln ohne Zurücklegen

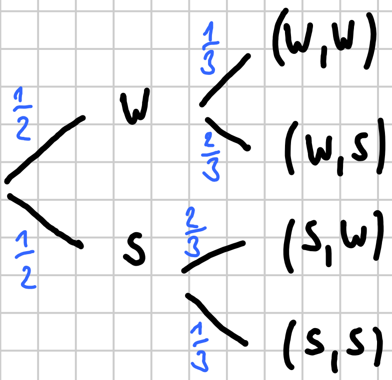
A: "erste Kugel ist weiß" , B: "zweite Kugel ist weiß"

A ist nicht kausal abhängig von B (da B zeitlich später)

Ist stochastisch abhängig von B ?

Zu überprüfen: $P(A|B) \overset{?}{=} P(A)$ bzw. $P(A \cap B) \overset{?}{=} P(A) \cdot P(B)$

$A = \{(W,W), (W,S)\}$, $B = \{(W,W), (S,W)\}$



$A \cap B = \{(W,W)\} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{6}$

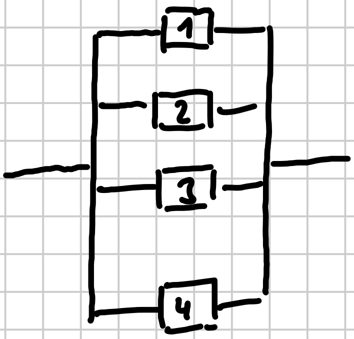
$P(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$

$P(B) = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow A, B$ stochastisch abhängig

(3) Falls die Unabhängigkeit von Ereignissen vorausgesetzt werden kann, dann erleichtert dies die Berechnung von Wahrscheinlichkeiten in mehrstufigen Zufallsexperimenten deutlich (s. nächster Abschnitt).

Beispiel:



Funktionfähiges Parallelsystem: Mind. eine Komponente muss funkt. Dies ist für jede Komponente mit Wahrscheinlichkeit 0.9 der Fall.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit funktioniert das Gesamtsystem, Unabhängigkeit der Komponenten vorausgesetzt?

Gegenereignis von "keine Komponente funktioniert"

K_i sei das Ereignis: "Komponente i funktioniert"

$$1 - P(\bar{K}_1 \cap \bar{K}_2 \cap \bar{K}_3 \cap \bar{K}_4) = 1 - P(\bar{K}_1) \cdot P(\bar{K}_2) \cdot P(\bar{K}_3) \cdot P(\bar{K}_4)$$

wegen Unabh. der Komponenten

$$= 1 - 0.1^4 \approx 99,99\,\%$$

2.10 Mehrstufige Experimente

Experimente, die aus mehreren Schritten bestehen, wobei abhängig von den Ergebnissen einer Stufe verschiedene Ergebnisse auf der folgenden Stufe möglich sind.

Grafische Darstellung durch einen Wahrscheinlichkeitsbaum

Falls die einzelnen Ereignisse unabhängig sind, dann können die bedingten Wahrscheinlichkeiten durch unbedingte ersetzt werden.

<u>Beispiel:</u> Ein Unternehmen bringt 3 Produkte A, B, C auf den Markt, deren Erfolg voneinander unabhängig ist. Die Erfolgsaussichten werden für A auf 0.9 geschätzt, für B auf 0.8 und für C auf 0.95.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für 0, 1, 2, 3 erfolgreiche Produkte.