

# 1 静电学

## 1.1 Laplace 方程

### 1.1.1 调和函数

**定理 1.1** (平均值定理). 设  $\varphi$  是一调和函数, 则

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi R^2} \oint_S \varphi(\mathbf{r}') dS,$$

其中  $S$  是半径为  $R$  的球面.

证明. 记  $\psi = \frac{1}{r}$ , 则由 Green 第二恒等式,

$$\iiint_{V \cap V'} (\psi \nabla^2 \varphi - \varphi \nabla^2 \psi) dV = \oint_{S \cup S'} \left( \psi \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} \right) dS.$$

右侧积分第一项

$$\begin{aligned} \oint_{S \cup S'} \psi \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} dS &= \frac{1}{R} \oint_S \nabla \varphi \cdot d\mathbf{S} - \frac{1}{R'} \oint_{S'} \nabla \varphi \cdot d\mathbf{S} \\ &= \frac{1}{R} \iiint_V \nabla^2 \varphi dV - \frac{1}{R'} \iiint_{V'} \nabla^2 \varphi dV = 0. \end{aligned}$$

从而

$$\oint_{S \cup S'} \varphi \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} dS = \frac{1}{R'^2} \oint_{S'} \varphi dS - \frac{1}{R^2} \oint_S \varphi dS = 0.$$

即

$$\frac{1}{R^2} \oint_S \varphi dS$$

和  $R$  无关. □

**定理 1.2** (唯一性定理). 设  $\varphi$  和  $\psi$  是调和函数, 且  $\varphi|_S = \psi|_S$ , 则

$$\varphi|_V \equiv \psi|_V.$$

**引理 1.1.** 设  $\varphi$  是一调和函数, 且  $\varphi|_S = 0$ , 则

$$\varphi|_V \equiv 0.$$

证明. 由 Green 第一恒等式,

$$\iiint_V \left( \varphi \nabla^2 \varphi + (\nabla \varphi)^2 \right) dV = \iint_S \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} dS = 0.$$

从而  $\varphi$  为常量, 必定为 0.

□