第一章　积分论

1.1　Lebesgue 积分

1.1.1　Riemann 积分

Riemann 积分的定义如前不赘，唯注意下例。

例 1.1.1. 对于 *Dirichlet* 函数

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q},\\ 0, & x\in[0,1]-\mathbb{Q}.\end{cases}$$

虽可写为可数个简单函数之和，亦知其非 *Riemann* 可积。

1.1.2　有界函数在有限测度集上的 Lebesgue 积分

定义 1.1.1. 对于有限测度集 E 上的简单函数 ψ，定义其积分如

$$\int_E \psi=\sum a_i\cdot m(E_i).$$

表达式中诸 a_i 不等。

引理 1.1.1. 纵表达式中 a_i 简并，亦无改其积分值。

命题 1.1.1 (积分的线性与单调性)**.** 对于简单函数 φ 与 ψ，有

$$\int(\alpha\varphi+\beta\psi)=\alpha\int\varphi+\beta\int\psi.$$

以及若 $\varphi<\psi$，则

$$\int\varphi<\int\psi.$$

证明. 将 φ 与 ψ 共用一组 E_i 展开即可。 □

此时已足够推断阶梯函数的 Riemann 与 Lebesgue 积分相符。

定义 1.1.2. 对有限测度集上的有界函数 f，定义其 *Lebesgue* 上积分为全体 $\varphi > f$ 之简单函数的 *Lebesgue* 积分的下界。相似定义 *Lebesgue* 下积分。

定义 1.1.3. 前开 f 若 *Lebesgue* 上下积分相等，则称之其 *Lebesgue* 积分。

定理 1.1.1. *Lebesgue* 积分兼容 *Riemann* 积分。

证明. 注意到阶梯函数含于简单函数即可。 □

例 1.1.2. 注意 *Dirichlet* 函数 $f = \chi_{\mathbb{Q}}$，故 $\int f = m(\mathbb{Q}) = 0$。

定理 1.1.2. 有限测度集上定义的有界函数可积。

证明. 注意其存在简单函数的上下逼近即可。 □

命题 1.1.2 (积分的线性与单调性)**.** 对于有限测度集上的可测函数 f 与 g，有

$$\int (\alpha f + \beta g) = \alpha \int f + \beta \int g.$$

以及若 $f < g$，则

$$\int f < \int g.$$

证明. 只证 $\alpha = \beta = 1$ 的情况，目标积分不超二 Lebesgue 上积分之和而不低于二 Legesgue 下积分之和，再注意上下积分之和即积分之和。

单调性考虑 $\int (f - g)$ 即可。 □

推论 1.1.1. 对无交可测集 A 与 B，有

$$\int_{A \cup B} f = \int_A f + \int_B f.$$

推论 1.1.2. 对有限测度集上的有界函数 f，有

$$\left| \int f \right| \leq \int |f|.$$

证明. 注意 $-|f| \leq f \leq |f|$ 即可。 □

命题 1.1.3. 若有限测度集上的有界函数列 $\{f\}$ 一致收敛于 f，则

$$\lim_{n \to \infty} \int f_n = \int \lim_{n \to \infty} f_n.$$

证明. 注意 $\|f-f_n\|$ 可以任意小，借助前开推论即可。 □

例 1.1.3. 考虑 f_n 定义为 $f(0)=0$，$f(1/n)=n$，$f(2/n)=0$ 并线性连接，则其除逐点收敛于零外满足前开所有条件，而积分后序列非零。

定理 1.1.3 (有界收敛定理). 若有限测度集上的各点一致有界函数列 $\{f\}$ 逐点收敛于 f，则

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n=\int\lim_{n\to\infty}f_n.$$

证明. 由 Egoroff 定理，f_n 在任意接近 E 的闭集上一致收敛。故定义域的残余部分的积分任意小。 □

1.1.3　非负函数的 Lebesgue 测度

定义 1.1.4. 定义 f 的支撑为使之非零的定义域部分[1]。

定义 1.1.5. 设 f 为 E 上的非负可测函数，定义其积分

$$\int_E f=\sup\left\{\int_E h\,\middle|\,0\le h\le f\right\}.$$

其中 h 为有限测度集上定义的有界可测函数。

命题 1.1.4 (Chebychev 不等式). 设 f 非负可测，对 $\lambda>0$，有

$$m(f\ge\lambda)\le\frac{1}{\lambda}\int_E f.$$

证明. 取 $g=\lambda\chi_{f\ge\lambda}$，并注意 $0\le g\le f$。 □

命题 1.1.5. 设 f 非负可测，则 $\int f=0$ 当且仅当 f 几乎处处为零。

证明. 由前不等式，诸 $m(f\le 1/n)=0$，并起即可。 □

命题 1.1.6 (积分的线性与单调性). 对于非负可测函数 f 与 g，有

$$\int(\alpha f+\beta g)=\alpha\int f+\beta\int g.$$

以及若 $f<g$，则

$$\int f<\int g.$$

[1]这和拓扑学上定义为其闭包不同。

证明. 易证 $\int f+\int g \leq \int (f+g)$。反向的不等式则注意取 $h=\min\{f,l\}$，$k=l-h$，则 h 与 k 有界可测且

$$\int l=\int (h+k) \leq \int f+\int g.$$

左侧取上界即可。单调性亦左侧取上界可证。 □

定理 1.1.4 (积分区间的可加性). *f 非负可测而 A 与 B 为无交可测集，则*

$$\int_{A\cup B} f=\int_A f+\int_B f.$$

引理 1.1.2 (Fatou 引理). *非负可测函数列 $\{f_n\}$ 几乎处处逐点收敛于 f，则*

$$\int_E f \leq \liminf \int_E f_n.$$

证明. 除开一零测集，可设其处处收敛。对任意 h，设 $h_n=\min\{h,f_n\}$，故 $h_n\to h$ 且由有界收敛定理

$$\lim_{n\to\infty}\int_E h_n=\int_E h.$$

再注意 $h_n\leq f_n$，$\lim\int h_n \leq \liminf\int f_n$ 即可。 □

例 1.1.4. *令 $E=[0,1)$ 且 $f_n=n\chi_{(0,1/n)}$，则 f_n 极限的积分与积分的极限分别为 0 和 1。再如 $\chi_{(n,n+1)}$ 逐点收敛至 0 但显然积分与极限不可互换。*

定理 1.1.5 (单调收敛定理). *在 Fatou 引理的条件下，若 $\{f_n\}$ 递增，则*

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n=\int f.$$

证明. 由积分的单调性知

$$\limsup \int f_n \leq \int f.$$ □

推论 1.1.3. *非负可测函数和 $\sum u_n$ 几乎处处逐点收敛于 f，则*

$$\int f=\sum\int u_n.$$

定义 1.1.6. *积分有限的可测函数称为可积函数。*

命题 1.1.7. *可积函数几乎处处有限。*

证明. 注意对任意 n，有

$$m\left(f \geq n\right) \leq \frac{1}{n}\int f.$$

□

引理 1.1.3 (Beppo Levi 引理)**.** 非负可测函数列 $\{f_n\}$ 诸积分一致有界，则 f_n 逐点收敛于一几乎处处有界的可积函数。

证明. 递增数列收敛于一广义实数，故定义 $f\left(x\right) = \lim f_n\left(x\right)$，复用前开命题与有界收敛定理。 □

1.1.4　一般 Lebesgue 积分

注意 $f = f^+ - f^-$ 且 $|f| = f^+ + f^-$。

命题 1.1.8. 对可测函数 f，f^+ 与 f^- 可积当且仅当 $|f|$ 可积。

定义 1.1.7. 若 $|f|$ 可积则称可测函数 f 可积且定义

$$\int f = \int f^+ - \int f^-.$$

命题 1.1.9. 若 f 可积，则 $|f|$ 几乎处处有限且对零测集 E_0，

$$\int_E f = \int_{E-E_0} f.$$

证明. 前开命题知几乎处处有限。再注意对非负函数有相同成立即可。 □

命题 1.1.10 (比较审敛法)**.** 若 $|f|$ 处处小于一可积函数，则 f 可积且

$$\left|\int f\right| \leq \int |f|.$$

证明. 可积性易证。再由实数的三角不等式，

$$\left|\int f^+ - \int f^-\right| \leq \int f^+ + \int f^- \leq \int |f|.$$

□

注意由命题1.1.9，两可积函数若某处值无限，则积分可径直挖去该点而无需定义在该点的值。

命题 1.1.11 (积分的线性与单调性)**.** 对于可积函数 f 与 g，有

$$\int(\alpha f+\beta g)=\alpha\int f+\beta\int g.$$

以及若 $f<g$，则

$$\int f<\int g.$$

证明. 可积性由 $|f+g|\le|f|+|g|$ 得，其余易证。 □

推论 1.1.4. 对无交可测集 A 与 B，有

$$\int_{A\cup B}f=\int_A f+\int_B f.$$

定理 1.1.6 (Lebesgue 控制收敛定理)**.** 逐点收敛于 f 的可测函数列 $\{f_n\}$ 满足 $|f_n|\le g$，则有 f 可积且

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n=\int f.$$

证明. 注意到由 Fatou 引理，

$$\int(g+f)\le\liminf\int(g+f_n),$$

以及

$$\int(g-f)\le\liminf\int(g-f_n).$$ □

定理 1.1.7 (一般的 Lebesgue 控制收敛定理)**.** 逐点收敛于 f 的可测函数列 $\{f_n\}$ 满足 $|f_n|\le g_n$，若 $\{g_n\}$ 几乎处处收敛于 g，且

$$\lim_{n\to\infty}\int g_n=\int g,$$

则有 f 可积且

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n=\int f.$$

证明. 证法同上。 □

1.1.5　积分的可数可加性与连续性

定理 1.1.8 (积分的可数可加性)**.** 设 f 可积而 $\{E_n\}$ 为无交可测集族，其并为 E，则

$$\int f=\sum\int_n f.$$

证明. 对 $f_n = f\chi_{E_1\cap\cdots\cap E_n}$ 应用控制收敛定理。 □

定理 1.1.9 (积分的连续性)**.** f 为 E 上的可积函数，则

(a) 若 $\{A_k\}$ 为升链，则

$$\int_{\cup A_n} f = \lim_{n\to\infty}\int_{A_n} f.$$

(b) 若 $\{B_k\}$ 为降链，则

$$\int_{\cap B_n} f = \lim_{n\to\infty}\int_{B_n} f.$$

1.1.6 一致可积性

引理 1.1.4. 有限测度集可以被划分为有限个测度小于 δ 的无交集。

证明. 注意 $m(E-[-n,n])$ 迟早小于 δ 后划分 $[-n,n]$ 即可。 □

命题 1.1.12. f 在 E 上可积，则对于任意小的 ϵ，存在 δ 使得对任意满足 $m(A)<\delta$ 的子集 A 有

$$\int_A |f| < \epsilon.$$

反之，若 E 测度有限而对任意小的 ϵ，存在上述的 δ，则 f 可积。

证明. 仅考虑正的 f。正向结论可由定义以有界函数逼近 f 并注意有界性推得。反向结论则选取一对 ϵ 与 δ，并由前引理将 E 写为有限个小集的并。 □

定义 1.1.8. E 上的可测函数族称为一致可积，若对于任意小的 ϵ，存在 δ 使得对任意 $m(A)<\delta$ 以及其中的 f，有

$$\int_A |f| < \epsilon.$$

例 1.1.5. 设 g 可积，所有满足 $|f|<g$ 的可测函数为一致可积。

命题 1.1.13. 有限个可积函数构成的族是一致可积的。

命题 1.1.14. 若有限测度的 E 上一致可积的 $\{f_n\}$ 几乎处处逐点收敛于 f，则 f 可积。

证明. 由命题1.1.12，诸 f_n 的积分一致有界，由 Fatou 引理

$$\int |f| \le \liminf \int |f_n|.$$

□

定理 1.1.10 (Vitali 收敛定理)**.** *若有限测度的 E 上一致可积的 $\{f_n\}$ 几乎处处逐点收敛于 f，则*

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n = \int f.$$

证明. 由 Egoroff 定理，选取任意逼近 E 的 A 使得 $\{f_n\}$ 一致收敛，则

$$\left|\int_E f_n - \int_E f\right| \le \int_{E-A} |f_n - f| + \int_A |f_n| + \int_A |f|.$$

第一项积分由一致收敛任意小，后二项由一致可积与 Fatou 引理任意小。 □

定理 1.1.11. *有限测度集上几乎处处收敛于零的非负可测函数列 $\{h_n\}$，当且仅当其一致可积时有*

$$\lim_{n\to\infty}\int h_n = 0.$$

证明. 只证极限为零推出一致可积。对任意 $\epsilon > 0$，可以选取足够大的 N 使

$$\int h_{N:} < \epsilon,$$

再注意有限个 $h_{:N}$ 一致可积即可。 □

1.2　进一步的主题

1.2.1　一致可积性与测度紧密型

例 1.2.1. *对无限测度的 E，考虑 $f = \chi_{[n,n+1]}$ 知 Vitali 定理不适用。*

命题 1.2.1. *设 f 可积，则在一有限测度集 E_0 外其积分任意小。*

证明. 有定义知存在有限测度上有界的函数其积分任意逼近 f。 □

定义 1.2.1. *E 上的可测函数族 $\mathcal{F}$ 称为紧密的，如果存在一有限测度集 E_0 使其全体在其外的积分一致任意小。*

定理 1.2.1 (Vitali 收敛定理)**.** *若 E 上一致可积且紧密的 $\{f_n\}$ 几乎处处逐点收敛于 f，则*

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n = \int f.$$

证明. 选取 E_0 使其外的积分任意小，其内的积分调用前开 Vitali 定理。 □

推论 1.2.1. *E 上几乎处处收敛于零的非负可测函数列 $\{h_n\}$，当且仅当其一致可积且紧密时有*

$$\lim_{n\to\infty}\int h_n = 0.$$

1.2.2　依测度收敛

定义 1.2.2. E 上几乎处处有限的可测函数列 $\{f_n\}$ 称为依测度收敛于可测的 f，如果对任意 η，

$$\lim_{n\to\infty} m\{x \mid |f_n(x) - f(x)| > \eta\} = 0.$$

命题 1.2.2. 有限测度 E 上的逐点收敛是一致收敛。

证明. 由 Egoroff 定理选取逼近 E 的闭集上的一致收敛即可。 □

例 1.2.2. 考虑下述诸区间上的特征函数，虽依测度收敛却非逐点收敛。

$$[0,1], [0,1/2], [1/2,1], [0,1/3], [1/3,2/3], [2/3,1], [0,1/4] \cdots.$$

定理 1.2.2 (Riesz)**.** 依测度收敛的函数列存在几乎处处逐点收敛的子列。

证明. 由依测度收敛知存在子列使 $m(|f_{n_k} - f| > 1/k) < 1/2^k$，再由 Borel-Cantelli 引理知几乎每个 x 都收敛于 f。 □

推论 1.2.2. 非负可积函数列 $\{f_n\}$ 满足

$$\lim_{n\to\infty} \int f = 0$$

当且仅当其依测度收敛于零且一致可积且紧密。

证明. 由前开推论与 Chebyshev 不等式知其依测度收敛。

反之，假设积分不收敛于零，则存在一子列之积分漂浮于一实数之上，此子列存在一几乎处处逐点收敛之子列，由 Vitali 定理知矛盾。 □

1.2.3　Riemann 与 Lebesgue 可积性的特征

引理 1.2.1. 设 $\{\varphi_n\}$ 与 $\{\psi_n\}$ 分别为可积函数的升列与降列且夹挤 f，若

$$\lim_{n\to\infty} \int [\psi_n - \varphi_n] = 0,$$

则 $\{\varphi_n\}$ 与 $\{\psi_n\}$ 几乎处处逐点收敛于 f 且 f 可积且三者积分相等。

证明. 由单调收敛定理，$\int (\psi - \varphi) \to 0$。由命题1.1.5知其几乎处处为零，从而几乎处处逐点收敛于 f，进而其可测。三积分相等易证。 □

定理 1.2.3. 有限测度集上的有界 f，其可积当且仅当其可测。

证明. 若假设可测，由定理1.1.2知可积。

若已知可积，则由定义知存在 f 的上下简单函数逼近且积分差为零，取诸 $\max\{\varphi_i\}$ 与 $\min\{\psi_i\}$ 可设其分别为升降列，再调用前开引理。 □

定理 1.2.4 (Lebesgue)**.** *紧区间上的有界函数 f 为 Riemann 可积当且仅当其非连续点为零测集。*

证明. 假定 Riemann 可积，则存在一列加细的划分 $\{P_n\}$，对应上下逼近 $\{\varphi_n\}$ 与 $\{\psi_n\}$ 且由前开引理几乎处处收敛于 f。在除开 P_∞ 的点处，对 ϵ 取足够大的 N 即可使此处 $\psi_n - \varphi_n < \epsilon$，从而此点的 δ 邻域内变差任意小。

反之，假定 f 不连续点为零测集。对加细至稠密的划分列 P_n 以及 P_∞ 及不连续点以外的点，选取足够的大 n 使 P_n 的间隙小于 δ，则 f 在诸间隙内的变差小 ϵ，故上下逼近可互相接近而积分相等。 □

1.3　微分与积分

1.3.1　单调函数的连续性

定理 1.3.1. *单调函数最多仅有可数个不连续点。*

命题 1.3.1. *对开区间内的可数集，存在增函数仅在此可数集上不连续。*

证明. 取 f 如下，在任意 $E - C$ 的点有足够小的开区间不包含 $q_1, \cdots, q_n$。

$$f(x) = \sum_{q_n \leq x} 1/2^n.$$ □

1.3.2　单调函数的可微性

定义 1.3.1. *非退化紧区间集 $\mathscr{F}$ 称为 E 的 Vitali 覆盖，如果对于任意点 x 和 $\epsilon > 0$，存在长度小于 ϵ 的区间覆盖 x。*

引理 1.3.1 (Vitali 覆盖引理)**.** *设 E 为有限外测度集，$\mathscr{F}$ 是其 Vitali 覆盖，则其无交有限子集任意可接近 E。*

证明. 若存在有限子集覆盖之则证毕。反之，依”在剩余无交区间内选取区间长度过半者”之程式选取”下一区间”而得无交可数族，则任意有限子集外的区间与可数族内一区间有交。将后者扩大 5 倍即可覆盖之。故其有限子集外者扩大 5 倍后便可覆盖 E。 □

定义 1.3.2. 定义上导数

$$\overline{\mathbf{D}} f(x) = \lim_{h \to 0} \left[\sup_{0<|t|\leq h} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \right].$$

相似定义下导数。若二者相等则称可导。

引理 1.3.2. 设 f 为紧区间上的增函数，则对任意正数 α，

$$m^* \left(\overline{\mathbf{D}} f \geq \alpha \right) \leq \frac{1}{\alpha} [f(b) - f(a)].$$

特别地，$m^* \left(\overline{\mathbf{D}} f = \infty \right) = 0$。

证明. 注意诸 $\Delta f \geq \alpha^- (d-c)$ 的区间 $[c,d]$ 构成其 Vitali 覆盖。 □

定理 1.3.2 (Lebesgue)**.** 开区间上的单调函数几乎处处可导。

证明. 设 E 中上导数大于 α 而下导数小于 β，则诸 $\Delta f \leq \beta (d-c)$ 的 $[c,d]$ 构成 E 的 Vitali 覆盖。$\sum^n \Delta f \leq \beta m^*(E)$。再由前开引理，

$$m^*(E) \leq \frac{1}{\alpha} \sum^n \Delta f.$$ □

定义 1.3.3. 紧区间上的可积函数 f，两侧水平延伸其值，对正数 h 定义差分与平均分别为

$$\mathrm{Diff}_h f(x) = \frac{f(x+h) - f(h)}{h}, \quad \mathrm{Av}_h f(x) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f.$$

推论 1.3.1. 紧区间上的增函数，其导数可积且

$$\int f' \leq f(b) - f(a).$$

证明. 由 Fatou 引理，

$$\int f' \leq \liminf \int \mathrm{Diff}\, f.$$ □

参考 Cantor-Lebesgue 函数知等号可严格成立。

1.3.3　有界变差函数：Jordan 定理

定义 1.3.4. 定义变差为

$$V(f, P) = \sum |\Delta f|,$$

全变差为 $TV = \sup V$。若全变差有界，则称之有界变差。

例 1.3.1. 增函数，*Lipschitz*-1 的函数是有界变差的。$x\cos(\pi/2x)$ 则不是。

引理 1.3.3. 有界变差函数可以写为如下二增函数之差：

$$f(x)=[f(x)+TV(x)]-TV(x). \tag{1.1}$$

定理 1.3.3 (Jordan)**.** 紧区间上的函数有界变差当且仅当其为增函数之差。

证明. $f=g-h$ 称为其 Jordan 分解，只需注意

$$V(f,P)=\sum|\Delta f|\leq\sum|\Delta g|+\sum|\Delta h|.$$

□

推论 1.3.2. 紧区间上的有界变差函数几乎处处可微且导数可积。

1.3.4 绝对连续函数

定义 1.3.5. 对任意 $\epsilon>0$，存在 $\delta>0$ 使 $\sum(b_k-a_k)$ 之一切区间族上 $\sum|\Delta f|<\epsilon$，则称 f 绝对连续。

例 1.3.2. *Cantor-Lebesgue* 函数虽连续却非绝对连续。

命题 1.3.2. *Lipschitz*-1 的函数绝对连续。

定理 1.3.4. 紧区间上的绝对连续函数可写为绝对连续的增函数之差。

证明. 注意绝对连续的 f 的全变差为绝对连续即可。 □

定理 1.3.5. 紧区间上的连续函数绝对连续当且仅当 $(0,1]$ 的差分一致可积。

证明. 设其差分一致可积，注意 $\Delta\mathrm{Av}_h f=\int\mathrm{Diff}_h f$ 以及 $\lim\mathrm{Av}_h f=f$。

反之只证 f 为非负绝对连续增函数的情形，注意只需证" 任意小的区间集上的积分任意小" 即可，再藉 $\int\mathrm{Diff}_h f=1/h\cdot\int[f(u+t)-f(v+t)]$。 □

可以发现如下的包含关系

$$\mathcal{F}_{Lip}\subset\mathcal{F}_{AC}\subset\mathcal{F}_{BV}.$$

且各族内的函数都可以如(1.1)写成族内二增函数之差。

1.3.5　积分下的微分

定理 1.3.6. 紧区间上的绝对连续函数几乎处处可微且

$$\int_a^b f' = f(b) - f(a).$$

证明. 注意

$$\lim_{h\to 0}\int_a^b \mathrm{Diff}_h f = \lim_{h\to 0}\left[\mathrm{Av}_h f(b) - \mathrm{Av}_h f(a)\right].$$

右侧为所求，左侧由定理1.3.5知一致可积后调用 Vitali 定理。 □

定理 1.3.7. 紧区间上的函数一致连续当且仅当其为一不定积分。

证明. 假设 $f = \int g$，注意由命题1.1.12，小测度上 g 的积分可任意小。 □

推论 1.3.3. 紧区间上单调的 f 为绝对连续当且仅当

$$\int_a^b f' = f(b) - f(a).$$

证明. 由推论1.3.1，

$$\int_a^x f' \le f(x) - f(a), \quad \int_x^b f' \le f(b) - f(x).$$

故二者均为相等，从而 $f = \int f'$。 □

引理 1.3.4. 紧区间上的 f 几乎处处为零当且仅当任意区间上积分为零。

证明. 注意任意区间上积分为零得出任意 G_δ 型集上积分为零即可。 □

定理 1.3.8. 紧区间上的可积函数几乎处处有

$$\mathbf{D}\int_a^x f = f(x).$$

证明. 借助前开命题，注意对任意 $[x_1, x_2]$，有

$$\int_{x_1}^{x_2} [F' - f] = F(x_2) - F(x_1) - \int_{x_1}^{x_2} f = 0.$$ □

并非所有函数解有定理1.3.6的适用。借助前开命题，考虑下述的分解

$$f = \left(f - \int f'\right) + \int f',$$

前者导数几乎处处为零，后者为一绝对连续函数，此谓其 Lebesgue 分解。

1.3.6 凸函数

定义 1.3.6. 满足下式者谓凸函数，其中 $a+b=1$。

$$\varphi(ax_1+bx_2) \leq a\varphi(x_1)+b\varphi(x_2).$$

在上式中令

$$a=\frac{x_2-x}{x_2-x_1}, \quad b=\frac{x-x_1}{x_2-x_1},$$

可得对于任意 $x_1<x<x_2$，

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(x_1)}{x-x_1} \leq \frac{\varphi(x_2)-\varphi(x)}{x_2-x}.$$

命题 1.3.3. 若 φ 可微而 φ' 为增函数，则 φ 为凸函数。

引理 1.3.5 (弦斜率)**.** 凸函数上顺次三点 p_1，p，p_2，有 $k_{p_1p}<k_{p_1p_2}<k_{pp_2}$。

引理 1.3.6. 凸函数 φ 各点左右导数存在，且若 $u<v$ 则

$$\varphi'\left(u^-\right) \leq \varphi'\left(u^+\right) \leq \frac{\varphi(v)-\varphi(u)}{v-u} \leq \varphi'\left(v^-\right) \leq \varphi'\left(u^+\right).$$

推论 1.3.4. 开区间上的凸函数是 *Lipschitz* 的，在任意紧区间上绝对连续。

定理 1.3.9. 凸函数几乎处处可导且导函数为增函数。

定理 1.3.10 (Jensen 不等式)**.** 对凸函数 φ 与可积函数 f，设 $\varphi\circ f$ 可积，有

$$\varphi\left(\int_0^1 f\right) \leq \int_0^1 \varphi\circ f.$$

证明. 令 $\alpha=\int f$，则

$$\int_0^1 \varphi\circ f \geq \int_0^1 \left[m(f-\alpha)+\varphi(\alpha)\right]=\varphi(\alpha). \qquad \square$$

将上开不等式用于加和为 1 的诸 α_n，

$$\sum \alpha_n \log x_n \leq \log \sum \alpha_n x_n$$

可得算术-几何不等式。