1 特殊构型, 唯一性定理, 电像法与 Green 定理等

1.1 本构关系

对均匀带电球面:

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}.$$

对均匀带电球:

$$Q = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho \Longleftrightarrow \rho = \frac{3Q}{4\pi R^3}.$$

1.2 特殊构型

几何	源电荷	场
均匀带电导线	λ	$\boldsymbol{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\hat{\boldsymbol{r}}$
均匀带电平面	σ	$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$
均匀带电球壳	Q	球外: $\boldsymbol{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{\boldsymbol{r}}$
均匀带电圆盘	σ	中轴线: $V = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(\sqrt{R^2+z^2} - z\right)$
均匀带电圆环	Q	中轴线: $V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}}$
均匀带电球	Q	球内: $\boldsymbol{E} = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3}\hat{\boldsymbol{r}}, U = \frac{3Q}{8\pi\epsilon_0 R} - \frac{Qr^2}{8\pi\epsilon_0 R^3}$ 球外: $\boldsymbol{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{\boldsymbol{r}}$
偶极子	$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{E} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3}\left[3\left(\boldsymbol{z}\cdot\hat{\boldsymbol{r}}\right)\hat{\boldsymbol{r}} - \boldsymbol{z}\right]$ $U = \frac{\boldsymbol{p}\cdot\hat{\boldsymbol{r}}}{4\pi\epsilon_0 r^2}$
球壳	$\sigma =$ $\sigma_0\cos\theta$	球内: $\boldsymbol{E} = -\frac{\sigma_0}{3\epsilon_0}\hat{\boldsymbol{z}}$ 球外: $\boldsymbol{E} = \frac{\sigma_0}{3\epsilon_0}\frac{R^3}{r^3}\left[3\left(\hat{\boldsymbol{z}}\cdot\hat{\boldsymbol{r}}\right)\hat{\boldsymbol{r}} - \hat{\boldsymbol{z}}\right]$

构型	能量

均匀带电球	$W = \dfrac{3Q^2}{20\pi\epsilon_0 R}$
均匀带电球面	$W = \dfrac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R}$

原构型	源电荷	等效构型	等效电荷	有效区域
有限导线	λ	切圆投影	λ	单点
带电球壳	$\sigma = \sigma_0 \cos\theta$	均匀极化球	$\boldsymbol{P} = \sigma\hat{\boldsymbol{z}}$	球外

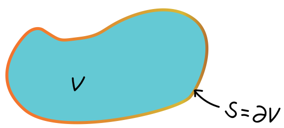
构型	电容
平行板电容器	$C = \dfrac{\epsilon S}{b-a}$
圆柱电容器	$C = \dfrac{2\pi\epsilon L}{\log(b/a)}$
球形电容器	$C = \dfrac{4\pi\epsilon}{1/a - 1/b}$

场	常用边界条件	适用条件	退化情形
$\boldsymbol{E}$	$E_{2n} - E_{1n} = \sigma/\epsilon_0$ $\boldsymbol{E}_2^{/\!/} = \boldsymbol{E}_1^{/\!/}$	真空 无条件	无面电荷: $E_{2n} = E_{1n}$
$\boldsymbol{D}$	$D_{2n} - D_{1n} = \sigma_f$	介质边界	无自由面电荷: $D_{2n} = D_{1n}$
V	$\epsilon_1 \dfrac{\partial V}{\partial n} - \epsilon_2 \dfrac{\partial V}{\partial n} = \sigma_f$	介质边界	无自由面电荷: $\epsilon_1 \dfrac{\partial V}{\partial n} = \epsilon_2 \dfrac{\partial V}{\partial n}$
$\boldsymbol{J}$	$J = \sigma_1 E_1 = \sigma_2 E_2$	稳恒电流	
n 皆表示从 1 指向 2.			

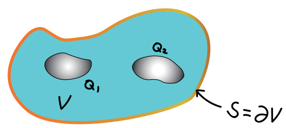
注意

$\boldsymbol{D}^{/\!/}$ 在边界处不连续.

1.3 唯一性定理



(a) 第一唯一性定理



(b) 第二唯一性定理

图 1

定理 1.1 (第一唯一性定理). *如图 1a, 若*

1. $S=\partial V$ 上的电势 $\varphi|_S$ 给定;
2. V 内部的电荷分布 ρ 已知;

则 φ 在 V 内唯一确定.

定理 1.2 (第二唯一性定理). *如图 1b, 若*

1. $S=\partial V$ 上的电势 $\varphi|_S$ 给定;
2. 诸导体上电荷量 Q_i 给定;
3. V 内部的电荷分布 ρ 已知;

则 φ 在 V 内唯一确定.

推论 1.1 (导体静电场叠加原理). *设空间中有固定导体,*

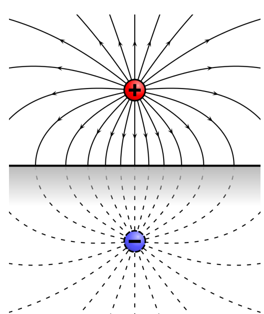
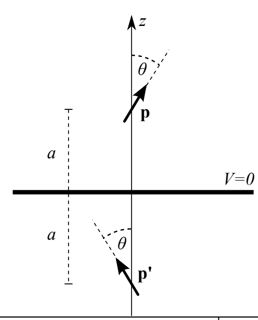
1. 当诸导体电势为 φ_i, 相应带电量为 Q_i, 空间电势为 φ;
2. 当诸导体电势为 φ_i', 相应带电量为 Q_i', 空间电势为 φ';

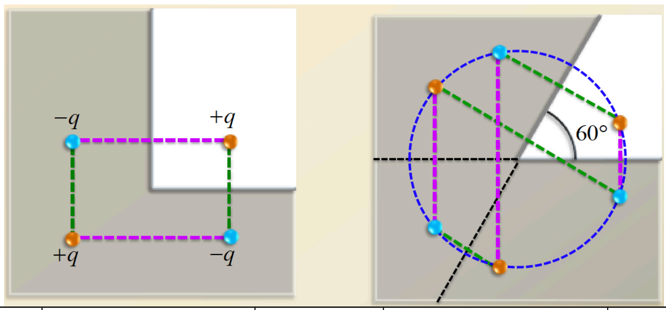
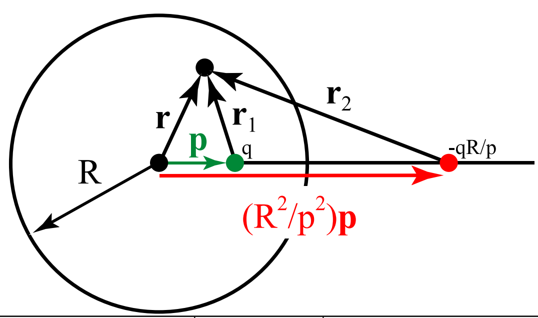
则诸导体电势为 $\varphi_i+\varphi_i'$ 时, 相应带电量为 Q_i+Q_i', 空间电势为 $\varphi+\varphi'$.

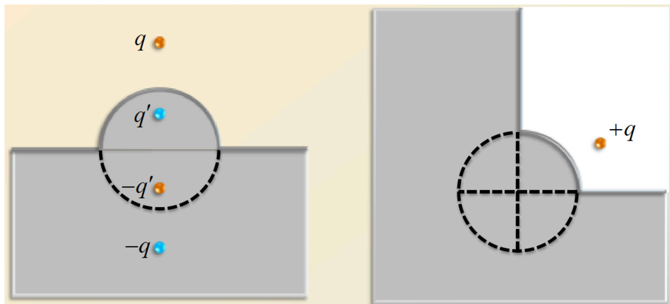
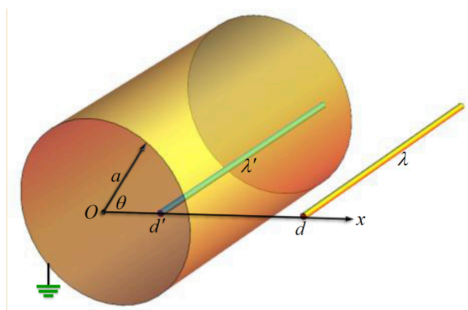
1.4 电像法

定理 1.3 (电像法的原则).

1. *源电荷位置即解的有效位置;*
2. *像电荷之和恰好等于该区域内电荷之和.*

<table>
<tr><th>导体</th><th>源位置</th><th>源电荷</th><th>像位置</th><th>像电荷</th></tr>
<tr><td>接地平面</td><td>上方 $+d$</td><td>$+q$</td><td>下方 $-d$</td><td>$-q$</td></tr>
<tr><td>接地平面</td><td>上方 $+d$</td><td>$\boldsymbol{p}$</td><td>下方 $-d$</td><td>$\boldsymbol{p}$ 沿 z 反射</td></tr>
<tr><td>电介质</td><td rowspan="3">下方 $-d$</td><td rowspan="3">$+q$</td><td>上方 $+d$</td><td>$\frac{\epsilon_0(\epsilon_2-\epsilon_1)}{\epsilon_2(\epsilon_1+\epsilon_2)}q$</td></tr>
<tr><td>下方 ϵ_2</td><td>下方 $-d$</td><td>$q \mapsto \frac{\epsilon_0}{\epsilon_2}q$</td></tr>
<tr><td>上方 ϵ_1</td><td>下方 $-d$</td><td>$\frac{\epsilon_0(\epsilon_2-\epsilon_1)}{\epsilon_2(\epsilon_1+\epsilon_2)}q$</td></tr>
<tr><td colspan="5"> 
</td></tr>
<tr><td>接地垂直</td><td>导体板间</td><td>$+q$</td><td>连续 2 次反射</td><td>$\pm q$</td></tr>
<tr><td>接地 $60°$</td><td>导体板间</td><td>$+q$</td><td>连续 3 次反射</td><td>$\pm q$</td></tr>
</table>

				
接地球壳	球外 d 处	$+q$	球内 $\frac{R^2}{d}$ 处	$-\frac{R}{d}q$
带电球壳	球外 d 处 球壳	$+q$ Q	球内 $\frac{R^2}{d}$ 处 球内 O 处	$q' = -\frac{a}{d}q$ $Q - q'$
接地球壳	球内 d 处	$+q$	球外 $\frac{R^2}{d}$ 处	$-\frac{R}{d}q$
恒 φ_0 球壳	球内 d 处 球壳表面	$+q$ 电势 φ_0	球外 $\frac{R^2}{d}$ 处 球壳表面	$-\frac{R}{d}q$ $\sigma' = \epsilon_0\varphi_0/R$
				
接地球壳 组合平面	轴上方 $+d$	$+q$	轴上方 $\frac{R^2}{d}$ 处 沿平面反射	$q' = -\frac{R}{d}q$ $\pm q, \pm q'$
接地球壳 组合垂直	板间球外 R 处	$+q$	板间球内 $\frac{R^2}{d}$ 处 连续 2 次反射	$q' = -\frac{R}{d}q$ $\pm q, \pm q'$

<table>
<tr><td colspan="5">
</td></tr>
<tr><td>接地圆柱</td><td>柱外 d 处</td><td>$+\lambda$</td><td>柱内 $\frac{R^2}{d}$ 处</td><td>$-\lambda$</td></tr>
<tr><td colspan="5">
</td></tr>
</table>

注意

球壳的 $q' \neq -q$, 但圆柱的 $\lambda' = -\lambda$. 且二者的半径位置相同.

1.4.1 对称性论证

对于具有旋转对称性的构型, 通过对线圈的 U 积分求出轴线上的 U 和 $\boldsymbol{E}$.

1.5 积分及其他数学

常用积分:

$$\int \sqrt{x^2+z^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+z^2} + \frac{1}{2}z^2 \ln\left(x+\sqrt{x^2+z^2}\right).$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+z^2}}\,\mathrm{d}x = \ln\left(x+\sqrt{x^2+z^2}\right).$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+z^2}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{x^2+z^2}.$$

$$\int \frac{1}{\left(x^2+z^2\right)^{3/2}}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{z^2\sqrt{x^2+z^2}}.$$

$$\int \frac{x}{\left(x^2+z^2\right)^{3/2}}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{\sqrt{x^2+z^2}}.$$

$$\int \frac{x^2}{\left(x^2+z^2\right)^{3/2}}\,\mathrm{d}x = -\frac{x}{\sqrt{x^2+z^2}} + \ln\left|x+\sqrt{x^2+z^2}\right|.$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{r^2+z^2-2rzu}}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{rz}\sqrt{r^2+z^2-2rzu}.$$

$$\int \frac{1}{1+t}\frac{1}{\sqrt{1+\left(r^2+1\right)t}}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{r}\arctan\frac{\sqrt{1+\left(r^2+1\right)x}}{r}.$$

$$\int \frac{1+r}{r^2}e^{-r}\,\mathrm{d}r = -\frac{e^{-r}}{r}.$$

$$\int re^{-r}\,\mathrm{d}r = e^{-r}\left(-1-r\right).$$

$$\int r^2e^{-r}\,\mathrm{d}r = e^{-r}\left(-2-2r-r^2\right).$$

$$\int r^ne^{-r}\,\mathrm{d}r = e^{-r}\left(-n!-\frac{n!}{1!}r-\frac{n!}{2!}r^2-\cdots-\frac{n!}{n!}r^n\right).$$

参考 HG.p.222.6.(1).,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{(n-1)!!}{n!!}\dfrac{\pi}{2}, & n \text{ even}, \\[2ex] \dfrac{(n-1)!!}{n!!}, & n \text{ odd}. \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a+\cos x}\,\mathrm{d}x = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}.$$

注意

对于 $y''=\lambda y^n$ 型的方程, 不能通过设 $y=(ax+b)^\mu$ 求解, 必须分离变量.

Legendre 多项式展开:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2x\cos\theta+x^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n\left(\cos\theta\right)x^n.$$
$$P_0\left(x\right)=1,$$
$$P_1\left(x\right)=x,$$
$$P_2\left(x\right)=\frac{1}{2}\left(3x^2-1\right),$$
$$P_3\left(x\right)=\frac{1}{2}\left(5x^3-3x^2\right).$$

曲线坐标系下的散度:

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{F}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2F_r\right)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta F_\theta\right)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F_\varphi}{\partial\varphi}.$$
$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{F}=\frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}\left(sF_s\right)+\frac{1}{s}\frac{\partial F_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial F_z}{\partial z}.$$

1.6 结论

1.6.1 一般静电学

cf.G.2.43., 计算电荷分布之一部受令一部施加的力时, 可直接对 $\rho\boldsymbol{E}$ 积分, 盖任何分布皆不对自身有静电力.

cf.G.2.33., 将小量 dq 沿等势面涂抹, 做功为零.

注意

cf.M.3.14., 计算电荷分布能量时, 若为外场导致能量则无需 $\frac{1}{2}$ 因子, 反之自能需要 $\frac{1}{2}$ 因子.

电荷分布能量为

$$W = \sum_i W_{i\,\mathrm{self}} + \sum_{i\neq j} W_{ij\,\mathrm{inter}}.$$

1.6.2 电介质中的静电学

参考 HG.2.21., 电介质中叠加原理亦适用, 适用电像法时可以先引入一个源电荷, 再引入第二个源电荷.

1. 电介质填充介面为等势面时, $\boldsymbol{D}$ 前后不变, 即 $\boldsymbol{E} \mapsto \boldsymbol{E}/\epsilon_r$.
2. 电介质填充介面沿电场线时, 可假设 $\boldsymbol{E} \mapsto \alpha\boldsymbol{E}$ 处处一致成立, 通过适当边界条件确定 α. 参考 M.2.3.31.

介质自动将任何自由电荷约化为 $q \mapsto q/\epsilon_r$(例如介质内嵌电荷), $\sigma \mapsto \sigma/\epsilon_r$(例如电容边界处).

1.6.3 电容器相关

电容器几何量

$$U = \frac{Q}{C}, \quad Q = CU, \quad C = \frac{Q}{U}.$$

$$W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}QU.$$

电容器串联时, 能量 $W_1 \propto C_2$, $W_2 \propto C_1$, 并联时 $W_1 \propto C_1$, $W_2 \propto C_2$, 注意与电阻的情形区分.

参考 M.3.34., 3.35., 3.47, 带电电容器的串接: 电容直接视为并联, 电量直接中和. 电容器内不完全插入电介质, 分解为电容器的串/并联.

参考 M.2.3.4., 2.3.5., 2.3.6., 2.3.25., 存在共用极板/覆叠极板时, 考虑将极板拆分为电容并联.

参考 M.3.38., 3.39., 电容器极板受力

$$F = \frac{1}{2}\epsilon E^2 S.$$

区别于真空下的受力 (cf.G.2.37.)

$$F = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 S.$$

参考 M.3.40., 电容器对导体的力矩为

$$M = \left(\frac{\partial W}{\partial \theta}\right)_U = -\left(\frac{\partial W}{\partial \theta}\right)_Q.$$

M 为正时力矩使 θ 有增大趋势.

通过对 F 积分计算电容吸入电介质做功时, 自电介质达边界处始积分.

1.6.4 电流

$$\sigma = \frac{ne^2\tau}{m}.$$

两个理想导体在无限均匀电介质中成立

$$RC = \rho\epsilon.$$

体电流发热功率

$$P = \iint \sigma E^2 \,\mathrm{d}V.$$

注意

$$R=\int_a^b \frac{\mathrm{d}r}{\sigma\cdot S}.$$

特别地, 对于球壳,

$$R=\int_a^b \frac{\mathrm{d}r}{\sigma\cdot 4\pi r^2}.$$

尤其注意分子分母的位置.