第一章　L^p 空间

1.1　L^p 空间：完备性与逼近

1.1.1　赋范线性空间

定义 1.1.1. 二函数称为等价，如果其几乎处处相等。

定义 1.1.2. E 上满足
$$\int_E |f|^p < \infty$$
之函数等价类全体构成一线性空间，谓 L^p 空间。

由
$$|a+b|^p \leq 2^p \left\{|a|^p + |b^p|\right\}$$
知其可构成线性空间。

定义 1.1.3. 若 f 几乎处处满足
$$|f(x)| \leq M,$$
谓之本质有界。其等价类全体构成 L^∞。

定义 1.1.4. 线性空间上一泛函 $\|\cdot\|$ 称为范数，若
$$\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|,$$
$$\|\alpha f\| = |\alpha| \|f\|,$$
$$\|f\| \geq 0.$$
最后的等号严格成立当且仅当 $f = 0$。

例 1.1.1. 易知 L^1 构成一赋范线性空间。

例 1.1.2. 易知 L^∞ 关于 $\|f\| = \inf M$ 构成一赋范线性空间。

例 1.1.3. 易知 ℓ_1 与 ℓ_∞ 构成一赋范线性空间。

例 1.1.4. 易知紧区间上的连续函数全体关于 $\|f\| = \max f$ 构成一赋范线性空间。

1.1.2 Young 不等式，Hölder 不等式，Minkowski 不等式

定义 1.1.5. 对于 $1 < p < \infty$ 以及 L^p 中的 f，定义

$$\|f\|_p = \left[\int |f|^p\right]^{1/p}.$$

定义 1.1.6. 对 $p \in (1,\infty)$ 定义其共轭 $q = p/(p-1)$，同在 $(1,\infty)$ 内且

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

定理 1.1.1 (Young 不等式)**.** 设 p，q 共轭，对正数 a，b 有

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

证明. 由 Jensen 不等式，

$$\frac{\log a^p}{p} + \frac{\log b^q}{q} \le \log\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right). \qquad \square$$

定理 1.1.2 (Hölder 不等式)**.** 对于 L^p 之 f 与 L^q 之 g，有

$$\int |f \cdot g| \le \|f\|_p \cdot \|g\|_q.$$

证明. 不妨设 $\|f\| = \|g\| = 1$，从而由 Young 不等式易得

$$\int |f \cdot g| \le 1. \qquad \square$$

推论 1.1.1. f 之共轭 $f^* = \|f\|_p^{1-p} \cdot \operatorname{sgn}(f) \cdot |f|^{p-1}$ 为 L^q，且

$$\int f \cdot f^* = \|f\|_p, \quad \|f^*\|_q = 1.$$

定理 1.1.3 (Minkowski 不等式)**.** 若 f 与 g 均为 L^p，则 $f+g$ 同且

$$\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p.$$

证明. 借助前开推论与 Hölder 不等式，

$$\|f+g\|_p = \int f\cdot(f+g)^* + \int g\cdot(f+g)^* \le \|f\|_p + \|g\|_p. \qquad \square$$

推论 1.1.2 (Cauchy-Schwarz 不等式)**.** 对于 L^2 内的 f 与 g，

$$\int |fg| \le \sqrt{\int f^2}\cdot\sqrt{\int g^2}.$$

推论 1.1.3. 若 $\mathcal{F}$ 内诸 $\|f\|_p \le M$，则 $\mathcal{F}$ 一致可积。

证明. 由 Hölder 不等式，

$$\left[\int_A |f|\right] \le \left[\int_E |f|^p\right]^{1/p} [m(A)]^{1/q}. \qquad \square$$

推论 1.1.4. 有限测度上若 $p_1 < p_2$，则 $L^{p_2} \subset L^{p_1}$。且

$$\|f\|_{p_1} \le c\|f\|_{p_2},$$

其中 $c = [m(E)]^{\frac{p_2-p_1}{p_1p_2}}$。

证明. 令 $p = p_2/p_1$，则 $f^{p_1} \in L^p$。由 Hölder 不等式，

$$\int_E |f|^{p_1} \le \|f\|_{p_2}^{p_1} [m(E)]^{1/q}. \qquad \square$$

例 1.1.5. 通常，有限测度集如 $(0,1]$ 上上述包含关系是严格的。取 $-1/p_1 < \alpha < -1/p_2$，有 $x^\alpha \in L^{p_1} - L^{p_2}$。

例 1.1.6. 在 $(0,\infty)$ 上 $f = x^{-1/2}/(1+|\log x|)$ 仅仅属于 L^2。

1.1.3 L^p 的完备性

定义 1.1.7. 称一序列收敛于 f，如果

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\| = 0.$$

定义 1.1.8. 完备的赋范线性空间称为 *Banach* 空间。

命题 1.1.1. 完备空间内的收敛序列均为 *Cauchy* 序列，且包含收敛子序列的 *Cauchy* 序列收敛。

证明. 后一命题注意

$$\|f_n - f\| \le \|f_n - f_{n_k}\| + \|f_{n_k} - f\|. \qquad \square$$

定义 1.1.9. 一序列称为快速 *Cauchy* 的，如果对于一收敛级数 $\sum \epsilon_k$，有

$$\|f_{k+1} - f_k\| \le \epsilon_k^2.$$

命题 1.1.2. 快速 *Cauchy* 序列都是 *Cauchy* 的，而任一 *Cauchy* 序列均有快速子列。

证明. 选取子列满足

$$\left\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right\| \le \left(\frac{1}{2}\right)^k. \qquad \square$$

定理 1.1.4. L^p 内的快速 *Cauchy* 序列依范数且几乎处处逐点收敛。

证明. 依定义选取 $\sum \epsilon_k$ 后注意

$$m\left(|f_{k+1} - f_k|^p > \epsilon_k^p\right) \le \frac{1}{\epsilon_k^p}\int |f_{k+1} - f_k|^p \le \epsilon_k^p.$$

由 Borel-Cantelli 引理知 f_n 几乎处处逐点收敛。由 Fatou 引理，

$$\int |f - f_n|^p \le \int |f_{n+k} - f_n|^p \le \left[\sum_{j=n} \epsilon_j^2\right]^p. \qquad \square$$

定理 1.1.5 (Riesz-Fischer)**.** L^p 空间为 *Banach* 空间。且 *Cauchy* 序列存在子列几乎处处逐点收敛。

例 1.1.7. $f_n = n^{1/p}\chi_{(0,1/n]}$ 逐点收敛于零，但不依范数收敛。

定理 1.1.6. 对 $1 \le p < \infty$，逐点收敛的序列依范数收敛当且仅当

$$\lim_{n\to\infty}\int |f_n|^p = \int |f|^p.$$

证明. 若依范数收敛，由三角不等式即得结论。反之设极限成立，令

$$h_n = \frac{|f_n|^p + |f|^p}{2} - \left|\frac{f_n - f}{2}\right|^p.$$

由凸性知 $h_n \ge 0$，且 $\lim h_n = |f|^p$ 逐点收敛，由 Fatou 引理

$$\int |f|^p \le \liminf \int h_n = \int |f|^p - \limsup \int \left|\frac{f_n - f}{2}\right|^p. \qquad \square$$

定理 1.1.7. 对 $1 \leq p < \infty$，逐点收敛的序列依范数收敛当且仅当 $\{|f_n|^p\}$ 一致可积且紧密。

证明. 由推论??，要求 $|f_n - f|^p$ 一致可积且紧密。再注意

$$|f_n - f|^p \leq 2^p \{|f_n|^p + |f|^p\}, \quad |f_n|^p \leq 2^p \{|f_n - f|^p + |f|^p\}.$$ □

1.1.4　逼近与可分性

定义 1.1.10. L^p 下一函数族称为稠密的，如果其依范数可任意逼近 L^p。

命题 1.1.3. 简单函数在 L^p 内稠密。

证明. 借助简单函数逼近引理，注意 $|\varphi_n - g|^p \leq 2^{p+1}|g|^p$ 后控制收敛。 □

命题 1.1.4. 对 $1 \leq p < \infty$，阶梯函数在紧区间上的 L^p 稠密。

证明. 注意阶梯函数可在任意小的集合外逼近简单函数即可。而对 $p = \infty$，再小的非零测集皆会导致范数不得为零，是故于其不成立。 □

定义 1.1.11. 空间谓可分者，其下存在一可数稠密子集。

定理 1.1.8. 对 $1 \leq p < \infty$，L^p 可分。

证明. 紧区间内有理阶梯函数稠密，积分可由 $[-n, n]$ 上单调收敛逼近。 □

例 1.1.8. 紧区间上的 L^∞ 不可分。

证明. 不可数特征函数族的区间稍变，逼近不复成立，不可以可数族逼近。 □

定理 1.1.9. 对 $1 \leq p < \infty$，有界支撑的连续函数在 L^p 中稠密。

1.2　L^p 空间的对偶与弱收敛

1.2.1　L^p 的对偶与表示

定义 1.2.1. 线性泛函是函数上的线性算子。

例 1.2.1. $T(f) = \int fg$ 与 $T(f) = \int f\,\mathrm{d}g$ 均为线性泛函。

定义 1.2.2. 所有 $|T(f)| \leq M\|f\|$ 的 M 的下确界记作 $\|T\|$。

由三角不等式知线性泛函连续。同时有

$$\|T\| = \sup\{T(f) \mid \|f\| \le 1\}.$$

命题 1.2.1. 赋范线性空间上的线性算子的空间构成一赋范线性空间。

命题 1.2.2. L^p 上的算子

$$T(f) = \int g \cdot f$$

的范数为 $\|g\|$。

命题 1.2.3. 在一稠密子集上相等的线性算子相等。

引理 1.2.1. 可测函数 g 若对 L^p 上的简单函数 f 皆满足

$$\left|\int g \cdot f\right| \le M\|f\|,$$

则 $g \in L^q$，且 $\|g\| \le M$。

证明. 对于 $p > 1$，考虑 g 的下逼近，只证 $\int \varphi_n^p \le M^p$ 即可，再注意 $\varphi_n^q \le |g|\varphi_n^{q-1}$，以及 $p(q-1) = q$ 并借助题设。

对于 $p = 1$，需证 M 为一本质上界。考虑 f 为诸特征函数即可。 □

定理 1.2.1. 紧区间上的线性泛函满足 $T(f) = \int g \cdot f$ 的形式。

证明. 令 $\Phi(x) = T\chi_{[a,x)}$，其绝对连续，故 $\Phi' = g$ 积分还原。对阶梯函数，

$$T(f) = \int g \cdot f.$$

控制收敛后知对简单函数均成立之。调用前开命题再注意简单函数稠密。 □

定理 1.2.2 (L^p 的 Riesz 表示定理)**.** $1 \le p < \infty$ 上的线性泛函有 g 满足

$$Tf = \langle g \mid f \rangle, \quad \|T\| = \|f\|.$$

证明. 考虑 $[-n, n]$ 上的限制后不断扩大 n，Fatou 后知 $g \in L^q$。 □

1.2.2　弱收敛性

例 1.2.2. $[0,1]$ 上的 $1/2^n$-方波在 L^p 内不存在收敛子列。

定义 1.2.3. 赋范线性空间上的序列 $\{f_n\}$，若 $Tf_n \to Tf$ 对任意 T 成立，则称之弱收敛。

命题 1.2.4. $\{f_n\}$ 弱收敛于 f 当且仅当对任意 g 成立

$$\lim_{n\to\infty} g\cdot f_n = \int g\cdot f.$$

弱收敛具有唯一性。因为

$$\int (f_1-f_2)^*\cdot f_2 = \lim_{n\to\infty}\int (f_1-f_2)^*\cdot f_n = \int (f_1-f_2)^* f_2.$$

定理 1.2.3. L^p 上的弱收敛序列有诸 $\|f_n\|$ 有界且

$$\|f\| \le \liminf \|f_n\|. \tag{1.1}$$

证明. 注意到

$$\int f^*\cdot f_n \le \|f^*\|_q\cdot\|f_n\|_p = \|f_n\|_p$$

后 Fatou 即可。为证明有界，假设 $\{\|f_n\|\}$ 无界，选取 $\{f_n\}$ 的子列 $\{g_n\}$ 满足 $\|g_n\|\ge n\cdot 3^n$，并再度选取子列 $\{h_n\}$ 满足 $\|h_n\|/(n\cdot 3^n)\to\alpha\in[1,+\infty]$。

于是 $\mathcal{F}_n = n\cdot 3^n/\|h_n\|\cdot h_n$ 满足 $\mathcal{F}_n$ 弱收敛于 f 且 $\|\mathcal{F}_n\| = n\cdot 3^n$。定义

$$\epsilon_{n+1} = \frac{1}{3^{n+1}}\cdot \operatorname{sgn}\int\left[\sum_k^n \epsilon_k\cdot f_k^*\right]\cdot f_{n+1},$$

则 $\|\epsilon_k\cdot f_k^*\| = 1/3^k$，由 L^p 的完备性知 $g=\sum^\infty \epsilon_k\cdot f_k^*$ 收敛于 L^p 内。而

$$\left|\int g\cdot f_n\right| = \left|\int\left(\sum^{k=n}\epsilon_k\cdot f_k^*\cdot f_n\right)\right| - \left|\int\sum_{k=n+1}\epsilon_k\cdot f_k^*\cdot f_n\right| \ge n-\frac{\|f_n\|}{2\cdot 3^n}.$$

与 $\int g\cdot f_n\to\int g\cdot f$ 矛盾。 □

推论 1.2.1. 设 f_n 弱收敛于 f，g_n 强收敛于 g，则

$$\int g_n\cdot f_n \to \int g\cdot f.$$

命题 1.2.5. 设 $\mathcal{F}$ 张成的空间在 L^q 中稠密，则 L^p 中有界的 $\{f_n\}$ 弱收敛于 f 当且仅当对任意 $g \in \mathcal{F}$，

$$\int f_n \cdot g \to \int f \cdot g.$$

证明. 注意到

$$\int f_n \cdot \mathcal{G} - \int f \cdot \mathcal{G} = \int (f_n - f) \cdot (\mathcal{G} - g_k) + \int (f_n - f) \cdot g_k.$$

前者由 Hölder 不等式知可任意小，后者由题设知可任意小。 □

注意对于任意 $q > 1$ 的 L^q，简单函数稠密。对于 $q < \infty$，简单函数均为有界支撑。对任意 $1 < q < \infty$ 的 L^p，阶梯函数在闭区间上稠密。因此

定理 1.2.4. 对 $1 \leq p < \infty$，有界 $\{f_n\}$ 弱收敛于 f 当且仅当对任意可测集，

$$\int_A f_n \to \int_A f.$$

若 $p > 1$ 只需考虑有限测度的 A。

定理 1.2.5. 对于 $1 < p < \infty$ 与闭区间 $[a, b]$ 上的 L^p，有界 $\{f_n\}$ 弱收敛于 f 当且仅当对任意 x，

$$\int_a^x f_n \to \int_a^x f.$$

考虑 $[0, 1]$ 上的

$$f_n = \begin{cases} 1, & k/2^n + 1/2^{2n+1} < x < (k+1)/2^n \\ 1 - 2^{n+1}, & \text{otherwise}. \end{cases}$$

知 $p = 1$ 时不成立，而上述函数族在 $p > 1$ 时无界，故同样不成立。

例 1.2.3 (Riemann-Lebesgue 引理)**.** 令 $f_n = \sin nx$，则 f_n 满足定理*1.2.5*的条件，然而

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \to \pi.$$

因此 L^2 中 $\{f_n\}$ 即不强收敛，也不逐点收敛。

例 1.2.4. 取 $f_n = n \cdot \chi_{(0,1/n]}$，在 $[0, 1]$ 上逐点收敛至零，但不弱收敛。

例 1.2.5. 取 f_0 为 $(-1, 0) - (0, 1) - (1, 0)$，$f_n(x) = f_0(x - n)$，$f = 0$，则 $p > 1$ 时定理*1.2.4*的条件满足但 $p = 1$ 时不满足，考虑 $g = 1$ 便知。

定理 1.2.6. 对于 $1 < p < \infty$ 与有界的 $\{f_n\}$ 几乎处处逐点收敛于 f，有 $\{f_n\}$ 弱收敛于 f。

证明. 由 Fatou 知 $f \in L^p$，再由推论1.1.3知定理1.2.4条件满足。 □

定理 1.2.7 (Radon-Riesz)**.** 对于 $1 < p < \infty$，若 $\{f_n\}$ 弱收敛于 f，则 $f_n \to f$ 当且仅当 $\|f_n\| \to \|f\|$。

证明. 对 $p = 2$，在题设下有

$$\|f - f_n\|^2 = \int |f_n|^2 - 2 \cdot \int f_n \cdot f + \int |f|^2 = 0.$$

□

推论 1.2.2. 对 $1 < p < \infty$，弱收敛于 f 的 $\{f_n\}$ 存在收敛子列当且仅当

$$\|f\| = \liminf \|f_n\|.$$

证明. 只注意对收敛子列存在的情形，(1.1)与 $\liminf \|f_n\| \leq \lim \|f_{n_k}\|$。 □

例 1.2.6. 令 $[-\pi, \pi]$ 上的 $f_n = 1 + \sin nx$，$\{f_n\}$ 弱收敛于 1 且 $\|f_n\| \to 2\pi$，当 f_n 并不强收敛于 1。

1.2.3　弱列紧性

定理 1.2.8 (Helley)**.** 设 X 为可分空间，$\{T_n\}$ 为其对偶空间中一致有界的算子列，则存在子列 T_{n_k} 与 T 满足

$$T_{n_k}(f) \to T(f).$$

证明. 选取一稠密族 $\{f_n\}$ 与子列 T_{1k} 使得 $T_{1k}(f_1)$ 收敛，再选取 T_{1k} 的子列 T_{2k} 对 f_2 收敛，后对角线知 T_{kk} 对所有 $\{f_n\}$ 收敛。 □

定理 1.2.9. 对 $1 < p < \infty$，L^p 中有界列存在弱收敛子列。

证明. 将 L^p 中的函数列视作算子列并由定理1.1.8其对偶空间可分。 □

例 1.2.7. 取 $f_n = n \cdot \chi_{[0,1/n]}$，取对偶空间为 $[0,1]$ 上的诸特征函数，知若 $\{f_n\}$ 存在弱收敛子列，则其必为收敛于零，在 $[0,1]$ 上积分知矛盾。

定义 1.2.4. 赋范线性空间 X 的子集 K 称为弱列紧的，如果其任何序列都存在子列弱收敛于 K。

定理 1.2.10. 对 $1 < p < \infty$，$\{f \mid \|f\| \leq 1\}$ 是一弱列紧子集。

证明. 由(1.1)知 $\|f\| \leq 1$。 □

1.2.4　凸函数的最小值

定理 1.2.11 (Banach-Saks)**.** 弱收敛于 f 的 $\{f_n\}$ 存在子列 $\{f_{n_k}\}$ 强收敛

$$\frac{f_{n_1}+f_{n_2}+\cdots+f_{n_k}}{k}\to f.$$

证明. 对 $p=2$，替换 $\{f_n\}$ 为 $\{f_n-f\}$，只证 $f_n\to 0$。注意 $\|f\|^2\leq M$，故假设已选取

$$\int\left(f_{n_1}+f_{n_2}+\cdots+f_{n_k}\right)^2\leq 2j+Mj,$$

由于 $\mathcal{F}_k=f_{n_1}+f_{n_2}+\cdots+f_{n_k}\in L^2$，可选取 $f_{n_{k+1}}$ 满足 $\int\mathcal{F}_k\cdot f_{n_{k+1}}\leq 1$。

$$\int\mathcal{F}_{k+1}^2=\int\mathcal{F}_k^2+2\int\mathcal{F}\cdot f_{n_{k+1}}+\int f_{n_{k+1}}^2\leq 2\left(k+1\right)+2\left(M+1\right).$$

于是 $\int\left(\mathcal{F}_k/k\right)^2=\left(2+M\right)/k\to 0$。 □

定义 1.2.5. X 的子集 C 为凸的，若对于 $\lambda\in[0,1]$ 皆有 $\lambda f+\left(1-\lambda\right)g\in C$。

定义 1.2.6. X 的子集 C 为闭的，若 C 中收敛在 X 中的列皆收敛于 C 内。

例 1.2.8. 设 $1\leq p<\infty$，g 为非负可测函数，则 $\{f\mid |f|\leq g\}$ 为凸。由 *Riesz-Fisher* 定理知 $\{f_n\}$ 存在子列逐点收敛，立刻知 C 为闭。

例 1.2.9. L^p 中的单位圆为凸集且为闭集。

定义 1.2.7. 泛函 T 为连续的，若对于 $f_n\to f$ 皆有 $Tf_n\to Tf$。

定义 1.2.8. 凸集 C 上的泛函 T 为凸的，如果对于 $\lambda\in[0,1]$ 有

$$T\left(\lambda f+\left(1-\lambda\right)g\right)\leq\lambda Tf+\left(1-\lambda\right)Tg.$$

定理 1.2.12. 若 ϕ 在 $\mathbb{R}$ 上连续且 $\phi\left(x\right)\leq a+b\cdot|x|^p$，则泛函

$$T\left(f\right)=\int_E\phi\left(f\right)$$

连续。其中 E 为有限测度，$f\in L^p$。

证明. 取 $\{f_n\}$ 的快速 Cauchy 子列后注意其逐点收敛于 f 且

$$g=|f_1|+\sum|f_{n+1}-f_n|$$

收敛于 L^p，再 $\phi\left(f_n\right)\leq a+b\cdot g^p$ 控制收敛[1]。 □

[1]此 MSE 可供参考。

例 1.2.10. 在前开定理中附加 ϕ 为凸则 T 为凸。

引理 1.2.2. 对 $1<p<\infty$，设 C 为 L^p 的凸闭集，其中的 $\{f_n\}$ 弱收敛于 f，则 f 在 C 内，且

$$T(f) \leq \liminf T(f_n).$$

证明. 由 Banach-Saks 定理，存在 $\{f_n\}$ 的子列算术平均强收敛于 f，因此在 C 内。还可以选取这一子列满足 $\lim T(f_{n_k}) = \alpha = \liminf T(f_n)$。

$$T(f) = \lim_{k\to\infty} T\left(\frac{\sum^k f_{n_i}}{k}\right) \leq \lim_{k\to\infty} \frac{\sum^k T(f_{n_i})}{k} = \alpha. \qquad \square$$

定理 1.2.13. 设 C 为凸闭集，T 为凸泛函，则存在 $f_0 \in C$ 使对任意 $f \in C$，

$$T(f_0) \leq T(f).$$

证明. 若 $T(f)$ 下无界，则选取 $T(f_n) \to -\infty$ 并选取弱收敛子列，则由前开引理 $T(f) \leq -\infty$。弱 $T(f)$ 有下界 c，则同样选取可得 f_0。 $\square$

推论 1.2.3. 设 $1<p<\infty$，E 为有限测度集，ϕ 在 $\mathbb{R}$ 上连续且满足 $|\phi(x)| \leq a + b\cdot|x|^p$，则存在单位圆内的 f_0 满足

$$\int_E \phi\circ f_0 = \min_{f\in L^p(E), \|f\|\leq 1} \int_E \phi\circ f.$$