经典力学

C.Z.

2018 年 8 月 7 日

1　运动学与基本力学

1.1　质点运动学

对加速运动，成立

$$v\left(t\right)=v_0+\int_0^t a\,\mathrm{d}t,\quad x\left(t\right)=x_0+\int_0^t v\,\mathrm{d}t.$$

对匀加速运动，成立

$$v^2-v_0^2=2ax,\quad x\left(x\right)=x_0+v_0t+\frac{1}{2}at^2.$$

- 斜面的加速度为 $a=g\sin\theta$。
- 追及问题可求临界条件，临界条件的追击满足路程相等且速度相等。
- 受力斜向的可以斜分解。
- 向心加速度 $a=v\omega=v^2/R$。

对圆周运动，成立

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{R},\quad \boldsymbol{a}_c=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v},\quad \boldsymbol{a}_t=\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{R}.$$

对一般的变速运动，将 R 替换为曲率半径 ρ 即可。曲率半径可通过设定一在曲线上运动的质点，求 v^2/a_c 得。

- 可直接将 $\boldsymbol{a}$ 投影到垂直于 $\boldsymbol{v}$ 的方向上获得 a_c。

在极坐标下，注意

$$\mathrm{d}\boldsymbol{e}_r=\mathrm{d}\theta\boldsymbol{e}_\theta,\quad \mathrm{d}\boldsymbol{e}_\theta=-\mathrm{d}\theta\boldsymbol{e}_r.$$

立即有（可以用于求轨迹的）

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = \frac{rv_r}{v_\theta}.$$

以及

$$\boxed{a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2, \quad a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}. \tag{1}}$$

a_r 的第一项为单纯的径向加速度，第二项为向心加速度，a_θ 的第一项为科氏力，第二项为单纯的切向加速度。

刚体的运动可分平动与转动。任意两点的连线始终保持平行的运动谓平动。单个刚体，平动自由度有三个，故转动自由度有三个——自转，章动，进动。若为定轴转动，则只有一个自由度。

欲变换参考系，则

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}'(t) + \boldsymbol{r}_{O'}(t).$$

将 $\boldsymbol{r}$ 替换为 $\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{a}$ 皆可成立。由(1)，可得在新参考系中的极坐标下的加速度。

以某参考系为背景可以建立质点的平动参考系，注意它和刚体的参考系不同，它不会自转。

1.2 动量与能量

质点系的动能为

$$\begin{aligned} T = \frac{1}{2}m_i\boldsymbol{v}_i^2 = \frac{1}{2}m_i\left(\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{V} + \boldsymbol{V}\right)^2 \\ = \frac{1}{2}m_i\boldsymbol{v}_i'^2 + \frac{1}{2}m_i\boldsymbol{V}^2 + m_i\boldsymbol{v}_i' \cdot \boldsymbol{V}. \end{aligned}$$

欲消除交叉项，只需

$$m_i\left(\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{V}\right) \cdot \boldsymbol{V} = \left(\boldsymbol{p} - \sum m_i\boldsymbol{V}\right) \cdot \boldsymbol{V} = 0, \quad \boldsymbol{V} = \frac{m_i\boldsymbol{v}_i}{\sum m_i}.$$

从而有

$$\boxed{T = T_{\text{frame}} + \sum T_i'. \tag{2}}$$

质点系的角动量为

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{L} = \sum m_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{v}_i &= \sum m_i \left(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{R}\right) \times \left(\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{V}\right) \\
&+ \sum m_i \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{v}_i + \cancelto{0}{\sum m_i \left(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{R}\right) \times \boldsymbol{V}} \ .
\end{aligned}
$$

因此

$$
\boxed{\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}_{\text{frame}} + \sum \boldsymbol{L}_i'. \qquad (3)}
$$

完全相同的道理有

$$
\boxed{\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_{\text{frame}} + \sum \boldsymbol{p}_i'. \qquad (4)}
$$

2 中心力场问题

由(2)二体问题之动能在质心系可表示为

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2} m_1 \dot{\boldsymbol{r}}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\boldsymbol{r}}_2^2 \\
&= \frac{1}{2} m_1 \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \dot{\boldsymbol{r}}\right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \dot{\boldsymbol{r}}\right)^2 \\
&= \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \dot{\boldsymbol{r}}^2 = \frac{1}{2} \mu \boldsymbol{r}^2.
\end{aligned}
$$

3 刚体运动学

为确定一个刚体的状态，只需其中三个点的坐标，且满足约束

$$
r_{1\,2} = c_{1\,2}, \quad r_{2\,3} = c_{2\,3}, \quad r_{1\,3} = c_{1\,3}.
$$

故总的自由度为 $9 - 3 = 6$。亦可以理解为 3 个自由度用于指定刚体一参考点的坐标，2 个自由度用于指定一参考矢量的方向，1 个自由度约束刚体在此矢量方向上的旋转。

考虑坐标变换（基矢量的变换）

$$
\boldsymbol{i}_i' = \cos\theta_{i\,j} \boldsymbol{i}_j.
$$

并且注意由 $x_i' = \boldsymbol{i}_i' \cdot \boldsymbol{x}$，立刻有

$$x_i' = \cos\theta_{i\,j} x_j.$$

4 刚体的运动方程

可以在刚体中寻找一参考点，使运动方程的求解分为平动与纯转动两部分。若选择质心作参考点，则恰可由

$$\dot{\boldsymbol{p}} = \sum \boldsymbol{F}_i, \quad \dot{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{N}$$

分别求解参考点的运动与刚体绕参考点的转动。在刚体上一固定点或质心建立（空间）惯性参考系，

$$\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t}\right)_s = \boldsymbol{N}.$$

对于刚体的内秉坐标系，有

$$\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t}\right)_s = \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t}\right)_b + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{L} = \boldsymbol{N}.$$

注意 $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{I}\omega$，展开各分量有

$$\begin{aligned}
I_1\dot{\omega}_1 - \omega_2\omega_3\left(I_2 - I_3\right) &= N_1, \\
I_2\dot{\omega}_2 - \omega_3\omega_1\left(I_3 - I_1\right) &= N_2, \\
I_3\dot{\omega}_3 - \omega_1\omega_2\left(I_1 - I_2\right) &= N_3.
\end{aligned}$$

上述方程亦可由拉格朗日方程导出。

4.0.1 刚体的自由转动

不受力的刚体质心保持静止或匀速直线运动，因此不妨以质心为参考点。