第一章　普通微积分

1.1　微分

1.1.1　实函数的导数

定义 1.1.1. 极限

$$f'(x) = \frac{f(t \to x) - f(x)}{(t \to x) - x}$$

若存在则谓 $f(x)$ 的导数。

定理 1.1.1. 函数在可微点连续。

定理 1.1.2. 若 f 和 g 都在 x 处可微，则此处

1. $(f+g)' = f' + g'$;
2. $(fg)' = f'g + fg'$;
3. $(f/g)' = (f'g - fg') / (g^2)$.

定理 1.1.3. 若 f 连续且在 x 处可微，g 在 $f(x)$ 处可微，则

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) f'(x).$$

例 1.1.1. $f(x) = x \sin 1/x \,||\, 0$，则 f 在 $x = 0$ 处不可微。

例 1.1.2. $f(x) = x^2 \sin 1/x \,||\, 0$ 在任意点可微且 $f'(0) = 0$，则 f 处处可微但 f' 不连续。

1.1.2　中值定理

定义 1.1.2. 若存在 $\delta > 0$ 满足 $d(p,q) < \delta \Rightarrow f(q) \leq f(p)$ 则谓之局部极大值。类似定义极小值。

定理 1.1.4. $f(x)$ 若取得局部极大（小）值而 $f'(x)$ 存在，则 $f'(x)=0$。

定理 1.1.5. $[a,b]$ 上连续的 f 和 g 在 (a,b) 上可微则存在 x 满足

$$[f(b)-f(a)]\,g'(x)=[g(b)-g(a)]\,f'(x)\,.$$

证明. 两侧做差并发现原函数在两段点水平。 □

取 $g(x)=x$，有

定理 1.1.6. $[a,b]$ 上连续的 f 可微则存在 x 满足

$$f(b)-f(a)=(b-a)\,f'(x)\,.$$

定理 1.1.7. 在 (a,b) 内可微的 f 若恒有 $f'(x)\geq 0$ 则 f 单调递增，类似有常数和递减。

1.1.3　导数的连续性

定理 1.1.8. 设 f 在 $[a,b]$ 可微，又设 $f'(a)<\lambda<f'(b)$，则存在 $f'(x)=\lambda$。

证明. 构造 $g(x)=f(x)-\lambda x$ 并注意其取得最小值即可。 □

推论 1.1.1. 若 f 在 $[a,b]$ 上可微，则 f' 不能有第一类间断。

1.1.4　L'Hospital 法则

定理 1.1.9. 若 f 和 g 在 (a,b)（a 和 b 可取无穷）内可微且 $g'(x)\neq 0$，若 $f(x\to a)\to 0$ 以及 $g(x\to a)\to 0$ 或 $g(x\to a)\to\pm\infty$ 则

$$\frac{f'(x\to a)}{g'(x\to a)}\to A\Rightarrow\frac{f(x\to a)}{g(x\to a)}\to A.$$

上述 a 替换为 b 仍然成立。

证明. 对任意 $q>A$，当 x,y,t 足够接近 a 时，有 $f'(t)/g'(t)<q^-$，故

$$\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}=\frac{f'(t)}{g'(t)}<q^-.$$

对双零的情形单方面让 $y\to 0$ 即可，当 $g(x\to a)\to a$ 时令 x,y 再次足够接近 a 则两边通分有

$$\frac{f(x)}{g(x)}<q^- -q^-\frac{g(y)}{g(x)}+\frac{f(y)}{f(x)}.$$

□

1.1.5　高阶导数

定义 1.1.3. 若 f 在一个区间上有导数 f'，f' 可微则谓二阶导数 f''，类似定义高阶者。

1.1.6　Taylor 定理

定理 1.1.10. 若 f 为闭区间上实函数，$f^{(n-1)}$ 连续且 $f^{(n)}$ 存在，令

$$P(t)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}(t-\alpha)^k.$$

则对于给定的 β，存在 $[\alpha,\beta]$ 间一点 x 满足

$$f(\beta)=P(\beta)+\frac{f^{(n)}(x)}{n!}(\beta-\alpha)^n.$$

证明. 定义 $g(t)=f(t)-P(t)-M(t-\alpha)^n$，注意 $g^{(0)}=\cdots=g^{(n-1)}(\alpha)=0$。选取 M 满足 $g(\beta)=0$，故存在 $g'\left(\beta_1^-\right)=0$，存在 $g''\left(\beta_2^-\right)=0$ 等。 □

1.1.7　向量值函数的微分

前开加减乘除法则将 f 设定为向量值函数后仍然有效，然而 L'Hospital 法则不再有效。

例 1.1.3. 定义 $f(x)=x$ 与 $g(x)=x+x^2e^{i/x^2}$，则显然 $f(x)/g(x)\to 1$。然而，$g'=1+(2x-2i/x)e^{i/x^2}$，$|f'(x\to 0)/g'(x\to 0)|=0$。

类似于中值定理，有

定理 1.1.11. 设连续的 $\mathbf{f}$ 在 (a,b) 内可微并将 $[a,b]$ 映入 $\mathbb{R}^k$，则必有 $x\in(a,b)$ 满足 $|\mathbf{f}(b)-\mathbf{f}(a)|\le(b-a)|\mathbf{f}'(x)|$。

证明. 不妨设 $a=0$，$b=1$，$\mathbf{f}(a)=\mathbf{0}$。令 $\varphi(t)=\mathbf{f}(t)\cdot(1)$ 后中值定理

$$\mathbf{f}(1)^2=\mathbf{f}'(x)\cdot\mathbf{f}(1)\le|\mathbf{f}'(x)||\mathbf{f}(1)|.$$ □

1.2 Riemann-Stieltjes 积分

1.2.1 积分的定义和存在性

定义 1.2.1. $[a,b]$ 的分法谓其间一列非减点集。在每个区间 $[x_{i-1},x_i]$ 内定义 $M_i=\sup f$，$m_i=\inf f$，又定义

$$U(P,f)=\sum M_i\Delta x_i,$$
$$L(P,f)=\sum m_i\Delta x_i.$$

定义上积分与下积分为

$$\overline{\int_a^b} f\,\mathrm{d}x=\inf U(P,f),$$
$$\underline{\int_a^b} f\,\mathrm{d}x=\sup L(P,f).$$

如果上下积分相等，则谓之 *Riemann* 可积。

易见有界函数的上下积分均存在。

定义 1.2.2. 设 α 是 $[a,b]$ 上的单调递增函数，在前开定义中将 Δx_i 替换为 $\Delta\alpha_i$ 则可得 *Riemann-Stieltjes* 积分。

定理 1.2.1. 对于 P 的加细 P^* 有

$$L(P,f,\alpha)\leq L(P^*,f,\alpha)\leq U(P^*,f,\alpha)\leq U(P,f,\alpha).$$

定理 1.2.2. $\underline{\int}\leq\overline{\int}$.

定理 1.2.3. $[a,b]$ 上的 f 可积当且仅当对于任意 ϵ 都存在分法满足

$$U(P,f,\alpha)-L(P,f,\alpha)<\epsilon. \tag{1.1}$$

证明. 注意若条件满足，则意味着 $\left|\overline{\int}-\underline{\int}\right|<\epsilon$。 □

定理 1.2.4. 如果(1.1)成立，则加细后仍然成立。

定理 1.2.5. 如果(1.1)成立，在 $[x_{i-1},x_i]$ 之间选取 s_i 和 t_i，则

$$\sum|f(s_i)-f(t_i)|\Delta\alpha_i<\epsilon.$$

定理 1.2.6. 在前开题设下，若 f 可积，则

$$\left|\sum f(t_i)\,\Delta\alpha_i - \int_a^b f\,\mathrm{d}\alpha\right| < \epsilon.$$

定理 1.2.7. 闭区间上连续函数对任意 α 可积。

定理 1.2.8. 闭区间上单调函数对单调连续的 α 可积。

证明. 选取分割 P_n 满足 $\Delta\alpha_i = \Delta\alpha/n$，从而 $U - L = \Delta\alpha_i\Delta f$。 □

定理 1.2.9. 若 f 在 $[a,b]$ 上有界且只有有限间断点，α 在 f 的每个间断点上连续，则 f 可积。

证明. 选取小区间包含 f 的诸间断点且其内 α 连续，这些区间内因 α 连续而上下差任意小，剩余区间内由于 f 连续而上下差任意小。 □

定理 1.2.10. $[a,b]$ 上的 f 可积而 ϕ 在其像上连续，则 $\phi\circ f$ 可积。

证明. 若 $\Delta s < \delta \Rightarrow \Delta\phi < \epsilon$，选取 P 使 $U(f) - L(f) < \delta^2$，将区间分两类，$\Delta f < \delta$ 及相反，后者的区间满足 $\sum\Delta\alpha_i < \delta$。总的 $\sum\Delta\phi\circ f$ 为小量。 □

1.2.2 积分及其性质

定理 1.2.11. 对于积分，下列性质成立：

1. 闭区间可积函数构成线性空间，积分是线性算子；
2. $f_1 \le f_2 \Rightarrow \int f_1 \le \int f_2$；
3. 若 $[a,b]$ 上 f 可积，则 $[a,c]$ 与 $[c,b]$ 上可积且 $\int_a^c + \int_c^b = \int_a^b$；
4. 若 f 可积且 $|f| \le M$，则 $\left|\int f\right| \le M\left[\alpha(b) - \alpha(a)\right]$；
5. 积分与可积性对 α 为线性。

定理 1.2.12. 若 f 和 g 皆可积则 fg 可积。

定理 1.2.13. 若 f 可积则 $|f|$ 可积且 $\left|\int f\right| \le \int |f|$。

定义 1.2.3. 单位阶跃函数定义为 $I(x) = \chi_{(0,+\infty)}$。

定义 1.2.4. 若 f 在 $[a,b]$ 上有界且 $\alpha(x) = I(x-s) = \chi_{(s,+\infty)}$，则

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}\alpha = f(s).$$

定理 1.2.14. 设 $\{c_n > 0\}$ 且 $\sum c_n$ 收敛，$\{s_n\}$ 两两不同，

$$\alpha(x) = \sum c_n I(x - s_n).$$

若 f 在 $[a,b]$ 上连续，则

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}\alpha = \sum c_n f(s_n).$$

证明. 选取足够大的 N 满足 $\sum c_n - \sum^N c_n < \epsilon$ 后将 α 拆分即可。 □

定理 1.2.15. 若闭区间上 α 单调递增且 α' 可积，f 有界，则 f 可积当且仅当 $f\alpha'$ 可积，且

$$\int f\,\mathrm{d}\alpha = \int f\alpha'.$$

证明. 设 $U(P,\alpha') - L(P,\alpha') < \epsilon$ 而 f 上界为 M，根据中值定理与定理1.2.5，

$$\sum f_i \Delta\alpha_i = \sum f_i \alpha'(s_i)\Delta x, \quad \sum f_i |\alpha'(s_i) - \alpha'(t_i)| \Delta x \le M\epsilon.$$

$$\left| \sum f(s_i)\Delta\alpha_i - \sum f(s_i)\alpha'(s_i)\Delta x_i \right| \le M\epsilon.$$

因此，$|[L|U](f,\alpha) - [L|U](f,\alpha')| \le M\epsilon$，任意加细后仍然成立。 □

定理 1.2.16. 设有严格递增的满射 $\varphi\colon [A,B] \to [a,b]$，$f$ 在 $[a,b]$ 上对 α 可积，定义 $\beta = \alpha \circ \varphi$ 而 $g = f \circ \varphi$，则 g 对 β 可积且

$$\int_A^B g\,\mathrm{d}\beta = \int_a^b f\,\mathrm{d}\alpha.$$

证明. 注意 φ 只是一个坐标变换，把分法映射到分法即可。 □

取 $\alpha(x) = x$，就有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_A^B f(\varphi(y))\varphi'(y)\,\mathrm{d}y.$$

1.2.3 积分与微分

定理 1.2.17. 设 f 可积且

$$F(x) = \int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x,$$

则 F 在 $[a,b]$ 上一致连续且若 f 在 x_0 处连续则 F 可微且 $F'(x_0) = f(x_0)$。

证明. 做差，将 F 的差和积分相互转换。 □

定理 1.2.18. 若 $[a,b]$ 上 f 可积且 $F'=f$，则

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

证明. 在某分割内选取有代表性的 t_i 后对下式调用定理1.2.6。

$$\sum f(t_i)\,\Delta x_i = F(b) - F(a).$$ □

1.2.4　向量值函数的积分

定义 1.2.5. 定义区间上的向量值函数的积分以诸分量的积分为分量。

定理 1.2.19 (平行于定理*1.2.18*)**.** 若可积的 $\boldsymbol{f}$ 和 $\boldsymbol{F}$ 将 $[a,b]$ 映入 R^k，且 $\boldsymbol{F}'=\boldsymbol{f}$ 则

$$\int_a^b \boldsymbol{f} = \boldsymbol{F}(b) - \boldsymbol{F}(a).$$

定理 1.2.20. 若 $\boldsymbol{f}$ 如上且 $\boldsymbol{f}$ 对 α 可积，则 $|\boldsymbol{f}|$ 可积且

$$\left|\int_a^b \boldsymbol{f}\right| \le \int_a^b |\boldsymbol{f}|.$$

证明. 可积性由连续函数复合可知，由 Schwarz 不等式，有

$$\left|\int \boldsymbol{f}\right|^2 = \sum \int \left(\int f_i\right) \cdot f_i \le \int \left|\int \boldsymbol{f}\right| |\boldsymbol{f}|.$$ □

1.2.5　可求长曲线

定义 1.2.6. 将闭区间映入 $\mathbb{R}^k$ 内的映射谓曲线，双射谓弧，区间端点处取值相等谓闭曲线。

定义 1.2.7. 对闭区间的分法 P 定义

$$\Lambda(P,\gamma) = \sum |\gamma(x_i) - \gamma(x_{i-1})|.$$

定义 $\Lambda(\gamma) = \sup \Lambda(P,\gamma)$。其值有限则谓曲线可求长。

定理 1.2.21. γ' 连续则曲线可求长且

$$\Lambda(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t.$$

证明. 对 γ' 调用积分的三角不等式定理1.2.20的

$$\Lambda\left(\gamma\right) \leq \int |\gamma'|.$$

反向的不等式注意小区间上的下列不等式加和即可

$$\begin{aligned}\int |\gamma'| &\leq |\gamma'\left(x_i\right)|\Delta x_i + \epsilon\Delta x_i \\ &\leq \left|\int \gamma'\right| + \left|\int \left[\gamma'\left(x_i\right) - \gamma'\right]\right| + \epsilon\Delta x_i.\end{aligned}$$

□