1 静电学

1.1 Laplace 方程

1.1.1 调和函数

定理 1.1 (平均值定理)**.** 设 φ 是一调和函数, 则

$$\varphi\left(\boldsymbol{r}\right)=\frac{1}{4\pi R^2}\oiint_S\varphi\left(\boldsymbol{r}'\right)\mathrm{d}S,$$

其中 S 是半径为 R 的球面.

证明. 记 $\psi=\dfrac{1}{r}$, 则由 Green 第二恒等式,

$$\iiint_{V\cap V'}\cancelto{0}{\left(\psi\nabla^2\varphi-\varphi\nabla^2\psi\right)}\mathrm{d}V=\oiint_{S\cup S'}\left(\psi\frac{\partial\varphi}{\partial\boldsymbol{n}}-\varphi\frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{n}}\right)\mathrm{d}S.$$

右侧积分第一项

$$\begin{aligned}\oiint_{S\cup S'}\psi\frac{\partial\varphi}{\partial\boldsymbol{n}}\mathrm{d}S&=\frac{1}{R}\oiint_S\boldsymbol{\nabla}\varphi\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}-\frac{1}{R'}\oiint_{S'}\boldsymbol{\nabla}\varphi\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\\&=\frac{1}{R}\iiint_V\nabla^2\varphi\,\mathrm{d}V-\frac{1}{R'}\iiint_{V'}\nabla^2\varphi\,\mathrm{d}V=0.\end{aligned}$$

从而

$$\oiint_{S\cup S'}\varphi\frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{n}}\mathrm{d}S=\frac{1}{R'^2}\oiint_{S'}\varphi\,\mathrm{d}S-\frac{1}{R^2}\oiint_S\varphi\,\mathrm{d}S=0.$$

即

$$\frac{1}{R^2}\oiint_S\varphi\,\mathrm{d}S$$

和 R 无关. □

定理 1.2 (唯一性定理)**.** 设 φ 和 ψ 是调和函数, 且 $\varphi|_S=\psi|_S$, 则

$$\varphi|_V\equiv\psi|_V.$$

引理 1.1. 设 φ 是一调和函数, 且 $\varphi|_S=0$, 则

$$\varphi|_V\equiv 0.$$

证明. 由 Green 第一恒等式,

$$\iiint_V \left(\cancelto{0}{\varphi\nabla^2\varphi} + (\boldsymbol{\nabla}\varphi)^2\right) \mathrm{d}V = \oiint_S \varphi\frac{\partial\varphi}{\partial\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S = 0.$$

从而 φ 为常量, 必定为 0. □

1.2 角动量

例 1.1. 求电荷-磁单极子系统的角动量.

解. 设由电荷和磁单极子出发指向场点的单位矢量分别为 $\hat{\boldsymbol{n}}$ 和 $\hat{\boldsymbol{n}}'$, 则

$$\begin{aligned}
\iiint \boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}) &= \iiint \frac{\hat{\boldsymbol{n}}}{r}\times(\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{B})\,\mathrm{d}V \\
&= \frac{1}{r}\left[(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{B})\,\hat{\boldsymbol{n}} - \boldsymbol{B}\right]\mathrm{d}V \\
&= -\iiint \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{\nabla}\frac{\boldsymbol{r}}{r}\,\mathrm{d}V \\
&= -\iiint \boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\boldsymbol{B}\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)\mathrm{d}V + \iiint (\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B})\,\frac{\boldsymbol{r}}{r}\,\mathrm{d}V \\
&= \hat{\boldsymbol{z}}.
\end{aligned}$$

□