3. Zufallsvariablen

Lernziele:

- Unterschied zwischen Ereignissen und Zufallsvariablen verstehen
- Entscheiden können, für welche Fragestellungen man die Wahrscheinlichkeitsfkt. bzw. -dichte und für welche die Verteilungsfunktion benötigt
- Zusammenhang zwischen Wahrscheinlichkeitsfkt. bzw. -dichte und Verteilungsfkt. verstehen
- Quantilfunktion verstehen und bestimmen können
- Erwartungswerte, Varianzen und Kovarianzen von Zufallsvariablen berechnen können
- Erwartungswerte und Varianzen von transformierten Zufallsvariablen berechnen können

4.1 Zufallsvariablen

Definition 3.1: Zufallsvariable

Eine Abbildung X von Ω nach $\mathbb{R}$, die jedem $\omega \in \Omega$ eine reelle Zahl $X(\omega) = x$ zuordnet, nennt man Zufallsvariable (ZV).

Die Zahl $x \in \mathbb{R}$ heißt Realisation der ZV X.

<u>Beispiele</u> für Zufallsvariablen:

(1) "Anzahl der erfolgreichen Produkte" einer Firma

(2) "Anzahl der richtigen Antworten" bei einer Multiple-Choice-Prüfung mit je 3 Antwortmöglichkeiten pro Aufgabe, wobei genau eine richtig ist, wenn zufällig angekreuzt wird.

(3) Lotto "6 aus 49"

"Anzahl der richtig getippten Zahlen"

Berechnung für Bsp. (2): Insgesamt 50 Aufgaben und bestanden mit 25 richtigen

Mit welcher Wahrscheinlichkeit bestehe ich, wenn ich zufällig ankreuze?

$$P(X \geq 25) = \sum_{i=25}^{50} \binom{50}{i} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^i \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{50-i}$$

Begriffe:

(1) Diskrete ZV : Wertemenge von $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ $(n \in \mathbb{N})$

(2) Stetige ZV : Wertemenge von X ist Teilmenge $I \subseteq \mathbb{R}$

(3) Eindimensionale ZV : $X: \Omega \to \mathbb{R}$

(4) Mehrdimensionale ZV $X: \Omega \to \mathbb{R}^n$

Beispiel: Augensumme beim Würfeln mit 2 Würfeln

$$\Omega = \{(i,j),\ 1 \leq i,j \leq 6\}$$

$X: \Omega \to \mathbb{R}$ mit Realisationen $\{\underset{x_1}{\overset{\shortparallel}{2}}, 3, \dots, \underset{x_n}{\overset{\shortparallel}{12}}\}$

$(i,j) \mapsto i+j$ diskrete ZV

Umkehrung: $X^{-1}(7) = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$

$$\underbrace{P(X=7)}_{=p(7)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

3.2 Verteilungsfunktion und Wahrscheinlichkeitsfkt. bzw. -dichte

Definition 3.2: Verteilungsfunktion

Die Verteilungsfunktion F einer ZV X ist definiert durch

$$F(x) = P(X \leq x) \quad , \quad x \in \mathbb{R} .$$

$F(x)$ ist also die Wahrscheinlichkeit, dass die ZV X Werte $\leq x$ annimmt.

Schreibweise: $X \sim F$ ("X hat die Verteilung F")

Wichtig:

Auch Wahrscheinlichkeiten $P(a < X \leq b)$ können mit F berechnet werden.

Wegen $P(X \leq b) = P(X \leq a) + P(a < X \leq b)$ folgt:

$$\boxed{P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F(b) - F(a)}$$

Eigenschaften der Verteilungsfunktion:

(1) Wertebereich: $0 \leq F(x) \leq 1$

(2) Monotonie: monoton wachsend

(3) Grenzwertverhalten: $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0 \quad , \quad \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$

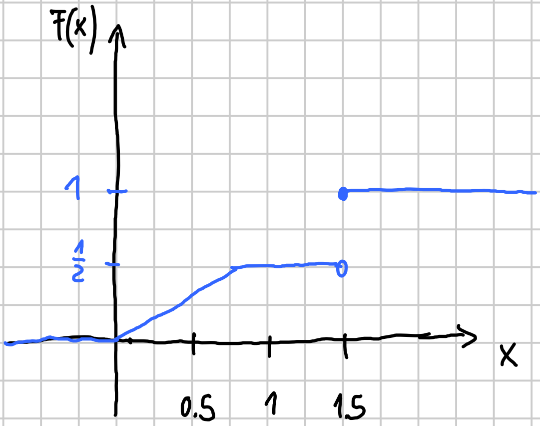
(4) Stetigkeit: rechtsseitig stetig bei diskreten ZV
bzw. stetig bei stetigen ZV

Beispiel: Die Zufallsvariable X habe die Verteilungsfunktion

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ \frac{2}{3}x & , \quad 0 \leq x < 3/4 \\ \frac{1}{2} & , \quad 3/4 \leq x < \frac{3}{2} \\ 1 & , \quad x \geq \frac{3}{2} \end{cases}$$

(i) Erfüllt $F(x)$ alle Eigenschaften einer Verteilungsfunktion? Ja.

(ii) Berechnen Sie $P(\frac{1}{4} < X \leq 1)$ und $P(X = \frac{3}{2})$.



X nimmt nur Werte zw. 0 und 1.5 an

$$P(X = 1.5) = \lim_{x \to 1.5+} F(x) - \lim_{x \to 1.5-} F(x)$$

$$= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$P(X = 0.5) = \lim_{x \to 0.5+} F(x) - \lim_{x \to 0.5-} F(x) = 0$$

$\underbrace{\hspace{6em}}$

in diesem Bereich ist die ZV stetig

$$P\left(\frac{1}{4} < X \leq 1\right) = F(1) - F\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

3.2.1 Diskrete Zufallsvariablen

Definition 3.3: Wahrscheinlichkeitsfunktion

Für eine diskrete Zufallsvariable X mit Werten $M = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ($n=\infty$ mögl.) ist die Wahrscheinlichkeitsfunktion definiert durch

$$p(x) = \begin{cases} P(X = x_i) & , \text{ für } x_i \in M \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases}$$

Eigenschaften:

(1) $0 \leq p(x_i) \leq 1$

(2) $\sum_{i=1}^{n} p(x_i) = 1$

Mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsfkt. lässt sich $F(x)$ berechnen:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p(x_i)$$

$F(x)$ ist für eine diskrete ZV eine Treppenfkt. mit Sprüngen bei den Realisationen x_i.

Beispiel: Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsfkt. und Verteilungsfkt. an für

a) die Zufallsvariable X = "Anzahl der Richtigen im Lotto 6 aus 49"

$$x_i \in \{0, 1, \dots, 6\}$$

$$p(x) = \begin{cases} P(X = i) = \dfrac{\binom{6}{i} \cdot \binom{43}{6-i}}{\binom{49}{6}} & , \text{ für } x = i \text{ mit } i = 0, 1, \dots, 6 \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases}$$

b) die Zufallsvariable X = "Augensumme beim Würfeln mit 2 Würfeln"