

第一章 L^p 空间

1.1 L^p 空间：完备性与逼近

1.1.1 赋范线性空间

定义 1.1.1. 二函数称为等价，如果其几乎处处相等。

定义 1.1.2. E 上满足

$$\int_E |f|^p < \infty$$

之函数等价类全体构成一线性空间，谓 L^p 空间。

由

$$|a + b|^p \leq 2^p \{|a|^p + |b|^p\}$$

知其可构成线性空间。

定义 1.1.3. 若 f 几乎处处满足

$$|f(x)| \leq M,$$

谓之本质有界。其等价类全体构成 L^∞ 。

定义 1.1.4. 线性空间上一泛函 $\|\cdot\|$ 称为范数，若

$$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|,$$

$$\|\alpha f\| = |\alpha| \|f\|,$$

$$\|f\| \geq 0.$$

最后的等号严格成立当且仅当 $f = 0$ 。

例 1.1.1. 易知 L^1 构成一赋范线性空间。

例 1.1.2. 易知 L^∞ 关于 $\|f\| = \inf M$ 构成一赋范线性空间。

例 1.1.3. 易知 ℓ_1 与 ℓ_∞ 构成一赋范线性空间。

例 1.1.4. 易知紧区间上的连续函数全体关于 $\|f\| = \max f$ 构成一赋范线性空间。

1.1.2 Young 不等式, Hölder 不等式, Minkowski 不等式

定义 1.1.5. 对于 $1 < p < \infty$ 以及 L^p 中的 f , 定义

$$\|f\|_p = \left[\int |f|^p \right]^{1/p}.$$

定义 1.1.6. 对 $p \in (1, \infty)$ 定义其共轭 $q = p/(p-1)$, 同在 $(1, \infty)$ 内且

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

定理 1.1.1 (Young 不等式). 设 p, q 共轭, 对正数 a, b 有

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

证明. 由 Jensen 不等式,

$$\frac{\log a^p}{p} + \frac{\log b^q}{q} \leq \log \left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \right). \quad \square$$

定理 1.1.2 (Hölder 不等式). 对于 L^p 之 f 与 L^q 之 g , 有

$$\int |f \cdot g| \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q.$$

证明. 不妨设 $\|f\| = \|g\| = 1$, 从而由 Young 不等式易得

$$\int |f \cdot g| \leq 1. \quad \square$$

推论 1.1.1. f 之共轭 $f^* = \|f\|_p^{1-p} \cdot \operatorname{sgn} f \cdot |f|^{p-1}$ 为 L^q , 且

$$\int f \cdot f^* = \|f\|_p, \quad \|f^*\|_q = 1.$$

定理 1.1.3 (Minkowski 不等式). 若 f 与 g 均为 L^p , 则 $f+g$ 同且

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

证明. 借助前开推论与 Hölder 不等式,

$$\|f + g\|_p = \int f \cdot (f + g)^* + \int g \cdot (f + g)^* \leq \|f\|_p + \|g\|_p. \quad \square$$

推论 1.1.2 (Cauchy-Schwarz 不等式). 对于 L^2 内的 f 与 g ,

$$\int |fg| \leq \sqrt{\int f^2} \cdot \sqrt{\int g^2}.$$

推论 1.1.3. 若 \mathcal{F} 内诸 $\|f\|_p \leq M$, 则 \mathcal{F} 一致可积。

证明. 由 Hölder 不等式,

$$\left[\int_A |f| \right] \leq \left[\int_E |f|^p \right]^{1/p} [m(A)]^{1/q}. \quad \square$$

推论 1.1.4. 有限测度上若 $p_1 < p_2$, 则 $L^{p_2} \subset L^{p_1}$. 且

$$\|f\|_{p_1} \leq c \|f\|_{p_2},$$

其中 $c = [m(E)]^{\frac{p_2 - p_1}{p_1 p_2}}$.

证明. 令 $p = p_2/p_1$, 则 $f^{p_1} \in L^p$. 由 Hölder 不等式,

$$\int_E |f|^{p_1} \leq \|f\|_{p_2}^{p_1} [m(E)]^{1/q}. \quad \square$$

例 1.1.5. 通常, 有限测度集如 $(0, 1]$ 上上述包含关系是严格的. 取 $-1/p_1 < \alpha < -1/p_2$, 有 $x^\alpha \in L^{p_1} - L^{p_2}$.

例 1.1.6. 在 $(0, \infty)$ 上 $f = x^{-1/2}/(1 + |\log x|)$ 仅仅属于 L^2 .

1.1.3 L^p 的完备性

定义 1.1.7. 称一序列收敛于 f , 如果

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\| = 0.$$

定义 1.1.8. 完备的赋范线性空间称为 *Banach* 空间。

命题 1.1.1. 完备空间内的收敛序列均为 *Cauchy* 序列, 且包含收敛子序列的 *Cauchy* 序列收敛。

证明. 后一命题注意

$$\|f_n - f\| \leq \|f_n - f_{n_k}\| + \|f_{n_k} - f\|. \quad \square$$

定义 1.1.9. 一序列称为快速 *Cauchy* 的, 如果对于一收敛级数 $\sum \epsilon_k$, 有

$$\|f_{k+1} - f_k\| \leq \epsilon_k^2.$$

命题 1.1.2. 快速 *Cauchy* 序列都是 *Cauchy* 的, 而任一 *Cauchy* 序列均有快速子列。

证明. 选取子列满足

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k. \quad \square$$

定理 1.1.4. L^p 内的快速 *Cauchy* 序列依范数且几乎处处逐点收敛。

证明. 依定义选取 $\sum \epsilon_k$ 后注意

$$m(|f_{k+1} - f_k|^p > \epsilon_k^p) \leq \frac{1}{\epsilon_k^p} \int |f_{k+1} - f_k|^p \leq \epsilon_k^p.$$

由 Borel-Cantelli 引理知 f_n 几乎处处逐点收敛。由 Fatou 引理,

$$\int |f - f_n|^p \leq \int |f_{n+k} - f_n|^p \leq \left[\sum_{j=n}^{\infty} \epsilon_j^2 \right]^p. \quad \square$$

定理 1.1.5 (Riesz-Fischer). L^p 空间为 *Banach* 空间。且 *Cauchy* 序列存在子列几乎处处逐点收敛。

例 1.1.7. $f_n = n^{1/p} \chi_{(0,1/n]}$ 逐点收敛于零, 但不依范数收敛。

定理 1.1.6. 对 $1 \leq p < \infty$, 逐点收敛的序列依范数收敛当且仅当

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int |f_n|^p = \int |f|^p.$$

证明. 若依范数收敛, 由三角不等式即得结论。反之设极限成立, 令

$$h_n = \frac{|f_n|^p + |f|^p}{2} - \left| \frac{f_n - f}{2} \right|^p.$$

由凸性知 $h_n \geq 0$, 且 $\lim h_n = |f|^p$ 逐点收敛, 由 Fatou 引理

$$\int |f|^p \leq \liminf \int h_n = \int |f|^p - \limsup \int \left| \frac{f_n - f}{2} \right|^p. \quad \square$$

定理 1.1.7. 对 $1 \leq p < \infty$, 逐点收敛的序列依范数收敛当且仅当 $\{f_n\}$ 一致可积且紧密。

证明. 由推论??, 要求 $|f_n - f|^p$ 一致可积且紧密。再注意

$$|f_n - f|^p \leq 2^p \{|f_n|^p + |f|^p\}, \quad |f_n|^p \leq 2^p \{|f_n - f|^p + |f|^p\}. \quad \square$$

1.1.4 逼近与可分性

定义 1.1.10. L^p 下一函数族称为稠密的, 如果其依范数可任意逼近 L^p 。

命题 1.1.3. 简单函数在 L^p 内稠密。

证明. 借助简单函数逼近引理, 注意 $|\varphi_n - g|^p \leq 2^{p+1} |g|^p$ 后控制收敛。 \square

命题 1.1.4. 对 $1 \leq p < \infty$, 阶梯函数在紧区间上的 L^p 稠密。

证明. 注意阶梯函数可在任意小的集合外逼近简单函数即可。而对 $p = \infty$, 再小的非零测集皆会导致范数不得为零, 是故于其不成立。 \square

定义 1.1.11. 空间谓可分者, 其下存在一可数稠密子集。

定理 1.1.8. 对 $1 \leq p < \infty$, L^p 可分。

证明. 紧区间内有理阶梯函数稠密, 积分可由 $[-n, n]$ 上单调收敛逼近。 \square

例 1.1.8. 紧区间上的 L^∞ 不可分。

证明. 不可数特征函数族的区间稍变, 逼近不复成立, 不可以可数族逼近。 \square

定理 1.1.9. 对 $1 \leq p < \infty$, 有界支撑的连续函数在 L^p 中稠密。

1.2 L^p 空间的共轭与弱收敛

1.2.1 L^p 的共轭与表示

定义 1.2.1. 线性泛函是函数上的线性算子。

例 1.2.1. $T(f) = \int fg$ 与 $T(f) = \int f dg$ 均为线性泛函。

定义 1.2.2. 所有 $|T(f)| \leq M \|f\|$ 的 M 的下确界记作 $\|T\|$ 。

由三角不等式知线性泛函连续。同时有

$$\|T\| = \sup \{T(f) \mid \|f\| \leq 1\}.$$

命题 1.2.1. 赋范线性空间上的线性算子的空间构成一赋范线性空间。

命题 1.2.2. L^p 上的算子

$$T(f) = \int g \cdot f$$

的范数为 $\|g\|$ 。

命题 1.2.3. 在一稠密子集上相等的线性算子相等。

引理 1.2.1. 可测函数 g 若对 L^p 上的简单函数 f 皆满足

$$\left| \int g \cdot f \right| \leq M \|f\|,$$

则 $g \in L^q$, 且 $\|g\| \leq M$ 。

证明. 对于 $p > 1$, 考虑 g 的下逼近, 只证 $\int \varphi_n^p \leq M^p$ 即可, 再注意 $\varphi_n^q \leq |g| \varphi_n^{q-1}$, 以及 $p(q-1) = q$ 并借助题设。

对于 $p = 1$, 需证 M 为一本质上界。考虑 f 为诸特征函数即可。 \square

定理 1.2.1. 紧区间上的线性泛函满足 $T(f) = \int g \cdot f$ 的形式。

证明. 令 $\Phi(x) = T\chi_{[a,x]}$, 其绝对连续, 故 $\Phi' = g$ 积分还原。对阶梯函数,

$$T(f) = \int g \cdot f.$$

控制收敛后知对简单函数均成立之。调用前开命题再注意简单函数稠密。 \square

定理 1.2.2 (L^p 的 Riesz 表示定理). $1 \leq p < \infty$ 上的线性泛函有 g 满足

$$Tf = \langle g | f \rangle, \quad \|T\| = \|g\|.$$

证明. 考虑 $[-n, n]$ 上的限制后不断扩大 n , Fatou 后知 $g \in L^q$ 。 \square

1.2.2 弱收敛性

例 1.2.2. $[0, 1]$ 上的 $1/2^n$ -方波在 L^p 内不存在收敛子列。

定义 1.2.3. 赋范线性空间上的序列 $\{f_n\}$, 若 $Tf_n \rightarrow Tf$ 对任意 T 成立, 则称之弱收敛。

命题 1.2.4. $\{f_n\}$ 弱收敛于 f 当且仅当对任意 g 成立

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int g \cdot f_n = \int g \cdot f.$$

弱收敛具有唯一性。因为

$$\int (f_1 - f_2)^* \cdot f_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int (f_1 - f_2)^* \cdot f_n = \int (f_1 - f_2)^* f_2.$$

定理 1.2.3. L^p 上的弱收敛序列有诸 $\|f_n\|$ 有界且

$$\|f\| \leq \liminf \|f_n\|.$$

证明. 注意到

$$\int f^* \cdot f_n \leq \|f^*\|_q \cdot \|f_n\|_p = \|f_n\|_p$$

后 Fatou 即可。为证明有界, 假设 $\{\|f_n\|\}$ 无界, 选取 $\{f_n\}$ 的子列 $\{g_n\}$ 满足 $\|g_n\| \geq n \cdot 3^n$, 并再度选取子列 $\{h_n\}$ 满足 $\|h_n\| / (n \cdot 3^n) \rightarrow \alpha \in [1, +\infty]$ 。

于是 $\mathcal{F}_n = n \cdot 3^n / \|h_n\| \cdot h_n$ 满足 \mathcal{F}_n 弱收敛于 f 且 $\|\mathcal{F}_n\| = n \cdot 3^n$ 。定义

$$\epsilon_{n+1} = \frac{1}{3^{n+1}} \operatorname{sgn} \left[\sum_k^n \epsilon_k \cdot f_k^* \right] \cdot f_{n+1},$$

则 $\|\epsilon_k \cdot f_k^*\| = 1/3^k$, 由 L^p 的完备性知 $g = \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon_k \cdot f_k^*$ 收敛于 L^p 内。

□