2. Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung

Lernziele:

- Verständnis des Wahrscheinlichkeitsbegriffs
- Mathematisch saubere Formulierung einer Aufgabenstellung
  Was ist ein geeigneter Ergebnisraum?
  Welche Ereignisse sind gegeben, welche gesucht?
  Sicherheit in Ereignisalgebra
- Sicherheit bei kombinatorischen Problemen

2.1 Gesetz der großen Zahlen

$$\lim_{n\to\infty} \frac{h_A}{n} =: P(A)$$

(empirisches) Gesetz der großen Zahlen

Dieser Grenzwert wird als Wahrscheinlichkeit für den Eintritt von A bezeichnet.

2.2 Ergebnisraum und Ereignisse

Definition 2.1: Die Menge aller möglichen Ergebnisse eines Experiments wird als **Ergebnisraum** Ω bezeichnet.
Ein einzelnes Element $\omega \in \Omega$ wird als **Elementarereignis** bezeichnet.

Bemerkungen:

(1) Ein Ergebnisraum kann
- endlich, abzählbar unendlich, überabzählbar unendlich
- eindimensional, mehrdimensional
- numerische bzw. nicht numerische Elemente

(2) Ein Experiment kann häufig durch verschiedene Ergebnisräume beschrieben werden.

Beispiel: Augenzahlen beim Werfen von 2 Würfeln

$$\Omega_1 = \{2, 3, \dots, 12\}, \quad |\Omega_1| = 11$$

$$\Omega_2 = \{(1,1), (1,2), \dots, (1,6)$$
$$(2,1), (2,2), \dots, (2,6)$$
$$\vdots$$
$$(6,1), (6,2), \dots, (6,6)\}, \quad |\Omega_2| = 36$$

"Augensumme 7" $= \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}$

Berechnung der Wahrscheinlichkeit unter Verwendung von Ω_2 durch Abzählen: $P(\text{"Augensumme 7"}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

Definition 2.2:

(1) Jede Teilmenge E des Ergebnisraums wird **Ereignis** genannt.
Gilt für einen Versuchsausgang $\omega \in \Omega$ auch $\omega \in E$, dann sagt man "das Ereignis E ist eingetreten".

(2) Seien $E, F \subseteq \Omega$ beliebige Ereignisse.
Das "Gegenereignis" bzw. Komplement $\bar{E} = \Omega \setminus E$ liegt vor, wenn E nicht eintritt.
Das Ereignis "E oder F" entspricht der Vereinigung $E \cup F$.
Das Ereignis "E und F" entspricht dem Schnitt $E \cap F$.

(3) Gilt $E \cap F = \emptyset$, dann werden E und F als "disjunkt" bezeichnet.

(4) Ω selbst als Ereignis betrachtet heißt "sicheres Ereignis", die leere Menge $\emptyset$ heißt "unmögliches Ereignis".

(5) Das Ereignis $\bigcup_{i=1}^{n} E_i$ ($n = \infty$ möglich) tritt ein, wenn mindestens ein Ereignis E_i eintritt.

Das Ereignis $\bigcap_{i=1}^{n} E_i$ ($n = \infty$ möglich) tritt ein, wenn alle Ereignisse E_i eintreten.

<u>Bemerkung</u>: Es gelten die De Morgan'schen Regeln

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} E_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \bar{E}_i$$

$$\overline{\bigcap_{i=1}^{n} E_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \bar{E}_i$$

2.3 Wahrscheinlichkeit

Definition nach Kolmogorov:

Die Wahrscheinlichkeit $P(E)$ eines Ereignisses $E \subseteq \Omega$ wird festgelegt durch

Axiom 1: $0 \leq P(E) \leq 1$ für alle $E \subseteq \Omega$

Axiom 2: $P(\Omega) = 1$

Axiom 3: Für paarweise disjunkte Ereignisse $E_1, E_2, \ldots$ gilt (d.h. $E_i \cap E_j = \emptyset$ falls $i \neq j$)

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i)$$

Satz 2.1:

(1) $P(\bar{E}) = 1 - P(E)$ Berechnung über Gegenereignis

(2) $P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$ für bel. Ereignisse $E, F \subseteq \Omega$

2.4 Laplace - Experiment

Experiment, bei dem alle Elementarereignisse gleichwahrscheinlich sind

Berechnung der Wahrscheinlichkeit durch Abzählen.

Sei $E \subset \Omega$ ein Ereignis, dann gilt:

$$\boxed{P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|}}$$