1 输运性质

1.1 气体输运性质

气体输运性质需要考虑非平衡态, 但仍为恒稳态 (参数不随时间变化). 动量、热量和粒子的输运分别对应黏性、热传导和扩散.

1.1.1 黏性

定义 1.1 (黏性系数)**.** *两层速度不同的液体间有切向力 F, 则黏性系数满足*

$$\tau_{ij} = \frac{F}{A} = \eta \frac{\mathrm{d}\langle u_i\rangle}{\mathrm{d}x_j}.$$

黏性实际上源于动量输运——漂移速率 u 较小的流体层向上移动会拖慢上层的漂移速率, 从而导致黏性力. 单个与 x_j 方向成角度 θ 运动的分子转移的动量为

$$-m\left(\frac{\partial\langle u_i\rangle}{\partial x_j}\right)\lambda\cos\theta.$$

从而单位面积上单位时间内转移的动量为

$$\int_0^\pi\int_0^\infty v\cos\theta n f(v)\,\mathrm{d}v\frac{1}{2}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\cdot m\left(\frac{\partial\langle u_i\rangle}{\partial x_j}\right)\lambda\cos\theta = \frac{1}{3}nm\lambda\langle v\rangle\left(\frac{\partial\langle u_i\rangle}{\partial x_j}\right).$$

$$\eta = \frac{1}{3}mn\lambda\langle v\rangle \sim \frac{5}{16}\frac{1}{d^2}\left(\frac{mk_BT}{\pi}\right)^{1/2}.$$

注意

不可以通过 Maxwell-Boltzmann 分布的 $\langle v\rangle$ 得到右边, 因为此处模型有经过严重简化.

引人注目的是, 黏性系数与压强在很大范围内无关.

例 1.1. *通过圆柱扭摆可以测量 η. 外圆柱体以恒定的 ω_0 转动, 有效速度梯度为 $r\omega'(r)$. 因而由力矩平衡,*

$$r\cdot r\cdot r\omega'(r) = \mathrm{const}.$$

$$\omega\left(r\right)=\frac{\omega_0 b^2}{b^2-a^2}\frac{r^2-a^2}{r^2}.$$

从而施加在内圆柱上的力矩

$$G=2\pi al\cdot a\cdot\eta\frac{\omega_0 ab^2}{b^2-a^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\frac{r^2-a^2}{r^2}=4\pi\omega_0 l\eta\frac{a^2b^2}{b^2-a^2}.$$

1.1.2 热传导

定义 1.2 (热导率)**.** 热能由高温向低温流动的流量为 J_i, 则热导率满足

$$\boxed{J_i=-\kappa\left(\frac{\partial T}{\partial x_i}\right).}$$

单个分子转移的热量为

$$C_m\left(\frac{\partial T}{\partial x_i}\right)\lambda\cos\theta.$$

从而单位面积上单位时间内转移的热量为

$$\int_0^\pi\int_0^\infty v\cos\theta nf\left(v\right)\,\mathrm{d}v\frac{1}{2}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\cdot C_m\left(\frac{\partial T}{\partial x_i}\right)\lambda\cos\theta=\frac{1}{3}nC_m\lambda\left\langle v\right\rangle\left(\frac{\partial T}{\partial x_i}\right).$$

$$\boxed{\kappa=\frac{1}{3}C_V\lambda\left\langle v\right\rangle\sim\frac{25}{32d^2}C_m\left(\frac{k_BT}{\pi m}\right)^{1/2}.}$$

注意

不可以通过 Maxwell-Boltzmann 分布的 $\langle v\rangle$ 得到右边, 因为此处模型有经过严重简化.

引人注目的是, 热导率与压强在很大范围内无关.

例 1.2. 通过两个同轴恒温圆柱可以测量 κ. 由热平衡,

$$rT'\left(r\right)=\mathrm{const}.$$

$$T\left(r\right)=\frac{\left(T_2-T_1\right)\ln\left(r/a\right)}{\ln\left(b/a\right)}+T_1.$$

从而内圆柱的产热功率

$$Q=2\pi rl\kappa T'\left(r\right)=2\pi al\kappa\frac{T_2-T_1}{\ln\left(a/b\right)}.$$

1.1.3 扩散

定义 1.3 (自扩散系数). 标记的分子由高密度向低密度流动的流量为 Φ_i, 则自扩散系数满足

$$\boxed{\Phi_i = -D\left(\frac{\partial n^*}{\partial x_i}\right).}$$

特定速率和方向转移的分子数为

$$\left(\frac{\partial n^*}{\partial x_i}\right)\lambda\cos\theta.$$

从而单位面积上单位时间内转移的净分子数为

$$\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} v\cos\theta n f\left(v\right)\,\mathrm{d}v\frac{1}{2}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\cdot\left(\frac{\partial n^*}{\partial x_i}\right)\lambda\cos\theta = \frac{1}{3}\lambda\left\langle v\right\rangle\left(\frac{\partial n^*}{\partial x_i}\right).$$

$$\boxed{D = \frac{1}{3}\lambda\left\langle v\right\rangle \sim \frac{3}{8nd^2}\left(\frac{k_BT}{\pi m}\right)^{1/2}.}$$

注意

不可以通过 Maxwell-Boltzmann 分布的 $\langle v\rangle$ 得到右边, 因为此处模型有经过严重简化.

引人注目的是, 自扩散系数与压强成反比.

附注 1.1 (三维扩散方程). 由

$$\oiint_S \boldsymbol{\Phi}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = -\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V n^*\,\mathrm{d}V.$$

加上 $\boldsymbol{\Phi} = -D\nabla n^*$ 立刻有

$$\frac{\partial n^*}{\partial t} = D\nabla^2 n^*.$$

1.2 热扩散方程

用和附注 1.1相同的方法可以得到

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = D\nabla^2 T, \quad D = \frac{\kappa}{C}.}$$

1.2.1 一维情形

分离变量可得

$$T \propto \exp\left(i\left(kx - \omega t\right)\right),$$

其中

$$k = \pm\left(1+i\right)\sqrt{\frac{\omega}{2D}}.$$

如果要求 $x > 0$ 部分的解并且不希望 T 的空间部分在 $x \to \infty$ 时发散, 则选取其中一解且

$$T\left(x,t\right) = \sum_{\omega} A\left(\omega\right) e^{-i\omega t} \exp\left(\left(i-1\right)\sqrt{\frac{\omega}{2D}}x\right).$$

设定边界条件 (正弦温度进入地面传播)

$$T\left(0,t\right) = T_0 + \Delta T \cos\Omega t = T_0 + \frac{\Delta T}{2} e^{i\Omega t} + \frac{\Delta T}{2} e^{-i\Omega t}.$$

在 $x = 0$ 处有

$$T\left(0,t\right) = \sum_{\omega} A\left(\omega\right) e^{-i\omega t}.$$

立刻有

$$T\left(x,t\right) = T_0 + \frac{\Delta T}{2} e^{-x/\delta} \cos\left(\Omega t - \frac{x}{\delta}\right), \quad \delta = \sqrt{\frac{2D}{\Omega}} = \sqrt{\frac{2\kappa}{\Omega C}}. \tag{1}$$

其中 δ 谓趋肤深度.

1.2.2 热平衡态

在恒稳态下,

$$\nabla^2 T = 0.$$

例 1.3. *一维的 Laplace 方程的通解为*

$$T = \frac{\left(T_2 - T_1\right) x}{L} + T_1.$$

从而热通量为

$$J = -\kappa\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right) = \frac{\kappa}{L}\left(T_1 - T_2\right).$$

1.2.3 球的热扩散方程

如果 T 具有球对称性则扩散方程变为

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\kappa}{C}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right).}$$

例 1.4 (球形恒稳态)**.** 恒稳态下显然 T 为「*Coulomb* 势」

$$T=A+\frac{B}{r}.$$

例 1.5 (球形鸡)**.** 设鸡半径 a, 初始温度 T_0, 边界温度 T_1, 则引入

$$T\left(r,t\right)=T_1+\frac{B\left(r,t\right)}{r}.$$

可以将热方程变为一维情形

$$\frac{\partial B}{\partial t}=D\frac{\partial^2 B}{\partial r^2}.$$

显然有边界条件 $B\left(0,t\right)=0$, $B\left(a,t\right)=0$, $B\left(r,0\right)=r\left(T_0-T_1\right)$. 用

$$B=\sin\left(kr\right)e^{-i\omega t}$$

试探之, 加上前二边界条件可得

$$i\omega=Dk^2=D\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2.$$

故通解为

$$B\left(r,t\right)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\left(\frac{n\pi r}{a}\right)e^{-D(n\pi/a)^2t}.$$

代入 $t=0$ 时的边界条件并借助 *Fourier* 展开 *(*三角函数正交性*)* 得到

$$A_m=\frac{2a}{m\pi}\left(T_1-T_0\right)\left(-1\right)^m.$$

$$T\left(r,t\right)=T_1+\frac{2a}{\pi}\left(T_1-T_0\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n}{n}\frac{\sin\left(n\pi r/a\right)}{r}e^{-D(n\pi/a)^2t}.$$

特别地, 中心温度为

$$T\left(0,t\right)\sim T_1-2\left(T_1-T_0\right)e^{-D(\pi/a)^2t}.$$

值得注意的是, 加热时间 $t\propto a^2\propto m^{2/3}$.

例 1.6. 假设一球形动物具有半径 a, 在平衡态下它的温度为 $T = A + B/r$, $B = a\left(T_0 - T_1\right)$. 可得总热通量为 $4\pi a^2 \kappa B/a^2$, 故 $\Phi \propto a$, 而产热量 $\propto a^3$.

由热量损失和温差呈正比, 可以得到

推论 1.1 (Newton 冷却定律)**.**

$$T_{\text{内}} - T_{\text{外}} = \left(T_{\text{内}} - T_{\text{外}}\right)_0 e^{-\lambda t}.$$

1.2.4 Prandtl 数

热传递并非改变物体温度的全部因素. 对流也会带走热量. 其比重的衡量大致为

定义 1.4 (Prandtl 数)**.**

$$\sigma_p = \frac{\nu}{D} = \frac{\eta c_p}{\kappa}.$$

对于理想气体, 采用修正后的 η-κ 关系可得

$$\sigma_p = \frac{2}{3}.$$

当 $\sigma_p \gg 1$ 时对流扩散占主导, $\sigma_p \ll 1$ 时热扩散占主导.

1.2.5 热源

单位时间内单位体积产生热量 H 时, 热扩散方程修正为

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D\nabla^2 T + \frac{H}{C}.$$

例 1.7. 长 L 的导体棒, 两端温度维持在 T_0, 则

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = -\frac{H}{\kappa}.$$

从而 $T = T_0 + Hx\left(L - x\right)/\left(2\kappa\right)$.

1.2.6 粒子扩散

例 1.8. 设半径为 a 的生物吸附周围的粒子使 $r=a$ 处的离子密度为零, 则

$$n\left(r\right)=n_0\left(1-\frac{a}{r}\right).$$

可知吸附率 $\propto 4\pi a n_0$. 即正比于半径. 因此单细胞生物无法过大.