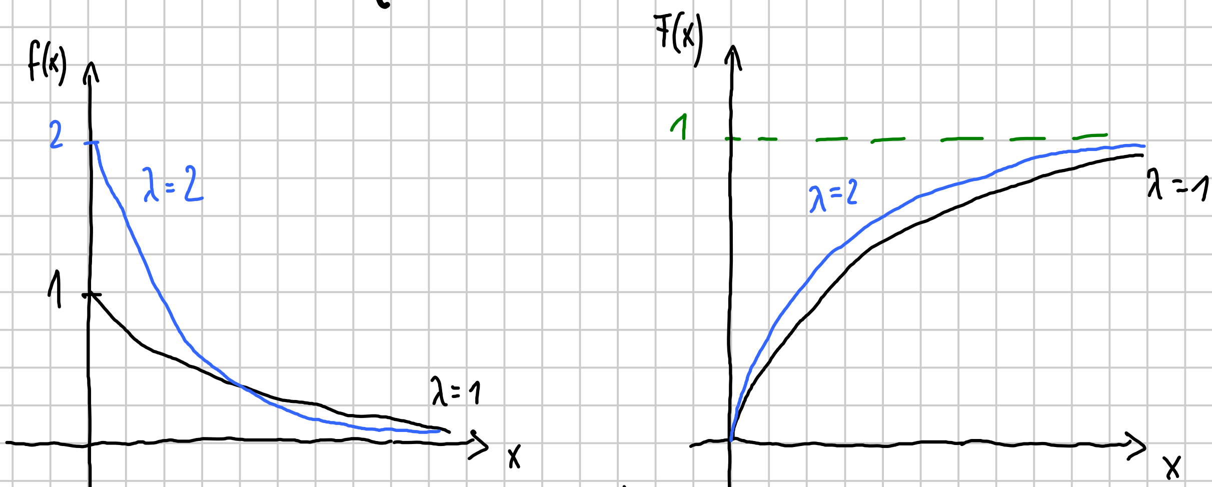
4.6 Exponentialverteilung

Situationen: Wartezeiten auf ein bestimmtes Ereignis
(Wartezeit in einer Schlange, Wartezeit bis zu einem Erdbeben, usw.)

Eine Zufallsvariable X hat eine Exponentialverteilung mit zu erwartender Wartezeit $\tau = \frac{1}{\lambda}$, wenn ihre Dichtefunktion lautet

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & , \text{ für } x \geq 0 \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases}$$



Schnittpunkt mit y-Achse bei $(0, \lambda)$

Verteilung: $X \sim Exp_\lambda$ mit $\lambda = \frac{1}{E[X]}$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t}\,dt = \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^x = -e^{-\lambda x} - (-e^0)$$
$$= 1 - e^{-\lambda x}$$

Erwartungswert und Varianz:

$$\left.\begin{aligned} E[X] &= \frac{1}{\lambda} \\ Var[X] &= \frac{1}{\lambda^2} \end{aligned}\right\}$$

Berechnung mit partieller Integration
$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,dx$

Wichtige Eigenschaft:

Eine exponentialverteilte ZV X ist "gedächtnislos", d.h.

$$P(X > s+t \mid X > t) = P(X > s).$$

Anders formuliert: Bezeichnet X die Lebensdauer einer Komponente, dann hat die restliche Lebensdauer $X-t$ dieser Komponente die gleiche Exponentialverteilung wie eine komplett neue Komponente.
"Nicht-Alterung"

Beweis:

$$P(X > s) = 1 - F(s) = 1 - \left(1 - e^{-\lambda s}\right) = e^{-\lambda s} \quad (*)$$

$$P(\underbrace{X > s+t}_{A} \mid \underbrace{X > t}_{B}) = \frac{P(\{X > s+t\} \cap \{X > t\})}{P(X > t)} = \frac{P(X > s+t)}{P(X > t)}$$

$$\overset{(*)}{=} \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda(s+t)} \cdot e^{\lambda t} = e^{-\lambda s}$$

$$\Rightarrow P(X > s+t \mid X > t) = P(X > s)$$

R-Funktionen: dexp(x, λ)
pexp(x, λ)

Beispiel: Die Lebensdauer einer Autobatterie sei exponentialverteilt mit Erwartungswert 10 000 km.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Batterie bei einer 5000 km langen Fahrt nicht ausfällt?

Geg.: X ist die Lebensdauer, $X \sim Exp_\lambda$ mit $\lambda = \frac{1}{10^4} = 10^{-4}$

Ges.: $P(X > 5000) = 1 - F(5000) = 1 - e^{-10^{-4} \cdot 5000} \approx 60.7\%$

$= 1 - pexp(5000, 10^{-4})$

4.7 Chiquadrat-Verteilung

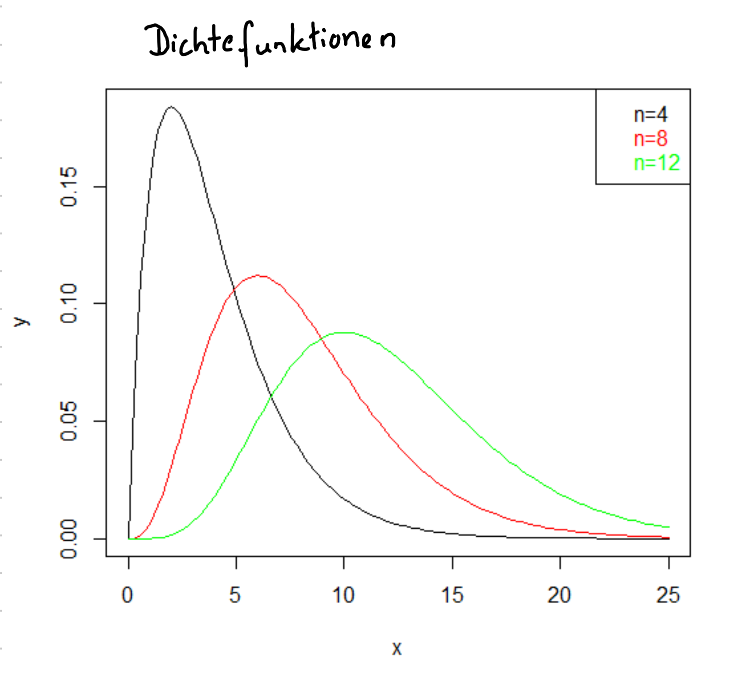
Definition 4.1:

Seien $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ unabhängige, standardnormalverteilte ZVen.
Dann gilt für die ZV $X = Z_1^2 + Z_2^2 + \ldots + Z_n^2$:

X ist Chiquadratverteilt mit n Freiheitsgraden,
Schreibweise: $X \sim \chi^2_n$.

Situationen: Summen von Quadraten normalverteilter Zufallsvariablen haben Chiquadratverteilung.

Die Chiquadratverteilung ist also aus der Normalverteilung abgeleitet.



Erwartungswert und Varianz:

$$E[X] = n$$

$$Var[X] = 2n$$

Wichtige Eigenschaft:

Die Summe von chiquadratverteilten ZVen X_1 und X_2 ist wieder chiquadratverteilt und die Anzahl der Freiheitsgrade summiert sich, d.h.

$$X_1 \sim \chi^2_{n_1}, \quad X_2 \sim \chi^2_{n_2} \implies X_1 + X_2 \sim \chi^2_{n_1+n_2}$$

R-Funktionen: dchisq(x, n)
pchisq(x, n)

Beispiel: Es soll ein Zielpunkt in einem dreidimensionalen Raum getroffen werden, wobei man davon ausgehen muss, dass in jeder der drei Koordinaten ein normalverteilter Messfehler X_i $(i = 1,2,3)$ mit EW 0 und Standardabweichung (σ) 2 m auftritt.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Abstand zwischen Mess- und Zielpunkt größer als 3 m ist?

Abstand zw. Mess- und Zielpunkt:

$$D = \sqrt{X_1^2 + X_2^2 + X_3^2} \iff D^2 = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2$$

$$\left(\text{wobei: } X_i \sim N_{0,\underset{\sigma^2}{\underset{\parallel}{4}}}\right)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} X \sim N_{\mu,\sigma^2} \\ \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N_{0,1} \end{array}}$$

$$\Rightarrow \frac{X_i}{2} \sim N_{0,1}$$

Dann ist $\frac{D^2}{4} = \frac{1}{4}\left(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2\right) \sim \chi_3^2$

Ges.: $P(D > 3) = P(D^2 > 9) = P\left(\frac{D^2}{4} > \frac{9}{4}\right)$

$$= 1 - \text{pchisq}\left(\frac{9}{4}, 3\right) \approx 52.2\,\%$$

Beachte: Unterscheide zwischen der Summe von normalverteilten ZVen (ist wieder normalverteilt)

und der Summe von (standard-)normalverteilten ZVen (ist chiquadratverteilt)!

4.8 t-Verteilung

Definition 4.2:

Sei $Z \sim N_{0,1}$ und $X \sim \chi^2_n$.

Dann ist die ZV $Y = \frac{Z}{\frac{X}{\sqrt{n}}}$ t-verteilt mit n Freiheitsgraden,

Schreibweise: $Y \sim t_n$

Situationen: Hauptanwendung in Schätz- und Testverfahren bei unbekannter Varianz

Erwartungswert und Varianz:

$$E[Y] = 0 \quad \text{für } n > 1$$

$$\mathrm{Var}[Y] = \underbrace{\frac{n}{n-2}}_{\to 1 \text{ für } n \to \infty} \quad \text{für } n > 2$$

Wichtige Eigenschaften:

(1) Für $n \to \infty$: $t_n \to N_{0,1}$

(2) Achsensymmetrie der Dichtefkt. zur y-Achse, d.h. analog zur Standardnormalverteilung gilt:

$$\boxed{-x_p = x_{1-p}}$$

Dichtefunktionen