

# 1 特殊构型, 唯一性定理, 电像法与 Green 定理等

## 1.1 本构关系

对均匀带电球面:

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}.$$

对均匀带电球:

$$Q = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho \iff \rho = \frac{3Q}{4\pi R^3}.$$

## 1.2 特殊构型

几何	源电荷	场
均匀带电导线	$\lambda$	$\mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{\mathbf{r}}$
均匀带电平面	$\sigma$	$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$
均匀带电球壳	$Q$	球外: $\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}}$
均匀带电圆盘	$\sigma$	中轴线: $V = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\sqrt{R^2 + z^2} - z)$
均匀带电圆环	$Q$	中轴线: $V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}}$
均匀带电球	$Q$	球内: $\mathbf{E} = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3} \hat{\mathbf{r}}, U = \frac{3Q}{8\pi\epsilon_0 R} - \frac{Qr^2}{8\pi\epsilon_0 R^3}$ 球外: $\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}}$
偶极子	$\mathbf{p}$	$\mathbf{E} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} [3(\mathbf{z} \cdot \hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{z}]$ $U = \frac{\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{4\pi\epsilon_0 r^2}$
球壳	$\sigma = \sigma_0 \cos \theta$	球内: $\mathbf{E} = -\frac{\sigma_0}{3\epsilon_0} \hat{\mathbf{z}}$ 球外: $\mathbf{E} = \frac{\sigma_0}{3\epsilon_0} \frac{R^3}{r^3} [3(\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}} - \hat{\mathbf{z}}]$

构型	能量
----	----

均匀带电球	$W = \frac{3Q^2}{20\pi\epsilon_0 R}$
均匀带电球面	$W = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R}$

原构型	源电荷	等效构型	等效电荷	有效区域
有限导线	$\lambda$	切圆投影	$\lambda$	单点
带电球壳	$\sigma = \sigma_0 \cos \theta$	均匀极化球	$\mathbf{P} = \sigma \hat{\mathbf{z}}$	球外

构型	电容
平行板电容器	$C = \frac{\epsilon S}{b-a}$
圆柱电容器	$C = \frac{2\pi\epsilon L}{\log(b/a)}$
球形电容器	$C = \frac{4\pi\epsilon}{1/a - 1/b}$

场	常用边界条件	适用条件	退化情形
$\mathbf{E}$	$E_{2n} - E_{1n} = \sigma/\epsilon_0$ $\mathbf{E}_2^{\parallel} = \mathbf{E}_1^{\parallel}$	真空 无条件	无面电荷: $E_{2n} = E_{1n}$
$\mathbf{D}$	$D_{2n} - D_{1n} = \sigma_f$	介质边界	无自由面电荷: $D_{2n} = D_{1n}$
$V$	$\epsilon_1 \frac{\partial V}{\partial n} - \epsilon_2 \frac{\partial V}{\partial n} = \sigma_f$	介质边界	无自由面电荷: $\epsilon_1 \frac{\partial V}{\partial n} = \epsilon_2 \frac{\partial V}{\partial n}$
$\mathbf{J}$	$\mathbf{J} = \sigma_1 \mathbf{E}_1 = \sigma_2 \mathbf{E}_2$	稳恒电流	
$n$ 皆表示从 1 指向 2.			

注意

$D''$  在边界处不连续.

### 1.3 唯一性定理

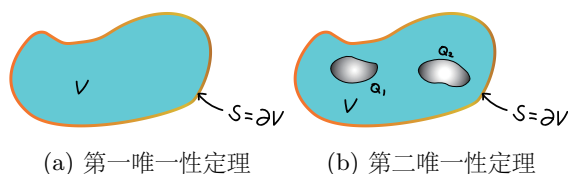


图 1

**定理 1.1** (第一唯一性定理). 如图 1a, 若

1.  $S = \partial V$  上的电势  $\varphi|_S$  给定;
2.  $V$  内部的电荷分布  $\rho$  已知;

则  $\varphi$  在  $V$  内唯一确定.

**定理 1.2** (第二唯一性定理). 如图 1b, 若

1.  $S = \partial V$  上的电势  $\varphi|_S$  给定;
2. 诸导体上电荷量  $Q_i$  给定;
3.  $V$  内部的电荷分布  $\rho$  已知;

则  $\varphi$  在  $V$  内唯一确定.

**推论 1.1** (导体静电场叠加原理). 设空间中有固定导体,

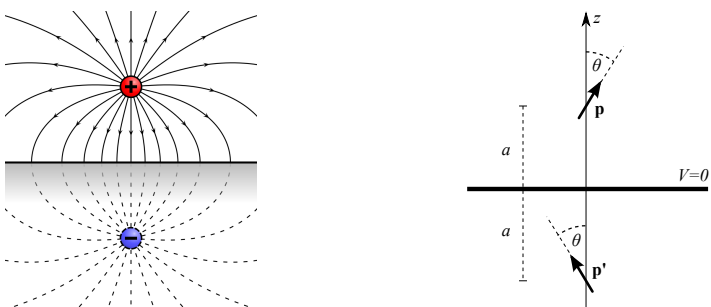
1. 当诸导体电势为  $\varphi_i$ , 相应带电量为  $Q_i$ , 空间电势为  $\varphi$ ;
2. 当诸导体电势为  $\varphi'_i$ , 相应带电量为  $Q'_i$ , 空间电势为  $\varphi'$ ;

则诸导体电势为  $\varphi_i + \varphi'_i$  时, 相应带电量为  $Q_i + Q'_i$ , 空间电势为  $\varphi + \varphi'$ .

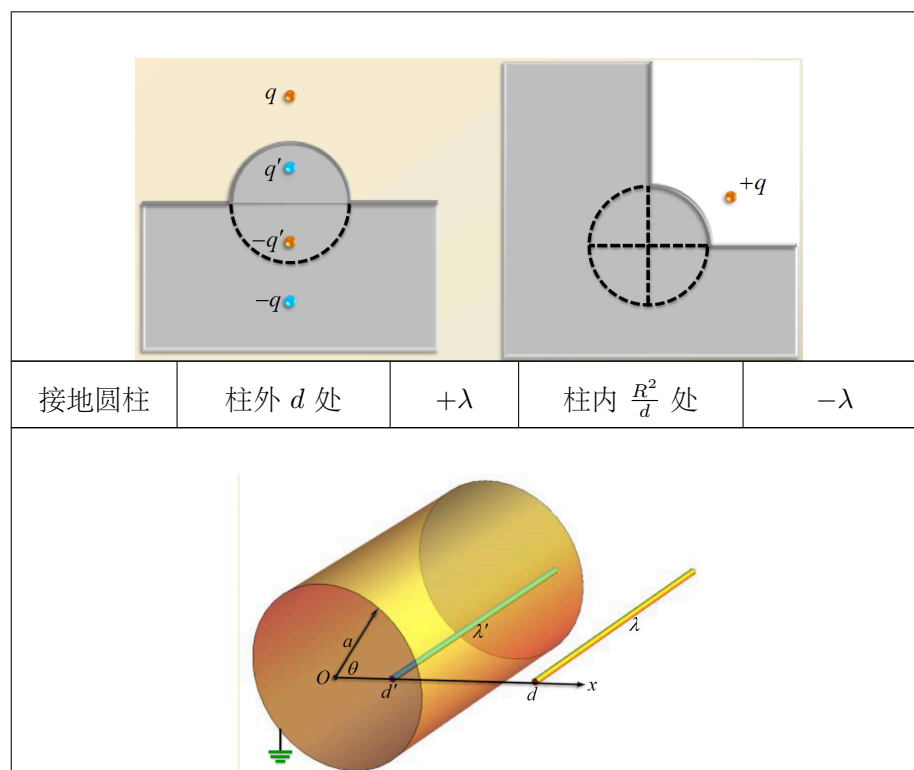
## 1.4 电像法

**定理 1.3** (电像法的原则).

1. 源电荷位置即解的有效位置;
2. 像电荷之和恰好等于该区域内电荷之和.

导体	源位置	源电荷	像位置	像电荷
接地平面	上方 $+d$	$+q$	下方 $-d$	$-q$
接地平面	上方 $+d$	$\mathbf{p}$	下方 $-d$	$\mathbf{p}$ 沿 $z$ 反射
电介质			上方 $+d$	$\frac{\epsilon_0 (\epsilon_2 - \epsilon_1)}{\epsilon_2 (\epsilon_1 + \epsilon_2)} q$
下方 $\epsilon_2$	下方 $-d$	$+q$	下方 $-d$	$q \mapsto \frac{\epsilon_0}{\epsilon_2} q$
上方 $\epsilon_1$			下方 $-d$	$\frac{\epsilon_0 (\epsilon_2 - \epsilon_1)}{\epsilon_2 (\epsilon_1 + \epsilon_2)} q$
				
接地垂直	导体板间	$+q$	连续 2 次反射	$\pm q$
接地 $60^\circ$	导体板间	$+q$	连续 3 次反射	$\pm q$

接地球壳	球外 $d$ 处	$+q$	球内 $\frac{R^2}{d}$ 处	$-\frac{R}{d}q$
带电球壳	球外 $d$ 处	$+q$	球内 $\frac{R^2}{d}$ 处	$q' = -\frac{R}{d}q$
	球壳	$Q$	球内 $O$ 处	$Q - q'$
接地球壳	球内 $d$ 处	$+q$	球外 $\frac{R^2}{d}$ 处	$-\frac{R}{d}q$
恒 $\varphi_0$ 球壳	球内 $d$ 处	$+q$	球外 $\frac{R^2}{d}$ 处	$-\frac{R}{d}q$
	球壳表面	电势 $\varphi_0$	球壳表面	$\sigma' = \epsilon_0 \varphi_0 / R$
接地球壳	轴上方 $+d$	$+q$	轴上方 $\frac{R^2}{d}$ 处	$q' = -\frac{R}{d}q$
组合平面			沿平面反射	$\pm q, \pm q'$
接地球壳	板间球外 $R$ 处	$+q$	板间球内 $\frac{R^2}{d}$ 处	$q' = -\frac{R}{d}q$
组合垂直			连续 2 次反射	$\pm q, \pm q'$



注意

球壳的  $q' \neq -q$ , 但圆柱的  $\lambda' = -\lambda$ . 且二者的半径位置相同.

#### 1.4.1 对称性论证

对于具有旋转对称性的构型, 通过对线圈的  $U$  积分求出轴线上的  $U$  和  $\mathbf{E}$ .

## 1.5 积分及其他数学

常用积分:

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x^2 + z^2} &= \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 + z^2} + \frac{1}{2}z^2 \ln(x + \sqrt{x^2 + z^2}). \\ \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + z^2}} dx &= \ln(x + \sqrt{x^2 + z^2}). \\ \int \frac{x}{\sqrt{x^2 + z^2}} dx &= \sqrt{x^2 + z^2}. \\ \int \frac{1}{(x^2 + z^2)^{3/2}} dx &= \frac{x}{z^2 \sqrt{x^2 + z^2}}. \\ \int \frac{x}{(x^2 + z^2)^{3/2}} dx &= -\frac{1}{\sqrt{x^2 + z^2}}. \\ \int \frac{x^2}{(x^2 + z^2)^{3/2}} dx &= -\frac{x}{\sqrt{x^2 + z^2}} + \ln|x + \sqrt{x^2 + z^2}|. \\ \int \frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2 - 2rzu}} du &= \frac{1}{rz} \sqrt{r^2 + z^2 - 2rzu}. \\ \int \frac{1}{1+t} \frac{1}{\sqrt{1+(r^2+1)t}} dx &= \frac{2}{r} \arctan \frac{\sqrt{1+(r^2+1)x}}{r}. \\ \int \frac{1+r}{r^2} e^{-r} dr &= -\frac{e^{-r}}{r}. \\ \int r e^{-r} dr &= e^{-r}(-1-r). \\ \int r^2 e^{-r} dr &= e^{-r}(-2-2r-r^2). \\ \int r^n e^{-r} dr &= e^{-r} \left( -n! - \frac{n!}{1!}r - \frac{n!}{2!}r^2 - \dots - \frac{n!}{n!}r^n \right).\end{aligned}$$

注意

对于  $y'' = \lambda y^n$  型的方程, 不能通过设  $y = (ax + b)^\mu$  求解, 必须分离变量.

Legendre 多项式展开:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2x\cos\theta+x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\theta) x^n.$$

$$P_0(x) = 1,$$

$$P_1(x) = x,$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1),$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x).$$

曲线坐标系下的散度:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 F_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta F_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi}.$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} (s F_s) + \frac{1}{s} \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial F_z}{\partial z}.$$

## 1.6 结论

### 1.6.1 一般静电学

cf.G.2.43., 计算电荷分布之一部受令一部施加的力时, 可直接对  $\rho \mathbf{E}$  积分, 盖任何分布皆不对自身有静电力.

cf.G.2.33., 将小量  $dq$  沿等势面涂抹, 做功为零.

#### 注意

cf.M.3.14., 计算电荷分布能量时, 若为外场导致能量则无需  $\frac{1}{2}$  因子, 反之自能需要  $\frac{1}{2}$  因子.

电荷分布能量为

$$W = \sum_i W_{i \text{ self}} + \sum_{i \neq j} W_{ij \text{ inter}}.$$



## 1.6.2 电介质中的静电学

参考 HG.2.21., 电介质中叠加原理亦适用, 适用电像法时可以先引入一个源电荷, 再引入第二个源电荷.

1. 电介质填充介面为等势面时,  $\mathbf{D}$  前后不变, 即  $\mathbf{E} \mapsto \mathbf{E}/\epsilon_r$ .
2. 电介质填充介面沿电场线时, 可假设  $\mathbf{E} \mapsto \alpha \mathbf{E}$  处处一致成立, 通过适当边界条件确定  $\alpha$ . 参考 M.2.3.31.

介质自动将任何自由电荷约化为  $q \mapsto q/\epsilon_r$  (例如介质内嵌电荷),  $\sigma \mapsto \sigma/\epsilon_r$  (例如电容边界处).

## 1.6.3 电容器相关

电容器几何量

$$U = \frac{Q}{C}, \quad Q = CU, \quad C = \frac{Q}{U}.$$

$$W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{1}{2} QU.$$

电容器串联时, 能量  $W_1 \propto C_2$ ,  $W_2 \propto C_1$ , 并联时  $W_1 \propto C_1$ ,  $W_2 \propto C_2$ , 注意与电阻的情形区分.

参考 M.3.34., 3.35., 3.47, 带电电容器的串接: 电容直接视为并联, 电量直接中和. 电容器内不完全插入电介质, 分解为电容器的串/并联.

参考 M.2.3.4., 2.3.5., 2.3.6., 2.3.25., 存在共用极板/覆叠极板时, 考虑将极板拆分为电容并联.

参考 M.3.38., 3.39., 电容器极板受力

$$F = \frac{1}{2} \epsilon E^2 S.$$

区别于真空下的受力 (cf.G.2.37.)

$$F = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 S.$$

参考 M.3.40., 电容器对导体的力矩为

$$M = \left( \frac{\partial W}{\partial \theta} \right)_U = - \left( \frac{\partial W}{\partial \theta} \right)_Q.$$

$M$  为正时力矩使  $\theta$  有增大趋势.

通过对  $F$  积分计算电容吸入电介质做功时, 自电介质达边界处始积分.

#### 1.6.4 电流

$$\sigma = \frac{ne^2\tau}{m}.$$

两个理想导体在无限均匀电介质中成立

$$RC = \rho\epsilon.$$

体电流发热功率

$$P = \iint \sigma E^2 dV.$$

注意

$$R = \int_a^b \frac{dr}{\sigma \cdot S}.$$

特别地, 对于球壳,

$$R = \int_a^b \frac{dr}{\sigma \cdot 4\pi r^2}.$$

尤其注意分子分母的位置.