第一章　普通函数理论

1.1　函数序列

1.2　特殊函数

1.3　多元函数

1.3.1　微分法

定义 1.3.1. 设 E 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集，$\mathbf{f}$ 将 E 映入 $\mathbb{R}^m$，$\mathbf{x} \in E$。若存在将 $\mathbb{R}^n$ 映入 $\mathbb{R}^m$ 的线性变换 A，使得

$$\lim_{\mathbf{h}\to 0} \frac{|\,\mathbf{f}(\mathbf{x}+\mathbf{h})\,| - \mathbf{f}(\mathbf{x}) - A\mathbf{h}}{|\,\mathbf{h}\,|} = 0,$$

则称 $\mathbf{f}$ 在 $\mathbf{x}$ 处可微。记作

$$\mathbf{f}'(x) = A.$$

定理 1.3.1. 上述定义的 A 是唯一的。

证明. 设 $B = A_1 - A_2$，则

$$|\,B\mathbf{h}\,| \le |\,\mathbf{f}(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) - A_1\mathbf{h}\,| + |\,\mathbf{f}(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) - A_2\mathbf{h}\,|.$$

故 $|\,B\mathbf{h}\,|/|\,\mathbf{h}\,| \to 0$。因此 $B = 0$。 □

例如线性变换的导数显然是其自身。

定理 1.3.2. 若 $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{f}(x))$，且 $\mathbf{f}$ 与 $\mathbf{g}$ 在对应点可微，则

$$\mathbf{F}'(\mathbf{x}_0) = \mathbf{g}'(\mathbf{f}(\mathbf{x}_0))\,\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)\,.$$

证明. 设 $\mathbf{x}_0$ 的增量为 $\mathbf{h}$，$\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ 的增量为 $\mathbf{k}$。

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(\mathbf{x}_0+\mathbf{h})-\mathbf{F}(\mathbf{x}_0)-BA\mathbf{h} &= \mathbf{g}(\mathbf{y}_0+\mathbf{k})-\mathbf{g}(\mathbf{y}_0)-BA\mathbf{h}\\ &= B(\mathbf{k}-A\mathbf{h})+o(\mathbf{k})\\ &= Bo(\mathbf{h})+o(\mathbf{k}).\end{aligned}$$

再注意 $\mathbf{k}=A\mathbf{h}+o(\mathbf{h})$ 便知其趋向零。 □

定义 1.3.2. 设 E 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集，$\mathbf{f}$ 将 E 映入 $\mathbb{R}^m$。$\{e_n\}$ 是定义域的标准基，$\{u_m\}$ 是值域的标准基，以此定义 $\mathbf{f}$ 的分量。若极限

$$(\mathbf{D}_j f_i)(\mathbf{x})=\lim_{t\to 0}\frac{f_i(\mathbf{x}+t\mathbf{e}_j)-f_i(\mathbf{x})}{t}$$

存在，则称之为偏导数。

定理 1.3.3. 若 $\mathbf{f}$ 在 $\mathbf{x}$ 处可微，则各偏导数存在，且

$$A_{ij}=\mathbf{D}_j f_i.$$

证明. 注意到方向导数的存在为可导所蕴含即可。 □

注意 ij 的顺序，曲线的 A 为列矩阵，即切向量。

定义 1.3.3. 若 f 是 $\mathbb{R}^n$ 上的标量函数，则 A 为行矩阵，称为 f 的梯度，记作 ∇f。

设 γ 为一曲线，f 标量函数，$g=f\circ\gamma$，于是 $g'(t)=(\nabla f)\gamma'$。若 γ 为指向 $\mathbf{u}$ 的直线，则 $g'(t)=\mathbf{u}\cdot\nabla f$，称为 f 的方向导数。当 $\mathbf{u}$ 与 ∇f 同向时[1]，其具有最大值。

定理 1.3.4. 若在凸集上 $\|\mathbf{f}'\|\le M$，则 $|\mathbf{f}(\mathbf{b})-\mathbf{f}(\mathbf{a})|\le M|\mathbf{b}-\mathbf{a}|$。

证明. 设 $\gamma(t)=(1-t)\mathbf{a}+t\mathbf{b}$，$\mathbf{g}=\mathbf{f}\circ\gamma$，因此 $\mathbf{g}'=\mathbf{f}'\circ(\mathbf{b}-\mathbf{a})$，再注意 $\mathbf{f}'$ 的上界并调用定理**??**。 □

推论 1.3.1. 若 $\mathbf{f}'=0$，则 $\mathbf{f}=\mathrm{const}$。

定义 1.3.4. 若 $\mathbf{f}$ 可微且 $\mathbf{f}'$ 连续，则称 $\mathbf{f}$ 连续可微。

定理 1.3.5. 当且仅当 $\mathbf{f}\colon E\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 偏导数存在且连续时，$\mathbf{f}$ 连续可微。

[1] 此处将行向量与列向量等同，或者说协变矢量与逆变矢量等同。

证明. 若 $\mathbf{f}$ 连续可微，则借助定理??，并注意

$$\left|\left(\mathbf{D}_j f_i\right)(\mathbf{y})-\left(\mathbf{D}_j f_i\right)(\mathbf{x})\right| \leq \left|\left[\mathbf{f}'(\mathbf{y})-\mathbf{f}'(\mathbf{x})\right]\mathbf{e}_j\right|$$

即可。

若 $\mathbf{f}$ 在 $\mathbf{x}$ 的各偏导数存在，则可以仅考虑 $\mathbf{f}$ 的一个分量 f。将 $\mathbf{x}$ 的无穷小位移 $\mathbf{h}$ 分解为各个方向的和，借助中值定理将增量转化为”稍微偏离”$\mathbf{x}$ 处的偏导。再借助连续性，从而 $\mathbf{f}'$ 可以写为 $\mathbf{D}_j f$ 的列向量，且各分量由题设连续。 □

1.3.2　反函数定理

定理 1.3.6. *若连续可微的 $\mathbf{f}$ 将开集 $E \subset \mathbb{R}^n$ 映入 $\mathbb{R}^n$，且对于某个 $\mathbf{a}$，$\mathbf{f}'(\mathbf{a})$ 可逆，$\mathbf{f}(\mathbf{a})=\mathbf{b}$。则存在 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 的邻域 U 和 V，使 $\mathbf{f}$ 为双射。*

证明. 为了求出 $\mathbf{f}$ 的反函数，采用 Newton 法，令

$$\varphi_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})=\mathbf{x}+A^{-1}(\mathbf{y}-\mathbf{f}(\mathbf{x})).$$

注意 $\varphi'=A^{-1}(A-\mathbf{f}')$，因此可以选择足够小的邻域使 $\|\varphi'\|$ 足够小。由定理??，其存在不动点，故 $\mathbf{f}$ 可逆。

$\mathbf{f}$ 的一一性已证，下证其为开映射。设 $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)=\mathbf{y}_0$ 确凿，对于足够接近 $\mathbf{y}_0$ 的 $\mathbf{y}$，从任何 $\mathbf{x}_0$ 附近的 $\mathbf{x}$ 出发试图寻找其原像，皆有

$$|\varphi(\mathbf{x})-\mathbf{x}_0| \leq |\varphi(\mathbf{x})-\varphi(\mathbf{x}_0)|+|\varphi(\mathbf{x}_0)-\mathbf{x}_0|.$$

前一绝对值的大小由 $\|\varphi'\|$ 限制，后一绝对值的大小由 $\mathbf{y}$ 的偏移量限制。因此迭代后的不动点仍在 $\mathbf{x}$ 附近，故仍在 U 内，所以 $\mathbf{y}$ 仍在 V 内。 □

定理 1.3.7. *前开定理的局域反函数 $\mathbf{g}$ 亦连续可微。*

证明. 由前证以及定理??，可以选取足够小的邻域 U 使得 $\mathbf{f}'$ 在此邻域内与 $\mathbf{f}'(\mathbf{a})$ 足够接近故可逆。还可以使得在此邻域内，$\mathbf{h}=O(\mathbf{k})$。注意

$$\mathbf{g}(\mathbf{y}+\mathbf{k})-\mathbf{g}(\mathbf{y})-T\mathbf{k}=-T\left[\mathbf{f}(\mathbf{x}+\mathbf{h})-\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{f}'(\mathbf{x})\mathbf{h}\right],$$

其中 $T=\mathbf{f}'^{-1}$。因此余项 $\mathbf{v}=O(\mathbf{u})$。再注意到求逆是连续映射即可。 □

定理 1.3.8. *若连续可微的 $\mathbf{f}$ 将开集 $E \subset \mathbb{R}^n$ 映入 $\mathbb{R}^n$，$\mathbf{f}'$ 逐点可逆，则 $\mathbf{f}$ 为开映射。*

1.3.3　隐函数定理

定义 1.3.5. $(\mathbf{x},\mathbf{y})$ 为

$$(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_m)\in\mathbb{R}^{n+m}.$$

每个线性变换 $A\colon\mathbb{R}^{n+m}\to\mathbb{R}^n$ 都可以分解成 A_x 和 A_y 两部分。

定理 1.3.9. 对于上述 A，若 A_x 可逆，则对于每个 $\mathbf{k}\in\mathbb{R}^m$，有唯一的 $\mathbf{h}\in\mathbb{R}^n$ 满足 $A(\mathbf{h},\mathbf{k})=0$。

证明.

$$\mathbf{h}=-\left(A_x\right)^{-1}A_y\mathbf{k}.$$

□

定理 1.3.10. 设 $\mathbf{f}\colon(X,Y)\to Z$ 是开集 $E\subset\mathbb{R}^{n+m}$ 到 $\mathbb{R}^n$ 内的连续可微映射，且在某点 $(\mathbf{a},\mathbf{b})$ 为零。令 $A=\mathbf{f}'(\mathbf{a},\mathbf{b})$ 且 A_x 可逆，则存在 $(\mathbf{a},\mathbf{b})$ 的邻域 U 和 $\mathbf{b}$ 的邻域 W，W 内的任意 $\mathbf{y}$ 有唯一 $\mathbf{x}$ 使 $\mathbf{f}=0$。

证明. 令 $\mathbf{F}(\mathbf{x},\mathbf{y})=(\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y}),\mathbf{y})$。因此

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}+\mathbf{h},\mathbf{y}+\mathbf{k})-\mathbf{F}(\mathbf{x},\mathbf{y})=(A(\mathbf{h},\mathbf{k}),\mathbf{k})+o(\mathbf{h},\mathbf{k}).$$

若右侧为零，则 $\mathbf{k}=0$，$\mathbf{h}=0$。因此 $\mathbf{F}'$ 可逆，故反函数定理可用于 $\mathbf{F}$。因此，存在 $(0,\mathbf{b})$ 的邻域 V 和 $(\mathbf{a},\mathbf{b})$ 的邻域 U，使得 $\mathbf{F}$ 是一一的。在 V 中投影出 $(0,\mathbf{y})$，注意其为开集即可。 □

定理 1.3.11. 在前开命题中设 $\mathbf{x}=\mathbf{g}(\mathbf{y})$，有 $\mathbf{g}$ 为连续可微映射且 $\mathbf{g}'(\mathbf{b})=-\left(A_x\right)^{-1}A_y$。

证明. 令 $\mathbf{G}$ 为 $\mathbf{F}$ 的局域反函数，则 $\mathbf{G}$ 连续可微，故作为其限制的 $\mathbf{g}$ 亦然。欲求 $\mathbf{g}'(\mathbf{b})$，注意到

$$\mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{b}),\mathbf{b})'=0,$$

即 $A(\mathbf{g}'(\mathbf{b}),I)=0$，$A_x\mathbf{g}'(\mathbf{b})+A_y=0$。 □

1.3.4　秩定理

定理 1.3.12. 设 $\mathbf{F}\colon E\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 将开集 E 映入 $\mathbb{R}^m$，对于任意 $\mathbf{x}$ 有 $\mathbf{F}'$ 的秩为 r。对于 $\mathbf{a}\in E$，$A=\mathbf{F}'$ 的像空间为 Y_1，P 是到其上的投影，Y_2 是 Y_1 的正交空间。

存在 $\mathbf{a}$ 的邻域 U 和 $\mathbb{R}^n$ 中的开集 V，存在连续可微双射 $\mathbf{H}: V \to U$ 满足

$$\mathbf{F}(\mathbf{H}(\mathbf{x})) = A\mathbf{x} + \varphi(A\mathbf{x}),$$

且 $\mathbf{H}$ 的逆亦连续可微。式中 φ 映入 Y_2。

证明. 若 $r = 0$（这里并没有使用归纳法的打算），存在 $\mathbf{a}$ 的邻域使得 $\mathbf{F}$ 为常量且 Y_1 为零空间。故可以取 $\mathbf{H} = I$，$V = U$，$\varphi(0) = \mathbf{F}(\mathbf{a})$。

对于 $r > 0$，设 S 为 A 在 Y_1 上的逆，定义

$$\mathbf{G}: E \to U \subset \mathbb{R}^n = \mathbf{x} + SP[\mathbf{F}(\mathbf{x}) - A\mathbf{x}].$$

由 $\mathbf{G}' = I$ 知存在邻域使其可逆，设其逆为 $\mathbf{H}$。将 $\mathbf{G}$ 经 A 映射，即

$$A\mathbf{G} = ASP\mathbf{F} = P\mathbf{F}.$$

这是因为 $ASPA = A$。如果 $\mathbf{x} = \mathbf{H}(\mathbf{v})$，则有 $P\mathbf{F} \circ \mathbf{H} = A$。因此，

$$\Phi(\mathbf{v}) = \mathbf{F}\mathbf{H}(\mathbf{v}) - A\mathbf{v}$$

是到 Y_2 的连续可微映射。下尚需证存在连续可微的映射 $\varphi(A\mathbf{v}) = \Phi(\mathbf{v})$。

先证 Φ 的值仅仅取决于 $A\mathbf{v}$。考虑两 $\mathbf{v}$ 的差 $\mathbf{h}$，只需证明当 $A\mathbf{h} = 0$，有 $(\mathbf{F}\mathbf{H})'\mathbf{h} = 0$。由构造，$(\mathbf{F}\mathbf{H})'\mathbf{h}$ 到 Y_1 上投影仍为 $A\mathbf{h}$，且二算子像空间皆 r 维，知 $A\mathbf{h}$ 可决定 $(\mathbf{F}\mathbf{H})'$。当前者为零，后者亦然。

再证 φ 连续可微。注意 φ 的定义域是诸 $A\mathbf{v}$，故对于 $\varphi(\mathbf{u})$，相应的 $\mathbf{v} = S\mathbf{u} + \mathbf{a}$，其中 $\mathbf{a}$ 是 A 的零空间中任意元素。对于任意 $\mathbf{u}$，可以寻找其邻域使得存在 $\mathbf{a}$ 让 $\mathbf{v}$ 留在 V 内。于是 $\varphi(\mathbf{u}) = \Phi(\mathbf{a} + S\mathbf{u})$ 连续可微。 □

注意 $A\mathbf{x}$ 映射到 Y_1，因此 $\mathbf{F}$ 在此点的值仅仅取决于其射影，因而可将其视为 r 维曲面，而其水平集可以视为 X 中的 $n - r$ 维曲面。例如将汤勺映为棒棒糖的映射，勺柄的二维平面被映射为糖棒的一维线段，其 $\mathbf{F}'$ 的秩固然为 1。而其水平集，即糖棒上一点对应的原像则是 $2 - 1 = 1$ 维的垂直于汤勺柄的线段。