

第一章 普通点集拓扑

1.1 拓扑空间与连续函数

1.1.1 拓扑空间

定义 1.1.1. 集合 X 上的一个拓扑 \mathcal{T} 谓 X 的一满足如下条件的子集族:

1. $\{\emptyset, X\} \in \mathcal{T}$;
2. \mathcal{T} 中元素的任意并仍在 \mathcal{T} 中;
3. \mathcal{T} 中元素的有限交仍在 \mathcal{T} 中。

定义 1.1.2. X 的所有子集构成的拓扑谓离散拓扑。

定义 1.1.3. 由 X 和 \emptyset 构成的拓扑谓密着拓扑。

定义 1.1.4. 由 X 本身与所有满足 $X - U$ 为有限集的 U 构成的拓扑谓有限补拓扑。

定义 1.1.5. $\mathcal{T}' \supset \mathcal{T}$ 则 \mathcal{T}' 细于 \mathcal{T} , 反之则谓粗于。

如果把开集比做石子, 把石子打碎就得到更细的拓扑。

1.1.2 拓扑的基

定义 1.1.6. 基 \mathcal{B} 谓满足如下条件的子集族:

1. 对任意 $x \in X$, 存在 $B \in \mathcal{B}$ 满足 $x \in B$;
2. 对任意 $x \in B_1 \cap B_2$, 存在 B 满足 $x \in B$ 且 $B \subset B_1 \cap B_2$ 。

注意此定义不针对具体的拓扑。

例 1.1.1. 平面上的圆域和矩形域构成的集族都构成基。

定义 1.1.7. 满足定义1.1.6的 \mathcal{B} 生成的拓扑为所有满足对 $x \in U$, 存在 $x \in B \subset U$ 的 U 的集族。

可以直接验证上述定义构成一个拓扑。对所有 x 取对应的 $x \in B_x$ 后将诸 B_x 并起, 可得等价的表述

定理 1.1.1. 若 \mathcal{B} 为 \mathcal{T} 的基, 则 \mathcal{T} 为 \mathcal{B} 中元素并的族。

定理 1.1.2. 设 \mathcal{C} 为开集族, 若对于任意开集 U 中任意 x , 存在 $C \in \mathcal{C}$ 满足 $x \in C \subset U$, 则 \mathcal{C} 为 \mathcal{T} 的基。

证明. 容易验证 \mathcal{C} 为基。再分别证 $\mathcal{C} \subset \{U\}$ 与 $\{\cup C\} \supset \{U\}$ 。 \square

定理 1.1.3. 设 \mathcal{B} 与 \mathcal{B}' 分别生成 \mathcal{T} 与 \mathcal{T}' , 则 \mathcal{T}' 细于 \mathcal{T} 当且仅当对任意 $x \in B$ 存在 $x \in B' \subset B$ 。

证明. 强行带入定义, 即任意 U 均在 \mathcal{T}' 内即可。 \square

定义 1.1.8. \mathbb{R} 上的 (a, b) 生成的拓扑谓标准拓扑。

定义 1.1.9. \mathbb{R} 上 $[a, b)$ 生成的拓扑谓下限拓扑, 记作 \mathbb{R}_ℓ 。

定义 1.1.10. \mathbb{R} 上 (a, b) 与 $(a, b) - \{\frac{1}{n}\}$ 生成的拓扑谓 K -拓扑, 记作 \mathbb{R}_K 。

引理 1.1.1. \mathbb{R}_ℓ 与 \mathbb{R}_K 严格细于标准拓扑, 但它们之间不可比较。

证明. \mathbb{R}_K 严格细于的证明只需考虑 $x = 0$ 与 $B = (-1, 1) - \{1/n\}$, 同一个集合可证 \mathbb{R}_ℓ 不细于 \mathbb{R}_K 。 \square

定义 1.1.11. 子基 \mathcal{S} 谓满足 $\cup \mathcal{S} = X$ 的集族。

定义 1.1.12. 子基生成的拓扑谓 \mathcal{S} 中有限交的所有并。

可以直接验证 $\{\cap \mathcal{S}\}$ 为一个基, 故其确实生成一拓扑。

1.1.3 序拓扑

定义 1.1.13. 具有全序关系的 X 上的序拓扑谓所有 (a, b) , $(a, \max X]$, $[\min X, b)$ 生成的拓扑。

例 1.1.2. \mathbb{Z}_+ 上的序拓扑是离散拓扑。然而 $X = \{1, 2\} \times \mathbb{Z}_+$ 的字典序拓扑下单点集 1×1 并非开集。

定义 1.1.14. 全序集 X 中 a 决定的射线谓开射线 $(a, +\infty)$, $(-\infty, a)$, $[a, +\infty)$, $(-\infty, a]$ 。

所有开射线构成 X 的序拓扑的子基。

1.1.4 积拓扑

定义 1.1.15. $X \times Y$ 上的积拓扑谓所有 $U \times V$ 的集族 \mathcal{B} 生成的拓扑, 其中 U 与 V 为 X 与 Y 中的开集。

定理 1.1.4. 若 \mathcal{B} 与 \mathcal{C} 分别为 X 与 Y 的基, 则 $\mathcal{B} \times \mathcal{C}$ 为 $X \times Y$ 的基。

定义 1.1.16. 投射 $\pi_1(x, y) = x$, $\pi_2(x, y) = y$ 。

定理 1.1.5. 如下的 \mathcal{S} 构成 $X \times Y$ 的一子基, 其中 U 和 V 分别为 X 与 Y 中的开集。

$$\mathcal{S} = \{\pi_1^{-1}(U)\} \cup \{\pi_2^{-1}(V)\}.$$

1.1.5 子空间拓扑

定义 1.1.17. 对 X 的子集 Y 定义子空间拓扑, 其中 U 为 X 中的开集。

$$\mathcal{T}_Y = \{Y \cap U\}.$$

定理 1.1.6. 若 \mathcal{B} 为 X 的一个基, 则

$$\mathcal{B}_Y = \{B \cap Y \mid B \in \mathcal{B}\}$$

谓 Y 的子空间拓扑的一个基。

引理 1.1.2. 若 Y 为 X 中开集而 U 为 Y 中开集, 则 U 为 X 中开集。

定理 1.1.7. 若 $A \subset X$, $B \subset Y$, 则 $A \times B$ 的积拓扑与其自 $X \times Y$ 继承的子空间拓扑相符。

然而, 对于序拓扑无类似结论。

例 1.1.3. 考虑 $X = \mathbb{R}$ 而 $Y = [0, 1]$, Y 上的序拓扑与子空间拓扑相符。

例 1.1.4. 考虑 $X = \mathbb{R}$ 而 $Y = [0, 1) \cup \{2\}$, 子空间拓扑中 $\{2\}$ 为开集, 二者不符。

例 1.1.5. 考虑 $X = \mathbb{R}^2$ 而 $Y = [0, 1] \times [0, 1]$, 则 $\frac{1}{2} \times (\frac{1}{2}, 1]$ 为子空间拓扑的开集但不是序拓扑的开集。

定义 1.1.18. 子集 Y 称为凸的, 如果对 Y 中 $a < b$ 皆有 $(a, b) \subset Y$ 。

定理 1.1.8. 设 X 为全序集, Y 为凸子集, 则子空间拓扑与序拓扑一致。

证明. 借助开射线构造子基后证明其相互包含即可。 \square

1.1.6 闭集与极限点

定义 1.1.19. 若 $X - A$ 为开集, 则 A 为闭集。

例 1.1.6. \mathbb{R} 中 $[a, b]$ 为闭集, \mathbb{R}^2 中 \mathbb{R}_+^2 为闭集, 有限补拓扑中 X 、 \emptyset 、有限集为闭集。

例 1.1.7. 离散拓扑每一个集合都是开集也都是闭集, $Y = [0, 1] \cup (2, 3)$ 中两个分量都同时是开集和闭集。

定义 1.1.20. 对于拓扑空间 X , 成立

1. \emptyset 、 X 都是闭集;
2. 闭集的任意交仍为闭集;
3. 闭集的有限并仍为闭集。

定理 1.1.9. A 为 X 的子空间 Y 的闭集当且仅当有闭集 C 满足 $A = Y \cap C$ 。

定理 1.1.10. A 是 Y 的闭集, Y 是 X 的闭集, 则 A 是 X 的闭集。

Hausdorff 空间

定义 1.1.21. 集合的内部 $\overset{\circ}{A}$ 是包含于其内的所有开集的并, 闭包 \bar{A} 是其外所有闭集的交。

显然开集的内部是本身, 闭集的闭包也是本身。注意 $(0, 1)$ 在其本身中的闭包和在 \mathbb{R} 中的闭包不同, 所称闭包都是指父空间闭包。

定理 1.1.11. Y 中 $\bar{A}^Y = \bar{A} \cap X$ 。

定义 1.1.22. 两集合相交, 如果它们的交非空。

定义 1.1.23. 含有 x 的开集称为其邻域。

定理 1.1.12. $x \in \bar{A}$ 当且仅当每一个邻域与 A 相交。

证明. 如果存在反例 U , 则 $X - U$ 会成为包含 A 的闭集。 \square

推论 1.1.1. $x \in \bar{A}$ 当且仅当含有 x 的每一个基元素与 A 相交。

例 1.1.8. $A = (0, 1]$, $\bar{A} = [0, 1]$. $A = \mathbb{Q}$, $\bar{A} = \mathbb{R}$. $\overline{\{1/n\}} = \{1/n\} \cup \{0\}$ 。

极限点

定义 1.1.24. 若 x 的任何一个邻域包含 A 中其他点, 则 x 为 A 的极限点。

例 1.1.9. $A = (0, 1]$, $[0, 1]$ 中的点均为其极限点。 $A = \mathbb{Q}$, \mathbb{R} 中的点均为其极限点。 $A = \{1/n\}$, 0 为其极限点。

定理 1.1.13. $\bar{A} = A \cup A'$, 其中 A' 为极限点集合。

证明. 参考定理1.1.12。 \square

推论 1.1.2. A 为闭集当且仅当 $A' \subset A$ 。

Hausdorff 空间

定义 1.1.25. 如果对于 x 的任意邻域 U , 存在 N , 使得当 $n > N$, $x_n \in U$, 则 $\{x_n\}$ 收敛到点 x 。

\mathbb{R}^2 和 \mathbb{R} 中的序列最多收敛至一点, 然而其他拓扑空间不一定。

定义 1.1.26. 若 X 中任意两不同点存在无交邻域, 则称 X 为一 Hausdorff 空间 (Hausdorff space)。

定理 1.1.14. Hausdorff 空间中有限集为闭集。

证明. 只证单点集。由于隔离邻域的存在, 易见其他点都不在闭包内。 \square

比 Hausdorff 条件更弱的, 有 T_1 公理。

定义 1.1.27. 若 X 中有限集为闭, 则 X 满足 T_1 公理。

定理 1.1.15. 若 X 满足 T_1 公理, 则 x 为 A 的极限点当且仅当 x 的任意邻域与 A 有无限交点。

证明. 如果有一个邻域只有有限交点, 挖掉还是开集, 但不再与 A 相交。□

定理 1.1.16. 若 X 为 Hausdorff 空间, 则 X 中的序列最多收敛至一点。

证明. 如果有两个点, 在定义中取隔离邻域即可。□

定理 1.1.17. 每一个具有序拓扑的全序集, 两个 Hausdorff 空间的积, Hausdorff 空间的子空间是 Hausdorff 空间。

证明. 全序集可选取中间元分割, 中间元不存在的直接射线可分割。□

1.1.7 连续函数

函数的连续性

定义 1.1.28. 函数 $f: X \rightarrow Y$ 称为连续的, 如果开集的原像为开集。

为了证明函数连续, 只需要证明基的原像为开集即可。

例 1.1.10. 上述定义等价于 $\epsilon - \delta$ 定义。

证明. 如果 $\epsilon - \delta$ 定义成立, 则 $f(x)$ 的 ϵ -邻域的原像包含 x 的 δ -邻域, 故任意开集的原像均为开集。如果拓扑定义成立, 则显而易见。□

例 1.1.11. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_\ell$ 的 $f(x) = x$ 不是连续函数, 但其逆连续。

定理 1.1.18. 对于 $f: X \rightarrow Y$, 下列条件等价:

1. f 连续;
2. 对 X 的任意子集 A 有 $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$;
3. 对 Y 中任意闭集 B 有 $f^{-1}(B)$ 为闭集;
4. 对任意 x 与 $f(x)$ 的邻域 V , 存在 x 的邻域 U 满足 $f(U) \subset V$ 。

证明. $1 \Rightarrow 2$: 若 y 在 $f(A)$ 外一开集内, 则原像为 $f(A)$ 外一开集。 $2 \Rightarrow 3$: 闭集 $f(A) = \overline{f(A)} \supset f(\overline{A})$, 故 $A = \overline{A}$ 。 $3 \Rightarrow 1$ 与 $1 \Rightarrow 4 \Rightarrow 1$ 显然。□

同胚

定义 1.1.29. 如果一个一一映射和它的逆都连续, 则称之为同胚。

定义 1.1.30. 如果 X 的性质于与之同胚的 Y 都成立, 则称之为拓扑性质。

定义 1.1.31. 映入子空间的同胚称为嵌入。

例 1.1.12. $F(x) = x/(1-x^2)$ 与 $G(y) = 2y/(1+(1+4y^2)^{1/2})$ 为 $(-1, 1)$ 与 \mathbb{R} 间同胚。

例 1.1.13. $[0, 1)$ 弯曲到圆周的映射连续而非同胚。其扩张连续而非嵌入。

构造连续函数

定理 1.1.19. 下列函数皆连续:

1. 常值函数;
2. 子空间到父空间的内射;
3. 连续函数的复合;
4. 连续函数限制定义域到一子空间的结果;
5. 连续函数限制或扩大值域至包含像集的子空间或父空间的结果;
6. 若 X 可写为开集的并, 且 f 在每个分量上连续。

定理 1.1.20 (黏结引理). 设 $X = A \cup B$ 且二者为闭集, 并且 $f: A \rightarrow Y$ 与 $g: B \rightarrow Y$ 连续且在 $A \cap B$ 上相等, 则 h 连续,

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A, \\ g(x), & x \in B. \end{cases}$$

证明. 由定理1.1.18, 注意闭集被映回闭集即可。□

例 1.1.14. 对 $x \geq 0$, $h(x) = x$, $x \leq 0$, $h(x) = x/2$, 则 h 连续。

定理 1.1.21. $f: A \rightarrow X \times Y$ 连续的充分必要条件为 f_X 与 f_Y 连续。

证明. 注意连续的拓扑定义等价于对基连续即可。□

例 1.1.15. 向量场连续当且仅当分量连续。

1.1.8 积拓扑

定义 1.1.32. X 的元素的 J -串为 $x: J \rightarrow X$, 其全体记作 X^J 。

例如, $\mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}^{\{1,2,3\}}$ 。

定义 1.1.33. A_j 的笛卡尔积 $\prod A_j$ 为各取一元构成之 J -串的集合。

定义 1.1.34. 基由 $\prod U_\alpha$ 构成 $\prod X_\alpha$ 的称为箱拓扑。

定义 1.1.35. 子基由 $\{\pi^{-1}(U_\alpha)\}$ 构成的称为积拓扑。

定理 1.1.22. 箱拓扑的基由所有 $\prod U_\alpha$ 构成, 积拓扑的基由 $\prod U_\alpha$ 构成但 U_α 中只有有限个非 X_α 。

定理 1.1.23. $\prod B_\alpha$ 构成箱拓扑的积, $\prod B_\alpha$ 中若 B_α 中只有有限个非 X_α 则构成积拓扑的基。

例 1.1.16. \mathbb{R}^n 的积拓扑与箱拓扑一致。

定理 1.1.24. $\prod A_\alpha$ 在两种拓扑下都是 $\prod X_\alpha$ 的同种拓扑的子空间。

定理 1.1.25. 若每个 X_α 都是 *Hausdorff* 的, 则两拓扑下 $\prod X_\alpha$ 都如此。

定理 1.1.26. 在 $\prod X_\alpha$ 的两种拓扑下都有 $\prod \overline{A_\alpha} = \overline{\prod A_\alpha}$ 。

证明. 若 x 在 $\prod \overline{A_\alpha}$ 内, 则诸 $\prod U_\alpha$ 均有 $\prod A_\alpha$ 的元素, 故 x 在 $\overline{\prod A_\alpha}$ 内。若 x 在 $\prod \overline{A_\alpha}$ 外 U_α 内, 则 $\pi^{-1}(U_\alpha)$ 包含 x 且为开集, 故在 $\overline{\prod A_\alpha}$ 外。□

定理 1.1.27. 积拓扑下 $f: A \rightarrow \prod X_\alpha$ 连续当且仅当各个分量连续。

证明. 注意连续的拓扑定义等价于对基成立即可。□

例 1.1.17. 对箱拓扑下 \mathbb{R} 的可数无限积 \mathbb{R}^ω , $f(t) = (t, t, t, \dots)$ 不连续。注意 $(-1, 1) \times (-1/2, 1/2) \times \dots \times (-1/3, 1/3)$ 被映回 0 即可。

1.1.9 度量拓扑

定义 1.1.36. 集合 X 的一个度量 d 是一个函数 $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, 满足正定、对称与三角不等式。

定义 1.1.37. 以全体 ϵ -球为基的拓扑称为度量拓扑。

容易验证全体 ϵ -球构成基。由这一定义，开集可视作满足任意 $y \in U$ 都有某 $B(x, \epsilon) \subset U$ 的集合 U 。

例 1.1.18. 若 $x = y$, $d(x, y) = 1$, 否则 $d(x, y) = 0$ 诱导出离散拓扑。

例 1.1.19. $d(x, y) = |x - y|$ 诱导 \mathbb{R} 上的序拓扑。

定义 1.1.38. 若 X 的拓扑由某度量诱导，则称 X 为度量空间。

定义 1.1.39. 度量空间的子集 A 为有界的，若 $d(a_1, a_2)$ 一致有界。 A 的直径谓 $\text{diam } A = \sup \{d(a_1, a_2)\}$ 。

定理 1.1.28. 由度量 d 诱导的度量

$$\bar{d}(x, y) = \min \{d(x, y), 1\}$$

谓标准有界度量。

定义 1.1.40. 分类验证三角不等式即可。

定义 1.1.41. 对 \mathbb{R}^n 中的点, $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \left(\sum (x_i - y_i)^2\right)^{1/2}$ 诱导欧氏度量, $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max \{|x_i - y_i|\}$ 诱导平方度量。

欧式度量的三角不等式是熟知的结论。平方度量由

$$d_3 = |x_k - z_k| \leq |x_k - y_k| + |y_k - z_k| \leq d_1 + d_2$$

验证三角不等式。注意同理可证若 X 上度量 d_1 和 Y 上度量 d_2 可以生成 $X \times Y$ 上一度量 $d_3 = \max \{d_1, d_2\}$ 。

欧式度量和平方度量的基元素分别为圆域和方域。由定理1.1.3立得

定理 1.1.29. 度量拓扑 \mathcal{T}' 细于 \mathcal{T} 当且仅当对于任意 x 与 ϵ , 存在 ϵ' 满足

$$B'(x, \epsilon') \subset B(x, \epsilon).$$

定理 1.1.30. 欧氏度量和平方度量诱导 \mathbb{R}^n 上的积拓扑。

证明. 直接验证不难, 但由 $\rho \leq r \leq \sqrt{n}\rho$ 可立得欧式与平方拓扑等价。 \square

定义 1.1.42. 对 \mathbb{R}^J 中的点定义

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sup \{\bar{d}(x_\alpha, y_\alpha) \mid \alpha \in J\},$$

可得一致度量, 诱导出一致拓扑。

定理 1.1.31. 一致拓扑细于积拓扑，粗于箱拓扑。 J 为无限集则两两不同。

证明. 玩弄基元素的大小可证其粗细。 J 无限时， $(-1, 1)^J$ 在一致拓扑下为开，积拓扑下非开。 $\prod (-1/n, 1/n)$ 在箱拓扑下为开，一致拓扑下非开。□

定理 1.1.32. 对 \mathbb{R} 的可数无限积 \mathbb{R}^ω 定义

$$D(x, y) = \sup \left\{ \frac{\bar{d}(x_i, y_i)}{i} \right\},$$

可诱导 \mathbb{R}^ω 上的积拓扑。

证明. 设 \mathbb{R}^ω 的某基 B 的分量在 j 后均为 \mathbb{R} ，则某 $B(x, \epsilon/j)$ 包含其内。反之也可以选择这样的基包含于 $B(x, 1/j)$ 内。□

类似证明可仿照得到

定理 1.1.33. 可度量化空间的可数积仍可度量化。

例 1.1.20. 在 $X \times Y = \mathbb{R}^2$ 上定义 $d = \min\{y_2 - y_1, 1\}$ ，如果两点共 x ，否则 $d = 1 + (x_1 - x_2)$ ，则 d 诱导字典序拓扑。

例 1.1.21. 易见度量空间的子空间仍为度量空间，且子空间的度量直接限制定义域可得。

1.1.10 连续函数与度量拓扑

定理 1.1.34. 度量空间到度量空间的 $f: X \rightarrow Y$ 的连续性等价于 ϵ - δ 条件。

证明. 仿照例1.1.10可得。□

引理 1.1.3 (序列引理). 若 A 中有收敛于 x 的序列，则 $x \in \bar{A}$ 。若 X 为度量空间，逆命题成立。

定理 1.1.35. 度量空间之间的 $f: X \rightarrow Y$ 连续的充要条件谓 $x_n \rightarrow x$ 等价于 $f(x_n) \rightarrow f(x)$ 。

证明. 若拓扑条件成立，则 $f(x)$ 的小邻域原像都会包含 x 的邻域，故包含 $\{x_n\}_{n \geq N}$ 。若序列条件成立，结合序列引理与定理1.1.18即可。□

注意上述定理对满足下列条件的空间也可以直接适用。

定义 1.1.43. 如果 x 有邻域 $\{U_n\}$ 满足任意邻域 U 都有某 U_n 含于其内, 则称 X 在 x 处有可数基。如果处处都有则称 X 满足第一可数性公理。

引理 1.1.4. 加减乘除是其定义域内的连续函数。

定理 1.1.36. 连续函数加减乘的结果连续, 恒非零的除亦连续。

定义 1.1.44. 若 $\{f_n\}$ 关于度量 $d(f, g) = \sup \{|f - g|\}$ 收敛于 f , 则称其一致收敛。

定理 1.1.37. 一致收敛的连续函数列收敛于连续函数。

证明. 对给定的 ϵ , 存在 δ 和 N 使得当 $|x - y| < \delta$, 诸变差皆小于 δ 。

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(y)| + |f(y) - f_N(y)|. \quad \square$$

推论 1.1.3. 若 $x_n \rightarrow x$ 而 $\{f_n\}$ 一致收敛于 f , 则 $f_n(x_n) \rightarrow f(x)$ 。

例 1.1.22. 箱拓扑的 \mathbb{R}^ω 不满足序列引理因此不可度量化。 $0 \in \overline{\mathbb{R}_+^\omega}$ 但 $\prod (-x_{ii}, x_{ii})$ 排斥所有 x_i 。

例 1.1.23. 不可数个 \mathbb{R} 的积空间不可度量化。

证明. 考虑 \mathbb{R}^J 由那些知有有限个零分量的 $\{0, 1\}$ 序列的子空间, 易见 0 在其内。然而, 能有幸为零的分量指标仅有可数个, 故存在恒 1 的指标。 \square

1.1.11 商拓扑

定义 1.1.45. 满射 $p: X \rightarrow Y$ 称为商映射, 如果 U 是 Y 的开集当且仅当 $p^{-1}(U)$ 是 X 的开集。

易见开集也可以改为闭集。

定义 1.1.46. X 的子集 C 为饱和的, 如果它是纤维的并。

商映射等价于饱和开集映射到开集。易见开映射和闭映射（把开集映射到开集或者把闭集映射到闭集）都是商映射。

例 1.1.24. $[0, 1] \cup [2, 3]$ 到 $[0, 2]$ 的黏贴映射是闭映射但不是开映射。

例 1.1.25. $\pi_1: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是开映射但不是闭映射, 因为 $\{y = 1/x\}$ 被映射到开集。

例 1.1.26. π_1 在 $A = \mathbb{R} \times 0 \cup [0, \infty) \times \mathbb{R}$ 上的限制是商映射, 但不是开映射或者闭映射。 $A - (-\infty, 0] \times 0$ 是开集, 但是被映射到闭集。 $\{y = \pm \tan x\}$ 图像左侧是闭集, 但被映射到开集。

定义 1.1.47. 满射 $p: X \rightarrow A$ 的像 A 上存在一拓扑使得 X 为商映射, 此拓扑谓商拓扑。

例 1.1.27. $y = \operatorname{sgn}(x)$ 在点集上可以诱导一个商拓扑 $\{\{-1\}, \{1\}, 0\}$ 。

定义 1.1.48. X^* 为 X 的分拆, 则 $\pi: X \rightarrow X^*$ 诱导的商拓扑使 X^* 为商空间。

例 1.1.28. 将单位圆盘将圆周视为等价类, 则商空间同胚于球面。

例 1.1.29. 将矩形四角和对边上对应点视为等价类, 则商空间同胚于环面。

由例1.1.26知商映射在子空间的限制未必是商映射, 但仍然有

定理 1.1.38. 设商映射 $p: X \rightarrow Y$ 与饱和子空间 A , 则 p 在其上的限制 $q: A \rightarrow p(A)$ 仍为商映射, 如果

1. A 为开集或闭集;
2. 或者 p 为开映射或闭映射。

证明. 先验证, 如果 $V \subset p(A)$, 则 $q^{-1}(V) = p^{-1}(V)$ 。如果 $U \subset X$, 则 $p(U \cap A) = p(U) \cap p(A)$ 。都有 $q^{-1}(V)$ 是开的 $\Rightarrow V$ 在 $p(A)$ 中为开。 \square

商映射的复合仍为商映射, 但乘积不一定, Hausdorff 空间的商空间也不一定是 Hausdorff 空间。

定理 1.1.39. 商映射 p 与纤维上的映射 g 诱导 f 满足 $f \circ p = g$ 。 f 连续当且仅当 g 连续, f 为商映射当且仅当 g 为商映射。

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ p \downarrow & \searrow g & \\ Y & \xrightarrow{\quad f \quad} & Z \end{array}$$

证明. 若 p 和 g 为商映射, 证明 $f^{-1}(V)$ 为开集 $\Rightarrow V$ 为开集即可。 \square

推论 1.1.1. 设 $g: X \rightarrow Z$ 为连续满射, X^* 为各纤维的集, 取商拓扑, 则

1. g 诱导的 $f: X^* \rightarrow Z$ 一一连续, 其为同胚当且仅当 g 为商映射;
2. 若 Z 为 Hausdorff 空间, 则 X^* 为 Hausdorff 空间。

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ p \downarrow & \searrow g & \\ X^* & \xrightarrow{f} & Z \end{array}$$

证明. 注意一一的商映射等价于同胚。 \square

例 1.1.30. 设 $X = [0, 1] \times \{1, 2, \dots\}$, $Z = x \times (x/n)$ 其中 $x \in [0, 1]$, 则 $g(x \times n) = x \times (x/n)$ 诱导出 X^* 为将 X 诸左端点粘合的空间, 但 $f: X^* \rightarrow Z$ 不是同胚。

证明. 考虑 $x_n = (1/n) \times n$, 则 $\{x_n\}$ 为闭集但是 $z_n = (1/n) \times 1/n^2$ 不是, 因此 g 不是商映射。 \square

例 1.1.31. 设 $p: X \rightarrow X^*$ 是将 \mathbb{R} 的 \mathbb{Z}_+ 粘合为 b 形成的商空间, $i: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ 为恒等映射, 则 $p \times i$ 不是商映射。

证明. 假设 U_n 为 $n \times (\sqrt{2}/n)$ 附加其上方和下方的条带, $U = \cup U_n$, 则 U 饱和但 $p \times i(U)$ 不是开集, 因为某 $I_b \times I_\delta$ 的原像包含条带的缝隙。 \square

1.2 连通性与紧致性

1.2.1 连通空间

定义 1.2.1. 拓扑空间 X 的一个分割, 谓其一对无交非空开集其并为 X 。

引理 1.2.1. 若 Y 是 X 的子空间, 则其分割的分量彼此不包含对方的极限点。若存在一对并为 Y 的非空集合彼此不包含对方极限点, 则亦构成分割。

证明. 注意分量既开又闭, 故极限点自含。若存在这样的一对, 则 A 中任意元素都存在小邻域在 B 外, 故在 A 内, 故 A 为开集。 \square

例 1.2.1. 密着拓扑是连通的。

例 1.2.2. \mathbb{R} 的子空间 $[-1, 0) \cup (0, 1]$ 不是连通的。

例 1.2.3. \mathbb{Q} 不是连通的。

例 1.2.4. $\{y = 1/x\}$ 其中 $x > 0$ 和 $\{y = 0\}$ 作为 \mathbb{R}^2 的子空间不是连通的。

引理 1.2.2. 连通子空间包含在分割的二者中一个内。

定理 1.2.1. 含有一个公共点的连通子空间族的并是连通的。

定理 1.2.2. A 为连通子空间, 则 $A \subset B \subset \bar{A}$ 的 B 是连通的。

证明. 若 \bar{A} 被分拆为 $C \cup D$, 则 $A \subset C$ 而 D 为一个与 A 无交的邻域。□

定理 1.2.3. 连通空间的连续映射的像是连通的。

定理 1.2.4. 有限多个连通空间的积是连通的。

证明. 注意每个十字形是含有公共点的连通空间的并, 再将十字形并起。□

例 1.2.5. 箱拓扑的 \mathbb{R}^ω 不连通, 后者可分为有界序列和无界序列两开集。

例 1.2.6. 积拓扑的 \mathbb{R}^ω 连通, 因为 $\mathbb{R}^\omega = \overline{\mathbb{R}^\infty}$, 而 $\mathbb{R}^\infty \cong \bigcap (\mathbb{R}^n + (0, 0, \dots))$, 被并的元素均连通且具有原点为公共点。

1.2.2 实直线上的连通子空间

定义 1.2.2. 若 L 是多于一个元素的全序集, 且 L 具有上确界性质, 且 $x < y \Rightarrow$ 存在 $x < z < y$, 则 L 谓线性连续统。

定理 1.2.5. 若 L 为序拓扑的线性连续统, 则 L 及其区间和射线都连通。

证明. L 的凸子集 Y 若分拆为 A 和 B , 则其中的 (不妨设) $a < b$ 有 $[a, b]$ 被分割为 $A_0 \cup B_0$. $\inf B_0 \in B_0$ 或 $\inf B_0 \in A_0$ 都会导致矛盾。□

推论 1.2.1. \mathbb{R} 及其区间和射线都是连通的。

定理 1.2.6 (介值定理). 连通空间到序拓扑的全序集的映射 $f: X \rightarrow Y$, 任何 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的 r 存在 c 满足 $f(c) = r$ 。

例 1.2.7. 有序矩形是连通的, 只需验证上确界性质。分 $\sup \pi_1(A)$ 在 $\pi_1(A)$ 内或外取 $b \times c$ 或 $b \times 0$ 即可。

例 1.2.8. 良序集 X 有 $X \times [0, 1)$ 关于字典序为线性连续统。

定义 1.2.3. X 中 x 到 y 到一条道路是连续的 $f: [a, b] \rightarrow X$ 满足 $f(a) = x$ 与 $f(b) = y$ 。若 X 中任意两点之间都存在道路, 则称之道路连通的。

显然道路连通蕴含连通。

例 1.2.9. \mathbb{R}^n 中的球是道路连通的, $f(t) = (1-t)\mathbf{x} + t\mathbf{y}$ 是一条道路。

例 1.2.10. $\mathbb{R}^n - \{\mathbf{0}\}$ 是连通的。

例 1.2.11. 单位球面是连通的, 因为它可以从球由 $f: \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|$ 得到。

例 1.2.12. 有序矩形 I_o^2 连通而非道路连通。在每个被映射到竖线的 $[a_i, b_i]$ 中选取有理数, 只能得到可数竖线。

例 1.2.13. $S = \{x \times \sin(1/x)\}$ 的闭包 \bar{S} 连通而非道路连通。任何 S 到 $0 \times [-1, 1]$ 的路径都必然震荡 $t_n \times (-1)^n$, 故无法收敛, 不可能连续。

1.2.3 紧致空间

定义 1.2.4. X 的子集族 \mathcal{C} 称为具有有限交性质 (*finite intersection property*), 如果 \mathcal{C} 的任意有限子族交非空。

定理 1.2.7. X 是紧致的当且仅当 X 中具有有限交性质的每一个闭集族 \mathcal{C} , 其交非空。

证明. 这些集合的补是一堆开集, 这些开集中的任意有限个都不能覆盖 X , 但 X 是紧致的, 所以它们合起来也不能覆盖 X 。□

1.2.4 实直线上的紧致子空间

定理 1.2.8. 非空紧致 Hausdorff 空间 X , 若无孤立点则不可数。

证明. 对于 X 的任意元素 x , 由 Hausdorff 性质皆可以选取一非空开集 V , 满足 $x \notin \bar{V}$ 。

假设有 $f: \mathbb{Z}_+ \rightarrow X$, 则可以选取 V_1 其闭包不包含 x , 且可选取 $V_2 \subset V_1$ 其闭包不包含 x_2 , 以此类推。考虑

$$\bar{V}_1 \supset \bar{V}_2 \supset \cdots,$$

由 x 的紧致性与定理 1.2.7, 知其交非空故有元素 x 在诸 x_n 之外。□

1.2.5 极限点紧致性

定义 1.2.5. 度量空间内的映射 f , 若

$$d(f(x), f(y)) < d(x, y),$$

则称 f 为收缩映射 (*shrinking map*)。

定义 1.2.6. 度量空间内的映射 f , 若

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y),$$

其中 $\alpha < 1$, 则称 f 为压缩映射 (*contraction map*)。

定理 1.2.9. 若 X 为完备度量空间, 则压缩映射存在不动点。