第一章　流形上的分析

1.1　重积分的换元

1.1.1　单位分解

引理 1.1.1. 对 $\mathbb{R}^n$ 中的矩形，存在 C^∞ 的函数恰以之为支撑。

证明. 设 $f(x) = e^{-1/x}\chi_{\mathbb{R}^+}$，则 $f(x)f(1-x)$ 为 C^∞ 且以 $[0,1]$ 为支撑。 □

引理 1.1.2. 设 $\mathscr{A}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一族开集，其并为 A。存在矩形的可数族 $\{Q_i\}$ 覆盖之，而诸矩形在诸集内，且局部有限。

证明. 取覆盖 A 的严格递增紧子集列 $\{D_i\}$ 并设其差分为 $\{B_i\}$，知为紧致，故可以有限多矩形覆盖至且诸矩形在 D_{i-2} 外。易知此矩形族满足条件。 □

定义 1.1.1. $\phi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 的支撑为使其非零的定义域子集的闭包。

定理 1.1.1 (单位分解的存在性)**.** 在前开引理的条件下，存在诸矩形控制的 C^∞ 可数单位分析。

证明. 参考前二引理，注意由局部有限性，各点处均有邻域使可数分拆仅为有限和，故和收敛且为 C^∞，故可加和后归一。 □

例 1.1.1. 将 $f(x) = \chi_{[-2\pi,2\pi]}(1+\cos x)/2$ 逐次移动 π，可以得到 $\mathbb{R}$ 的 C^1 单位分解。

引理 1.1.3. $f\colon A \to \mathbb{R}$ 连续且在紧集 $C \subset A$ 外为零，则 $\int_A f = \int_C f$。

证明. 存在性由 C 的有界性和极值定理推出 f 的有界性可得。取覆盖 A 的严格增紧集列 C_i，其亦覆盖 C，故 C 在某 C_M 内。

$$\int_C f = \lim \int_{C_N} f = \int_A f.$$ □

定理 1.1.2. $f : A \to \mathbb{R}$ 连续，$\{\varphi_i\}$ 为 A 的具有紧支撑的单位分解，则 $\int_A f$ 存在当且仅当

$$\sum \left[\int_A \varphi_i \,|\, f \,| \right]$$

收敛，此时

$$\int_A f = \sum \left[\int_A \varphi_i f \right].$$