数学分析，实分析与复分析笔记

C.Z.

2018 年 8 月 14 日

目录

补足

ZF 集合论公理以及映射的定义仍待加入。《陶哲轩实分析》有对 ZF 公理的完善陈述，可供援用。

自然数的集构造也有待加入。

第一章　普通集合论

1.1　集与势

1.1.1　自然数公理及其运算

公理 1.1.1.

$$0 \in \mathbb{N}.$$

公理 1.1.2. 若 $n \in \mathbb{N}$，则

$$n++ \in \mathbb{N}.$$

并且作如下定义：

定义 1.1.1.

$$1 := 0++, \quad 2 := 1++, \quad 3 := 2++\cdots.$$

然而这并不完备，因为完全可以定义 $3++ = 0$ 从而令之回环。为此，制定第三条公理。

公理 1.1.3. 0 不是任何自然数的后继。

尽管如此，仍然可以定义 $4++ = 4$ 或 $4++ = 4$。诸多解决方法之一为如下第四条。

公理 1.1.4. 后继相同的自然数相等。

为了保证除了 $0, 1, 2, 3, 4\cdots$ 外没有其他杂质，复制定第五条。

公理 1.1.5 (数学归纳法)**.** 若 $P(0)$ 为真，且 $P(n)$ 为真推出 $P(n++)$ 为真，则对于任意 $n \in \mathbb{N}$，$P(n)$ 为真。

$\mathbb{N}$ 的存在性视为一公理。

加法

定义 1.1.2. 定义操作 $+$ 为 $0+m=0$，$(n++)+m=(n+m)++$。

引理 1.1.1. 对于任意自然数 n，$n+0=n$。

证明. 由 $0+0=0$ 开始，归纳可得。 □

引理 1.1.2. $n+(m++)=(n+m)++$。

证明. 先由 $0+(m++)=(0+m)++$ 开始，对 n 归纳。 □

可直接推知 $n++=n+1$。

命题 1.1.1.

$$n+m=m+n.$$

证明. 先由 $0+m=m+0$，后借助前一命题对 n 归纳. □

命题 1.1.2.

$$(a+b)+c=a+(b+c).$$

证明. 先由 $(a+b)+0=a+(b+0)$，后对 c 归纳可得。 □

命题 1.1.3. 若 $a+b=a+c$，则 $b=c$。

证明. 从 $0+b=0+c$ 开始，对 a 归纳可得。 □

定义 1.1.3. 非零自然数为正。

命题 1.1.4. 若 a 为正而 b 为自然数，则 $a+b$ 为正。

证明. 从 $b=0$ 开始归纳可得。 □

推论 1.1.1. 若自然数 a 和 b 满足 $a+b=0$ 则 $a=b=0$。

命题 1.1.5. 正数存在前置元素。

证明. 归纳可证，注意在 P 中排除 0。 □

定义 1.1.4 (自然数的序)**.** 若存在 a，使 $n=m+a$，则称 $n\geq m$。若 $m\neq n$，则称 $n>m$。

命题 1.1.6. (a) $a\geq a$.

(b) 若 $a \geq b$ 且 $b \geq c$，则 $a \geq c$。

(c) 若 $a \geq b$ 且 $b \geq a$，则 $a = b$。

(d) $a \geq b$ 当且仅当 $a + c \geq b + c$。

(e) $a < b$ 当且仅当 $a{+}{+} \leq b$。

(f) $a < b$ 当且仅当存在正数 d，$b = a + d$。

命题 1.1.7. 下列三个命题中有且仅有一成立：

$$a < b, \quad a = b, \quad a > b.$$

证明. 互斥是显然的。下证必有一成立，故成立全序。先设 $a = 0$，后对 a 归纳可得（归纳时可对 a 分类）。 □

命题 1.1.8 (强归纳原理)**.** 若对于任意 $m \geq m_0$ 有如下蕴含关系：任意 $m_0 \leq m' < m$ 有 $P(m')$ 推出 $P(m)$，则 P 对一切 $m \geq m_0$ 成立。

乘法

定义 1.1.5. 定义操作 $\times$ 为 $0 \times m = 0$，$(n{+}{+}) \times m = n \times m + n$。

引理 1.1.3.

$$n \times m = m \times n.$$

引理 1.1.4. 若 $n \times m = 0$，则 n 与 m 中至少一者为 0。且正数相乘为正。

命题 1.1.9.

$$a\,(b + c) = ab + ac.$$

证明. 先证 $a\,(b + 0) = ab + a \times 0$，后对 c 归纳。 □

命题 1.1.10.

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)\,.$$

命题 1.1.11. 若 $a < b$ 且 c 为正数，则 $ac < bc$。

证明. 在 $b = a + d$ 两侧用 c 乘。 □

命题 1.1.12. 若 $ac = bc$ 且 c 不为 0，则 $a = b$。

证明. $a < b$, $a = b$ 与 $a > b$ 有且仅有一成立，两侧乘 c 知必定为 $a = b$。 □

命题 1.1.13. 对自然数 n 与正数 q，存在 $0 \leq r < q$ 满足 $n = mq + r$。

证明. 对于任意 q，命题对 $n = 0$ 成立，后对 n 归纳。 □

定义 1.1.6. 定义幂运算如下：$m^0 = 1$，$m^{n++} = m^n \times m$。

1.1.2　集公理及其运算

定义 1.1.7. 若 A 的所有元素都是 B 的元素，则称 A 为 B 的子集，B 为 A 的超集。记作

$$A \subset B \quad \text{或} \quad B \supset A.$$

定义 1.1.8. 若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$，则称 A 与 B 相等，记作

$$A = B.$$

定义 1.1.9. 若 S 包含 A 与 B 中的所有元素又不包含其他元素，称 S 为 A 与 B 的并集，记作

$$S = A \cup B.$$

定义 1.1.10. 若 S 包含 A 与 B 的所有共同元素又不包含其他元素，称 S 为 A 与 B 的交集，记作

$$S = A \cap B.$$

定义 1.1.11. 若 S 包含属于 A 且不属于 B 的一切元素又不包含其它元素，称 S 为 A 与 B 的差集，记作

$$S = A - B \quad \text{或} \quad S = \complement_A B.$$

定理 1.1.1.

$$A \cap \left(\bigcup S_i \right) = \bigcup \left(A \cap S_i \right),$$

$$A \cup \left(\bigcap S_i \right) = \bigcap \left(A \cup S_i \right),$$

$$A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C),$$

$$A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C).$$

后二条称为 *DeMorgan* 律，即并的补等于补的交，交的补等于补的并。

Cartesian 乘积

定义 1.1.12. $X_1, \cdots, X_n$ 的 *Cartesian* 乘积定义为所有 n 元组

$$(x_1, \cdots, x_n)$$

的集合。

引理 1.1.5 (有限选择)**.** 若有限诸个 X_i 非空，则 ΠX_i 非空。

证明. 对 n 归纳即可。 □

1.1.3　映射

定义 1.1.13. 集合 A 中的一个等价关系，是满足左列三条件的一关系 C:

1. (自反性) 对任意 x，有 xCx;
2. (对称性) 若 xCy，则 yCx;
3. (传递性) 若 xCy，yCz，则 xCz。

不是等价关系的关系，如近似同向，即二向量之间夹角为锐角。

定义 1.1.14. 与 x 等价的所有元素为 x 的等价类。

定义 1.1.15. 若存在法则 φ，使得 A 的任意元素存在 B 的唯一元素与之对应，B 的任意元素存在 A 的唯一元素与之对应，则称 φ 建立了 A 与 B 的一一对应。

定义 1.1.16. 若 A 与 B 见能建立一一对应，则称 A 与 B 对等，或 A 与 B 具有相同基数，记作

$$A \sim B.$$

A 的基数记作

$$\#(A).$$

值得注意的是，两个不等大小的圆、两条不同长度的线段、以及自然数全体与偶数之间，都可以轻易建立起一一对应。

定理 1.1.2. 对等是等价关系。

定理 1.1.3. 无交对等集的并仍然对等，即若

$$A_n \cap A_{n'} = \varnothing, \quad B_n \cap B_{n'} = \varnothing \quad (n \neq n'),$$

且

$$A_n \sim B_n,$$

则

$$\bigcup A_n \sim \bigcup B_n.$$

有限集

定义 1.1.17. 若集合 A 与 $(1, \cdots, n)$ 对等，称集合具有基数 n 且为有限集。

命题 1.1.14. 有限集的基数唯一。

证明. 对基数作归纳即可。注意到可证集合挖去一元素后基数为其前置数。 □

1.1.4　可数集

定义 1.1.18. 与 $\mathbb{N}$ 对等的集合称为可数集，或者称为可数的。

定理 1.1.4. A 为可数的当且仅当可以编号 A 的元素使得

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots\}.$$

定理 1.1.5. 无穷集 A 必含有可数子集.

证明. 每次取一元素并编号，取之不尽。 □

定理 1.1.6. 可数集的任何无穷子集皆可数，

证明. 将 A 的元素一一编号列出，逐个检查，遇到子集 B 的元素即自增计数器。 □

定理 1.1.7.

$$n + \aleph_0 \sim \aleph_0.$$

证明. 先列出有限集的元素，后列出可数集的元素，重新编号即可。 □

定理 1.1.8.

$$n \cdot \aleph_0 \sim \aleph_0.$$

证明. 逐个列出各集的第一个元素，后列出各集第二个元素，以此类推，重新编号即可。 □

定理 1.1.9.

$$\aleph_0 \cdot n \sim \aleph_0.$$

证明. 先写出第一个集合的所有元素，后写出第二个集合的所有元素，以此类推，重新编号即可。 □

定理 1.1.10.

$$\aleph_0 \cdot \aleph_0 \sim \aleph_0.$$

证明.

$$\begin{aligned} A_1 &= \left\{a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, a_3^{(1)}, \cdots\right\}, \\ A_2 &= \left\{a_1^{(2)}, a_2^{(2)}, a_3^{(2)}, \cdots\right\}, \\ A_3 &= \left\{a_1^{(3)}, a_2^{(3)}, a_3^{(3)}, \cdots\right\}, \\ &\cdots \end{aligned}$$

沿着反对角线列出各个元素，即

$$S = \left\{a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, a_1^{(2)}, a_3^{(1)}, a_2^{(2)}, a_1^{(3)}, a_4^{(1)}, \cdots\right\},$$

可知 S 可数。 □

定理 1.1.11. $\mathbb{Q}$ 为可数集。

证明. 将 $\mathbb{Q}$ 写为 $\mathbb{N}^2$ 去掉可约者，去掉前集合可数，去掉后由定理1.1.6知仍然可数。 □

推论 1.1.2. 任意区间内的 $\mathbb{Q}$ 可数。

证明. 仍然借助定理1.1.6。 □

定理 1.1.12. 无穷集 M 与可数集或有限集 A 的并，其势仍然不变。

证明. M 含有一可数集 D，此可数集与 $D \cup A$ 可一一对应，故 M 的势不变。 □

定理 1.1.13. 不可数集 M 除去一有限或可数子集 A，仍有

$$M - A \sim M.$$

证明. M 去除后仍为无限集，因此据上一定理，有 $(M-A) \cup A \sim M - A$。 □

推论 1.1.3. 无穷集包含与自身对等的一子集。

此时发现一有限集不可能具有的性质，故有如下归功于 R. Dedekind 的定义。

定义 1.1.19. 包含与自身对等的真子集的集合称为无穷集。

定理 1.1.14.

$$\aleph_0^n \sim \aleph_0.$$

证明. 数学归纳法结合定理1.1.10可证。 □

推论 1.1.4. 代数数全体为可数集。

1.1.5　连续统的势

此处仅暂时借用实数的定义。其具体定义留待下文。

定理 1.1.15. 线段 $U = [0, 1]$ 不可数。

证明. 可以参考定理2.2.22。

三等分区间，存在一不包含 x_1 的闭区间。将其再度三等分，存在一不包含 x_2 的闭区间，以此类推。故存在闭区间套，其交在 x_n 之外。 □

定义 1.1.20. 若 A 与 $[0, 1]$ 对等，则称 A 具有连续统的势 $\aleph$。

定理 1.1.16. $[a, b]$，$(a, b]$，$[a, b)$ 与 (a, b) 的势均为 $\aleph$。

证明. 只需注意无穷集挖去有限集后与原来的无穷集对等。 □

定理 1.1.17.

$$n\aleph \sim \aleph.$$

定理 1.1.18.

$$\aleph_0\aleph \sim \aleph.$$

证明. 取 $[0,0.9)\,,[0.9,0.99)\,,[0.99,0.999)\,,\cdots$ 分别映射即可。 □

推论 1.1.5. $\mathbb{R}$ 的势为 $\aleph$。

推论 1.1.6. $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ 的势为 $\aleph$。

推论 1.1.7. 超越数的势为 $\aleph$。

定理 1.1.19. 正整数列全体的势为 $\aleph$。

证明. 直接注意将正整数列写成相应连分数可以与无理数一一对应。亦可以将数列中的正整数看作二进制小数的零位索引差而获得此对应。 □

定理 1.1.20.

$$\aleph^n \sim \aleph.$$

证明. 第一个 $\aleph$ 与正整数列全体 $\{a_n\}$ 对应，第二个与 $\{b_n\}$ 对应，则

$$(a_1, b_1, a_2, b_2, \cdots)$$

与 $\aleph^2$ 一一对应。对于一般的 $\aleph^n$，上述论证仍然适用。 □

推论 1.1.8. $\mathbb{R}^2 \sim \aleph.$

推论 1.1.9. $\mathbb{R}^2 \sim \aleph.$

推论 1.1.10.

$$\aleph\cdot\aleph \sim \aleph.$$

定理 1.1.21.

$$\aleph^{\aleph_0} \sim \aleph.$$

证明. 第一个 $\aleph$ 与正整数列全体 $\{a_n\}$ 对应，第二个与 $\{b_n\}$ 对应，以此类推。最终将可数个正整数列的直积按照与定理1.1.10相同的办法映射为整数列全体。 □

定理 1.1.22.

$$\mathrm{bool}^{\aleph_0} \sim \aleph.$$

证明. 注意 bool 序列与二进制小数序列的对应即可。 □

推论 1.1.11. 若 $A \sim 2$，则

$$A^{\aleph_0} \sim \aleph.$$

1.1.6　势的比较

定义 1.1.21. 若两个集合对等，则称其具有相同的势。予每个对等的等价类一记号，称此记号为等价类中任一集合的势。

定义 1.1.22. 若 A 与 B 不对等，且 B 有子集与 A 对等，称 A 的势小于 B 的势。

定理 1.1.23. $[0,1]$ 上的所有实函数的集合的势大于 $\aleph_1$。

证明. 设 t 对应 $F(t,x)$，则 $G(x) = F(x,x)+1$ 不在任意一个 t 的值域内。 □

定义 1.1.23. 称 $[0,1]$ 上的所有实函数的集合的势为 $\aleph_2$。

定理 1.1.24. 集合与其子集族不对等。

证明. 假设 x 映射为 $\mathcal{X}$，则将所有 $x \notin \mathcal{X}$ 的 x 并起来得到 $\mathcal{Y}$，并设元素 y 映射到这个集合。若 $y \in \mathcal{Y}$，则 y 不满足条件而应被除名。若 $y \notin \mathcal{Y}$，则 y 满足条件而应该处在集合内。 □

定义 1.1.24. 若 M 的势为 μ，则 M 的子集族的势为 2^μ。

定理 1.1.25.

$$\aleph_1 = 2^{\aleph_0}.$$

证明. 这正是推论1.1.11。 □

定理 1.1.26. 设 $A_0 \supset A_1 \supset A_2$，若 $A_2 \sim A_0$，则 $A_1 \sim A_0$。

证明. 假设 φ 为 A_0 到 A_2 的一一对应，则可设 $\varphi(A_1) = A_3$，且 $A_3 \subset A_2$。由于是同一映射，故

$$A_0 - A_1 \sim A_2 - A_3.$$

此时 $A_2 \subset A_1$ 且 $A_1 \sim A_3$，故可设一一对应为 ψ，如法炮制 $\psi(A_2) = A_4$，又有

$$A_1 - A_2 \sim A_3 - A_4.$$

可以此类推，并设 $A_\infty = D$，即

$$\bigcap A_i = D.$$

又

$$A = (A_0 - A_1) + (A_1 - A_2) + (A_2 - A_3) + (A_3 - A_4) + \cdots + D,$$
$$A_1 = (A_1 - A_2) + (A_2 - A_3) + (A_3 - A_4) + (A_4 - A_5) + \cdots + D.$$

左上与右下对等，右上与左下相同，故 A 与 A_1 对等。 □

定理 1.1.27 (E. Schröder–F. Bernstein)**.** 设 A 与 B 彼此与对方一子集对等，则彼此对等。

证明. 设

$$\varphi(A) = B^*, \qquad \psi(B) = A^*.$$

则

$$\psi\varphi(A) = \psi(B^*) = A^{**},$$

即 A 与 A^{**} 对等。由上一定理，A 与 A^* 对等，故与 B 对等。 □

推论 1.1.12. 势之间大于、等于、小于择一成立。

证明. 若同时大于且小于，则由势的大于小于的定义可得上一定理的题设，故两势相等。 □

推论 1.1.13. 势的小于具有传递性。

证明. 把仲叔通过 φ 和 ψ 映射到伯，得到伯下二嵌套子集。若伯叔对等，则仲亦然矣。 □

定理 1.1.28. $[0,1]$ 上连续函数集的势为 $\aleph_1$。

证明. 注意连续函数仅仅取决于 $\mathbb{Q}$ 处的值。 □

1.2　数系

1.2.1　序关系

定义 1.2.1. 关系 C 称为全序关系，若满足

1. 对任意 $x \neq y$ 的 x 和 y，xCy 与 yCx 二者有一成立；
2. 不存在 xCx；

3. 若 xCy，yCz，则 xCz。

定义 1.2.2. 对于 $a<b$，称

$$\{x \mid a<x<b\}$$

为开区间。若其为空集，则称 b 为 a 的紧接后元。

前述自然数已被赋予一全序关系，$n++$ 为 n 的紧接后元。

定义 1.2.3. 对于 *Castesian* 乘积 $A\times B$，可定义字典序关系：当 $a_1<b_1$ 且 $a_2<b_2$，有

$$a_1\times b_1<a_2\times b_2.$$

可证其为一全序关系。

定义 1.2.4. 若 A 具有全序关系 $<$，若对于任意 $x\in A$ 有 $x\leq b$，则 b 为最大元。类似定义最小元。

定义 1.2.5. A 的子集 A_0 是有上界的，如果存在 b 使对任意 $a_0\in A_0$ 有 $a_0\leq b$。若所有上界的集合存在最小元，则称之上确界。类似定义下界与下确界。

定义 1.2.6. 若 A 的任意有上界的非空子集 A_0 均有上确界，则称 A 具有上确界性质。类似定义下确界性质。

定理 1.2.1. 集合 A 具有上确界性质当且仅当其具有下确界性质。

证明. 假设集合 A 具有上确界性质且 A_0 为有下界的一非空子集，则其所有下界的集合 B_0 存在一上确界。设 B_0 的所有上界集合为 C_0，则上确界性质表明存在 c_0 为所有下界的所有上界的最小元，即 C_0 存在最小元 c_0。

如果存在一个元素 $a_0\leq c_0$，则必有 $c_0=a_0$，否则 a_0 可替换 c_0 的位置。故对于任意 a_0，有 $c_0\leq a_0$（全序的二择一成立）。因此 $c_0\in B_0$。

而 A_0 的下确界定义为所有下界的最大元，即 B_0 的最大元。可以证明 c_0 为其最大元。否则 c_0 不能为上界。 □

1.2.2　整数

定义 1.2.7. 整数是形如 $a-b$ 的表达式，且视 $a-b=c-d$ 当且仅当 $a+d=b+c$。

此处利用等价关系将 $\mathbb{Z}$ 视为 $\mathbb{N}^2$ 的商构造，需要验证等价关系的自反性，对称性和传递性。前而者显然，传递性要求在

$$a-b=c-d,\quad a+d=b+c,$$
$$c-d=e-f,\quad c+f=d+e$$

的假设下证明
$$a+f=b+e.$$
将两式相加并消去即可。

定义 1.2.8. 整数的和定义为

$$(a-b)+(c-d)=(a+c)-(b+d)\,.$$

定义 1.2.9. 整数的积定义为

$$(a-b)\times(c-d)=(ac+bd)-(ad+bc)\,.$$

定理 1.2.2. 上述二定义在等价类内相容，即结果与代表元的选取无关。

证明. 只证乘法的部分。设 $a-b=a'-b'$，即

$$a+b'=a'+b.$$

便需要证
$$ac+bd+a'd+b'c=a'c+b'd+ad+bc.$$
合并有
$$c\,(a+b')+d\,(a'+b)=c\,(a'+b)+d\,(a+b')\,.$$
由假设知成立。 □

可以将 $n-0$ 与自然数 n 对应，从而保持上述加法与乘法的结构，此之谓同构。

定义 1.2.10. 定义 $(a-b)$ 的负为 $(b-a)$，记作 $-(a-b)$。

同样容易证明其于等价类内相容。

定义 1.2.11. 定义负数为正自然数所对应整数的负。

定理 1.2.3 (三歧性（trichofomy）)**.** 任意整数成立如下三个命题之一：

(a) x 为零;

(b) x 对应正的自然数;

(c) x 对一个正自然数的负。

证明. 对 $x=a-b$ 中 a 和 b 的大小关系分类即可。

为了证明三者中仅有一成立，分若干类讨论。当 x 为零时显然不能为正自然数。若其为负自然数则对一正的 n，有 $0-0=0-n$，从而 $n=0$，矛盾。若同时为正负则相似可证矛盾。 □

事实上也可以通过假定三歧性来定义整数，这是大陆教科书的做法，导致了运算验证上的极大混乱。

命题 1.2.1. 对于整数，有

(a) $x+y=y+x$;

(b) $(x+y)+z=x+(y+z)$;

(c) $x+0=0+x=x$;

(d) $x+(-x)=(-x)+x=0$;

(e) $xy=yx$;

(f) $(xy)\,z=x\,(yz)$;

(g) $x1=1x=x$;

(h) $x\,(y+z)=xy+xz$;

(i) $(y+z)\,x=yx+zy$。

证明. 设 $x=a-b$ 后完全展开消去即可。 □

这一定理表明整数构成以交换环。

定义 1.2.12. 定义整数的减法为 $a-b=a+(-b)$。

对于等价类相容的检验，可以略去，因为减法直接借助了经过验证的加法与取负的定义。也容易验证对于自然数的 a 和 b，等价类 $a-b$ 与差 $a-b=(a-0)+(0-b)$ 相同。此外，还易证一个数减去它自身将得到零。

命题 1.2.2.

$$(-1) \times a = -a.$$

命题 1.2.3. 若整数 $ab = 0$，则 $a = 0$ 或 $b = 0$。

证明. 借助上一命题，在两侧乘 -1 将 a 与 b 均强制转化为正数后调用引理1.1.4。 □

推论 1.2.1. 若 $ac = bc$ 且 $c \neq 0$，则 $a = b$。

证明. 即 $(a-b)\,c = 0$。 □

引理 1.2.1 (整数的序)**.** (a) $a > b$ 当且仅当 $a - b$ 为正;

(b) 若 $a > b$ 则 $a + c > b + c$;

(c) 若 $a > b$ 且 c 为正，则 $ac > bc$;

(d) 若 $a > b$ 则 $-a < -b$;

(e) 若 $a > b$ 且 $b > c$，则 $a > c$;

(f) $a > b$，$b > a$，$a = b$ 有且仅有一成立。

证明. 借助命题1.2.1易得。最后一条可借助 $a - b$ 的正负三歧性。 □

1.2.3　有理数

定义 1.2.13. 有理数是形如 a/b 的表达式，其中 a 和 b 为整数且 $b \neq 0$。两个有理数相等当且仅当 $ad = bc$。

定义 1.2.14. 有理数的和定义为

$$(a/b) + (c/d) = (ad + bc)\,/\,(bd)\,.$$

定义 1.2.15. 有理数的积定义为

$$(a/b) \times (c/d) = (ac)\,/\,(bd)\,.$$

定义 1.2.16. 有理数的负定义为

$$-\,(a/b) = (-a)\,/b.$$

定理 1.2.4. 上述三定义在等价类内相容。

证明. 只证加法的部分，设 $ab' = a'b$，需证

$$(ad + bc)(b'd) = (a'd + b'c)(bd).$$

展开有

$$adb'd + bcb'd = a'dbd + b'cbd.$$

由假设知成立。 □

注意到 $a/1$ 与整数 a 可同构。

定义 1.2.17. 有理数的倒数定义为

$$(a/b)^{-1} = (b/a).$$

容易验证，倒数也是等价类相容的。

定理 1.2.5. 对于有理数，有

(a) $x + y = y + x$;

(b) $(x + y) + z = x + (y + z)$;

(c) $x + 0 = 0 + x = x$;

(d) $x + (-x) = (-x) + x = 0$;

(e) $xy = yx$;

(f) $(xy)z = x(yz)$;

(g) $x1 = 1x = x$;

(h) $x(y + z) = xy + xz$;

(i) $(y + z)x = yx + zy$。

证明. 同样设 $x = a/b$ 完全展开后消去。 □

定义 1.2.18. 定义有理数的商

$$x/y = x \times y^{-1}.$$

定义 1.2.19. 一个有理数 x 称为正数，如果对于某两个正整数 a 和 b 有 $x = a/b$。称其为负数，如果它是一个正数的负。

定理 1.2.6 (三歧性（trichofomy）)**.** 任意有理数成立如下三个命题之一：

(a) x 为零；

(b) x 是正的有理数；

(c) x 是负的有理数。

证明. 对 $x = a/b$ 中 a 和 b 的正负分类即可。

为了证明三者中仅有一成立，分若干类讨论。当 x 为零时可证其非正且非负。若 x 同时为正负，则展开后借助整数的三歧性可得矛盾。 □

定义 1.2.20. $x > y$ 当且仅当 $x - y$ 是正的有理数，$x < y$ 当且仅当 $x - y$ 是负的。

定理 1.2.7. 设 x，y，z 均为有理数，则

(a) $x = y$，$x > y$ 与 $x < y$ 有且仅有一成立；

(b) $x < y$ 当且仅当 $y > x$；

(c) 若 $x < y$，$y < z$，则 $x < z$；

(d) 若 $x < z$，则 $x + z < y + z$；

(e) 若 $x < y$ 且 z 为正，则 $xz < yz$。

1.2.4　实数

1.2.5　实数的 Dedekind 构造

1.2.6　实数作为有理数的 Cauchy 序列

1.3　逻辑

1.3.1　归纳定义原理

1.3.2　无限集与选择公理

1.3.3　良序集

1.3.4　极大原理

1.3.5　良序原理与选择公理

第二章　普通点集拓扑

2.1　拓扑空间与连续函数

2.1.1　拓扑空间

定义 2.1.1. 集合 X 上的一个拓扑 $\mathcal{T}$ 谓 X 的一满足如下条件的子集族:

1. $\{\varnothing, X\} \in \mathcal{T}$;
2. $\mathcal{T}$ 中元素的任意并仍在 $\mathcal{T}$ 中;
3. $\mathcal{T}$ 中元素的有限交仍在 $\mathcal{T}$ 中。

定义 2.1.2. X 的所有子集构成的拓扑谓离散拓扑。

定义 2.1.3. 由 X 和 $\varnothing$ 构成的拓扑谓密着拓扑。

定义 2.1.4. 由 X 本身与所有满足 $X-U$ 为有限集的 U 构成的拓扑谓有限补拓扑。

定义 2.1.5. $\mathcal{T}' \supset \mathcal{T}$ 则 $\mathcal{T}'$ 细于 $\mathcal{T}$，反之则谓粗于。

如果把开集比做石子，把石子打碎就得到更细的拓扑。

2.1.2　拓扑的基

定义 2.1.6. 基 $\mathcal{B}$ 谓满足如下条件的子集族:

1. 对任意 $x \in X$，存在 $B \in \mathcal{B}$ 满足 $x \in B$;
2. 对任意 $x \in B_1 \cap B_2$，存在 B 满足 $x \in B$ 且 $B \subset B_1 \cap B_2$。

注意此定义不针对具体的拓扑。

例 2.1.1. 平面上的圆域和矩形域构成的集族都构成基。

定义 2.1.7. 满足定义*2.1.6*的 $\mathcal{B}$ 生成的拓扑为所有满足对 $x \in U$，存在 $x \in B \subset U$ 的 U 的集族。

可以直接验证上述定义构成一个拓扑。对所有 x 取对应的 $x \in B_x$ 后将诸 B_x 并起，可得等价的表述

定理 2.1.1. 若 $\mathcal{B}$ 为 $\mathcal{T}$ 的基，则 $\mathcal{T}$ 为 $\mathcal{B}$ 中元素并的族。

定理 2.1.2. 设 $\mathcal{C}$ 为开集族，若对于任意开集 U 中任意 x，存在 $C \in \mathcal{C}$ 满足 $x \in C \subset U$，则 $\mathcal{C}$ 为 $\mathcal{T}$ 的基。

证明. 容易验证 $\mathcal{C}$ 为基。再分别证 $\mathcal{C} \subset \{U\}$ 与 $\{\cup C\} \supset \{U\}$。 □

定理 2.1.3. 设 $\mathcal{B}$ 于 $\mathcal{B}'$ 分别生成 $\mathcal{T}$ 与 $\mathcal{T}'$，则 $\mathcal{T}'$ 细于 $\mathcal{T}$ 当且仅当对任意 $x \in B$ 存在 $x \in B' \subset B$。

证明. 强行带入定义，即任意 U 均在 $\mathcal{T}'$ 内即可。 □

定义 2.1.8. $\mathbb{R}$ 上的 (a,b) 生成的拓扑谓标准拓扑。

定义 2.1.9. $\mathbb{R}$ 上 $[a,b)$ 生成的拓扑谓下限拓扑，记作 $\mathbb{R}_\ell$。

定义 2.1.10. $\mathbb{R}$ 上 (a,b) 与 $(a,b) - \left\{\frac{1}{n}\right\}$ 生成的拓扑谓 K-拓扑，记作 $\mathbb{R}_K$。

引理 2.1.1. $\mathbb{R}_\ell$ 与 $\mathbb{R}_K$ 严格细于标准拓扑，但它们之间不可比较。

证明. $\mathbb{R}_K$ 严格细于的证明只需考虑 $x = 0$ 与 $B = (-1,1) - \{1/n\}$，同一个集合可证 $\mathbb{R}_\ell$ 不细于 R_K。 □

定义 2.1.11. 子基 $\mathcal{S}$ 谓满足 $\cup S = X$ 的集族。

定义 2.1.12. 子基生成的拓扑谓 $\mathcal{S}$ 中有限交的所有并。

可以直接验证 $\{\cap S\}$ 为一个基，故其确实生成一拓扑。

2.1.3　序拓扑

定义 2.1.13. 具有全序关系的 X 上的序拓扑谓所有 (a,b)，$(a, \max X]$，$[\min X, b)$ 生成的拓扑。

例 2.1.2. $\mathbb{Z}_+$ 上的序拓扑是离散拓扑。然而 $X=\{1,2\}\times\mathbb{Z}_+$ 的字典序拓扑下单点集 1×1 并非开集。

定义 2.1.14. 全序集 X 中 a 决定的射线谓开射线 $(a,+\infty)$，$(-\infty,a)$，$[a,+\infty)$，$(-\infty,a]$。

所有开射线构成 X 的序拓扑的子基。

2.1.4　积拓扑

定义 2.1.15. $X\times Y$ 上的积拓扑谓所有 $U\times V$ 的集族 $\mathcal{B}$ 生成的拓扑，其中 U 与 V 为 X 与 Y 中的开集。

定理 2.1.4. 若 $\mathcal{B}$ 与 $\mathcal{C}$ 分别为 X 与 Y 的基，则 $\mathcal{B}\times\mathcal{C}$ 为 $X\times Y$ 的基。

定义 2.1.16. 投射 $\pi_1(x,y)=x$，$\pi_2(x,y)=y$。

定理 2.1.5. 如下的 $\mathcal{S}$ 构成 $X\times Y$ 的一子基，其中 U 和 V 分别为 X 与 Y 中的开集。

$$\mathcal{S}=\left\{\pi_1^{-1}(U)\right\}\cup\left\{\pi_2^{-1}(V)\right\}.$$

2.1.5　子空间拓扑

定义 2.1.17. 对 X 的子集 Y 定义子空间拓扑，其中 U 为 X 中的开集。

$$\mathcal{T}_Y=\{Y\cap U\}.$$

定理 2.1.6. 若 $\mathcal{B}$ 为 X 的一个基，则

$$\mathcal{B}_Y=\{B\cap Y\mid B\in\mathcal{B}\}$$

谓 Y 的子空间拓扑的一个基。

引理 2.1.2. 若 Y 为 X 中开集而 U 为 Y 中开集，则 U 为 X 中开集。

定理 2.1.7. 若 $A\subset X$，$B\subset Y$，则 $A\times B$ 的积拓扑与其自 $X\times Y$ 继承的子空间拓扑相符。

然而，对于序拓扑无类似结论。

例 2.1.3. 考虑 $X=\mathbb{R}$ 而 $Y=[0,1]$，Y 上的序拓扑与子空间拓扑相符。

例 2.1.4. 考虑 $X=\mathbb{R}$ 而 $Y=[0,1)\cup\{2\}$，子空间拓扑中 $\{2\}$ 为开集，二者不符。

例 2.1.5. 考虑 $X=\mathbb{R}^2$ 而 $Y=[0,1]\times[0,1]$，则 $\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2},1\right]$ 为子空间拓扑的开集但不是序拓扑的开集。

定义 2.1.18. 子集 Y 称为凸的，如果对 Y 中 $a<b$ 皆有 $(a,b)\subset Y$。

定理 2.1.8. 设 X 为全序集，Y 为凸子集，则子空间拓扑与序拓扑一致。

证明. 借助开射线构造子基后证明其相互包含即可。 □

2.1.6　闭集与极限点

定义 2.1.19. 若 $X-A$ 为开集，则 A 为闭集。

例 2.1.6. $\mathbb{R}$ 中 $[a,b]$ 为闭集，$\mathbb{R}^2$ 中 $\mathbb{R}^2_+$ 为闭集，有限补拓扑中 X、$\varnothing$、有限集为闭集。

例 2.1.7. 离散拓扑每一个集合都是开集也都是闭集，$Y=[0,1]\cup(2,3)$ 中两个分量都同时是开集和闭集。

定义 2.1.20. 对于拓扑空间 X，成立

1. $\varnothing$、X 都是闭集；
2. 闭集的任意交仍为闭集；
3. 闭集的有限并仍为闭集。

定理 2.1.9. A 为 X 的子空间 Y 的闭集当且仅当有闭集 C 满足 $A=Y\cap C$。

定理 2.1.10. A 是 Y 的闭集，Y 是 X 的闭集，则 A 是 X 的闭集。

Hausdorff 空间

定义 2.1.21. 集合的内部 $\mathring{A}$ 是包含于其内的所有开集的并，闭包 $\overline{A}$ 是其外所有闭集的交。

显然开集的内部是本身，闭集的闭包也是本身。注意 $(0,1)$ 在其本身中的闭包和在 $\mathbb{R}$ 中的闭包不同，所称闭包都是指父空间闭包。

定理 2.1.11. Y 中 $\overline{A}^Y=\overline{A}\cap X$。

定义 2.1.22. 两集合相交，如果它们的交非空。

定义 2.1.23. 含有 x 的开集称为其邻域。

定理 2.1.12. $x \in \overline{A}$ 当且仅当每一个邻域与 A 相交。

证明. 如果存在反例 U，则 $X - U$ 会成为包含 A 的闭集。 □

推论 2.1.1. $x \in \overline{A}$ 当且仅当含有 x 的每一个基元素与 A 相交。

例 2.1.8. $A = (0, 1]$，$\overline{A} = [0, 1]$。$A = \mathbb{Q}$，$\overline{A} = \mathbb{R}$。$\overline{\{1/n\}} = \{1/n\} \cup \{0\}$。

极限点

定义 2.1.24. 若 x 的任何一个邻域包含 A 中其他点，则 x 为 A 的极限点。

例 2.1.9. $A = (0, 1]$，$[0, 1]$ 中的点均为其极限点。$A = \mathbb{Q}$，$\mathbb{R}$ 中的点均为其极限点。$A = \{1/n\}$，0 为其极限点。

定理 2.1.13. $\overline{A} = A \cup A'$，其中 A' 为极限点集合。

证明. 参考定理2.1.12。 □

推论 2.1.2. A 为闭集当且仅当 $A' \subset A$。

Hausdorff 空间

定义 2.1.25. 如果对于x 的任意邻域 U，存在N，使得当 $n > N$，$x_n \in U$，则 $\{x_n\}$ 收敛到点 x。

$\mathbb{R}^2$ 和 $\mathbb{R}$ 中的序列最多收敛至一点，然而其他拓扑空间不一定。

定义 2.1.26. 若 X 中任意两不同点存在无交邻域，则称 X 为一 *Hausdorff* 空间（*Hausdorff space*）。

定理 2.1.14. *Hausdorff* 空间中有限集为闭集。

证明. 只证单点集。由于隔离邻域的存在，易见其他点都不在闭包内。 □

比 Hausdorff 条件更弱的，有 T_1 公理。

定义 2.1.27. 若 X 中有限集为闭，则 X 满足 T_1 公理。

定理 2.1.15. *若 X 满足 T_1 公理，则 x 为 A 的极限点当且仅当 x 的任意邻域与 A 有无限交点。*

证明. 如果有一个邻域只有有限交点，挖掉还是开集，但不再与 A 相交。 □

定理 2.1.16. *若 X 为 Hausdorff 空间，则 X 中的序列最多收敛至一点。*

证明. 如果有两个点，在定义中取隔离邻域即可。 □

定理 2.1.17. *每一个具有序拓扑的全序集，两个 Hausdorff 空间的积，Hausdorff 空间的子空间是 Hausdorff 空间。*

证明. 全序集可选取中间元分割，中间元不存在的直接射线可分割。 □

2.1.7　连续函数

函数的连续性

定义 2.1.28. *函数 $f: X \to Y$ 称为连续的，如果开集的原像为开集。*

为了证明函数连续，只需要证明基的原像为开集即可。

例 2.1.10. *上述定义等价于 $\epsilon - \delta$ 定义。*

证明. 如果 $\epsilon - \delta$ 定义成立，则 $f(x)$ 的 ϵ-邻域的原像包含 x 的 δ-邻域，故任意开集的原像均为开集。如果拓扑定义成立，则显而易见。 □

例 2.1.11. *$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_\ell$ 的 $f(x) = x$ 不是连续函数，但其逆连续。*

定理 2.1.18. *对于 $f: X \to Y$，下列条件等价：*

1. *f 连续；*
2. *对 X 的任意子集 A 有 $f\left(\overline{A}\right) \subset \overline{f(A)}$；*
3. *对 Y 中任意闭集 B 有 $f^{-1}(B)$ 为闭集；*
4. *对任意 x 与 $f(x)$ 的邻域 V，存在 x 的邻域 U 满足 $f(U) \subset V$。*

证明. $1 \Rightarrow 2$：若 y 在 $f(A)$ 外一开集内，则原像为 $f(A)$ 外一开集。$2 \Rightarrow 3$：闭集 $f(A) = \overline{f(A)} \supset f\left(\overline{A}\right)$，故 $A = \overline{A}$。$3 \Rightarrow 1$ 与 $1 \Rightarrow 4 \Rightarrow 1$ 显然。 □

同胚

定义 2.1.29. 如果一个一一映射和它的逆都连续，则称之为同胚。

定义 2.1.30. 如果 X 的性质于与之同胚的 Y 都成立，则称之为拓扑性质。

定义 2.1.31. 映入子空间的同胚称为嵌入。

例 2.1.12. $F(x) = x/\left(1-x^2\right)$ 与 $G(y) = 2y/\left(1+\left(1+4y^2\right)^{1/2}\right)$ 为 $(-1,1)$ 与 $\mathbb{R}$ 间同胚。

例 2.1.13. $[0,1)$ 弯曲到圆周的映射连续而非同胚。其扩张连续而非嵌入。

构造连续函数

定理 2.1.19. 下列函数皆连续:

1. 常值函数;
2. 子空间到父空间的内射;
3. 连续函数的复合;
4. 连续函数限制定义域到一子空间的结果;
5. 连续函数限制或扩大值域至包含像集的子空间或父空间的结果;
6. 若 X 可写为开集的并，且 f 在每个分量上连续。

定理 2.1.20 (黏结引理)**.** 设 $X = A \cup B$ 且二者为闭集，并且 $f: A \to Y$ 与 $g: B \to Y$ 连续且在 $A \cap B$ 上相等，则 h 连续，

$$h(x) = \begin{cases} f(x), x \in A, \\ g(x), x \in B. \end{cases}$$

证明. 由定理2.1.18，注意闭集被映回闭集即可。 □

例 2.1.14. 对 $x \geq 0$，$h(x) = x$，$x \leq 0$，$h(x) = x/2$，则 h 连续。

定理 2.1.21. $f: A \to X \times Y$ 连续的充分必要条件为 f_X 与 f_Y 连续。

证明. 注意连续的拓扑定义等价于对基连续即可。 □

例 2.1.15. 向量场连续当且仅当分量连续。

2.1.8 积拓扑

定义 2.1.32. X 的元素的 J-串为 $\boldsymbol{x}: J \to X$，其全体记作 X^J。

例如，$\mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}^{\{1,2,3\}}$。

定义 2.1.33. A_j 的笛卡尔积 $\prod A_j$ 为各取一元构成之 J-串的集合。

定义 2.1.34. 基由 $\prod U_\alpha$ 构成 $\prod X_\alpha$ 的称为箱拓扑。

定义 2.1.35. 子基由 $\{\pi^{-1}(U_\alpha)\}$ 构成的称为积拓扑。

定理 2.1.22. 箱拓扑的基由所有 $\prod U_\alpha$ 构成，积拓扑的基由 $\prod U_\alpha$ 构成但 U_α 中只有有限个非 X_α。

定理 2.1.23. $\prod B_\alpha$ 构成箱拓扑的积，$\prod B_\alpha$ 中若 B_α 中只有有限个非 X_α 则构成积拓扑的基。

例 2.1.16. $\mathbb{R}^n$ 的积拓扑与箱拓扑一致。

定理 2.1.24. $\prod A_\alpha$ 在两种拓扑下都是 $\prod X_\alpha$ 的同种拓扑的子空间。

定理 2.1.25. 若每个 X_α 都是 *Hausdorff* 的，则两拓扑下 $\prod X_\alpha$ 都如此。

定理 2.1.26. 在 $\prod X_\alpha$ 的两种拓扑下都有 $\prod \overline{A_\alpha} = \overline{\prod A_\alpha}$。

证明. 若 x 在 $\prod \overline{A_\alpha}$ 内，则诸 $\prod U_\alpha$ 均有 $\prod A_\alpha$ 的元素，故 x 在 $\overline{\prod A_\alpha}$ 内。若 x 在 $\prod \overline{A_\alpha}$ 外 U_α 内，则 $\pi^{-1}(U_\alpha)$ 包含 x 且为开集，故在 $\overline{\prod A_\alpha}$ 外。 □

定理 2.1.27. 积拓扑下 $f: A \to \prod X_\alpha$ 连续当且仅当各个分量连续。

证明. 注意连续的拓扑定义等价于对基成立即可。 □

例 2.1.17. 对箱拓扑下 $\mathbb{R}$ 的可数无限积 $\mathbb{R}^\omega$，$f(t) = (t, t, t, \cdots)$ 不连续。注意 $(-1,1) \times (-1/2, 1/2) \times -1/3, 1/3$ 被映回 0 即可。

2.1.9 度量拓扑

定义 2.1.36. 集合 X 的一个度量 d 是一个函数 $d: X \times X \to \mathbb{R}$，满足正定、对称与三角不等式。

定义 2.1.37. 以全体 ϵ-球为基的拓扑称为度量拓扑。

容易验证全体 ϵ-球构成基。由这一定义，开集可视作满足任意 $y \in U$ 都有某 $B(x,\epsilon) \subset U$ 的集合 U。

例 2.1.18. 若 $x = y$，$d(x,y) = 1$，否则 $d(x,y) = 0$ 诱导出离散拓扑。

例 2.1.19. $d(x,y) = |x - y|$ 诱导 $\mathbb{R}$ 上的序拓扑。

定义 2.1.38. 若 X 的拓扑由某度量诱导，则称 X 为度量空间。

定义 2.1.39. 度量空间的子集 A 为有界的，若 $d(a_1, a_2)$ 一致有界。A 的直径谓 $\operatorname{diam} A = \sup\{d(a_1, a_2)\}$。

定理 2.1.28. 由度量 d 诱导的度量

$$\bar{d}(x,y) = \min\{d(x,y), 1\}$$

谓标准有界度量，它和 d 诱导同一拓扑。

证明. 分类验证三角不等式即可。 □

定义 2.1.40. 对 $\mathbb{R}^n$ 中的点，$d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| = \left(\sum (x_i - y_i)^2\right)^{1/2}$ 诱导欧氏度量，$\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \max\{|x_i - y_i|\}$ 诱导平方度量。

欧式度量的三角不等式是熟知的结论。平方度量由

$$d_3 = |x_k - z_k| \le |x_k - y_k| + |y_k - z_k| \le d_1 + d_2$$

验证三角不等式。注意同理可证若 X 上度量 d_1 和 Y 上度量 d_2 可以生成 $X \times Y$ 上一度量 $d_3 = \max\{d_1, d_2\}$。

欧式度量和平方度量的基元素分别为圆域和方域。由定理2.1.3立得

定理 2.1.29. 度量拓扑 $\mathcal{T}'$ 细于 $\mathcal{T}$ 当且仅当对于任意 x 与 ϵ，存在 ϵ' 满足

$$B'(x,\epsilon') \subset B(x,\epsilon).$$

定理 2.1.30. 欧氏度量和平方度量诱导 $\mathbb{R}^n$ 上的积拓扑。

证明. 直接验证不难，但由 $\rho \le r \le \sqrt{n}\rho$ 可立得欧式与平方拓扑等价。 □

定义 2.1.41. 对 $\mathbb{R}^J$ 中的点定义

$$\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \sup\left\{\bar{d}(x_\alpha, y_\alpha) \mid \alpha \in J\right\},$$

可得一致度量，诱导出一致拓扑。

定理 2.1.31. 一致拓扑细于积拓扑，粗于箱拓扑。J 为无限集则两两不同。

证明. 玩弄基元素的大小可证其粗细。J 无限时，$(-1,1)^J$ 在一致拓扑下为开，积拓扑下非开。$\prod(-1/n,1/n)$ 在箱拓扑下为开，一致拓扑下非开。 □

定理 2.1.32. 对 $\mathbb{R}$ 的可数无限积 $\mathbb{R}^\omega$ 定义

$$D(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\sup\left\{\frac{\bar{d}(x_i,y_i)}{i}\right\},$$

可诱导 $\mathbb{R}^\omega$ 上的积拓扑。

证明. 设 $\mathbb{R}^\omega$ 的某基 B 的分量在 j 后均为 $\mathbb{R}$，则某 $B(x,\epsilon/j)$ 包含其内。反之也可以选择这样的基包含于 $B(x,1/j)$ 内。 □

类似证明可仿照得到

定理 2.1.33. 可度量化空间的可数积仍可度量化。

例 2.1.20. 在 $X\times Y=\mathbb{R}^2$ 上定义 $d=\min\{y_2-y_1,1\}$，如果两点共 x，否则 $d=1+(x_1-x_2)$，则 d 诱导字典序拓扑。

例 2.1.21. 易见度量空间的子空间仍为度量空间，且子空间的度量直接限制定义域可得。

2.1.10　连续函数与度量拓扑

定理 2.1.34. 度量空间到度量空间的 $f:X\to Y$ 的连续性等价于 ϵ-δ 条件。

证明. 仿照例2.1.10可得。 □

推论 2.1.1. 度量为连续函数。

引理 2.1.3 (序列引理)**.** 若 A 中有收敛于 x 的序列，则 $x\in\overline{A}$。若 X 为度量空间，逆命题成立。

定理 2.1.35. 度量空间之间的 $f:X\to Y$ 连续的充要条件谓 $x_n\to x$ 等价于 $f(x_n)\to f(x)$。

证明. 若拓扑条件成立，则 $f(x)$ 的小邻域原像都会包含 x 的邻域，故包含 $\{x_n\}_{n\geq N}$。若序列条件成立，结合序列引理与定理2.1.18即可。 □

注意上述定理对满足下列条件的空间也可以直接适用。

定义 2.1.42. 如果 x 有邻域 $\{U_n\}$ 满足任意邻域 U 都有某 U_n 含于其内，则称 X 在 x 处有可数基。如果处处都有则称 X 满足第一可数性公理。

引理 2.1.4. 加减乘除是其定义域内的连续函数。

定理 2.1.36. 连续函数加减乘的结果连续，恒非零的除亦连续。

定义 2.1.43. 若 $\{f_n\}$ 关于度量 $d(f,g)=\sup\{|f-g|\}$ 收敛于 f，则称其一致收敛。

定理 2.1.37. 一致收敛的连续函数列收敛于连续函数。

证明. 对给定的 ϵ，存在 δ 和 N 使得当 $|x-y|<\delta$，诸变差皆小于 δ。

$$|f(x)-f(y)| \leq |f(x)-f_N(x)| + |f_N(x)-f_N(y)| + |f(y)-f_N(y)|. \quad \square$$

推论 2.1.3. 若 $x_n \to x$ 而 $\{f_n\}$ 一致收敛于 f，则 $f_n(x_n) \to f(x)$。

例 2.1.22. 箱拓扑的 $\mathbb{R}^\omega$ 不满足序列引理因此不可度量化。$0 \in \overline{\mathbb{R}_+^\omega}$ 但 $\prod(-x_{ii}, x_{ii})$ 排斥所有 x_i。

例 2.1.23. 不可数个 $\mathbb{R}$ 的积空间不可度量化。

证明. 考虑 $\mathbb{R}^J$ 由那些知有有限个零分量的 $\{0,1\}$ 序列的子空间，易见 0 在其内。然而，能有幸为零的分量指标仅有可数个，故存在恒 1 的指标。 $\square$

2.1.11 商拓扑

定义 2.1.44. 满射 $p\colon X \to Y$ 称为商映射，如果 U 是 Y 的开集当且仅当 $p^{-1}(U)$ 是 X 的开集。

易见开集也可以改为闭集。

定义 2.1.45. X 的子集 C 为饱和的，如果它是纤维的并。

商映射等价于饱和开集映射到开集。易见开映射和闭映射（把开集映射到开集或者把闭集映射到闭集）都是商映射。

例 2.1.24. $[0,1]\cup[2,3]$ 到 $[0,2]$ 的黏贴映射是闭映射但不是开映射。

例 2.1.25. $\pi_1 : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是开映射但不是闭映射，因为 $\{y=1/x\}$ 被映射到开集。

例 2.1.26. π_1 在 $A = \mathbb{R}\times 0 \cup [0,\infty)\times\mathbb{R}$ 上的限制是商映射，但不是开映射或者闭映射。$A-(-\infty,0]\times 0$ 是开集，但是被映射到闭集。$\{y=\pm\tan x\}$ 图像左侧是闭集，但被映射到开集。

定义 2.1.46. 满射 $p\colon X\to A$ 的像 A 上存在一拓扑使得 X 为商映射，此拓扑谓商拓扑。

例 2.1.27. $y=\operatorname{sgn}(x)$ 在点集上可以诱导一个商拓扑 $\{\{\{-1\},\{1\}\},0\}$。

定义 2.1.47. X^* 为 X 的分拆，则 $\pi\colon X\to X^*$ 诱导的商拓扑使 X^* 为商空间。

例 2.1.28. 将单位圆盘将圆周视为等价类，则商空间同胚于球面。

例 2.1.29. 将矩形四角和对边上对应点视为等价类，则商空间同胚于环面。

由例2.1.26知商映射在子空间的限制未必是商映射，但仍然有

定理 2.1.38. 设商映射 $p\colon X\to Y$ 与饱和子空间 A，则 p 在其上的限制 $q\colon A\to p(A)$ 仍为商映射，如果

1. A 为开集或闭集;
2. 或者 p 为开映射或闭映射。

证明. 先验证，如果 $V\subset p(A)$，则 $q^{-1}(V)=p^{-1}(V)$。如果 $U\subset X$，则 $p(U\cap A)=p(U)\cap p(A)$。都有 $q^{-1}(V)$ 是开的 $\Rightarrow V$ 在 $p(A)$ 中为开。 □

商映射的复合仍为商映射，但乘积不一定，Hausdorff 空间的商空间也不一定是 Hausdorff 空间。

定理 2.1.39. 商映射 p 与纤维上的映射 g 诱导 f 满足 $f\circ p=g$。f 连续当且仅当 g 连续，f 为商映射当且仅当 g 为商映射。

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, "g"] & \\ Y \arrow[r, dotted, "f"'] & Z \end{tikzcd}$$

证明. 若 p 和 g 为商映射，证明 $f^{-1}(V)$ 为开集 $\Rightarrow V$ 为开集即可。 □

推论 2.1.2. 设 $g\colon X\to Z$ 为连续满射，X^* 为各纤维的集，取商拓扑，则

1. g 诱导的 $f: X^* \to Z$ 一一连续，其为同胚当且仅当 g 为商映射；
2. 若 Z 为 *Hausdorff* 空间，则 X^* 为 *Hausdorff* 空间。

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, "g"] & \\ X^* \arrow[r, "f"'] & Z \end{tikzcd}$$

证明. 注意一一的商映射等价于同胚。 □

例 2.1.30. 设 $X = [0,1] \times \{1, 2, \cdots\}$，$Z = x \times (x/n)$ 其中 $x \in [0,1]$，则 $g(x \times n) = x \times (x/n)$ 诱导出 X^* 为将 X 诸左端点粘合的空间，但 $f: X^* \to Z$ 不是同胚。

证明. 考虑 $x_n = (1/n) \times n$，则 $\{x_n\}$ 为闭集但是 $z_n = (1/n) \times 1/n^2$ 不是，因此 g 不是商映射。 □

例 2.1.31. 设 $p: X \to X^*$ 是将 $\mathbb{R}$ 的 $\mathbb{Z}_+$ 粘合为 b 形成的商空间，$i: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ 为恒等映射，则 $p \times i$ 不是商映射。

证明. 假设 U_n 为 $n \times \left(\sqrt{2}/n\right)$ 附加其上方和下方的条带，$U = \cup U_n$，则 U 饱和但 $p \times i\,(U)$ 不是开集，因为某 $I_b \times I_\delta$ 的原像包含条带的缝隙。 □

2.2　连通性与紧致性

2.2.1　连通空间

定义 2.2.1. 拓扑空间 X 的一个分割，谓其一对无交非空开集其并为 X。

引理 2.2.1. 若 Y 是 X 的子空间，则其分割的分量彼此不包含对方的极限点。若存在一对并为 Y 的非空集合彼此不包含对方极限点，则亦构成分割。

证明. 注意分量既开又闭，故极限点自含。若存在这样的一对，则 A 中任意元素都存在小邻域在 B 外，故在 A 内，故 A 为开集。 □

例 2.2.1. 密着拓扑是连通的。

例 2.2.2. $\mathbb{R}$ 的子空间 $[-1,0) \cup (0,1]$ 不是连通的。

例 2.2.3. $\mathbb{Q}$ 不是连通的。

例 2.2.4. $\{y=1/x\}$ 其中 $x>0$ 和 $\{y=0\}$ 作为 $\mathbb{R}^2$ 的子空间不是连通的。

引理 2.2.2. 连通子空间包含在分割的二者中一个内。

定理 2.2.1. 含有一个公共点的连通子空间族的并是连通的。

定理 2.2.2. A 为连通子空间，则 $A\subset B\subset\overline{A}$ 的 B 是连通的。

证明. 若 $\overline{A}$ 被分拆为 $C\cup D$，则 $A\subset C$ 而 D 为一个与 A 无交的邻域。 □

定理 2.2.3. 连通空间的连续映射的像是连通的。

定理 2.2.4. 有限多个连通空间的积是连通的。

证明. 注意每个十字形是含有公共点的连通空间的并，再将十字形并起。 □

例 2.2.5. 箱拓扑的 $\mathbb{R}^\omega$ 不连通，后者可分为有界序列和无界序列两开集。

例 2.2.6. 积拓扑的 $\mathbb{R}^\omega$ 连通，因为 $\mathbb{R}^\omega=\overline{\mathbb{R}^\infty}$，而 $\mathbb{R}^\infty\cong\cap(\mathbb{R}^n+(0,0,\cdots))$，被并的元素均连通且具有原点为公共点。

2.2.2　实直线上的连通子空间

定义 2.2.2. 若 L 是多于一个元素的全序集，且 L 具有上确界性质，且 $x<y\Rightarrow$ 存在 $x<z<y$，则 L 谓线性连续统。

定理 2.2.5. 若 L 为序拓扑的线性连续统，则 L 及其区间和射线都连通。

证明. L 的凸子集 Y 若分拆为 A 和 B，则其中的（不妨设）$a<b$ 有 $[a,b]$ 被分割为 $A_0\cup B_0$。$\inf B_0\in B_0$ 或 $\inf B_0\in A_0$ 都会导致矛盾。 □

推论 2.2.1. $\mathbb{R}$ 及其区间和射线都是连通的。

定理 2.2.6 (介值定理)**.** 连通空间到序拓扑的全序集的映射 $f:X\to Y$，任何 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的 r 存在 c 满足 $f(c)=r$。

例 2.2.7. 有序矩形是连通的，只需验证上确界性质。分 $\sup\pi_1(A)$ 在 $\pi_1(A)$ 内或外取 $b\times c$ 或 $b\times 0$ 即可。

例 2.2.8. 良序集 X 有 $X\times[0,1)$ 关于字典序为线性连续统。

定义 2.2.3. X 中 x 到 y 到一条道路是连续的 $f:[a,b]\to X$ 满足 $f(a)=x$ 与 $f(b)=y$。若 X 中任意两点之间都存在道路，则称之道路连通的。

显然道路连通蕴含连通。

例 2.2.9. $\mathbb{R}^n$ 中的球是道路连通的，$f(t) = (1-t)\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{y}$ 是一条道路。

例 2.2.10. $\mathbb{R}^n - \{\boldsymbol{0}\}$ 是连通的。

例 2.2.11. 单位球面是连通的，因为它可以从球由 $f : \boldsymbol{x} \to x/\|x\|$ 得到。

例 2.2.12. 有序矩形 I_o^2 连通而非道路连通。在每个被映射到竖线的 $[a_i, b_i]$ 中选取有理数，只能得到可数竖线。

例 2.2.13. $S = \{x \times \sin(1/x)\}$ 的闭包 $\overline{S}$ 连通而非道路连通。任何 S 到 $0 \times [-1, 1]$ 的路径都必然震荡 $t_n \times (-1)^n$，故无法收敛，不可能连续。

2.2.3　分支与局部连通性

定义 2.2.4. X 中的连通等价类谓分支。

定理 2.2.7. X 的所有分支是 X 中无交的连通子空间，其并为 X，且任意连通子空间必定包含在某分量内。

证明. 如果某连通子空间和两个分量相交，那么 $x_1 \sim x_2$。 □

定义 2.2.5. X 中的道路连通等价类谓道路连通分支。

可以证明这是一个等价关系。

定理 2.2.8. X 的道路连通分支是无交的道路连通子空间，其并为 X，且任意道路连通子空间必定包含在某分量内。

连通分支的闭包也是连通的，因此它们是闭集。如果只有有限分支，它们还会是开集。但道路连通不一定。

例 2.2.14. $\mathbb{Q}$ 的每个分支为单点集，但不是开集。

例 2.2.15. 拓扑学家的正弦曲线，两个道路分支一个纯开一个纯闭。

定义 2.2.6. 空间谓局部连通的，如果处处给定 U 有连通邻域 $V \subset U$。谓局部道路连通的，如果处处有道路连通邻域。

例 2.2.16. 这里的定义不能改成「每个 x 都存在连通邻域」，因为连通邻域的子开集不一定连通。见局部连通与无穷扫帚。

例 2.2.17. 区间的并是局部连通的，$\mathbb{Q}$ 不是局部连通的。

定理 2.2.9. 空间是局部连通的当且仅当任何开集的每一个分支都是开的。

证明. 后半句成立则显然，前半句成立则对邻域取交可得内含的开集。 □

定理 2.2.10. 空间是局部道路连通的当且仅当开集的所有道路连通分量都是开的。

定理 2.2.11. 道路分支包含在分支内。局部道路连通则分支与道路分支同。

证明. 前句显然。后句若分支内有多个道路分支都是开的，则构成分割。 □

2.2.4 紧致空间

定义 2.2.7. $\mathcal{A}$ 成员的并为 X，称之为覆盖。包含子空间 Y 亦称为覆盖。

定义 2.2.8. X 任何开覆盖包含有限子族覆盖，则称之紧致的。

例 2.2.18. $\mathbb{R}$ 不是紧致的，$\{0,1\}$ 或 $(0,1]$ 也不是，而 $\{0\}\cup\{1/n\}$ 紧致。

引理 2.2.3. 子空间 Y 是紧致的，当且仅当 X 的开集组成的每一个 Y 的覆盖都有有限子族覆盖 Y。

定理 2.2.12. 紧致空间的闭子集紧致。

证明. 注意子集的每个覆盖都可以并上子集的补称为 X 的开覆盖。 □

定理 2.2.13. *Hausdorff* 空间的每一个紧致子空间都是闭的。

证明. 只证其补为开。Y 内所有点都和外点 z 有无交邻域，并起取有限族，相应 z 取有限交可得 z 与 Y 的无交邻域。 □

引理 2.2.4. 紧致空间和其外一点可以分别被无交开集包含。

例 2.2.19. 半开区间和开区间不是紧致的。

例 2.2.20. 有限补拓扑的每个集合都是紧致的，但只有有限集是闭的。

定理 2.2.14. 紧致空间的连续像是紧致的。

定理 2.2.15. 连续双射 $f: X\to Y$，X 紧致 Y 为 *Hausdorff*，则 f 为同胚。

证明. 结合定理2.2.13和定理2.2.14证明闭集映射到闭集即可。 □

引理 2.2.5 (管状引理)**.** 积空间 $X \times Y$ 中若 Y 为紧致，N 为包含 $x \times Y$ 的开集，则 N 包含 x 的一个邻域 $W \times Y$。

定理 2.2.16. 紧致空间的有限积是紧致的。

证明. 对每个 x 选一条管道，从中选出有限条，每个管道选择有限覆盖。 □

例 2.2.21. 若 Y 非紧致，则考虑正态分布下方部分，显然不包含管道。

定义 2.2.9. X 的子集族 $\mathscr{C}$ 称为具有有限交性质（*finite intersection property*)，如果 $\mathscr{C}$ 的任意有限子族交非空。

定理 2.2.17. X 是紧致的当且仅当 X 中具有有限交性质的每一个闭集族 $\mathscr{C}$，其交非空。

证明. 这些集合的补是一堆开集，这些开集中的任意有限个都不能覆盖 X，但 X 是紧致的，所以它们合起来也不能覆盖 X。 □

2.2.5 实直线上的紧致子空间

定理 2.2.18. 设 X 是具有上确界性质和序拓扑的全序集，则闭区间紧致。

证明. a 以上存在 c 满足 $[a,c]$ 可以被有限覆盖，假设 c_0 是这些 $\{c\}$ 的上确界，则显然 $c_0 \in \{c\}$，并且注意 $c_0 \neq b$ 会引发矛盾。 □

推论 2.2.2. $\mathbb{R}$ 中的每一个闭区间紧致。

定理 2.2.19. $\mathbb{R}^n$ 的子集紧致，当且仅当为闭的且欧氏度量或平方度量有界。

证明. Hausdorff 空间的紧致集合是闭的，且诸开球 B_n 可以覆盖之，故有界。反之若为闭且有界，则为紧致立方体的子空间故亦紧致。 □

注意这不意味着「度量空间的紧致集合是有界闭集」，因为由定理2.1.28，一个欧氏无界的集合在同一拓扑下可以有界。

例 2.2.22. 球面和闭球是紧致的，双曲线是闭的但不是紧致的。$\{1/n\}$ 不是闭的故不是紧致的。

定理 2.2.20 (极值定理)**.** $f : X \to Y$ 若 X 为紧致而 Y 具有序拓扑，则存在极大值和极小值。

证明. 只证序拓扑下的紧致集合包含最大元。否则 $\{(-\infty,a) \mid a\in A\}$ 是覆盖，存在有限覆盖 $\{(-\infty,a_n)\}$，则最大的 $a_n\notin A$，矛盾。 □

定义 2.2.10. *x 到集合 A 的距离定义为 $d(x,A)=\inf d(x,a)$。*

容易验证这是一个连续函数。

引理 2.2.6 (Lebesgue 数引理)**.** *$\mathcal{A}$ 为紧致度量空间 X 的开覆盖，则存在 δ 使每个直径小于它的子集都包含在某 A 中，称此 δ 为 Lebesgue 数。*

证明. 令 $\{C_i\}$ 为有限的诸 $\{A_i\}$ 之补，则 $f(x)=\sum d(x,C_i)>0$，故存在最小值 ϵ，则 $\delta=\epsilon/n$。因为 $\max d(x,C_i)\geq \epsilon/n$。 □

定义 2.2.11. *$f: X\to Y$ 是度量空间之间的映射，若对于任意的 $\epsilon>0$，存在 $\delta>0$ 使得*

$$|x_0-x_1|<\delta\Rightarrow |f(x_0)-f(x_1)|<\epsilon,$$

则称之一致连续的。

定理 2.2.21. *若 X 为紧致的而 f 连续，则 f 一致连续。*

证明. 把每处的 δ 邻域并起，取 δ 为 Lebesgue 数即可。 □

定义 2.2.12. *孤立点谓单点开集。*

定理 2.2.22. *非空紧致 Hausforff 空间 X，若无孤立点则不可数。*

证明. 对于 X 的任意元素 x 和非空开集 U，由 Hausdorff 性质皆可以选取一非空开集 $V\subset U$，满足 $x\notin \overline{V}$。

假设有 $f:\mathbb{Z}_+\to X$，则可以选取 V_1 其闭包不包含 x，且可选取 $V_2\subset V_1$ 其闭包不包含 x_2，以此类推。考虑

$$\overline{V}_1\supset\overline{V}_2\supset\cdots,$$

由 x 的紧致性与定理2.2.17，知其交非空故有元素 x 在诸 x_n 之外。 □

2.2.6　极限点紧致性

定义 2.2.13. *如果 X 的任意无穷子集都有极限点，称 X 为极限点紧致的。*

定理 2.2.23. *紧致性蕴含极限点紧致。*

证明. 假设紧致性而一个集合没有极限点，故其为闭集从而紧致。选取诸点的小邻域覆盖，可以取得有限多个小邻域，故仅有有限多点。 □

例 2.2.23. $\mathbb{Z}_+ \times Y$ 其中 Y 为两点密着拓扑集，则其为极限点紧致（每个子集都有极限点）但显然非紧致。

例 2.2.24. 具有序拓扑的极小不可数良序集 S_Ω 非紧致，但每个可数集合都包含在一个闭区间内，闭区间是紧致的，故存在极限点，故 S_Ω 极限点紧致。

定义 2.2.14. 若每个序列都有收敛的子序列，称空间为列紧的。

定理 2.2.24. 对于度量空间，紧致、极限点紧致与列紧等价。

证明. 极限点的存在性意味着收敛子列存在。如果列紧，则 Lebesgue 数引理成立，否则会有 $\{r_i\} \to 0$ 使得诸球皆不包含于 A 内。然而诸球的的球心存在极限点，存在此点的邻域在 A 内而包含诸球，矛盾。

下证对任意 ϵ 都存在有限 ϵ-球覆盖。否则取 $B(x_1, \epsilon)$，并在其外取 x_2，在 $B_1 \cup B_2$ 外取 x_3，以此类推。则最终 $\{x_n\}$ 两两距离 $\geq \epsilon$，故无极限点。

对任意开覆盖，选取 Lebesgue 数以及相应开球有限覆盖的父集 A。 □

由有限 ϵ-球覆盖的存在性知

推论 2.2.3. 可度量化的紧致空间具有有限直径。

例 2.2.25. $\overline{S_\Omega}$ 不是可度量化的，因为 Ω 为极限点但不满足序列引理。S_Ω 满足序列引理但它也不可度量化。

定义 2.2.15. 度量空间内的映射 f，若

$$d(f(x), f(y)) < d(x, y),$$

则称 f 为收紧映射（*shrinking map*）。

定义 2.2.16. 度量空间内的映射 f，若

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y),$$

其中 $\alpha < 1$，则称 f 为压缩映射（*contraction map*）。

定理 2.2.25. 若 X 为完备度量空间，则压缩映射存在唯一不动点。

证明. 注意 $|x_n - x_{n+1}| < d|x_n - x_{n-1}|$ 即可。 □

原书上此处仅证紧致空间，然而由定理2.2.24紧致的度量空间是完备的。

2.2.7 局部紧致性

定义 2.2.17. 空间 X 在 x 处局部紧致，如果存在紧致子空间包含其邻域。如果处处如此，则空间局部紧致。

例 2.2.26. $\mathbb{R}^n$ 是局部紧致的，但 $\mathbb{R}^\omega$ 不是。

例 2.2.27. 具有上确界性质的全序集是局部紧致的。

定义 2.2.18. 若 Y 是紧致的 *Hausdorff* 空间，$\overline{X} = Y$ 且 X 为 Y 的真子空间，则 Y 为 X 的紧致化。若相差单点集则谓单点紧致化。

定理 2.2.26. 空间局部紧致的 *Haudorff* 空间当且仅当存在单点紧致化。在此情形下，诸紧致化同胚且在 X 上恒等。

证明. 同胚性验证开集映射到开集，分 $\infty \in U$ 与 $\infty \notin U$ 即可。构造 $Y = X \cup \{\infty\}$ 的拓扑为 $\{U\} \cup \{Y - C\}$ 其中 C 紧致可得单点紧致化。若已知单点紧致化存在，则取 ∞ 的邻域的补知为紧致空间的闭子集故紧致。 □

例 2.2.28. $\mathbb{R}$ 的单点紧致化同胚于圆周。$\mathbb{C}$ 的单点紧致化同胚于球。

定理 2.2.27. 设 X 为 *Hausdorff* 空间，则 X 在某处局部紧致当且仅当其任意邻域 U 包含邻域 V 且 $\overline{V}$ 紧致，$\overline{V} \subset U$。

证明. 若 X 局部紧致，取单点紧致化后 $Y - U$ 为闭集，由定理2.2.13的证明知存在无交邻域分开 x 与 $Y - U$，故 $\overline{V} \subset U$ 紧致。 □

推论 2.2.4. 局部紧致空间的闭子集或开子集局部紧致。

证明. 闭子集由定义知局部紧致，开子集借前开定理知局部紧致。 □

推论 2.2.5. 空间同胚于一个紧致的 *Hausdorff* 空间的开子集当且仅当其为局部紧致的 *Hausdorff* 空间。

2.3 数列与级数

2.3.1 收敛序列

定义 2.3.1 (平行于定义*2.1.25*)**.** 度量空间的序列 $\{p_n\}$ 收敛，如果存在 $p \in X$ 满足对于任意 $\epsilon > 0$，存在 N 使 $n \geq N$ 时 $d(p_n, p) < \epsilon$。

定理 2.3.1. 设 $\{p_n\}$ 是度量空间 X 中的序列，

1. $\{p_n\}$ 收敛于 $p \in X$，当且仅当 p 的每个邻域都能包含 $\{p_n\}$ 除有限项意外的其他项；
2. (平行于定理2.1.16) 如果 $p \in X$，$p' \in X$，$\{p_n\}$ 收敛于 p 和 p'，则 $p' = p$；
3. 如果 $\{p_n\}$ 收敛，那么 $\{p_n\}$ 有界。
4. (平行于引理2.1.3) 如果 $E \subset X$ 而 p 是 E 的极限点，那么 E 中有 $\{p_n\}$ 收敛于 p。

定理 2.3.2 (平行于定理2.1.35与平行于引理2.1.4). 若 $t_n \to t$ 而 $s_n \to s$，则

1. $t_n + s_n \to s + t$;
2. $cs_n \to cs$，$c + s_n \to c + s$;
3. $s_n t_n \to st$;
4. 若 $s_n \neq 0$ 且 $s \neq 0$ 则 $1/s_n \to 1/s$。

证明. 注意第三点可以先证明 $p_n \to p \Rightarrow p_n^2 \to p^2$，即

$$\left|p_n^2 - p^2\right| = |p_n - p||p_n + p| \to 0. \qquad \square$$

定理 2.3.3 (平行于例2.1.15或平行于定理2.1.30). $\mathbb{R}^n$ 中的序列收敛当且仅当其诸分量收敛，在此情形下，若 $\beta_n \to \beta$，

1. $\boldsymbol{x}_n + \boldsymbol{y}_n \to \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$;
2. $\boldsymbol{x}_n \cdot \boldsymbol{y}_n \to \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$;
3. $\beta_n \boldsymbol{x}_n \to \beta \boldsymbol{x}$。

证明. 对各分量调用前开定理即可。 $\square$

2.3.2　子序列

定义 2.3.2. $\{p_{n_k}\}$ 中若 $\{n_k\}$ 严格递增则谓子序列。若收敛则谓部分极限。

定理 2.3.4 (平行于定理2.2.23). 紧致度量空间中的序列存在收敛子列。

推论 2.3.1. $\mathbb{R}^n$ 中的有界序列包含收敛子列。

定理 2.3.5 (平行于定理*2.1.13*)**.** 度量空间中 $\{p_n\}$ 的部分极限组成闭集。

证明. 用闭集 C 排斥所有孤立点，从而所有部分极限，即 $\overline{O}\cap C$ 为闭集。 □

2.3.3 Cauchy 序列

定义 2.3.3. $\{p_n\}$ 谓 *Cauchy* 序列，若对于任意 $\epsilon > 0$，存在 N 使得任意 $n, m \geq N$ 都有 $d(p_n, p_m) < \epsilon$。

$\{p_n\}$ 是 Cauchy 序列，等价于 $\operatorname{diam}\{p_n, p_{n+1}, \cdots\} \to 0$。

定理 2.3.6 (平行于推论*2.1.1*与平行于定理*2.1.18*)**.** $\operatorname{diam} E = \operatorname{diam} \overline{E}$。

定理 2.3.7 (定理2.2.17)**.** 若 $\{K_n\}$ 为紧集的递降序列且 $\operatorname{diam} K_n \to 0$，则 $\cap K_n$ 为单点集。

定理 2.3.8. 度量空间中的收敛序列都是 *Cauchy* 序列。

定理 2.3.9. 紧致的度量空间中 *Cauchy* 序列收敛。

证明. 由定理2.3.7可得。或由于存在收敛子序列，故 Cauchy 序列收敛。 □

定理 2.3.10. $\mathbb{R}^n$ 中 *Cauchy* 序列收敛。

定义 2.3.4. 若度量空间的每个 *Cauchy* 序列在其中收敛，则称之完备的。

推论 2.3.2. 紧度量空间完备，$\mathbb{R}^n$ 完备，完备度量空间的闭子集完备。

定理 2.3.11. 单调序列收敛当且仅当有界。

证明. 有界单调序列存在收敛子列，即子 Cauchy 列，故为 Cauchy 序列。 □

2.3.4 上极限和下极限

定义 2.3.5. 若 $\{p_n\}$ 满足对任意实数 M，存在 N 使得 $n \geq N \Rightarrow s_n \geq M$，则谓 $s_n \to +\infty$。类似定义 $s_n \to -\infty$。

定义 2.3.6. $\{p_n\}$ 为实数序列而 E 为其所有部分极限的扩展（必要时包含 ∞），则 $p^* = \sup E$ 为上极限，$p_* = \inf E$ 谓下极限。

定理 2.3.12. 符号定义如上，则

1. $p^* \in E$;

2. $x > p^*$ 则存在 N 使得 $n \geq N \Rightarrow p_n < x$；
3. p^* 是唯一具有上述二性质的数。

对 p_*，类似结论成立。

证明. 由部分极限构成闭集知第一点成立。若 p^* 以上仍然存在无限多点，则矛盾，知第二点成立。若 $p < p^*$，则第二点不能成立，知第三点成立。 □

定理 2.3.13. $s_n \to s$ 当且仅当 $s_* = s = s_*$。

2.3.5 特殊序列

定理 2.3.14. 当 $p > 0$，$\alpha \in \mathbb{R}$，下列极限成立：

1. $1/n^p \to 0$；
2. $p^{1/n} \to 1$；
3. $n^{1/n} \to 1$；
4. $n^\alpha / (1+p)^n \to 0$；
5. $|x| < 1$ 时，$x^n \to 0$。

证明. 取 $N = (1/\epsilon)^{(1/p)}$ 可得第一点。若 $p > 1$，令 $x_n = p^{1/n} - 1, (1 + x_n)^n = p$ 后展开取前二项知成立第二点。展开取第三项成立第三点。 □

2.3.6 级数

定义 2.3.7. $s_n = \sum^n a_n$ 谓部分和，若 $s_n \to s$ 则谓级数收敛。

定理 2.3.15. $\sum a_n$ 收敛当且仅当对任意的 $\epsilon > 0$，存在整数 N 使得 $m \geq n \geq N$ 时，

$$\left| \sum_{k=n}^{m} a_k \right| \leq \epsilon.$$

定理 2.3.16. $\sum a_n$ 收敛则 $a_n \to 0$。

定理 2.3.17. 正项级数收敛当且仅当 s_n 有界。

定理 2.3.18. 如果 $|a_n| \leq c_n$ 而 $\sum c_n$ 收敛则 $\sum a_n$ 收敛。

定理 2.3.19. 若 $a_n \geq d_n \geq 0$ 而 $\sum d_n$ 发散，则 $\sum a_n$ 发散。

证明. 由前开定理反证得。 □

2.3.7　正项级数

定理 2.3.20. 若 $0 \le x < 1$，则 $\sum x^n = 1/(1-x)$。

定理 2.3.21. 单调递减的正项序列 $\{a_n\}$，其和收敛当且仅当 $\sum 2^k a_{2^k}$ 收敛。

推论 2.3.3. $p > 1$ 时 $\sum 1/n^p$ 收敛，否则发散。

推论 2.3.4. $p > 1$ 时 $\sum 1/n(\log n)^p$ 收敛，否则发散。

可以继续这种手段，证明 $\sum 1/n \log n (\log\log n)^p$ 的敛散性。

定义 2.3.8. e=$\sum 1/n!$。

定理 2.3.22. $(1+1/n)^n \to e$。

证明. 设 $a_n = (1+1/n)^n$，二项式展开立得

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad \sup a_n \le e.$$

$$\liminf a_n \ge 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{m!}, \quad \inf a_n \ge e.$$ □

$\sum^m 1/n! - e < 1/n!n$ 可知级数逼近的误差。

定理 2.3.23. e 是无理数。

证明. 假设 $e = p/q$，则 $0 < q!(e - s_q) < 1/q$ 是整数，矛盾。 □

2.3.8　审敛法

定理 2.3.24 (根值审敛法)**.** 令 $\alpha = \limsup |a_n|^{1/n}$，则

1. $\alpha > 1$ 时 $\sum a_n$ 发散；
2. $\alpha < 1$ 时 $\sum a_n$ 收敛。

证明. 由定理2.3.12，选取一条猛增的 $\{a_n\}$ 子列即可。 □

例 2.3.1. $a_n = 1/n$ 与 $a_n = 1/n^2$ 同样满足 $\alpha = 1$ 但前者发散后者收敛。

定理 2.3.25 (比值审敛法)**.** 令 $\alpha = \limsup |a_{n+1}/a_n|$，

1. $\alpha < 1$ 时 $\sum a_n$ 收敛；
2. 若存在 N 满足 $n \ge N \Rightarrow |a_{n+1}/a_n| \ge 1$ 则它发散。

例 2.3.2. 对于 $(1/2+1/3)+(1/2^2+1/3^2)+(1/2^3+1/3^3)+\cdots$，根值审敛法成功而比值审敛法失败。

例 2.3.3. 对于 $(1/2+1)+(1/8+1/4)+(1/32+1/16)+\cdots$ 同样如此。

定理 2.3.26. 对任意正数序列 $\{c_n\}$，有

$$\liminf \frac{c_{n+1}}{c_n} \leq \liminf c_n^{1/n},$$
$$\limsup c_n^{1/n} \leq \limsup \frac{c_{n+1}}{c_n}.$$

证明. 只证第二个，设左边的上界为 α，则对于充分大的 n，

$$c_n \leq c\alpha^n.$$ □

定理 2.3.27. 对于 $\sum c_n z^n$，设 $\alpha = \limsup |c_n|^{1/n}$，$R = 1/\alpha$ 为收敛半径。

2.3.9　分部求和

定理 2.3.28 (Abel 求和)**.** 令 $A_n = \sum_0^n a_n$ 而 $A_{-1} = 0$，则

$$\sum_{n=p}^{q} a_n b_n = \sum_{n=p}^{q-1} A_n\left(b_n - b_{n+1}\right) + A_q b_q - A_{p-1} b_p.$$

定理 2.3.29. 假设

1. $\{A_n\}$ 构成有界序列；
2. $b_n \searrow 0$；

那么 $\sum a_n b_n$ 收敛。

证明. 借助 Abel 求和发现余项满足 Cauchy 即可。 □

定理 2.3.30. 如果 $|c_n| \searrow 0$ 而 $\operatorname{sgn} c_n = (-1)^{n+1}$，则 $\sum c_n$ 收敛。

定理 2.3.31. 若 $\sum c_n z^n$ 的收敛半径为 1 而 $c_n \searrow 0$，则它在单位圆上可能除了 $z=1$ 外每个点收敛。

证明. 取 $A_n = \sum^n z^k$ 即可。 □

2.3.10 绝对收敛

定义 2.3.9. 如果 $\sum |a_n|$ 收敛则谓 $\sum a_n$ 绝对收敛。

定理 2.3.32. 绝对收敛的级数收敛。

2.3.11 级数的加乘

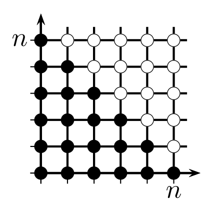
由极限的加乘立刻得到

定理 2.3.33. $\sum a_n + b_n = \sum a_n + \sum b_n$ 而 $\sum ca_n = c\sum a_n$。

定义 2.3.10. 令 $c_n = \sum_0^n a_k b_{n-k}$ 则谓 $\sum c_n$ 为两个级数的积。

例 2.3.4. $\sum_0^\infty (-1)^n / \sqrt{n+1}$ 收敛，自乘的结果发散。

定理 2.3.34. 若 $\sum a_n$ 绝对收敛，$\sum b_n$ 收敛，c_n 定义如上，则



$$\sum c_n = AB.$$

证明. 参考上图，

$$C_n = A_n B_n - {}^n_n B a_1 - {}^n_{n-1} B a_2 - \cdots - {}^n_1 B a_n.$$

由于 $\{B_n\}$ 为 Cauchy 列，可以选取 M 使得 $n \geq m \geq M$ 时有 ${}^n_m B < \epsilon$，

$$|C_n - A_n B_n| \leq \epsilon \sum |a_n| + \max_{i<M} |B_i| (a_{n-M} + \cdots + a_n). \qquad \square$$

2.3.12 级数重排

定义 2.3.11. 设 $f : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$ 为双射，则 $\sum a_{f(n)}$ 为 $\sum a_n$ 的重排。

定理 2.3.35. 对于收敛而非绝对收敛的级数和任意 $-\infty \leq \alpha \leq \beta \leq +\infty$，存在重排满足 $\inf s_n' = \alpha$ 而 $\sup s_n' = \beta$。

证明. 正负分出来，正项累加到刚好过 α，累加负项到刚好低于 β，循环。 $\square$

定理 2.3.36. 绝对收敛的级数其任意重排收敛。

2.4　连续函数

2.4.1　函数的极限

定义 2.4.1. 谓 $\lim_{x\to p} f(x) = q$，如果对于任意 $\epsilon > 0$，存在 $\delta > 0$ 满足 $0 < d(x,p) < \delta \Rightarrow d(f(x), q) < \epsilon$。

定理 2.4.1 (平行于定理*2.1.35*)**.** 前开定义等价于 $p_n \to p \Rightarrow f(p_n) \to f(p)$，其中 $p_n \neq p$。

证明. 如果定义成立，则显然。若定义不成立，可反证。 □

推论 2.4.1. 如果 f 在 p 处的极限存在，则极限唯一。

定理 2.4.2. 若 $f(x \to p) = A$，$g(x \to p) = B$，则 $(f \star g)(x \to p) = A \star B$。其中 $\star$ 为任意四则运算，对除法假设 $B = 0$。

定义 2.4.2 (连续性的 ϵ-δ 定义)**.** 谓 f 在 p 处连续，如果对任意 $\epsilon > 0$，总存在 $\delta > 0$ 满足 $d(x,p) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(p)) < \epsilon$。

定理 2.4.3 (平行于定理*2.1.35*)**.** 定义等价于 $x \to p \Rightarrow f(x \to p) = f(p)$。

定理 2.4.4 (平行于定理*2.1.19*)**.** （在某点）连续函数的复合函数仍然连续。

定理 2.4.5 (平行于定理*2.1.34*)**.** 连续性等价于 V 为开 $\Rightarrow f^{-1}(V)$ 为开。

定理 2.4.6 (平行于定理*2.1.18*)**.** 连续性等价于 V 为闭 $\Rightarrow f^{-1}(V)$ 为闭。

定理 2.4.7 (平行于定理*2.1.36*)**.** 连续函数的加减乘除（在非零部分）连续。

定理 2.4.8 (平行于定理*2.1.21*)**.** 连续函数的有限 *Cartesian* 乘积连续。

例 2.4.1. 投射、单项式以及定义域内的有理函数连续。

2.4.2　连续性和紧性

定义 2.4.3. 映入 $\mathbb{R}^k$ 的函数谓有界的，如果其像集有界。

定理 2.4.9 (平行于定理*2.2.14*)**.** 紧致度量空间的连续像紧致。

定理 2.4.10. 紧致度量空间上的连续函数有界。

定理 2.4.11 (平行于定理*2.2.20*)**.** 紧度量空间上的连续实函数可取得最值。

定理 2.4.12 (平行于定理*2.2.15*)**.** 紧度量空间到度量空间的双射之逆连续。

定义 2.4.4 (平行于定义*2.2.11*)**.** 一致连续的定义。

定义 2.4.5 (平行于定理*2.2.21*)**.** 紧度量空间上的连续函数一致连续。

证明. 选取 $p_n \to q_n$ 而 $|f(p_n) - f(q_n)| > \epsilon$ 矛盾。 □

定理 2.4.13. 若 E 为 $\mathbb{R}$ 中非紧的集，则

1. 存在在 E 连续而非有界的函数；
2. 存在在 E 上连续有界而无最大值的函数；
3. 若 E 有界，则存在 E 上连续而非一致连续的函数。

证明. 在极限点处做文章即可。 □

例 2.4.2. 定理*2.4.12*中紧性不可缺少，例*2.1.13*即是一例。

2.4.3　连续性与连通性

定理 2.4.14 (平行于定理*2.2.3*)**.** 连通空间的连续像是连通的。

定理 2.4.15 (平行于定理*2.2.6*)**.** 介值定理。

2.4.4　间断

定义 2.4.6. $\{t_n > x\} \Rightarrow f(t_n \to x) = q$，则谓 $f(x+) = q$。类似有 $f(x-)$。

定义 2.4.7. 谓第一类间断者，$f(x\pm)$ 皆存在而不等。否则谓第二类。

注意 $f(x)$ 可能等于或不等于 $f(x\pm)$。

例 2.4.3. $\chi_{\mathbb{Q}}$ 在每个点发生第二类间断。

例 2.4.4. $x\chi_{\mathbb{Q}}$ 在 $x = 0$ 连续，其他点发生第二类间断。

例 2.4.5. $f(x) = \sin 1/x \,||\, 0$ 在 $x = 0$ 处发生第二类间断。

2.4.5　单调函数

定义 2.4.8. 若 $x < y \Rightarrow f(x) \le f(y)$ 则谓之单调递增，类似有单调递减。

定理 2.4.16. 设 $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ 单调递增，则下列极限存在且

$$\sup_{a<t<x} f(t) = f(x-) \le f(x) \le f(x+) = \inf_{x<t<b} f(t).$$

推论 2.4.2. 单调函数没有第二类间断。

定理 2.4.17. 单调函数最多只有可数间断。

定理 2.4.18. 对于给定的可数集 $\{x_n\}$，存在函数恰好在其上间断，其他地方连续。

证明. 选取收敛的正项级数 $\sum c_n$ 后取

$$f = \sum_{x_n<x} c_n.$$ □

2.4.6　无穷远处的极限

定义 2.4.9. $+\infty$ 的邻域谓形如 $(c,+\infty)$ 的区间。

定义 2.4.10. 设 A 在广义实数系中，若对 A 的邻域 U 皆存在 x 的邻域 V 满足 $f(V) \subset U$，则谓 $f(t \to x) = A$。

定理 2.4.19. 函数极限的四则运算在广义实数系内仍然成立。

注意广义实数系可视为 $\mathbb{R}$ 的两点紧致化。

第三章　普通微积分

3.1　微分

3.1.1　向量值函数的微分

定理 3.1.1. 设连续的 $\mathbf{f}$ 在 (a,b) 内可微并将 $[a,b]$ 映入 $\mathbb{R}^k$, 则必有 $x \in (a,b)$ 满足 $|\mathbf{f}(b) - \mathbf{f}(a)| \leq (b-a)|\mathbf{f}'(x)|$。

第四章　普通线性代数

4.1　算子作为函数的像

下一定理表明，与一可逆算子足够接近的算子仍然可逆。

定理 4.1.1. 设 A 为可逆算子，$\|B-A\|<1/\|A^{-1}\|$，则 B 可逆。

定理 4.1.2. 线性算子的求逆是连续映射。

第五章　普通函数理论

5.1　函数序列

5.2　特殊函数

5.3　多元函数

5.3.1　微分法

定义 5.3.1. 设 E 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集，$\mathbf{f}$ 将 E 映入 $\mathbb{R}^m$，$\mathbf{x}\in E$。若存在将 $\mathbb{R}^n$ 映入 $\mathbb{R}^m$ 的线性变换 A，使得

$$\lim_{\mathbf{h}\to 0}\frac{|\mathbf{f}(\mathbf{x}+\mathbf{h})|-\mathbf{f}(\mathbf{x})-A\mathbf{h}}{|\mathbf{h}|}=0,$$

则称 $\mathbf{f}$ 在 $\mathbf{x}$ 处可微。记作

$$\mathbf{f}'(x)=A.$$

定理 5.3.1. 上述定义的 A 是唯一的。

证明. 设 $B=A_1-A_2$，则

$$|B\mathbf{h}|\le|\mathbf{f}(\mathbf{x}+\mathbf{h})-\mathbf{f}(\mathbf{x})-A_1\mathbf{h}|+|\mathbf{f}(\mathbf{x}+\mathbf{h})-\mathbf{f}(\mathbf{x})-A_2\mathbf{h}|.$$

故 $|B\mathbf{h}|/|\mathbf{h}|\to 0$。因此 $B=0$。 □

例如线性变换的导数显然是其自身。

定理 5.3.2. 若 $\mathbf{F}(\mathbf{x})=\mathbf{g}(\mathbf{f}(x))$，且 $\mathbf{f}$ 与 $\mathbf{g}$ 在对应点可微，则

$$\mathbf{F}'(\mathbf{x}_0)=\mathbf{g}'(\mathbf{f}(\mathbf{x}_0))\,\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0).$$

证明. 设 $\mathbf{x}_0$ 的增量为 $\mathbf{h}$，$\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ 的增量为 $\mathbf{k}$。

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(\mathbf{x}_0+\mathbf{h})-\mathbf{F}(\mathbf{x}_0)-BA\mathbf{h} &= \mathbf{g}(\mathbf{y}_0+\mathbf{k})-\mathbf{g}(\mathbf{y}_0)-BA\mathbf{h}\\ &= B(\mathbf{k}-A\mathbf{h})+o(\mathbf{k})\\ &= Bo(\mathbf{h})+o(\mathbf{k}).\end{aligned}$$

再注意 $\mathbf{k}=A\mathbf{h}+o(\mathbf{h})$ 便知其趋向零。 □

定义 5.3.2. 设 E 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集，$\mathbf{f}$ 将 E 映入 $\mathbb{R}^m$。$\{e_n\}$ 是定义域的标准基，$\{u_m\}$ 是值域的标准基，以此定义 $\mathbf{f}$ 的分量。若极限

$$(\mathbf{D}_j f_i)(\mathbf{x})=\lim_{t\to 0}\frac{f_i(\mathbf{x}+t\mathbf{e}_j)-f_i(\mathbf{x})}{t}$$

存在，则称之为偏导数。

定理 5.3.3. 若 $\mathbf{f}$ 在 $\mathbf{x}$ 处可微，则各偏导数存在，且

$$A_{ij}=\mathbf{D}_j f_i.$$

证明. 注意到方向导数的存在为可导所蕴含即可。 □

注意 ij 的顺序，曲线的 A 为列矩阵，即切向量。

定义 5.3.3. 若 f 是 $\mathbb{R}^n$ 上的标量函数，则 A 为行矩阵，称为 f 的梯度，记作 ∇f。

设 γ 为一曲线，f 标量函数，$g=f\circ\gamma$，于是 $g'(t)=(\nabla f)\gamma'$。若 γ 为指向 $\mathbf{u}$ 的直线，则 $g'(t)=\mathbf{u}\cdot\nabla f$，称为 f 的方向导数。当 $\mathbf{u}$ 与 ∇f 同向时[1]，其具有最大值。

定理 5.3.4. 若在凸集上 $\|\mathbf{f}'\|\le M$，则 $|\mathbf{f}(\mathbf{b})-\mathbf{f}(\mathbf{a})|\le M|\mathbf{b}-\mathbf{a}|$。

证明. 设 $\gamma(t)=(1-t)\mathbf{a}+t\mathbf{b}$，$\mathbf{g}=\mathbf{f}\circ\gamma$，因此 $\mathbf{g}'=\mathbf{f}'\circ(\mathbf{b}-\mathbf{a})$，再注意 $\mathbf{f}'$ 的上界并调用定理3.1.1。 □

推论 5.3.1. 若 $\mathbf{f}'=0$，则 $\mathbf{f}=\mathrm{const}$。

定义 5.3.4. 若 $\mathbf{f}$ 可微且 $\mathbf{f}'$ 连续，则称 $\mathbf{f}$ 连续可微。

定理 5.3.5. 当且仅当 $\mathbf{f}\colon E\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 偏导数存在且连续时，$\mathbf{f}$ 连续可微。

[1] 此处将行向量与列向量等同，或者说协变矢量与逆变矢量等同。

证明. 若 $\mathbf{f}$ 连续可微，则借助定理5.3.3，并注意

$$|(\mathbf{D}_j f_i)(\mathbf{y}) - (\mathbf{D}_j f_i)(\mathbf{x})| \leq |[\mathbf{f}'(\mathbf{y}) - \mathbf{f}'(\mathbf{x})]\mathbf{e}_j|$$

即可。

若 $\mathbf{f}$ 在 $\mathbf{x}$ 的各偏导数存在，则可以仅考虑 $\mathbf{f}$ 的一个分量 f。将 $\mathbf{x}$ 的无穷小位移 $\mathbf{h}$ 分解为各个方向的和，借助中值定理将增量转化为" 稍微偏离"$\mathbf{x}$ 处的偏导。再借助连续性，从而 $\mathbf{f}'$ 可以写为 $\mathbf{D}_j f$ 的列向量，且各分量由题设连续。 □

5.3.2 反函数定理

定理 5.3.6. 若连续可微的 $\mathbf{f}$ 将开集 $E \subset \mathbb{R}^n$ 映入 $\mathbb{R}^n$，且对于某个 $\mathbf{a}$，$\mathbf{f}'(\mathbf{a})$ 可逆，$\mathbf{f}(\mathbf{a}) = \mathbf{b}$。则存在 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 的邻域 U 和 V，使 $\mathbf{f}$ 为双射。

证明. 为了求出 $\mathbf{f}$ 的反函数，采用 Newton 法，令

$$\varphi_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + A^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{f}(\mathbf{x})).$$

注意 $\varphi' = A^{-1}(A - \mathbf{f}')$，因此可以选择足够小的邻域使 $\|\varphi'\|$ 足够小。由定理2.2.25，其存在不动点，故 $\mathbf{f}$ 可逆。

$\mathbf{f}$ 的一一性已证，下证其为开映射。设 $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{y}_0$ 确凿，对于足够接近 $\mathbf{y}_0$ 的 $\mathbf{y}$，从任何 $\mathbf{x}_0$ 附近的 $\mathbf{x}$ 出发试图寻找其原像，皆有

$$|\varphi(\mathbf{x}) - \mathbf{x}_0| \leq |\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x}_0)| + |\varphi(\mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_0|.$$

前一绝对值的大小由 $\|\varphi'\|$ 限制，后一绝对值的大小由 $\mathbf{y}$ 的偏移量限制。因此迭代后的不动点仍在 $\mathbf{x}$ 附近，故仍在 U 内，所以 $\mathbf{y}$ 仍在 V 内。 □

定理 5.3.7. 前开定理的局域反函数 $\mathbf{g}$ 亦连续可微。

证明. 由前证以及定理4.1.1，可以选取足够小的邻域 U 使得 $\mathbf{f}'$ 在此邻域内与 $\mathbf{f}'(\mathbf{a})$ 足够接近故可逆。还可以使得在此邻域内，$\mathbf{h} = O(\mathbf{k})$。注意

$$\mathbf{g}(\mathbf{y} + \mathbf{k}) - \mathbf{g}(\mathbf{y}) - T\mathbf{k} = -T[\mathbf{f}(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}'(\mathbf{x})\mathbf{h}],$$

其中 $T = \mathbf{f}'^{-1}$。因此余项 $\mathbf{v} = O(\mathbf{u})$。再注意到求逆是连续映射即可。 □

定理 5.3.8. 若连续可微的 $\mathbf{f}$ 将开集 $E \subset \mathbb{R}^n$ 映入 $\mathbb{R}^n$，$\mathbf{f}'$ 逐点可逆，则 $\mathbf{f}$ 为开映射。

5.3.3　隐函数定理

定义 5.3.5. $(\mathbf{x},\mathbf{y})$ 为

$$(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_m)\in\mathbb{R}^{n+m}.$$

每个线性变换 $A:\mathbb{R}^{n+m}\to\mathbb{R}^n$ 都可以分解成 A_x 和 A_y 两部分。

定理 5.3.9. 对于上述 A，若 A_x 可逆，则对于每个 $\mathbf{k}\in\mathbb{R}^m$，有唯一的 $\mathbf{h}\in\mathbb{R}^n$ 满足 $A(\mathbf{h},\mathbf{k})=0$。

证明.

$$\mathbf{h}=-(A_x)^{-1}A_y\mathbf{k}.$$

□

定理 5.3.10. 设 $\mathbf{f}:(X,Y)\to Z$ 是开集 $E\subset\mathbb{R}^{n+m}$ 到 $\mathbb{R}^n$ 内的连续可微映射，且在某点 $(\mathbf{a},\mathbf{b})$ 为零。令 $A=\mathbf{f}'(\mathbf{a},\mathbf{b})$ 且 A_x 可逆，则存在 $(\mathbf{a},\mathbf{b})$ 的邻域 U 和 $\mathbf{b}$ 的邻域 W，W 内的任意 $\mathbf{y}$ 有唯一 $\mathbf{x}$ 使 $\mathbf{f}=0$。

证明. 令 $\mathbf{F}(\mathbf{x},\mathbf{y})=(\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y}),\mathbf{y})$。因此

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}+\mathbf{h},\mathbf{y}+\mathbf{k})-\mathbf{F}(\mathbf{x},\mathbf{y})=(A(\mathbf{h},\mathbf{k}),\mathbf{k})+o(\mathbf{h},\mathbf{k}).$$

若右侧为零，则 $\mathbf{k}=0$，$\mathbf{h}=0$。因此 $\mathbf{F}'$ 可逆，故反函数定理可用于 $\mathbf{F}$。因此，存在 $(0,\mathbf{b})$ 的邻域 V 和 $(\mathbf{a},\mathbf{b})$ 的邻域 U，使得 $\mathbf{F}$ 是一一的。在 V 中投影出 $(0,\mathbf{y})$，注意其为开集即可。 □

定理 5.3.11. 在前开命题中设 $\mathbf{x}=\mathbf{g}(\mathbf{y})$，有 $\mathbf{g}$ 为连续可微映射且 $\mathbf{g}'(\mathbf{b})=-(A_x)^{-1}A_y$。

证明. 令 $\mathbf{G}$ 为 $\mathbf{F}$ 的局域反函数，则 $\mathbf{G}$ 连续可微，故作为其限制的 $\mathbf{g}$ 亦然。欲求 $\mathbf{g}'(\mathbf{b})$，注意到

$$\mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{b}),\mathbf{b})'=0,$$

即 $A(\mathbf{g}'(\mathbf{b}),I)=0$，$A_x\mathbf{g}'(\mathbf{b})+A_y=0$。 □

5.3.4　秩定理

定理 5.3.12. 设 $\mathbf{F}:E\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 将开集 E 映入 $\mathbb{R}^m$，对于任意 $\mathbf{x}$ 有 $\mathbf{F}'$ 的秩为 r。对于 $\mathbf{a}\in E$，$A=\mathbf{F}'$ 的像空间为 Y_1，P 是到其上的投影，Y_2 是 Y_1 的正交空间。

存在 $\mathbf{a}$ 的邻域 U 和 $\mathbb{R}^n$ 中的开集 V，存在连续可微双射 $\mathbf{H}: V \to U$ 满足

$$\mathbf{F}(\mathbf{H}(\mathbf{x})) = A\mathbf{x} + \varphi(A\mathbf{x}),$$

且 $\mathbf{H}$ 的逆亦连续可微。式中 φ 映入 Y_2。

证明. 若 $r = 0$（这里并没有使用归纳法的打算），存在 $\mathbf{a}$ 的邻域使得 $\mathbf{F}$ 为常量且 Y_1 为零空间。故可以取 $\mathbf{H} = I$，$V = U$，$\varphi(0) = \mathbf{F}(\mathbf{a})$。

对于 $r > 0$，设 S 为 A 在 Y_1 上的逆，定义

$$\mathbf{G}: E \to U \subset \mathbb{R}^n = \mathbf{x} + SP[\mathbf{F}(\mathbf{x}) - A\mathbf{x}].$$

由 $\mathbf{G}' = I$ 知存在邻域使其可逆，设其逆为 $\mathbf{H}$。将 $\mathbf{G}$ 经 A 映射，即

$$A\mathbf{G} = ASP\mathbf{F} = P\mathbf{F}.$$

这是因为 $ASPA = A$。如果 $\mathbf{x} = \mathbf{H}(\mathbf{v})$，则有 $P\mathbf{F} \circ \mathbf{H} = A$。因此，

$$\Phi(\mathbf{v}) = \mathbf{FH}(\mathbf{v}) - A\mathbf{v}$$

是到 Y_2 的连续可微映射。下尚需证存在连续可微的映射 $\varphi(A\mathbf{v}) = \Phi(\mathbf{v})$。

先证 Φ 的值仅仅取决于 $A\mathbf{v}$。考虑两 $\mathbf{v}$ 的差 $\mathbf{h}$，只需证明当 $A\mathbf{h} = 0$，有 $(\mathbf{FH})'\mathbf{h} = 0$。由构造，$(\mathbf{FH})'\mathbf{h}$ 到 Y_1 上投影仍为 $A\mathbf{h}$，且二算子像空间皆 r 维，知 $A\mathbf{h}$ 可决定 $(\mathbf{FH})'$。当前者为零，后者亦然。

再证 φ 连续可微。注意 φ 的定义域是诸 $A\mathbf{v}$，故对于 $\varphi(\mathbf{u})$，相应的 $\mathbf{v} = S\mathbf{u} + \mathbf{a}$，其中 $\mathbf{a}$ 是 A 的零空间中任意元素。对于任意 $\mathbf{u}$，可以寻找其邻域使得存在 $\mathbf{a}$ 让 $\mathbf{v}$ 留在 V 内。于是 $\varphi(\mathbf{u}) = \Phi(\mathbf{a} + S\mathbf{u})$ 连续可微。 □

注意 $A\mathbf{x}$ 映射到 Y_1，因此 $\mathbf{F}$ 在此点的值仅仅取决于其射影，因而可将其视为 r 维曲面，而其水平集可以视为 X 中的 $n - r$ 维曲面。例如将汤勺映为棒棒糖的映射，勺柄的二维平面被映射为糖棒的一维线段，其 $\mathbf{F}'$ 的秩固然为 1。而其水平集，即糖棒上一点对应的原像则是 $2 - 1 = 1$ 维的垂直于汤勺柄的线段。

第六章　点集拓扑

6.1　可数性公理与分离公理

6.1.1　流形的嵌入

定义 6.1.1. 一个 m-维流形为一个具有可数基的 *Hausdorff* 空间 X，其每一点 x 都有一邻域同胚于 $\mathbb{R}^m$ 中的开子集。

曲线为 1-维流形，曲面为 2-维流形。

定义 6.1.2. $\phi\colon X \to \mathbb{R}$ 的支撑为使其非零的定义域子集的闭包。

定义 6.1.3. 设 $\{U_1, \cdots, U_n\}$ 为 X 的加标有限开覆盖. 连续函数加标族 $\phi\colon X \to [0,1]$ 称为由 $\{U_i\}$ 控制的单位分拆（*partition of unity*），如果 ϕ_i 的支撑在 U_i 内且 $\sum \phi_i(x) = 1$。

定理 6.1.1 (有限单位分拆的存在性（existence of finite partitions of unity）)**.** 正规空间的有限开覆盖存在单位分拆。

证明. 首先注意，通过正规性条件，闭集 $A = X - (U_2 \cup \cdots)$ 内可以选择满足 $\overline{V}_1 \subset U_1$ 的开集 V_1。归纳可将诸 U_k 均缩小为 V_k 且含其闭包在内。

再将 V_k 同样缩小为覆盖 X 的 W_k，借助 Urysohn 定理对诸 i 存在 $\psi(W) = 1$ 且 $\psi(X - U) = 0$ 的 ψ，注意 $\phi_i = \psi_i / \sum \psi_i$ 满足条件即可。 □

定理 6.1.2. 若 X 为 m-维流形，则存在 N 使之得嵌入 $\mathbb{R}^N$。

证明. 设有限开覆盖 $\{U_i\}$ 可各由 $\mathbf{g}_i$ 嵌入 $\mathbb{R}^m$，又设 ϕ_i 为相应单位分拆。似可径以 $(\mathbf{g}_1, \cdots, \mathbf{g}_n)$ 映入 $\mathbb{R}^{mn}$，然而诸 $\mathbf{g}$ 虽在 U 内连续，在 X 上则会”突然”归零，故不可采，应采用 $(\phi_1\mathbf{g}_1, \cdots)$ 将之平滑化。此则不得保证单射性，盖不等之 $\mathbf{g}$ 可由不等之 ϕ 相乘后相等。是故复以

$$F\colon X \to \mathbb{R}^{n+mn} = (\phi_1, \cdots, \phi_n, \phi_1\mathbf{g}_1, \cdots, \phi_n\mathbf{g}_n)$$

为之，易证为单射。 □

第七章　流形上的分析

7.1　重积分的换元

7.1.1　单位分解

引理 7.1.1. 对 $\mathbb{R}^n$ 中的矩形，存在 C^∞ 的函数恰以之为支撑。

证明. 设 $f(x) = e^{-1/x}\chi_{\mathbb{R}^+}$，则 $f(x) f(1-x)$ 为 C^∞ 且以 $[0,1]$ 为支撑。 □

引理 7.1.2. 设 $\mathscr{A}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一族开集，其并为 A。存在矩形的可数族 $\{Q_i\}$ 覆盖之，而诸矩形在诸集内，且局部有限。

证明. 取覆盖 A 的严格递增紧子集列 $\{D_i\}$ 并设其差分为 $\{B_i\}$，知为紧致，故可以有限多矩形覆盖至且诸矩形在 D_{i-2} 外。易知此矩形族满足条件。 □

定义 7.1.1. $\phi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 的支撑为使其非零的定义域子集的闭包。

定理 7.1.1 (单位分解的存在性)**.** 在前开引理的条件下，存在诸矩形控制的 C^∞ 可数单位分拆。

证明. 参考前二引理，注意由局部有限性，各点处均有邻域使可数分拆仅为有限和，故和收敛且为 C^∞，故可加和后归一。 □

例 7.1.1. 将 $f(x) = \chi_{[-2\pi,2\pi]}(1+\cos x)/2$ 逐次移动 π，可以得到 $\mathbb{R}$ 的 C^1 单位分解。

引理 7.1.3. $f\colon A \to \mathbb{R}$ 连续且在紧集 $C \subset A$ 外为零，则 $\int_A f = \int_C f$。

证明. 存在性由 C 的有界性和极值定理推出 f 的有界性可得。取覆盖 A 的严格增紧集列 C_i，其亦覆盖 C，故 C 在某 C_M 内。

$$\int_C f = \lim \int_{C_N} f = \int_A f.$$ □

定理 7.1.2. $f: A \to \mathbb{R}$ 连续，$\{\varphi_i\}$ 为 A 的具有紧支撑的单位分解，则 $\int_A f$ 存在当且仅当

$$\sum \left[\int_A \varphi_i |f|\right]$$

收敛，此时

$$\int_A f = \sum \left[\int_A \varphi_i f\right].$$

第八章　测度论

8.1　Lebesgue 测度

8.1.1　引论

Lebesgue 测度的性质

我们期望 Lebesgue 测度具有如下一些性质。

区间的测度为其长度　非空区间是可测集，且

$$m(I) = \ell(I).$$

测度是平移不变的　若 E 为 Lebesgue 可测集且 y 为一数，则

$$m(E+y) = m(E).$$

无交集的可数并的测度可加　E_k 为可数个无交可测集，则

$$m\left(\bigcup E_k\right) = \sum m(E_k).$$

且 Lebesgue 可测集全体构成一 σ-代数。

定义 8.1.1. *一集族构成代数，如果其元素的补，有限交与有限并皆封闭。*

定义 8.1.2. *一集族构成 σ-代数，如果其元素的补，可数交与可数并皆封闭。*

在全体集合上定义满足条件的测度是不可能的，甚至仅仅满足前两个条件而具有有限可加性都是不能指望的。但在定义 Lebesgue 测度前，仍可先构造对任意集合都适用的外测度，满足前二条件，而第三条件替换为无论诸 E_k 无交与否，皆有

$$m^*\left(\bigcup E_k\right) \le \sum m^*(E_k).$$

8.1.2 Lebesgue 外测度

定义无界区间的长度为 ∞。对于任意集合，定义外测度

$$m^*(A) = \inf \sum \ell(I_k).$$

其中 $\{I_k\}$ 为 A 的区间覆盖。立即可得空集外测度为零且外测度具有单调性，即若 $A \subset B$ 则

$$m^*(A) \leq m^*(B).$$

可以由此证明，可数集的测度为零。

命题 8.1.1. 区间的测度为其长度。

证明. 考虑有界闭区间 $[a,b]$，易证 $m* \leq (b-a)$。另一方向的不等号需要

$$\sum \ell(I_k) \geq b-a.$$

由紧致性只需要对有限开覆盖证明

$$\sum^n \ell(I_k) \geq b-a.$$

选取包含 a 的区间 1，若右端点在 (a,b) 内则选取另一包含其右端点的区间 2，重复这一过程直到右端点在 (a,b) 外，则上述不等式成立。

对于任意有界区间，选取其闭区间的上下逼近并注意外测度的单调性即可。对于无界区间，易得其测度为 ∞。 □

命题 8.1.2. *Lebesgue* 外测度是平移不变的。

证明. 注意区间的平移不变即可。 □

命题 8.1.3. 对任意 $\{E_k\}$，有

$$m^*\left(\bigcup E_k\right) \leq \sum m^*(E_k).$$

证明. 对 E_k 取误差不超过 $2^{-k}\epsilon$ 的覆盖区间，加和即可。 □

8.1.3 Lebesgue 可测集的 σ-代数

Carathéodory 可测

定义 8.1.3. 若对于任意集合 A，都有

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*\left(A \cap \complement E\right),$$

则称 E 可测。

鉴于外测度的次可加性，上述条件可弱化为

$$m^*(A) \geq m^*(A \cap E) + m^*\left(A \cap \complement E\right).$$

此外还应注意到，对于无交集，若其中任一可测，立刻有

$$\begin{aligned} m*(A \cup B) &= m^*([A \cup B] \cap A) + m^*\left([A \cup B] \cap \complement A\right) \\ &= m^*(A) + m^*(B). \end{aligned}$$

故有可加性。此外，可测集的补仍为可测集。

定理 8.1.1. 零测集为可测集。

证明. 代入弱化后的条件，注意外测度的单调性即可。 □

定理 8.1.2. 可测集的有限并可测。故可测集构成代数。

证明. 只证二可测集的并可测。借助二集可测的 Carathéodory 条件，有

$$\begin{aligned} m^*(A) &= m^*(A \cap E_1) + m^*\left(A \cap \complement E_1 \cap E_2\right) + m^*\left(A \cap \complement E_1 \cap \complement E_2\right) \\ &\geq m^*(A \cap [E_1 \cup E_2]) + m^*\left(A \cap \complement [E_1 \cup E_2]\right). \end{aligned}$$ □

定理 8.1.3. 无交可测集的有限并满足

$$m^*\left(A \cap \bigcup E_k\right) = \sum m^*(A \cap E_k).$$

证明. 注意到 Carathéodory 条件的

$$A \cap \bigcup^n E_k \cap E_n = A \cap E_n$$

以及

$$A \cap \bigcup^n E_k \cap \complement E_n = A \cap \bigcup^{n-1} E_n,$$

归纳即可。 □

推论 8.1.1. 可测集的测度有限可加。

定理 8.1.4. 可测集的可数并可测。故可测集构成 σ-代数。

证明. 不妨设诸集无交。设其并为 E，则根据前开命题及单调性，有

$$m^*(A) \geq \sum^n m^*(A \cap E_k) + m^*\left(A \cap \complement E\right).$$

让 $n \to \infty$，借助次可加性即可。 □

定理 8.1.5. 区间是可测集。

证明. 只证 $I=(a,\infty)$ 型区间可测。不妨设 a 不在 A 内且将之分割为 $A\cap \complement I=A_1$ 与 $A\cap I=A_2$。对于 A 的任意覆盖 $\{I_k\}$ 均同样割裂之，有

$$m^*(A_1)+m^*(A_2)\leq \sum \ell(I_k),$$

故满足弱化后条件。 □

定义 8.1.4. 开集的可数交为 G_δ 型集。

定义 8.1.5. 闭集的可数并为 F_σ 型集。

注意 $\mathbb{R}$ 中开集为区间的并，故 G_δ 型（以及 F_σ 型）集可测。

定义 8.1.6. 包含开集的最小 σ-代数称为 *Borel* σ-代数，其元素称为 *Borel* 集。

定理 8.1.6. $\mathbb{R}$ 中可测集包含 *Borel* σ-代数。区间，开集，闭集，G_δ 与 F_σ 型集可测。

命题 8.1.4. 可测集平移后可测。

证明. 在 Carathéodory 条件中将 E 的平移转化为 A 的平移，注意外测度的平移不变即可。 □

8.1.4 Lebesgue 可测集的内外逼近

引理 8.1.1. 对 $A\subset B$，有

$$m^*(B-A)=m^*(B)-m^*(A).$$

证明. 注意由 Carathéodory 条件，

$$m^*(B)=m^*(B\cap A)+m^*(B-A).$$ □

定理 8.1.7. 下列条件与 E 的可测性等价。

(a) 对 $\epsilon>0$，存在包含 E 的开集 $\mathcal{O}$ 满足 $m^*(\mathcal{O}-E)<\epsilon$;

(b) 存在包含 E 的 G_δ 型集满足 $m^*(G-E)=0$;

(c) 对 $\epsilon>0$，存在 E 内的闭集 F 满足 $m^*(E-F)<\epsilon$;

(d) 存在 E 内的 F_σ 型集满足 $m^*(E-F)=0$。

证明. 只证前二者。后二者取补可得。

设 E 可测，则存在区间并任意逼近其外测度，取 $\mathcal{O}$ 为区间并即可。有

$$m^*(\mathcal{O}-E)=m^*(\mathcal{O})-m^*(E)<\epsilon.$$

对于无界 E，分为可数个有界部分即可。不断缩小 ϵ，可得所求 G_δ 型集。鉴于零测集可测，又 $E=G\cap\complement(G-E)$，知 E 可测。 □

注意到对于任意集合 E 都存在开集使 $m^*(\mathcal{O})-m^*(E)$ 任意小，然而外测度的减性仅对可测集成立。

定理 8.1.8. 对有限测度的 $E\subset\mathbb{R}$，存在有限多个区间的并 $\mathcal{O}$ 满足 $m*(E-\mathcal{O})+m^*(\mathcal{O}-E)<\epsilon$。

证明. 取开集 U 为 E 的 $\epsilon/2$ 外逼近，写 U 为区间并，选取其中有限个以 $\epsilon/2$ 逼近之，注意到两差均小于 $\epsilon/2$ 即可。 □

8.1.5 Lebesgue 测度的其他性质

定义 8.1.7. 对可测集定义其 *Lebesgue* 测度为外测度。

定理 8.1.9. *Lebesgue* 测度是可数可加的。

证明. $m(\cup)\leq\sum m$ 由次可加性可得，由有限可加性和单调性又有 $m(\cup)\geq\sum^n m$，让右侧 $n\to\infty$ 即可。 □

定理 8.1.10. $\mathbb{R}$ 中可测集包含 *Borel* σ-代数。区间测度为长度，且平移不变，可数可加。

定义 8.1.8. 一个可数集族称为升链，如果 $E_k\subset E_{k+1}$，相似定义降链。

定理 8.1.11. *Lebesgue* 测度满足

(a) 若 $\{A_k\}$ 为升链，则

$$m\left(\bigcup A_k\right)=\lim_{k\to\infty}m(A_k).$$

(b) 若 $\{B_k\}$ 为降链且 $m(B_1)<\infty$，则

$$m\left(\bigcap B_k\right)=\lim_{k\to\infty}m(B_k).$$

证明. 不妨设诸 A_k 测度有限，则构造 A_k 的差得到等价的无交序列，后应用可数可加性即可。

对于 B 则关于 B_1 取补后构造等价无交序列，借助减性即可。 □

定义 8.1.9. 称一性质在 E 上几乎处处成立，如果它在除一零测集外成立。

引理 8.1.2 (Borel-Cantelli)**.** 若 $\{E_k\}$ 测度和有限，则几乎任意 $x \in \mathbb{R}$ 最多属于有限多个 E_k。

证明.
$$m\left(\bigcap \bigcup_{k=n} E_k\right) = \lim_{n\to\infty} m\left(\bigcup_{k=n} E_k\right) = 0.$$
□

8.1.6　不可测集

引理 8.1.3. 设 $E \subset \mathbb{R}$ 有界且存在可数无限有界实数集 Λ 其元素使诸 $\lambda + E$ 无交，则 $m(E) = 0$。

证明. 注意平移不变性与可数可加性，以及有界性即可。 □

定义 8.1.10. 定义二实数有理等价，若其差为有理数。

定理 8.1.12 (Vitali)**.** 任意正测度的实数集 E 存在一不可测子集。

证明. 不妨设 E 有界，取 E 内有理等价类的代表元集 $\mathcal{C}$，有上述引理知 $m(\mathcal{C}) = 0$。再选取 Λ 为 $\mathbb{Q}$ 足够大的子集，使诸 $\lambda + E$ 可覆盖 E，矛盾。 □

定理 8.1.13. 存在 $\mathbb{R}$ 的无交子集 A 与 B 满足

$$m^*(A \cup B) < m^*(A) + m^*(B).$$

8.1.7　Cantor 集与 Cantor-Lebesgue 函数

定义 8.1.11. 定义 *Cantor* 集为 $I = [0,1]$ 不断挖去各连通分量之三等分之中间部分的结果。令诸 C_k 为每一步的结果，$\mathbf{C} = \cap C_k$。

定理 8.1.14. *Cantor* 集不可数，且 $m(\mathbf{C}) = 0$。

证明. 易证其可测且测度为零。参考定理2.2.22的证明过程知不可数。 □

定义 Cantor-Lebesgue 函数 φ 函数如下。对 $\mathcal{O}_k = [0,1] - C_k$ 的 $2^k - 1$ 个连通分量分别赋值

$$\left\{1/2^k, 2/2^k, 3/2^k, \cdots, \left(2^k - 1\right)/2^k\right\}.$$

令 $\varphi(0) = 0$ 且

$$\varphi(x) = \sup\{\varphi(t) \mid t \in [0, x)\}.$$

定理 8.1.15. *φ 连续单调递增且在 $\mathcal{O}$ 内导数为零，并将 $[0,1]$ 映满 $[0,1]$。*

证明. 注意 φ 在 $x \in \mathbf{C}$ 附近的跳跃不超过其两侧 $\mathcal{O}$ 的跳跃，而随 k 增大其可任意小。故其连续，由介值定理知映满。 □

定理 8.1.16. *连续严格递增映射 $\psi(x) = \varphi(x) + x$ 满足:*

(a) *将零测 $\mathbf{C}$ 映为一正测集;*

(b) *将一可测 $E \subset \mathbf{C}$ 映为不可测集。*

证明. 注意到 $[0,2] = \psi(\mathcal{O}) + \psi(\mathbf{C})$ 且开集与闭集映射后仍为开集与闭集，故仍可测。将 $\mathcal{O}$ 分解成区间，映射后区间长度不变即知 $m(\psi(\mathcal{O})) = 1$。

因此，$m(\psi(\mathbf{C})) = 1$ 而含有不可测集，其原像为零测可测集。 □

引理 8.1.4. *严格递增映射存在连续逆。*

引理 8.1.5. *连续映射 f 的 Borel 集像的原像为 Borel 集。*

证明. 注意 $f^{-1}\left(\complement U\right) = \complement f^{-1}(U)$，$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$。 □

定理 8.1.17. *存在非 Borel 集的可测集。*

证明. Borel 集经严格增映射后仍为 Borel 集,可测集映射后可能不可测。 □

8.2　可测函数

8.2.1　可测函数的和、积与复合

命题 8.2.1. *对于在可测集上定义的函数 f，下列命题等价。*

1. *对任意 c，$f(x) > c$ 的 x 可测;*

2. *对任意 c，$f(x) \geq c$ 的 x 可测;*

3. 对任意 c，$f(x) < c$ 的 x 可测；

4. 对任意 c，$f(x) \le c$ 的 x 可测；

证明. 只证前二。将 $f(x) \ge c$ 的 x 视为诸 $f(x) > c - 1/k$ 的交，而 $f(x) > c$ 视为诸 $f(x) \ge c + 1/k$ 的并。 □

定义 8.2.1. 可测集上定义的函数 f 称为可测的，若其满足前开命题之一。

命题 8.2.2. 可测集上定义的 f 为可测当且仅当开集的原像均可测。

证明. 注意开集可写为区间并，而 $(a,b) = (-\infty, b) \cap (a, +\infty)$。 □

命题 8.2.3. 可测集上定义的连续函数可测。

命题 8.2.4. 区间上定义的单调函数可测。

命题 8.2.5. 设 $f: E \to \overline{\mathbb{R}}$。

1. 若 f 可测而 g 与 f 几乎处处相等，则 g 可测；

2. 设 D 为可测子集，f 可测当且仅当在 D 和 $E - D$ 上可测。

定理 8.2.1. f 和 g 为几乎处处有界的可测函数，则 $\alpha f + \beta g$ 与 fg 可测。

证明. 只证 $f + g$ 和 fg 可测。$f + g < c$，则存在 $q \in \mathbb{Q}$ 满足 $f < q < c - g$，将诸可数个 q 并起即可。又注意

$$fg = \frac{1}{2}\left[(f+g)^2 - f^2 - g^2\right]$$

以及可测函数的平方可测即可。 □

例 8.2.1. 由定理*8.1.16*可知，可测函数的复合 $\chi_E \circ \psi^{-1} > 0$ 的原像 $\psi(E)$ 不可测。

定理 8.2.2. 设 f 连续可测而 g 可测，则 $f \circ g$ 可测。

证明. 注意 $(f \circ g)^{-1}(\mathcal{O}) = g^{-1}\left(f^{-1}(\mathcal{O})\right)$ 即可。 □

由是立得 $|(f)|$ 与 $|(f)|^p$ 可测。

命题 8.2.6. $max\{f_1, \cdots, f_n\}$ 与 $min\{f_1, \cdots, f_n\}$ 可测。

由是立得诸

$$|f| = \max\{f, -f\}, \quad f^+ = \max\{f, 0\}, \quad f^- = \max\{-f, 0\}$$

可测。故 f 可写为可测函数之差 $f = f^+ - f^-$。

8.2.2 可测函数的极限与逼近

定义 8.2.2. 称 $\{f_n\}$ 一致收敛于 f，若对于充分大的 n 有 $\|f-f_n\|<\epsilon$。

命题 8.2.7. 若可测函数列 $\{f_n\}$ 逐点收敛于 f，则 f 可测。

证明. 若 $f(x)<c$，对于充分大的 N 有 $f_{N:}(x)<c$，并起诸 N 即可。 □

定义 8.2.3. 简单函数为仅取有限多个值的可测函数。

注意简单函数 φ 均可写为

$$\varphi=\sum^{n}c_k\cdot\chi_{E_k}.$$

引理 8.2.1 (简单函数逼近)**.** 可测函数存在 ϵ-接近的上下逼近 φ_ϵ 与 ψ_ϵ。

证明. 将可测函数的值域分割为若干 ϵ 小区间即可。 □

定理 8.2.3 (简单函数逼近)**.** 可测函数存在满足 $|\varphi_n|<\left|f:E\to\overline{\mathbb{R}}\right|$ 的逼近。若 f 恒正，则存在诸 φ_n 递增。

证明. 设 f 恒正。在第 n 步截断 f 的值域至 n 后作 $1/n$ 逼近即可。取 $\varphi_n=\max\{\varphi_1,\cdots,\varphi_n\}$ 可得递增序列。

一般情形将 f 写为 f^+-f^- 即可。 □

8.2.3 Littlewood 的三大原理

三大原理谓

1. 每个可测集都几乎是区间的并；（定理8.1.8）
2. 每个可测函数都几乎是连续的；（定理8.2.5）
3. 每个可测函数的逐点收敛序列都几乎是一致收敛的。（定理8.2.4）

引理 8.2.2. 对有限测度的 E 上定义的逐点收敛可测函数列 $\{f_n\}\to f$，存在充分大的 N 使 $f_{N:}$ 在任意逼近 E 的集合上任意逼近 f。

证明. 注意由逐点收敛，诸 N 的 A 为升列且并为 E 即可。 □

定理 8.2.4 (Egoroff 定理)**.** 有限测度的 E 上定义的逐点收敛可测函数列 $\{f_n\}\to f$ 在一 ϵ-接近 E 的闭集 F 上一致收敛。

证明. 据上引理，对任意 n 取 A_n 与 E 为 $\epsilon/2^{n+1}$-接近而 $f_{N:}$ 与 f 为 $1/n$-接近，由是其交 A 与 E 为 ϵ-接近且一致收敛。再取闭集逼近 A 即可。 □

命题 8.2.8. *对在 E 上定义的简单函数，存在连续函数在任意逼近 E 的集合上与之相等。*

证明. 对诸 E_k 选取闭集逼近之，后调用 Urysohn 引理。 □

定理 8.2.5 (Lusin 定理)**.** *对可测函数，前开命题成立。*

证明. 由简单函数逼近之，后以连续函数逼近之，再选取一致收敛的闭集。 □

第九章　积分论

9.1　Lebesgue 积分

9.1.1　Riemann 积分

Riemann 积分的定义如前不赘，唯注意下例。

例 9.1.1. 对于 *Dirichlet* 函数

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q},\\ 0, & x\in[0,1]-\mathbb{Q}.\end{cases}$$

虽可写为可数个简单函数之和，亦知其非 *Riemann* 可积。

9.1.2　有界函数在有限测度集上的 Lebesgue 积分

定义 9.1.1. 对于有限测度集 E 上的简单函数 ψ，定义其积分如

$$\int_E\psi=\sum a_i\cdot m(E_i).$$

表达式中诸 a_i 不等。

引理 9.1.1. 纵表达式中 a_i 简并，亦无改其积分值。

命题 9.1.1 (积分的线性与单调性)**.** 对于简单函数 φ 与 ψ，有

$$\int(\alpha\varphi+\beta\psi)=\alpha\int\varphi+\beta\int\psi.$$

以及若 $\varphi<\psi$，则

$$\int\varphi<\int\psi.$$

证明. 将 φ 与 ψ 共用一组 E_i 展开即可。 □

此时已足够推断阶梯函数的 Riemann 与 Lebesgue 积分相符。

定义 9.1.2. 对有限测度集上的有界函数 f，定义其 *Lebesgue* 上积分为全体 $\varphi > f$ 之简单函数的 *Lebesgue* 积分的下界。相似定义 *Lebesgue* 下积分。

定义 9.1.3. 前开 f 若 *Lebesgue* 上下积分相等，则称之其 *Lebesgue* 积分。

定理 9.1.1. *Lebesgue* 积分兼容 *Riemann* 积分。

证明. 注意到阶梯函数含于简单函数即可。 □

例 9.1.2. 注意 *Dirichlet* 函数 $f = \chi_{\mathbb{Q}}$，故 $\int f = m(\mathbb{Q}) = 0$。

定理 9.1.2. 有限测度集上定义的有界函数可积。

证明. 注意其存在简单函数的上下逼近即可。 □

命题 9.1.2 (积分的线性与单调性)**.** 对于有限测度集上的可测函数 f 与 g，有

$$\int (\alpha f + \beta g) = \alpha \int f + \beta \int g.$$

以及若 $f < g$，则

$$\int f < \int g.$$

证明. 只证 $\alpha = \beta = 1$ 的情况，目标积分不超二 Lebesgue 上积分之和而不低于二 Legesgue 下积分之和，再注意上下积分之和即积分之和。

单调性考虑 $\int (f - g)$ 即可。 □

推论 9.1.1. 对无交可测集 A 与 B，有

$$\int_{A \cup B} f = \int_A f + \int_B f.$$

推论 9.1.2. 对有限测度集上的有界函数 f，有

$$\left| \int f \right| \leq \int |f|.$$

证明. 注意 $-|f| \leq f \leq |f|$ 即可。 □

命题 9.1.3. 若有限测度集上的有界函数列 $\{f\}$ 一致收敛于 f，则

$$\lim_{n \to \infty} \int f_n = \int \lim_{n \to \infty} f_n.$$

证明. 注意 $\|f-f_n\|$ 可以任意小，借助前开推论即可。 □

例 9.1.3. 考虑 f_n 定义为 $f(0)=0$，$f(1/n)=n$，$f(2/n)=0$ 并线性连接，则其除逐点收敛于零外满足前开所有条件，而积分后序列非零。

定理 9.1.3 (有界收敛定理)**.** 若有限测度集上的各点一致有界函数列 $\{f\}$ 逐点收敛于 f，则

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n=\int\lim_{n\to\infty}f_n.$$

证明. 由 Egoroff 定理，f_n 在任意接近 E 的闭集上一致收敛。故定义域的残余部分的积分任意小。 □

9.1.3 非负函数的 Lebesgue 测度

定义 9.1.4. 定义 f 的支撑为使之非零的定义域部分[1]。

定义 9.1.5. 设 f 为 E 上的非负可测函数，定义其积分

$$\int_E f=\sup\left\{\int_E h\,\middle|\,0\le h\le f\right\}.$$

其中 h 为有限测度集上定义的有界可测函数。

命题 9.1.4 (Chebychev 不等式)**.** 设 f 非负可测，对 $\lambda>0$，有

$$m(f\ge\lambda)\le\frac{1}{\lambda}\int_E f.$$

证明. 取 $g=\lambda\chi_{f\ge\lambda}$，并注意 $0\le g\le f$。 □

命题 9.1.5. 设 f 非负可测，则 $\int f=0$ 当且仅当 f 几乎处处为零。

证明. 由前不等式，诸 $m(f\le 1/n)=0$，并起即可。 □

命题 9.1.6 (积分的线性与单调性)**.** 对于非负可测函数 f 与 g，有

$$\int(\alpha f+\beta g)=\alpha\int f+\beta\int g.$$

以及若 $f<g$，则

$$\int f<\int g.$$

[1] 这和拓扑学上定义为其闭包不同。

证明. 易证 $\int f + \int g \leq \int (f+g)$。反向的不等式则注意取 $h = \min\{f, l\}$，$k = l - h$，则 h 与 k 有界可测且

$$\int l = \int (h+k) \leq \int f + \int g.$$

左侧取上界即可。单调性亦左侧取上界可证。 □

定理 9.1.4 (积分区间的可加性)**.** *f 非负可测而 A 与 B 为无交可测集，则*

$$\int_{A \cup B} f = \int_A f + \int_B f.$$

引理 9.1.2 (Fatou 引理)**.** *非负可测函数列 $\{f_n\}$ 几乎处处逐点收敛于 f，则*

$$\int_E f \leq \liminf \int_E f_n.$$

证明. 除开一零测集，可设其处处收敛。对任意 h，设 $h_n = \min\{h, f_n\}$，故 $h_n \to h$ 且由有界收敛定理

$$\lim_{n\to\infty} \int_E h_n = \int_E h.$$

再注意 $h_n \leq f_n$，$\lim \int h_n \leq \liminf \int f_n$ 即可。 □

例 9.1.4. *令 $E = [0,1)$ 且 $f_n = n\chi_{(0,1/n)}$，则 f_n 极限的积分与积分的极限分别为 0 和 1。再如 $\chi_{(n,n+1)}$ 逐点收敛至 0 但显然积分与极限不可互换。*

定理 9.1.5 (单调收敛定理)**.** *在 Fatou 引理的条件下，若 $\{f_n\}$ 递增，则*

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int f.$$

证明. 由积分的单调性知

$$\limsup \int f_n \leq \int f.$$ □

推论 9.1.3. *非负可测函数和 $\sum u_n$ 几乎处处逐点收敛于 f，则*

$$\int f = \sum \int u_n.$$

定义 9.1.6. *积分有限的可测函数称为可积函数。*

命题 9.1.7. *可积函数几乎处处有限。*

证明. 注意对任意 n，有

$$m(f \geq n) \leq \frac{1}{n}\int f.$$

□

引理 9.1.3 (Beppo Levi 引理)**.** 非负可测函数列 $\{f_n\}$ 诸积分一致有界，则 f_n 逐点收敛于一几乎处处有界的可积函数。

证明. 递增数列收敛于一广义实数，故定义 $f(x) = \lim f_n(x)$，复用前开命题与有界收敛定理。 □

9.1.4 一般 Lebesgue 积分

注意 $f = f^+ - f^-$ 且 $|f| = f^+ + f^-$。

命题 9.1.8. 对可测函数 f，f^+ 与 f^- 可积当且仅当 $|f|$ 可积。

定义 9.1.7. 若 $|f|$ 可积则称可测函数 f 可积且定义

$$\int f = \int f^+ - \int f^-.$$

命题 9.1.9. 若 f 可积，则 $|f|$ 几乎处处有限且对零测集 E_0，

$$\int_E f = \int_{E-E_0} f.$$

证明. 前开命题知几乎处处有限。再注意对非负函数有相同成立即可。 □

命题 9.1.10 (比较审敛法)**.** 若 $|f|$ 处处小于一可积函数，则 f 可积且

$$\left|\int f\right| \leq \int |f|.$$

证明. 可积性易证。再由实数的三角不等式，

$$\left|\int f^+ - \int f^-\right| \leq \int f^+ + \int f^- \leq \int |f|.$$

□

注意由命题9.1.9，两可积函数若某处值无限，则积分可径直挖去该点而无需定义在该点的值。

命题 9.1.11 (积分的线性与单调性). 对于可积函数 f 与 g，有

$$\int(\alpha f+\beta g)=\alpha\int f+\beta\int g.$$

以及若 $f<g$，则

$$\int f<\int g.$$

证明. 可积性由 $|f+g|\leq|f|+|g|$ 得，其余易证。 □

推论 9.1.4. 对无交可测集 A 与 B，有

$$\int_{A\cup B}f=\int_A f+\int_B f.$$

定理 9.1.6 (Lebesgue 控制收敛定理). 逐点收敛于 f 的可测函数列 $\{f_n\}$ 满足 $|f_n|\leq g$，则有 f 可积且

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n=\int f.$$

证明. 注意到由 Fatou 引理，

$$\int(g+f)\leq\liminf\int(g+f_n),$$

以及

$$\int(g-f)\leq\liminf\int(g-f_n).$$ □

定理 9.1.7 (一般的 Lebesgue 控制收敛定理). 逐点收敛于 f 的可测函数列 $\{f_n\}$ 满足 $|f_n|\leq g_n$，若 $\{g_n\}$ 几乎处处收敛于 g，且

$$\lim_{n\to\infty}\int g_n=\int g,$$

则有 f 可积且

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n=\int f.$$

证明. 证法同上。 □

9.1.5 积分的可数可加性与连续性

定理 9.1.8 (积分的可数可加性). 设 f 可积而 $\{E_n\}$ 为无交可测集族，其并为 E，则

$$\int f=\sum\int_n f.$$

证明. 对 $f_n = f\chi_{E_1\cap\cdots\cap E_n}$ 应用控制收敛定理。 $\square$

定理 9.1.9 (积分的连续性)**.** f 为 E 上的可积函数，则

(a) 若 $\{A_k\}$ 为升链，则

$$\int_{\cup A_n} f = \lim_{n\to\infty}\int_{A_n} f.$$

(b) 若 $\{B_k\}$ 为降链，则

$$\int_{\cap B_n} f = \lim_{n\to\infty}\int_{B_n} f.$$

9.1.6　一致可积性

引理 9.1.4. 有限测度集可以被划分为有限个测度小于 δ 的无交集。

证明. 注意 $m(E-[-n,n])$ 迟早小于 δ 后划分 $[-n,n]$ 即可。 $\square$

命题 9.1.12. f 在 E 上可积，则对于任意小的 ϵ，存在 δ 使得对任意满足 $m(A)<\delta$ 的子集 A 有

$$\int_A |f| < \epsilon.$$

反之，若 E 测度有限而对任意小的 ϵ，存在上述的 δ，则 f 可积。

证明. 仅考虑正的 f。正向结论可由定义以有界函数逼近 f 并注意有界性推得。反向结论则选取一对 ϵ 与 δ，并由前引理将 E 写为有限个小集的并。 $\square$

定义 9.1.8. E 上的可测函数族称为一致可积，若对于任意小的 ϵ，存在 δ 使得对任意 $m(A)<\delta$ 以及其中的 f，有

$$\int_A |f| < \epsilon.$$

例 9.1.5. 设 g 可积，所有满足 $|f|<g$ 的可测函数为一致可积。

命题 9.1.13. 有限个可积函数构成的族是一致可积的。

命题 9.1.14. 若有限测度的 E 上一致可积的 $\{f_n\}$ 几乎处处逐点收敛于 f，则 f 可积。

证明. 由命题9.1.12，诸 f_n 的积分一致有界，由 Fatou 引理

$$\int |f| \le \liminf \int |f_n|.$$

$\square$

定理 9.1.10 (Vitali 收敛定理)**.** *若有限测度的 E 上一致可积的 $\{f_n\}$ 几乎处处逐点收敛于 f，则*

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n = \int f.$$

证明. 由 Egoroff 定理，选取任意逼近 E 的 A 使得 $\{f_n\}$ 一致收敛，则

$$\left|\int_E f_n - \int_E f\right| \le \int_{E-A} |f_n - f| + \int_A |f_n| + \int_A |f|.$$

第一项积分由一致收敛任意小，后二项由一致可积与 Fatou 引理任意小。 □

定理 9.1.11. *有限测度集上几乎处处收敛于零的非负可测函数列 $\{h_n\}$，当且仅当其一致可积时有*

$$\lim_{n\to\infty}\int h_n = 0.$$

证明. 只证极限为零推出一致可积。对任意 $\epsilon > 0$，可以选取足够大的 N 使

$$\int h_{N:} < \epsilon,$$

再注意有限个 $h_{:N}$ 一致可积即可。 □

9.2　进一步的主题

9.2.1　一致可积性与测度紧密型

例 9.2.1. *对无限测度的 E，考虑 $f = \chi_{[n,n+1]}$ 知 Vitali 定理不适用。*

命题 9.2.1. *设 f 可积，则在一有限测度集 E_0 外其积分任意小。*

证明. 有定义知存在有限测度上有界的函数其积分任意逼近 f。 □

定义 9.2.1. *E 上的可测函数族 $\mathcal{F}$ 称为紧密的，如果存在一有限测度集 E_0 使其全体在其外的积分一致任意小。*

定理 9.2.1 (Vitali 收敛定理)**.** *若 E 上一致可积且紧密的 $\{f_n\}$ 几乎处处逐点收敛于 f，则*

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n = \int f.$$

证明. 选取 E_0 使其外的积分任意小，其内的积分调用前开 Vitali 定理。 □

推论 9.2.1. *E 上几乎处处收敛于零的非负可测函数列 $\{h_n\}$，当且仅当其一致可积且紧密时有*

$$\lim_{n\to\infty}\int h_n = 0.$$

9.2.2 依测度收敛

定义 9.2.2. E 上几乎处处有限的可测函数列 $\{f_n\}$ 称为依测度收敛于可测的 f，如果对任意 η，

$$\lim_{n\to\infty} m\{x \mid |f_n(x) - f(x)| > \eta\} = 0.$$

命题 9.2.2. 有限测度 E 上的逐点收敛是一致收敛。

证明. 由 Egoroff 定理选取逼近 E 的闭集上的一致收敛即可。 □

例 9.2.2. 考虑下述诸区间上的特征函数，虽依测度收敛却非逐点收敛。

$$[0,1], [0,1/2], [1/2,1], [0,1/3], [1/3,2/3], [2/3,1], [0,1/4]\cdots.$$

定理 9.2.2 (Riesz)**.** 依测度收敛的函数列存在几乎处处逐点收敛的子列。

证明. 由依测度收敛知存在子列使 $m(|f_{n_k} - f| > 1/k) < 1/2^k$，再由 Borel-Cantelli 引理知几乎每个 x 都收敛于 f。 □

推论 9.2.2. 非负可积函数列 $\{f_n\}$ 满足

$$\lim_{n\to\infty}\int f = 0$$

当且仅当其依测度收敛于零且一致可积且紧密。

证明. 由前开推论与 Chebyshev 不等式知其依测度收敛。

反之，假设积分不收敛于零，则存在一子列之积分漂浮于一实数之上，此子列存在一几乎处处逐点收敛之子列，由 Vitali 定理知矛盾。 □

9.2.3 Riemann 与 Lebesgue 可积性的特征

引理 9.2.1. 设 $\{\varphi_n\}$ 与 $\{\psi_n\}$ 分别为可积函数的升列与降列且夹挤 f，若

$$\lim_{n\to\infty}\int[\psi_n - \varphi_n] = 0,$$

则 $\{\varphi_n\}$ 与 $\{\psi_n\}$ 几乎处处逐点收敛于 f 且 f 可积且三者积分相等。

证明. 由单调收敛定理，$\int(\psi - \varphi) \to 0$。由命题9.1.5知其几乎处处为零，从而几乎处处逐点收敛于 f，进而其可测。三积分相等易证。 □

定理 9.2.3. 有限测度集上的有界 f，其可积当且仅当其可测。

证明. 若假设可测，由定理9.1.2知可积。

若已知可积，则由定义知存在 f 的上下简单函数逼近且积分差为零，取诸 $\max\{\varphi_i\}$ 与 $\min\{\psi_i\}$ 可设其分别为升降列，再调用前开引理。 □

定理 9.2.4 (Lebesgue)**.** *紧区间上的有界函数 f 为 Riemann 可积当且仅当其非连续点为零测集。*

证明. 假定 Riemann 可积，则存在一列加细的划分 $\{P_n\}$，对应上下逼近 $\{\varphi_n\}$ 与 $\{\psi_n\}$ 且由前开引理几乎处处收敛于 f。在除开 P_∞ 的点处，对 ϵ 取足够大的 N 即可使此处 $\psi_n - \varphi_n < \epsilon$，从而此点的 δ 邻域内变差任意小。

反之，假定 f 不连续点为零测集。对加细至稠密的划分列 P_n 以及 P_∞ 及不连续点以外的点，选取足够的大 n 使 P_n 的间隙小于 δ，则 f 在诸间隙内的变差小 ϵ，故上下逼近可互相接近而积分相等。 □

9.3　微分与积分

9.3.1　单调函数的连续性

定理 9.3.1. *单调函数最多仅有可数个不连续点。*

命题 9.3.1. *对开区间内的可数集，存在增函数仅在此可数集上不连续。*

证明. 取 f 如下，在任意 $E - C$ 的点有足够小的开区间不包含 $q_1, \cdots, q_n$。

$$f(x) = \sum_{q_n \le x} 1/2^n.$$ □

9.3.2　单调函数的可微性

定义 9.3.1. *非退化紧区间集 $\mathscr{F}$ 称为 E 的 Vitali 覆盖，如果对于任意点 x 和 $\epsilon > 0$，存在长度小于 ϵ 的区间覆盖 x。*

引理 9.3.1 (Vitali 覆盖引理)**.** *设 E 为有限外测度集，$\mathscr{F}$ 是其 Vitali 覆盖，则其无交有限子集任意可接近 E。*

证明. 若存在有限子集覆盖之则证毕。反之，依” 在剩余无交区间内选取区间长度过半者” 之程式选取” 下一区间” 而得无交可数族，则任意有限子集外的区间与可数族内一区间有交。将后者扩大 5 倍即可覆盖之。故其有限子集外者扩大 5 倍后便可覆盖 E。 □

定义 9.3.2. 定义上导数

$$\overline{\mathbf{D}}f(x)=\lim_{h\to 0}\left[\sup_{0<|t|\le h}\frac{f(x+t)-f(x)}{t}\right].$$

相似定义下导数。若二者相等则称可导。

引理 9.3.2. 设 f 为紧区间上的增函数，则对任意正数 α，

$$m^*\left(\overline{\mathbf{D}}f\ge\alpha\right)\le\frac{1}{\alpha}\left[f(b)-f(a)\right].$$

特别地，$m^*\left(\overline{\mathbf{D}}f=\infty\right)=0$。

证明. 注意诸 $\Delta f\ge\alpha^-(d-c)$ 的区间 $[c,d]$ 构成其 Vitali 覆盖。 □

定理 9.3.2 (Lebesgue)**.** 开区间上的单调函数几乎处处可导。

证明. 设 E 中上导数大于 α 而下导数小于 β，则诸 $\Delta f\le\beta(d-c)$ 的 $[c,d]$ 构成 E 的 Vitali 覆盖。$\sum^n\Delta f\le\beta m^*(E)$。再由前开引理，

$$m^*(E)\le\frac{1}{\alpha}\sum^n\Delta f.$$ □

定义 9.3.3. 紧区间上的可积函数 f，两侧水平延伸其值，对正数 h 定义差分与平均分别为

$$\mathrm{Diff}_h f(x)=\frac{f(x+h)-f(h)}{h},\quad \mathrm{Av}_h f(x)=\frac{1}{h}\int_x^{x+h}f.$$

推论 9.3.1. 紧区间上的增函数，其导数可积且

$$\int f'\le f(b)-f(a).$$

证明. 由 Fatou 引理，

$$\int f'\le\liminf\int\mathrm{Diff}\,f.$$ □

参考 Cantor-Lebesgue 函数知等号可严格成立。

9.3.3　有界变差函数：Jordan 定理

定义 9.3.4. 定义变差为

$$V(f,P)=\sum|\Delta f|,$$

全变差为 $TV=\sup V$。若全变差有界，则称之有界变差。

例 9.3.1. 增函数，*Lipschitz*-1 的函数是有界变差的。$x\cos(\pi/2x)$ 则不是。

引理 9.3.3. 有界变差函数可以写为如下二增函数之差：

$$f(x) = [f(x) + TV(x)] - TV(x). \tag{9.1}$$

定理 9.3.3 (Jordan)**.** 紧区间上的函数有界变差当且仅当其为增函数之差。

证明. $f = g - h$ 称为其 Jordan 分解，只需注意

$$V(f, P) = \sum |\Delta f| \le \sum |\Delta g| + \sum |\Delta h|.$$ □

推论 9.3.2. 紧区间上的有界变差函数几乎处处可微且导数可积。

9.3.4　绝对连续函数

定义 9.3.5. 对任意 $\epsilon > 0$，存在 $\delta > 0$ 使 $\sum(b_k - a_k)$ 之一切区间族上 $\sum |\Delta f| < \epsilon$，则称 f 绝对连续。

例 9.3.2. *Cantor-Lebesgue* 函数虽连续却非绝对连续。

命题 9.3.2. *Lipschitz*-1 的函数绝对连续。

定理 9.3.4. 紧区间上的绝对连续函数可写为绝对连续的增函数之差。

证明. 注意绝对连续的 f 的全变差为绝对连续即可。 □

定理 9.3.5. 紧区间上的连续函数绝对连续当且仅当 $(0, 1]$ 的差分一致可积。

证明. 设其差分一致可积，注意 $\Delta \mathrm{Av}_h f = \int \mathrm{Diff}_h f$ 以及 $\lim \mathrm{Av}_h f = f$。

反之只证 f 为非负绝对连续增函数的情形，注意只需证" 任意小的区间集上的积分任意小" 即可，再藉 $\int \mathrm{Diff}_h f = 1/h \cdot \int [f(u+t) - f(v+t)]$。 □

可以发现如下的包含关系

$$\mathcal{F}_{Lip} \subset \mathcal{F}_{AC} \subset \mathcal{F}_{BV}.$$

且各族内的函数都可以如(9.1)写成族内二增函数之差。

9.3.5　积分下的微分

定理 9.3.6. 紧区间上的绝对连续函数几乎处处可微且

$$\int_a^b f' = f(b) - f(a).$$

证明. 注意

$$\lim_{h\to 0}\int_a^b \mathrm{Diff}_h f = \lim_{h\to 0}\left[\mathrm{Av}_h f(b) - \mathrm{Av}_h f(a)\right].$$

右侧为所求，左侧由定理9.3.5知一致可积后调用 Vitali 定理。 □

定理 9.3.7. 紧区间上的函数一致连续当且仅当其为一不定积分。

证明. 假设 $f = \int g$，注意由命题9.1.12，小测度上 g 的积分可任意小。 □

推论 9.3.3. 紧区间上单调的 f 为绝对连续当且仅当

$$\int_a^b f' = f(b) - f(a).$$

证明. 由推论9.3.1，

$$\int_a^x f' \leq f(x) - f(a), \quad \int_x^b f' \leq f(b) - f(x).$$

故二者均为相等，从而 $f = \int f'$。 □

引理 9.3.4. 紧区间上的 f 几乎处处为零当且仅当任意区间上积分为零。

证明. 注意任意区间上积分为零得出任意 G_δ 型集上积分为零即可。 □

定理 9.3.8. 紧区间上的可积函数几乎处处有

$$\mathbf{D}\int_a^x f = f(x).$$

证明. 借助前开命题，注意对任意 $[x_1, x_2]$，有

$$\int_{x_1}^{x_2} [F' - f] = F(x_2) - F(x_1) - \int_{x_1}^{x_2} f = 0.$$ □

并非所有函数解有定理9.3.6的适用。借助前开命题，考虑下述的分解

$$f = \left(f - \int f'\right) + \int f',$$

前者导数几乎处处为零，后者为一绝对连续函数，此谓其 Lebesgue 分解。

9.3.6 凸函数

定义 9.3.6. 满足下式者谓凸函数，其中 $a+b=1$。

$$\varphi(ax_1+bx_2) \le a\varphi(x_1)+b\varphi(x_2).$$

在上式中令

$$a=\frac{x_2-x}{x_2-x_1},\quad b=\frac{x-x_1}{x_2-x_1},$$

可得对于任意 $x_1<x<x_2$，

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(x_1)}{x-x_1} \le \frac{\varphi(x_2)-\varphi(x)}{x_2-x}.$$

命题 9.3.3. 若 φ 可微而 φ' 为增函数，则 φ 为凸函数。

引理 9.3.5 (弦斜率)**.** 凸函数上顺次三点 p_1，p，p_2，有 $k_{p_1p}<k_{p_1p_2}<k_{pp_2}$。

引理 9.3.6. 凸函数 φ 各点左右导数存在，且若 $u<v$ 则

$$\varphi'\left(u^-\right) \le \varphi'\left(u^+\right) \le \frac{\varphi(v)-\varphi(u)}{v-u} \le \varphi'\left(v^-\right) \le \varphi'\left(u^+\right).$$

推论 9.3.4. 开区间上的凸函数是 *Lipschitz* 的，在任意紧区间上绝对连续。

定理 9.3.9. 凸函数几乎处处可导且导函数为增函数。

定理 9.3.10 (Jensen 不等式)**.** 对凸函数 φ 与可积函数 f，设 $\varphi\circ f$ 可积，有

$$\varphi\left(\int_0^1 f\right) \le \int_0^1 \varphi\circ f.$$

证明. 令 $\alpha=\int f$，则

$$\int_0^1 \varphi\circ f \ge \int_0^1 \left[m(f-\alpha)+\varphi(\alpha)\right] = \varphi(\alpha).$$ □

将上开不等式用于加和为 1 的诸 α_n，

$$\sum \alpha_n \log x_n \le \log \sum \alpha_n x_n$$

可得算术-几何不等式。

第十章 L^p 空间

10.1 L^p 空间：完备性与逼近

10.1.1 赋范线性空间

定义 10.1.1. 二函数称为等价，如果其几乎处处相等。

定义 10.1.2. E 上满足

$$\int_E |f|^p < \infty$$

之函数等价类全体构成一线性空间，谓 L^p 空间。

由

$$|a+b|^p \leq 2^p \left\{|a|^p + |b^p|\right\}$$

知其可构成线性空间。

定义 10.1.3. 若 f 几乎处处满足

$$|f(x)| \leq M,$$

谓之本质有界。其等价类全体构成 L^∞。

定义 10.1.4. 线性空间上一泛函 $\|\cdot\|$ 称为范数，若

$$\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|,$$
$$\|\alpha f\| = |\alpha|\|f\|,$$
$$\|f\| \geq 0.$$

最后的等号严格成立当且仅当 $f=0$。

例 10.1.1. 易知 L^1 构成一赋范线性空间。

例 10.1.2. 易知 L^∞ 关于 $\|f\| = \inf M$ 构成一赋范线性空间。

例 10.1.3. 易知 ℓ_1 与 ℓ_∞ 构成一赋范线性空间。

例 10.1.4. 易知紧区间上的连续函数全体关于 $\|f\| = \max f$ 构成一赋范线性空间。

10.1.2　Young 不等式，Hölder 不等式，Minkowski 不等式

定义 10.1.5. 对于 $1 < p < \infty$ 以及 L^p 中的 f，定义

$$\|f\|_p = \left[\int |f|^p\right]^{1/p}.$$

定义 10.1.6. 对 $p \in (1, \infty)$ 定义其共轭 $q = p/(p-1)$，同在 $(1, \infty)$ 内且

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

定理 10.1.1 (Young 不等式)**.** 设 p，q 共轭，对正数 a，b 有

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

证明. 由 Jensen 不等式，

$$\frac{\log a^p}{p} + \frac{\log b^q}{q} \leq \log\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right).$$ □

定理 10.1.2 (Hölder 不等式)**.** 对于 L^p 之 f 与 L^q 之 g，有

$$\int |f \cdot g| \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q.$$

证明. 不妨设 $\|f\| = \|g\| = 1$，从而由 Young 不等式易得

$$\int |f \cdot g| \leq 1.$$ □

推论 10.1.1. f 之共轭 $f^* = \|f\|_p^{1-p} \cdot \operatorname{sgn}(f) \cdot |f|^{p-1}$ 为 L^q，且

$$\int f \cdot f^* = \|f\|_p, \quad \|f^*\|_q = 1.$$

定理 10.1.3 (Minkowski 不等式)**.** 若 f 与 g 均为 L^p，则 $f + g$ 同且

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

证明. 借助前开推论与 Hölder 不等式，

$$\|f+g\|_p = \int f\cdot(f+g)^* + \int g\cdot(f+g)^* \le \|f\|_p + \|g\|_p. \qquad \square$$

推论 10.1.2 (Cauchy-Schwarz 不等式)**.** 对于 L^2 内的 f 与 g，

$$\int |fg| \le \sqrt{\int f^2}\cdot\sqrt{\int g^2}.$$

推论 10.1.3. 若 $\mathcal{F}$ 内诸 $\|f\|_p \le M$，则 $\mathcal{F}$ 一致可积。

证明. 由 Hölder 不等式，

$$\left[\int_A |f|\right] \le \left[\int_E |f|^p\right]^{1/p} [m(A)]^{1/q}. \qquad \square$$

推论 10.1.4. 有限测度上若 $p_1 < p_2$，则 $L^{p_2} \subset L^{p_1}$。且

$$\|f\|_{p_1} \le c\|f\|_{p_2},$$

其中 $c = [m(E)]^{\frac{p_2-p_1}{p_1p_2}}$。

证明. 令 $p = p_2/p_1$，则 $f^{p_1} \in L^p$。由 Hölder 不等式，

$$\int_E |f|^{p_1} \le \|f\|_{p_2}^{p_1} [m(E)]^{1/q}. \qquad \square$$

例 10.1.5. 通常，有限测度集如 $(0,1]$ 上上述包含关系是严格的。取 $-1/p_1 < \alpha < -1/p_2$，有 $x^\alpha \in L^{p_1} - L^{p_2}$。

例 10.1.6. 在 $(0,\infty)$ 上 $f = x^{-1/2}/(1+|\log x|)$ 仅仅属于 L^2。

10.1.3　L^p 的完备性

定义 10.1.7. 称一序列收敛于 f，如果

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\| = 0.$$

定义 10.1.8. 完备的赋范线性空间称为 *Banach* 空间。

命题 10.1.1. 完备空间内的收敛序列均为 *Cauchy* 序列，且包含收敛子序列的 *Cauchy* 序列收敛。

证明. 后一命题注意

$$\|f_n - f\| \leq \|f_n - f_{n_k}\| + \|f_{n_k} - f\|. \qquad \square$$

定义 10.1.9. 一序列称为快速 *Cauchy* 的，如果对于一收敛级数 $\sum \epsilon_k$，有

$$\|f_{k+1} - f_k\| \leq \epsilon_k^2.$$

命题 10.1.2. 快速 *Cauchy* 序列都是 *Cauchy* 的，而任一 *Cauchy* 序列均有快速子列。

证明. 选取子列满足

$$\left\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right\| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k. \qquad \square$$

定理 10.1.4. L^p 内的快速 *Cauchy* 序列依范数且几乎处处逐点收敛。

证明. 依定义选取 $\sum \epsilon_k$ 后注意

$$m\left(|f_{k+1} - f_k|^p > \epsilon_k^p\right) \leq \frac{1}{\epsilon_k^p} \int |f_{k+1} - f_k|^p \leq \epsilon_k^p.$$

由 Borel-Cantelli 引理知 f_n 几乎处处逐点收敛。由 Fatou 引理，

$$\int |f - f_n|^p \leq \int |f_{n+k} - f_n|^p \leq \left[\sum_{j=n} \epsilon_j^2\right]^p. \qquad \square$$

定理 10.1.5 (Riesz-Fischer)**.** L^p 空间为 *Banach* 空间。且 *Cauchy* 序列存在子列几乎处处逐点收敛。

例 10.1.7. $f_n = n^{1/p}\chi_{(0,1/n]}$ 逐点收敛于零，但不依范数收敛。

定理 10.1.6. 对 $1 \leq p < \infty$，逐点收敛的序列依范数收敛当且仅当

$$\lim_{n\to\infty} \int |f_n|^p = \int |f|^p.$$

证明. 若依范数收敛，由三角不等式即得结论。反之设极限成立，令

$$h_n = \frac{|f_n|^p + |f|^p}{2} - \left|\frac{f_n - f}{2}\right|^p.$$

由凸性知 $h_n \geq 0$，且 $\lim h_n = |f|^p$ 逐点收敛，由 Fatou 引理

$$\int |f|^p \leq \liminf \int h_n = \int |f|^p - \limsup \int \left|\frac{f_n - f}{2}\right|^p. \qquad \square$$

定理 10.1.7. 对 $1 \le p < \infty$，逐点收敛的序列依范数收敛当且仅当 $\{|f_n|^p\}$ 一致可积且紧密。

证明. 由推论9.2.2，要求 $|f_n - f|^p$ 一致可积且紧密。再注意

$$|f_n - f|^p \le 2^p\left\{|f_n|^p + |f|^p\right\}, \quad |f_n|^p \le 2^p\left\{|f_n - f|^p + |f|^p\right\}. \qquad \square$$

10.1.4　逼近与可分性

定义 10.1.10. L^p 下一函数族称为稠密的，如果其依范数可任意逼近 L^p。

命题 10.1.3. 简单函数在 L^p 内稠密。

证明. 借助简单函数逼近引理，注意 $|\varphi_n - g|^p \le 2^{p+1}|g|^p$ 后控制收敛。 $\square$

命题 10.1.4. 对 $1 \le p < \infty$，阶梯函数在紧区间上的 L^p 稠密。

证明. 注意阶梯函数可在任意小的集合外逼近简单函数即可。而对 $p = \infty$，再小的非零测集皆会导致范数不得为零，是故于其不成立。 $\square$

定义 10.1.11. 空间谓可分者，其下存在一可数稠密子集。

定理 10.1.8. 对 $1 \le p < \infty$，L^p 可分。

证明. 紧区间内有理阶梯函数稠密，积分可由 $[-n, n]$ 上单调收敛逼近。 $\square$

例 10.1.8. 紧区间上的 L^∞ 不可分。

证明. 不可数特征函数族的区间稍变，逼近不复成立，不可以可数族逼近。 $\square$

定理 10.1.9. 对 $1 \le p < \infty$，有界支撑的连续函数在 L^p 中稠密。

10.2　L^p 空间的对偶与弱收敛

10.2.1　L^p 的对偶与表示

定义 10.2.1. 线性泛函是函数上的线性算子。

例 10.2.1. $T(f) = \int fg$ 与 $T(f) = \int f\,\mathrm{d}g$ 均为线性泛函。

定义 10.2.2. 所有 $|T(f)| \le M\|f\|$ 的 M 的下确界记作 $\|T\|$。

由三角不等式知线性泛函连续。同时有

$$\|T\| = \sup\{T(f) \mid \|f\| \le 1\}.$$

命题 10.2.1. 赋范线性空间上的线性算子的空间构成一赋范线性空间。

命题 10.2.2. L^p 上的算子

$$T(f) = \int g \cdot f$$

的范数为 $\|g\|$。

命题 10.2.3. 在一稠密子集上相等的线性算子相等。

引理 10.2.1. 可测函数 g 若对 L^p 上的简单函数 f 皆满足

$$\left|\int g \cdot f\right| \le M\|f\|,$$

则 $g \in L^q$，且 $\|g\| \le M$。

证明. 对于 $p > 1$，考虑 g 的下逼近，只证 $\int \varphi_n^p \le M^p$ 即可，再注意 $\varphi_n^q \le |g|\varphi_n^{q-1}$，以及 $p(q-1) = q$ 并借助题设。

对于 $p = 1$，需证 M 为一本质上界。考虑 f 为诸特征函数即可。 □

定理 10.2.1. 紧区间上的线性泛函满足 $T(f) = \int g \cdot f$ 的形式。

证明. 令 $\Phi(x) = T\chi_{[a,x)}$，其绝对连续，故 $\Phi' = g$ 积分还原。对阶梯函数，

$$T(f) = \int g \cdot f.$$

控制收敛后知对简单函数均成立之。调用前开命题再注意简单函数稠密。 □

定理 10.2.2 (L^p 的 Riesz 表示定理)**.** $1 \le p < \infty$ 上的线性泛函有 g 满足

$$Tf = \langle g \mid f \rangle, \quad \|T\| = \|f\|.$$

证明. 考虑 $[-n, n]$ 上的限制后不断扩大 n，Fatou 后知 $g \in L^q$。 □

10.2.2　弱收敛性

例 10.2.2. $[0,1]$ 上的 $1/2^n$-方波在 L^p 内不存在收敛子列。

定义 10.2.3. 赋范线性空间上的序列 $\{f_n\}$，若 $Tf_n \to Tf$ 对任意 T 成立，则称之弱收敛。

命题 10.2.4. $\{f_n\}$ 弱收敛于 f 当且仅当对任意 g 成立

$$\lim_{n\to\infty} g \cdot f_n = \int g \cdot f.$$

弱收敛具有唯一性。因为

$$\int (f_1 - f_2)^* \cdot f_2 = \lim_{n\to\infty} \int (f_1 - f_2)^* \cdot f_n = \int (f_1 - f_2)^* f_2.$$

定理 10.2.3. L^p 上的弱收敛序列有诸 $\|f_n\|$ 有界且

$$\|f\| \leq \liminf \|f_n\|. \tag{10.1}$$

证明. 注意到

$$\int f^* \cdot f_n \leq \|f^*\|_q \cdot \|f_n\|_p = \|f_n\|_p$$

后 Fatou 即可。为证明有界，假设 $\{\|f_n\|\}$ 无界，选取 $\{f_n\}$ 的子列 $\{g_n\}$ 满足 $\|g_n\| \geq n \cdot 3^n$，并再度选取子列 $\{h_n\}$ 满足 $\|h_n\|/(n \cdot 3^n) \to \alpha \in [1, +\infty]$。

于是 $\mathcal{F}_n = n \cdot 3^n/\|h_n\| \cdot h_n$ 满足 $\mathcal{F}_n$ 弱收敛于 f 且 $\|\mathcal{F}_n\| = n \cdot 3^n$。定义

$$\epsilon_{n+1} = \frac{1}{3^{n+1}} \cdot \operatorname{sgn} \int \left[\sum_k^n \epsilon_k \cdot f_k^*\right] \cdot f_{n+1},$$

则 $\|\epsilon_k \cdot f_k^*\| = 1/3^k$，由 L^p 的完备性知 $g = \sum^\infty \epsilon_k \cdot f_k^*$ 收敛于 L^p 内。而

$$\left|\int g \cdot f_n\right| = \left|\int \left(\sum^{k=n} \epsilon_k \cdot f_k^* \cdot f_n\right)\right| - \left|\int \sum_{k=n+1} \epsilon_k \cdot f_k^* \cdot f_n\right| \geq n - \frac{\|f_n\|}{2 \cdot 3^n}.$$

与 $\int g \cdot f_n \to \int g \cdot f$ 矛盾。 □

推论 10.2.1. 设 f_n 弱收敛于 f，g_n 强收敛于 g，则

$$\int g_n \cdot f_n \to \int g \cdot f.$$

命题 10.2.5. 设 $\mathcal{F}$ 张成的空间在 L^q 中稠密，则 L^p 中有界的 $\{f_n\}$ 弱收敛于 f 当且仅当对任意 $g \in \mathcal{F}$，

$$\int f_n \cdot g \to \int f \cdot g.$$

证明. 注意到

$$\int f_n \cdot \mathcal{G} - \int f \cdot \mathcal{G} = \int (f_n - f) \cdot (\mathcal{G} - g_k) + \int (f_n - f) \cdot g_k.$$

前者由 Hölder 不等式知可任意小，后者由题设知可任意小。 □

注意对于任意 $q > 1$ 的 L^q，简单函数稠密。对于 $q < \infty$，简单函数均为有界支撑。对任意 $1 < q < \infty$ 的 L^p，阶梯函数在闭区间上稠密。因此

定理 10.2.4. 对 $1 \leq p < \infty$，有界 $\{f_n\}$ 弱收敛于 f 当且仅当对任意可测集，

$$\int_A f_n \to \int_A f.$$

若 $p > 1$ 只需考虑有限测度的 A。

定理 10.2.5. 对于 $1 < p < \infty$ 与闭区间 $[a, b]$ 上的 L^p，有界 $\{f_n\}$ 弱收敛于 f 当且仅当对任意 x，

$$\int_a^x f_n \to \int_a^x f.$$

考虑 $[0, 1]$ 上的

$$f_n = \begin{cases} 1, & k/2^n + 1/2^{2n+1} < x < (k+1)/2^n \\ 1 - 2^{n+1}, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

知 $p = 1$ 时不成立，而上述函数族在 $p > 1$ 时无界，故同样不成立。

例 10.2.3 (Riemann-Lebesgue 引理)**.** 令 $f_n = \sin nx$，则 f_n 满足定理*10.2.5*的条件，然而

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \to \pi.$$

因此 L^2 中 $\{f_n\}$ 即不强收敛，也不逐点收敛。

例 10.2.4. 取 $f_n = n \cdot \chi_{(0,1/n]}$，在 $[0, 1]$ 上逐点收敛至零，但不弱收敛。

例 10.2.5. 取 f_0 为 $(-1, 0) - (0, 1) - (1, 0)$，$f_n(x) = f_0(x - n)$，$f = 0$，则 $p > 1$ 时定理*10.2.4*的条件满足但 $p = 1$ 时不满足，考虑 $g = 1$ 便知。

定理 10.2.6. 对于 $1 < p < \infty$ 与有界的 $\{f_n\}$ 几乎处处逐点收敛于 f，有 $\{f_n\}$ 弱收敛于 f。

证明. 由 Fatou 知 $f \in L^p$，再由推论10.1.3知定理10.2.4条件满足。 □

定理 10.2.7 (Radon-Riesz)**.** 对于 $1 < p < \infty$，若 $\{f_n\}$ 弱收敛于 f，则 $f_n \to f$ 当且仅当 $\|f_n\| \to \|f\|$。

证明. 对 $p = 2$，在题设下有

$$\|f - f_n\|^2 = \int |f_n|^2 - 2 \cdot \int f_n \cdot f + \int |f|^2 = 0.$$

□

推论 10.2.2. 对 $1 < p < \infty$，弱收敛于 f 的 $\{f_n\}$ 存在收敛子列当且仅当

$$\|f\| = \liminf \|f_n\|.$$

证明. 只注意对收敛子列存在的情形，(10.1)与 $\liminf \|f_n\| \le \lim \|f_{n_k}\|$。 □

例 10.2.6. 令 $[-\pi, \pi]$ 上的 $f_n = 1 + \sin nx$，$\{f_n\}$ 弱收敛于 1 且 $\|f_n\| \to 2\pi$，当 f_n 并不强收敛于 1。

10.2.3 弱列紧性

定理 10.2.8 (Helley)**.** 设 X 为可分空间，$\{T_n\}$ 为其对偶空间中一致有界的算子列，则存在子列 T_{n_k} 与 T 满足

$$T_{n_k}(f) \to T(f).$$

证明. 选取一稠密族 $\{f_n\}$ 与子列 T_{1k} 使得 $T_{1k}(f_1)$ 收敛，再选取 T_{1k} 的子列 T_{2k} 对 f_2 收敛，后对角线知 T_{kk} 对所有 $\{f_n\}$ 收敛。 □

定理 10.2.9. 对 $1 < p < \infty$，L^p 中有界列存在弱收敛子列。

证明. 将 L^p 中的函数列视作算子列并由定理10.1.8其对偶空间可分。 □

例 10.2.7. 取 $f_n = n \cdot \chi_{[0,1/n]}$，取对偶空间为 $[0, 1]$ 上的诸特征函数，知若 $\{f_n\}$ 存在弱收敛子列，则其必为收敛于零，在 $[0, 1]$ 上积分知矛盾。

定义 10.2.4. 赋范线性空间 X 的子集 K 称为弱列紧的，如果其任何序列都存在子列弱收敛于 K。

定理 10.2.10. 对 $1 < p < \infty$，$\{f \mid \|f\| \le 1\}$ 是一弱列紧子集。

证明. 由(10.1)知 $\|f\| \le 1$。 □

10.2.4　凸函数的最小值

定理 10.2.11 (Banach-Saks)**.** 弱收敛于 f 的 $\{f_n\}$ 存在子列 $\{f_{n_k}\}$ 强收敛

$$\frac{f_{n_1}+f_{n_2}+\cdots+f_{n_k}}{k}\to f.$$

证明. 对 $p=2$，替换 $\{f_n\}$ 为 $\{f_n-f\}$，只证 $f_n\to 0$。注意 $\|f\|^2\le M$，故假设已选取

$$\int\left(f_{n_1}+f_{n_2}+\cdots+f_{n_k}\right)^2\le 2j+Mj,$$

由于 $\mathcal{F}_k=f_{n_1}+f_{n_2}+\cdots+f_{n_k}\in L^2$，可选取 $f_{n_{k+1}}$ 满足 $\int\mathcal{F}_k\cdot f_{n_{k+1}}\le 1$。

$$\int\mathcal{F}_{k+1}^2=\int\mathcal{F}_k^2+2\int\mathcal{F}\cdot f_{n_{k+1}}+\int f_{n_{k+1}}^2\le 2\left(k+1\right)+2\left(M+1\right).$$

于是 $\int\left(\mathcal{F}_k/k\right)^2=\left(2+M\right)/k\to 0$。 □

定义 10.2.5. X 的子集 C 为凸的，若对于 $\lambda\in[0,1]$ 皆有 $\lambda f+(1-\lambda)\,g\in C$。

定义 10.2.6. X 的子集 C 为闭的，若 C 中收敛在 X 中的列皆收敛于 C 内。

例 10.2.8. 设 $1\le p<\infty$，g 为非负可测函数，则 $\{f\mid |f|\le g\}$ 为凸。由 *Riesz-Fisher* 定理知 $\{f_n\}$ 存在子列逐点收敛，立刻知 C 为闭。

例 10.2.9. L^p 中的单位圆为凸集且为闭集。

定义 10.2.7. 泛函 T 为连续的，若对于 $f_n\to f$ 皆有 $Tf_n\to Tf$。

定义 10.2.8. 凸集 C 上的泛函 T 为凸的，如果对于 $\lambda\in[0,1]$ 有

$$T\left(\lambda f+\left(1-\lambda\right)g\right)\le\lambda Tf+\left(1-\lambda\right)Tg.$$

定理 10.2.12. 若 ϕ 在 $\mathbb{R}$ 上连续且 $\phi\left(x\right)\le a+b\cdot|x|^p$，则泛函

$$T\left(f\right)=\int_E\phi\left(f\right)$$

连续。其中 E 为有限测度，$f\in L^p$。

证明. 取 $\{f_n\}$ 的快速 Cauchy 子列后注意其逐点收敛于 f 且

$$g=|f_1|+\sum|f_{n+1}-f_n|$$

收敛于 L^p，再 $\phi\left(f_n\right)\le a+b\cdot g^p$ 控制收敛[1]。 □

[1]此 MSE 可供参考。

例 10.2.10. 在前开定理中附加 ϕ 为凸则 T 为凸。

引理 10.2.2. 对 $1<p<\infty$，设 C 为 L^p 的凸闭集，其中的 $\{f_n\}$ 弱收敛于 f，则 f 在 C 内，且

$$T(f) \le \liminf T(f_n).$$

证明. 由 Banach-Saks 定理，存在 $\{f_n\}$ 的子列算术平均强收敛于 f，因此在 C 内。还可以选取这一子列满足 $\lim T(f_{n_k}) = \alpha = \liminf T(f_n)$。

$$T(f) = \lim_{k\to\infty} T\left(\frac{\sum^k f_{n_i}}{k}\right) \le \lim_{k\to\infty} \frac{\sum^k T(f_{n_i})}{k} = \alpha.$$ □

定理 10.2.13. 设 C 为凸闭集，T 为凸泛函，则存在 $f_0 \in C$ 使对任意 $f \in C$，

$$T(f_0) \le T(f).$$

证明. 若 $T(f)$ 下无界，则选取 $T(f_n) \to -\infty$ 并选取弱收敛子列，则由前开引理 $T(f) \le -\infty$。弱 $T(f)$ 有下界 c，则同样选取可得 f_0。 □

推论 10.2.3. 设 $1<p<\infty$，E 为有限测度集，ϕ 在 $\mathbb{R}$ 上连续且满足 $|\phi(x)| \le a + b\cdot|x|^p$，则存在单位圆内的 f_0 满足

$$\int_E \phi\circ f_0 = \min_{f\in L^p(E),\|f\|\le 1} \int_E \phi\circ f.$$

参考文献

[1] Walter Rudin. 数学分析原理. 机械工业出版社,2004.

[2] Walter Rudin. 实分析与复分析. 机械工业出版社, 2006.

[3] James R. Munkres. 拓扑学. 机械工业出版社, 2006.