第一章　普通点集拓扑

1.1　拓扑空间与连续函数

1.1.1　拓扑空间

定义 1.1.1. 集合 X 上的一个拓扑 $\mathcal{T}$ 谓 X 的一满足如下条件的子集族:

1. $\{\varnothing, X\} \in \mathcal{T}$;
2. $\mathcal{T}$ 中元素的任意并仍在 $\mathcal{T}$ 中;
3. $\mathcal{T}$ 中元素的有限交仍在 $\mathcal{T}$ 中。

定义 1.1.2. X 的所有子集构成的拓扑谓离散拓扑。

定义 1.1.3. 由 X 和 $\varnothing$ 构成的拓扑谓密着拓扑。

定义 1.1.4. 由 X 本身与所有满足 $X - U$ 为有限集的 U 构成的拓扑谓有限补拓扑。

定义 1.1.5. $\mathcal{T}' \supset \mathcal{T}$ 则 $\mathcal{T}'$ 细于 $\mathcal{T}$，反之则谓粗于。

如果把开集比做石子，把石子打碎就得到更细的拓扑。

1.1.2　拓扑的基

定义 1.1.6. 基 $\mathcal{B}$ 谓满足如下条件的子集族:

1. 对任意 $x \in X$，存在 $B \in \mathcal{B}$ 满足 $x \in B$;
2. 对任意 $x \in B_1 \cap B_2$，存在 B 满足 $x \in B$ 且 $B \subset B_1 \cap B_2$。

注意此定义不针对具体的拓扑。

例 1.1.1. 平面上的圆域和矩形域构成的集族都构成基。

定义 1.1.7. 满足定义*1.1.6*的 $\mathcal{B}$ 生成的拓扑为所有满足对 $x \in U$，存在 $x \in B \subset U$ 的 U 的集族。

可以直接验证上述定义构成一个拓扑。对所有 x 取对应的 $x \in B_x$ 后将诸 B_x 并起，可得等价的表述

定理 1.1.1. 若 $\mathcal{B}$ 为 $\mathcal{T}$ 的基，则 $\mathcal{T}$ 为 $\mathcal{B}$ 中元素并的族。

定理 1.1.2. 设 $\mathcal{C}$ 为开集族，若对于任意开集 U 中任意 x，存在 $C \in \mathcal{C}$ 满足 $x \in C \subset U$，则 $\mathcal{C}$ 为 $\mathcal{T}$ 的基。

证明. 容易验证 $\mathcal{C}$ 为基。再分别证 $\mathcal{C} \subset \{U\}$ 与 $\{\cup C\} \supset \{U\}$。 □

定理 1.1.3. 设 $\mathcal{B}$ 于 $\mathcal{B}'$ 分别生成 $\mathcal{T}$ 与 $\mathcal{T}'$，则 $\mathcal{T}'$ 细于 $\mathcal{T}$ 当且仅当对任意 $x \in B$ 存在 $x \in B' \subset B$。

证明. 强行带入定义，即任意 U 均在 $\mathcal{T}'$ 内即可。 □

定义 1.1.8. $\mathbb{R}$ 上的 (a,b) 生成的拓扑谓标准拓扑。

定义 1.1.9. $\mathbb{R}$ 上 $[a,b)$ 生成的拓扑谓下限拓扑，记作 $\mathbb{R}_\ell$。

定义 1.1.10. $\mathbb{R}$ 上 (a,b) 与 $(a,b) - \left\{\frac{1}{n}\right\}$ 生成的拓扑谓 K-拓扑，记作 $\mathbb{R}_K$。

引理 1.1.1. $\mathbb{R}_\ell$ 与 $\mathbb{R}_K$ 严格细于标准拓扑，但它们之间不可比较。

证明. $\mathbb{R}_K$ 严格细于的证明只需考虑 $x = 0$ 与 $B = (-1,1) - \{1/n\}$，同一个集合可证 $\mathbb{R}_\ell$ 不细于 R_K。 □

定义 1.1.11. 子基 $\mathcal{S}$ 谓满足 $\cup S = X$ 的集族。

定义 1.1.12. 子基生成的拓扑谓 $\mathcal{S}$ 中有限交的所有并。

可以直接验证 $\{\cap S\}$ 为一个基，故其确实生成一拓扑。

1.1.3　序拓扑

定义 1.1.13. 具有全序关系的 X 上的序拓扑谓所有 (a,b)，$(a, \max X]$，$[\min X, b)$ 生成的拓扑。

例 1.1.2. $\mathbb{Z}_+$ 上的序拓扑是离散拓扑。然而 $X=\{1,2\}\times\mathbb{Z}_+$ 的字典序拓扑下单点集 1×1 并非开集。

定义 1.1.14. 全序集 X 中 a 决定的射线谓开射线 $(a,+\infty)$，$(-\infty,a)$，$[a,+\infty)$，$(-\infty,a]$。

所有开射线构成 X 的序拓扑的子基。

1.1.4　积拓扑

定义 1.1.15. $X\times Y$ 上的积拓扑谓所有 $U\times V$ 的集族 $\mathcal{B}$ 生成的拓扑，其中 U 与 V 为 X 与 Y 中的开集。

定理 1.1.4. 若 $\mathcal{B}$ 与 $\mathcal{C}$ 分别为 X 与 Y 的基，则 $\mathcal{B}\times\mathcal{C}$ 为 $X\times Y$ 的基。

定义 1.1.16. 投射 $\pi_1(x,y)=x$，$\pi_2(x,y)=y$。

定理 1.1.5. 如下的 $\mathcal{S}$ 构成 $X\times Y$ 的一子基，其中 U 和 V 分别为 X 与 Y 中的开集。

$$\mathcal{S}=\left\{\pi_1^{-1}(U)\right\}\cup\left\{\pi_2^{-1}(V)\right\}.$$

1.1.5　子空间拓扑

定义 1.1.17. 对 X 的子集 Y 定义子空间拓扑，其中 U 为 X 中的开集。

$$\mathcal{T}_Y=\{Y\cap U\}.$$

定理 1.1.6. 若 $\mathcal{B}$ 为 X 的一个基，则

$$\mathcal{B}_Y=\{B\cap Y\mid B\in\mathcal{B}\}$$

谓 Y 的子空间拓扑的一个基。

引理 1.1.2. 若 Y 为 X 中开集而 U 为 Y 中开集，则 U 为 X 中开集。

定理 1.1.7. 若 $A\subset X$，$B\subset Y$，则 $A\times B$ 的积拓扑与其自 $X\times Y$ 继承的子空间拓扑相符。

然而，对于序拓扑无类似结论。

例 1.1.3. 考虑 $X=\mathbb{R}$ 而 $Y=[0,1]$，Y 上的序拓扑与子空间拓扑相符。

例 1.1.4. 考虑 $X=\mathbb{R}$ 而 $Y=[0,1)\cup\{2\}$，子空间拓扑中 $\{2\}$ 为开集，二者不符。

例 1.1.5. 考虑 $X=\mathbb{R}^2$ 而 $Y=[0,1]\times[0,1]$，则 $\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2},1\right]$ 为子空间拓扑的开集但不是序拓扑的开集。

定义 1.1.18. 子集 Y 称为凸的，如果对 Y 中 $a<b$ 皆有 $(a,b)\subset Y$。

定理 1.1.8. 设 X 为全序集，Y 为凸子集，则子空间拓扑与序拓扑一致。

证明. 借助开射线构造子基后证明其相互包含即可。 □

1.1.6　闭集与极限点

定义 1.1.19. 若 $X-A$ 为开集，则 A 为闭集。

例 1.1.6. $\mathbb{R}$ 中 $[a,b]$ 为闭集，$\mathbb{R}^2$ 中 $\mathbb{R}^2_+$ 为闭集，有限补拓扑中 X、$\varnothing$、有限集为闭集。

例 1.1.7. 离散拓扑每一个集合都是开集也都是闭集，$Y=[0,1]\cup(2,3)$ 中两个分量都同时是开集和闭集。

定义 1.1.20. 对于拓扑空间 X，成立

1. $\varnothing$、X 都是闭集；
2. 闭集的任意交仍为闭集；
3. 闭集的有限并仍为闭集。

定理 1.1.9. A 为 X 的子空间 Y 的闭集当且仅当有闭集 C 满足 $A=Y\cap C$。

定理 1.1.10. A 是 Y 的闭集，Y 是 X 的闭集，则 A 是 X 的闭集。

Hausdorff 空间

定义 1.1.21. 集合的内部 $\mathring{A}$ 是包含于其内的所有开集的并，闭包 $\overline{A}$ 是其外所有闭集的交。

显然开集的内部是本身，闭集的闭包也是本身。注意 $(0,1)$ 在其本身中的闭包和在 $\mathbb{R}$ 中的闭包不同，所称闭包都是指父空间闭包。

定理 1.1.11. Y 中 $\overline{A}^Y=\overline{A}\cap X$。

定义 1.1.22. 两集合相交，如果它们的交非空。

定义 1.1.23. 含有 x 的开集称为其邻域。

定理 1.1.12. $x \in \overline{A}$ 当且仅当每一个邻域与 A 相交。

证明. 如果存在反例 U，则 $X - U$ 会成为包含 A 的闭集。 □

推论 1.1.1. $x \in \overline{A}$ 当且仅当含有 x 的每一个基元素与 A 相交。

例 1.1.8. $A = (0,1]$，$\overline{A} = [0,1]$。$A = \mathbb{Q}$，$\overline{A} = \mathbb{R}$。$\overline{\{1/n\}} = \{1/n\} \cup \{0\}$。

极限点

定义 1.1.24. 若 x 的任何一个邻域包含 A 中其他点，则 x 为 A 的极限点。

例 1.1.9. $A = (0,1]$，$[0,1]$ 中的点均为其极限点。$A = \mathbb{Q}$，$\mathbb{R}$ 中的点均为其极限点。$A = \{1/n\}$，0 为其极限点。

定理 1.1.13. $\overline{A} = A \cup A'$，其中 A' 为极限点集合。

证明. 参考定理1.1.12。 □

推论 1.1.2. A 为闭集当且仅当 $A' \subset A$。

Hausdorff 空间

定义 1.1.25. 如果对于x 的任意邻域 U，存在N，使得当 $n > N$，$x_n \in U$，则 $\{x_n\}$ 收敛到点 x。

$\mathbb{R}^2$ 和 $\mathbb{R}$ 中的序列最多收敛至一点，然而其他拓扑空间不一定。

定义 1.1.26. 若 X 中任意两不同点存在无交邻域，则称 X 为一 *Hausdorff* 空间（*Hausdorff space*）。

定理 1.1.14. *Hausdorff* 空间中有限集为闭集。

证明. 只证单点集。由于隔离邻域的存在，易见其他点都不在闭包内。 □

比 Hausdorff 条件更弱的，有 T_1 公理。

定义 1.1.27. 若 X 中有限集为闭，则 X 满足 T_1 公理。

定理 1.1.15. *若 X 满足 T_1 公理，则 x 为 A 的极限点当且仅当 x 的任意邻域与 A 有无限交点。*

证明. 如果有一个邻域只有有限交点，挖掉还是开集，但不再与 A 相交。 □

定理 1.1.16. *若 X 为 Hausdorff 空间，则 X 中的序列最多收敛至一点。*

证明. 如果有两个点，在定义中取隔离邻域即可。 □

定理 1.1.17. *每一个具有序拓扑的全序集，两个 Hausdorff 空间的积，Hausdorff 空间的子空间是 Hausdorff 空间。*

证明. 全序集可选取中间元分割，中间元不存在的直接射线可分割。 □

1.1.7　连续函数

函数的连续性

定义 1.1.28. 函数 $f: X \to Y$ 称为连续的，如果开集的原像为开集。

为了证明函数连续，只需要证明基的原像为开集即可。

例 1.1.10. 上述定义等价于 $\epsilon - \delta$ 定义。

证明. 如果 $\epsilon - \delta$ 定义成立，则 $f(x)$ 的 ϵ-邻域的原像包含 x 的 δ-邻域，故任意开集的原像均为开集。如果拓扑定义成立，则显而易见。 □

例 1.1.11. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_\ell$ 的 $f(x) = x$ 不是连续函数，但其逆连续。

定理 1.1.18. *对于 $f: X \to Y$，下列条件等价：*

1. *f 连续；*
2. *对 X 的任意子集 A 有 $f\left(\overline{A}\right) \subset \overline{f(A)}$；*
3. *对 Y 中任意闭集 B 有 $f^{-1}(B)$ 为闭集；*
4. *对任意 x 与 $f(x)$ 的邻域 V，存在 x 的邻域 U 满足 $f(U) \subset V$。*

证明. $1 \Rightarrow 2$: 若 y 在 $f(A)$ 外一开集内，则原像为 $f(A)$ 外一开集。$2 \Rightarrow 3$: 闭集 $f(A) = \overline{f(A)} \supset f\left(\overline{A}\right)$，故 $A = \overline{A}$。$3 \Rightarrow 1$ 与 $1 \Rightarrow 4 \Rightarrow 1$ 显然。 □

同胚

定义 1.1.29. 如果一个一一映射和它的逆都连续，则称之为同胚。

定义 1.1.30. 如果 X 的性质于与之同胚的 Y 都成立，则称之为拓扑性质。

定义 1.1.31. 映入子空间的同胚称为嵌入。

例 1.1.12. $F(x) = x/(1-x^2)$ 与 $G(y) = 2y/\left(1+(1+4y^2)^{1/2}\right)$ 为 $(-1,1)$ 与 $\mathbb{R}$ 间同胚。

例 1.1.13. $[0,1)$ 弯曲到圆周的映射连续而非同胚。其扩张连续而非嵌入。

构造连续函数

定理 1.1.19. 下列函数皆连续：

1. 常值函数；
2. 子空间到父空间的内射；
3. 连续函数的复合；
4. 连续函数限制定义域到一子空间的结果；
5. 连续函数限制或扩大值域至包含像集的子空间或父空间的结果；
6. 若 X 可写为开集的并，且 f 在每个分量上连续。

定理 1.1.20 (黏结引理)**.** 设 $X = A \cup B$ 且二者为闭集，并且 $f : A \to Y$ 与 $g : B \to Y$ 连续且在 $A \cap B$ 上相等，则 h 连续，

$$h(x) = \begin{cases} f(x), x \in A, \\ g(x), x \in B. \end{cases}$$

证明. 由定理1.1.18，注意闭集被映回闭集即可。 □

例 1.1.14. 对 $x \geq 0$，$h(x) = x$，$x \leq 0$，$h(x) = x/2$，则 h 连续。

定理 1.1.21. $f : A \to X \times Y$ 连续的充分必要条件为 f_X 与 f_Y 连续。

证明. 注意连续的拓扑定义等价于对基连续即可。 □

例 1.1.15. 向量场连续当且仅当分量连续。

1.1.8　积拓扑

定义 1.1.32. X 的元素的 J-串为 $\boldsymbol{x}: J \to X$，其全体记作 X^J。

例如，$\mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}^{\{1,2,3\}}$。

定义 1.1.33. A_j 的笛卡尔积 $\prod A_j$ 为各取一元构成之 J-串的集合。

定义 1.1.34. 基由 $\prod U_\alpha$ 构成 $\prod X_\alpha$ 的称为箱拓扑。

定义 1.1.35. 子基由 $\{\pi^{-1}(U_\alpha)\}$ 构成的称为积拓扑。

定理 1.1.22. 箱拓扑的基由所有 $\prod U_\alpha$ 构成，积拓扑的基由 $\prod U_\alpha$ 构成但 U_α 中只有有限个非 X_α。

定理 1.1.23. $\prod B_\alpha$ 构成箱拓扑的积，$\prod B_\alpha$ 中若 B_α 中只有有限个非 X_α 则构成积拓扑的基。

例 1.1.16. $\mathbb{R}^n$ 的积拓扑与箱拓扑一致。

定理 1.1.24. $\prod A_\alpha$ 在两种拓扑下都是 $\prod X_\alpha$ 的同种拓扑的子空间。

定理 1.1.25. 若每个 X_α 都是 *Hausdorff* 的，则两拓扑下 $\prod X_\alpha$ 都如此。

定理 1.1.26. 在 $\prod X_\alpha$ 的两种拓扑下都有 $\prod \overline{A_\alpha} = \overline{\prod A_\alpha}$。

证明. 若 x 在 $\prod \overline{A_\alpha}$ 内，则诸 $\prod U_\alpha$ 均有 $\prod A_\alpha$ 的元素，故 x 在 $\overline{\prod A_\alpha}$ 内。若 x 在 $\prod \overline{A_\alpha}$ 外 U_α 内，则 $\pi^{-1}(U_\alpha)$ 包含 x 且为开集，故在 $\overline{\prod A_\alpha}$ 外。 □

定理 1.1.27. 积拓扑下 $f: A \to \prod X_\alpha$ 连续当且仅当各个分量连续。

证明. 注意连续的拓扑定义等价于对基成立即可。 □

例 1.1.17. 对箱拓扑下 $\mathbb{R}$ 的可数无限积 $\mathbb{R}^\omega$，$f(t) = (t, t, t, \cdots)$ 不连续。注意 $(-1,1) \times (-1/2, 1/2) \times -1/3, 1/3$ 被映回 0 即可。

1.1.9　度量拓扑

定义 1.1.36. 集合 X 的一个度量 d 是一个函数 $d: X \times X \to \mathbb{R}$，满足正定、对称与三角不等式。

定义 1.1.37. 以全体 ϵ-球为基的拓扑称为度量拓扑。

容易验证全体 ϵ-球构成基。由这一定义，开集可视作满足任意 $y \in U$ 都有某 $B(x,\epsilon) \subset U$ 的集合 U。

例 1.1.18. 若 $x = y$，$d(x,y) = 1$，否则 $d(x,y) = 0$ 诱导出离散拓扑。

例 1.1.19. $d(x,y) = |x - y|$ 诱导 $\mathbb{R}$ 上的序拓扑。

定义 1.1.38. 若 X 的拓扑由某度量诱导，则称 X 为度量空间。

定义 1.1.39. 度量空间的子集 A 为有界的，若 $d(a_1, a_2)$ 一致有界。A 的直径谓 $\operatorname{diam} A = \sup\{d(a_1, a_2)\}$。

定理 1.1.28. 由度量 d 诱导的度量

$$\bar{d}(x,y) = \min\{d(x,y), 1\}$$

谓标准有界度量。

定义 1.1.40. 分类验证三角不等式即可。

定义 1.1.41. 对 $\mathbb{R}^n$ 中的点，$d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| = \left(\sum (x_i - y_i)^2\right)^{1/2}$ 诱导欧氏度量，$\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \max\{|x_i - y_i|\}$ 诱导平方度量。

欧式度量的三角不等式是熟知的结论。平方度量由

$$d_3 = |x_k - z_k| \le |x_k - y_k| + |y_k - z_k| \le d_1 + d_2$$

验证三角不等式。注意同理可证若 X 上度量 d_1 和 Y 上度量 d_2 可以生成 $X \times Y$ 上一度量 $d_3 = \max\{d_1, d_2\}$。

欧式度量和平方度量的基元素分别为圆域和方域。由定理1.1.3立得

定理 1.1.29. 度量拓扑 $\mathcal{T}'$ 细于 $\mathcal{T}$ 当且仅当对于任意 x 与 ϵ，存在 ϵ' 满足

$$B'(x,\epsilon') \subset B(x,\epsilon).$$

定理 1.1.30. 欧氏度量和平方度量诱导 $\mathbb{R}^n$ 上的积拓扑。

证明. 直接验证不难，但由 $\rho \le r \le \sqrt{n}\rho$ 可立得欧式与平方拓扑等价。 □

定义 1.1.42. 对 $\mathbb{R}^J$ 中的点定义

$$\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \sup\left\{\bar{d}(x_\alpha, y_\alpha) \mid \alpha \in J\right\},$$

可得一致度量，诱导出一致拓扑。

定理 1.1.31. 一致拓扑细于积拓扑，粗于箱拓扑。J 为无限集则两两不同。

证明. 玩弄基元素的大小可证其粗细。J 无限时，$(-1,1)^J$ 在一致拓扑下为开，积拓扑下非开。$\prod(-1/n,1/n)$ 在箱拓扑下为开，一致拓扑下非开。 □

定理 1.1.32. 对 $\mathbb{R}$ 的可数无限积 $\mathbb{R}^\omega$ 定义

$$D(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\sup\left\{\frac{\bar{d}(x_i,y_i)}{i}\right\},$$

可诱导 $\mathbb{R}^\omega$ 上的积拓扑。

证明. 设 $\mathbb{R}^\omega$ 的某基 B 的分量在 j 后均为 $\mathbb{R}$，则某 $B(x,\epsilon/j)$ 包含其内。反之也可以选择这样的基包含于 $B(x,1/j)$ 内。 □

类似证明可仿照得到

定理 1.1.33. 可度量化空间的可数积仍可度量化。

例 1.1.20. 在 $X\times Y=\mathbb{R}^2$ 上定义 $d=\min\{y_2-y_1,1\}$，如果两点共 x，否则 $d=1+(x_1-x_2)$，则 d 诱导字典序拓扑。

例 1.1.21. 易见度量空间的子空间仍为度量空间，且子空间的度量直接限制定义域可得。

1.1.10　连续函数与度量拓扑

定理 1.1.34. 度量空间到度量空间的 $f:X\to Y$ 的连续性等价于 ϵ-δ 条件。

证明. 仿照例1.1.10可得。 □

引理 1.1.3 (序列引理)**.** 若 A 中有收敛于 x 的序列，则 $x\in\overline{A}$。若 X 为度量空间，逆命题成立。

定理 1.1.35. 度量空间之间的 $f:X\to Y$ 连续的充要条件谓 $x_n\to x$ 等价于 $f(x_n)\to f(x)$。

证明. 若拓扑条件成立，则 $f(x)$ 的小邻域原像都会包含 x 的邻域，故包含 $\{x_n\}_{n\geq N}$。若序列条件成立，结合序列引理与定理1.1.18即可。 □

注意上述定理对满足下列条件的空间也可以直接适用。

定义 1.1.43. 如果 x 有邻域 $\{U_n\}$ 满足任意邻域 U 都有某 U_n 含于其内，则称 X 在 x 处有可数基。如果处处都有则称 X 满足第一可数性公理。

引理 1.1.4. 加减乘除是其定义域内的连续函数。

定理 1.1.36. 连续函数加减乘的结果连续，恒非零的除亦连续。

定义 1.1.44. 若 $\{f_n\}$ 关于度量 $d(f,g)=\sup\{|f-g|\}$ 收敛于 f，则称其一致收敛。

定理 1.1.37. 一致收敛的连续函数列收敛于连续函数。

证明. 对给定的 ϵ，存在 δ 和 N 使得当 $|x-y|<\delta$，诸变差皆小于 δ。

$$|f(x)-f(y)|\leq|f(x)-f_N(x)|+|f_N(x)-f_N(y)|+|f(y)-f_N(y)|. \quad \square$$

推论 1.1.3. 若 $x_n\to x$ 而 $\{f_n\}$ 一致收敛于 f，则 $f_n(x_n)\to f(x)$。

例 1.1.22. 箱拓扑的 $\mathbb{R}^\omega$ 不满足序列引理因此不可度量化。$0\in\overline{\mathbb{R}_+^\omega}$ 但 $\prod(-x_{ii},x_{ii})$ 排斥所有 x_i。

例 1.1.23. 不可数个 $\mathbb{R}$ 的积空间不可度量化。

证明. 考虑 $\mathbb{R}^J$ 由那些知有有限个零分量的 $\{0,1\}$ 序列的子空间，易见 0 在其内。然而，能有幸为零的分量指标仅有可数个，故存在恒 1 的指标。 $\square$

1.1.11　商拓扑

定义 1.1.45. 满射 $p\colon X\to Y$ 称为商映射，如果 U 是 Y 的开集当且仅当 $p^{-1}(U)$ 是 X 的开集。

易见开集也可以改为闭集。

定义 1.1.46. X 的子集 C 为饱和的，如果它是纤维的并。

商映射等价于饱和开集映射到开集。易见开映射和闭映射（把开集映射到开集或者把闭集映射到闭集）都是商映射。

例 1.1.24. $[0,1]\cup[2,3]$ 到 $[0,2]$ 的黏贴映射是闭映射但不是开映射。

例 1.1.25. $\pi_1:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是开映射但不是闭映射，因为 $\{y=1/x\}$ 被映射到开集。

例 1.1.26. π_1 在 $A = \mathbb{R} \times 0 \cup [0, \infty) \times \mathbb{R}$ 上的限制是商映射，但不是开映射或者闭映射。$A - (-\infty, 0] \times 0$ 是开集，但是被映射到闭集。$\{y = \pm \tan x\}$ 图像左侧是闭集，但被映射到开集。

定义 1.1.47. 满射 $p \colon X \to A$ 的像 A 上存在一拓扑使得 X 为商映射，此拓扑谓商拓扑。

例 1.1.27. $y = \operatorname{sgn}(x)$ 在点集上可以诱导一个商拓扑 $\{\{\{-1\}, \{1\}\}, 0\}$。

定义 1.1.48. X^* 为 X 的分拆，则 $\pi \colon X \to X^*$ 诱导的商拓扑使 X^* 为商空间。

例 1.1.28. 将单位圆盘将圆周视为等价类，则商空间同胚于球面。

例 1.1.29. 将矩形四角和对边上对应点视为等价类，则商空间同胚于环面。

由例1.1.26知商映射在子空间的限制未必是商映射，但仍然有

定理 1.1.38. *设商映射 $p \colon X \to Y$ 与饱和子空间 A，则 p 在其上的限制 $q \colon A \to p(A)$ 仍为商映射，如果*

1. *A 为开集或闭集；*
2. *或者 p 为开映射或闭映射。*

证明. 先验证，如果 $V \subset p(A)$，则 $q^{-1}(V) = p^{-1}(V)$。如果 $U \subset X$，则 $p(U \cap A) = p(U) \cap p(A)$。都有 $q^{-1}(V)$ 是开的 $\Rightarrow V$ 在 $p(A)$ 中为开。 □

商映射的复合仍为商映射，但乘积不一定，Hausdorff 空间的商空间也不一定是 Hausdorff 空间。

定理 1.1.39. *商映射 p 与纤维上的映射 g 诱导 f 满足 $f \circ p = g$。f 连续当且仅当 g 连续，f 为商映射当且仅当 g 为商映射。*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, "g"] & \\ Y \arrow[r, dotted, "f"'] & Z \end{tikzcd}$$

证明. 若 p 和 g 为商映射，证明 $f^{-1}(V)$ 为开集 $\Rightarrow V$ 为开集即可。 □

推论 1.1.1. *设 $g \colon X \to Z$ 为连续满射，X^* 为各纤维的集，取商拓扑，则*

1. g 诱导的 $f : X^* \to Z$ 一一连续，其为同胚当且仅当 g 为商映射；
2. 若 Z 为 *Hausdorff* 空间，则 X^* 为 *Hausdorff* 空间。

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, "g"] & \\ X^* \arrow[r, "f"'] & Z \end{tikzcd}$$

证明. 注意一一的商映射等价于同胚。 □

例 1.1.30. 设 $X = [0,1] \times \{1, 2, \cdots\}$，$Z = x \times (x/n)$ 其中 $x \in [0,1]$，则 $g(x \times n) = x \times (x/n)$ 诱导出 X^* 为将 X 诸左端点粘合的空间，但 $f : X^* \to Z$ 不是同胚。

证明. 考虑 $x_n = (1/n) \times n$，则 $\{x_n\}$ 为闭集但是 $z_n = (1/n) \times 1/n^2$ 不是，因此 g 不是商映射。 □

例 1.1.31. 设 $p : X \to X^*$ 是将 $\mathbb{R}$ 的 $\mathbb{Z}_+$ 粘合为 b 形成的商空间，$i : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ 为恒等映射，则 $p \times i$ 不是商映射。

证明. 假设 U_n 为 $n \times \left(\sqrt{2}/n\right)$ 附加其上方和下方的条带，$U = \cup U_n$，则 U 饱和但 $p \times i\,(U)$ 不是开集，因为某 $I_b \times I_\delta$ 的原像包含条带的缝隙。 □

1.2 连通性与紧致性

1.2.1 连通空间

定义 1.2.1. 拓扑空间 X 的一个分割，谓其一对无交非空开集其并为 X。

引理 1.2.1. 若 Y 是 X 的子空间，则其分割的分量彼此不包含对方的极限点。若存在一对并为 Y 的非空集合彼此不包含对方极限点，则亦构成分割。

证明. 注意分量既开又闭，故极限点自含。若存在这样的一对，则 A 中任意元素都存在小邻域在 B 外，故在 A 内，故 A 为开集。 □

例 1.2.1. 密着拓扑是连通的。

例 1.2.2. $\mathbb{R}$ 的子空间 $[-1, 0) \cup (0, 1]$ 不是连通的。

例 1.2.3. $\mathbb{Q}$ 不是连通的。

例 1.2.4. $\{y=1/x\}$ 其中 $x>0$ 和 $\{y=0\}$ 作为 $\mathbb{R}^2$ 的子空间不是连通的。

引理 1.2.2. 连通子空间包含在分割的二者中一个内。

定理 1.2.1. 含有一个公共点的连通子空间族的并是连通的。

定理 1.2.2. A 为连通子空间，则 $A\subset B\subset\overline{A}$ 的 B 是连通的。

证明. 若 $\overline{A}$ 被分拆为 $C\cup D$，则 $A\subset C$ 而 D 为一个与 A 无交的邻域。 □

定理 1.2.3. 连通空间的连续映射的像是连通的。

定理 1.2.4. 有限多个连通空间的积是连通的。

证明. 注意每个十字形是含有公共点的连通空间的并，再将十字形并起。 □

例 1.2.5. 箱拓扑的 $\mathbb{R}^\omega$ 不连通，后者可分为有界序列和无界序列两开集。

例 1.2.6. 积拓扑的 $\mathbb{R}^\omega$ 连通，因为 $\mathbb{R}^\omega=\overline{\mathbb{R}^\infty}$，而 $\mathbb{R}^\infty\cong\cap(\mathbb{R}^n+(0,0,\cdots))$，被并的元素均连通且具有原点为公共点。

1.2.2　实直线上的连通子空间

定义 1.2.2. 若 L 是多于一个元素的全序集，且 L 具有上确界性质，且 $x<y\Rightarrow$ 存在 $x<z<y$，则 L 谓线性连续统。

定理 1.2.5. 若 L 为序拓扑的线性连续统，则 L 及其区间和射线都连通。

证明. L 的凸子集 Y 若分拆为 A 和 B，则其中的（不妨设）$a<b$ 有 $[a,b]$ 被分割为 $A_0\cup B_0$。$\inf B_0\in B_0$ 或 $\inf B_0\in A_0$ 都会导致矛盾。 □

推论 1.2.1. $\mathbb{R}$ 及其区间和射线都是连通的。

定理 1.2.6 (介值定理)**.** 连通空间到序拓扑的全序集的映射 $f:X\to Y$，任何 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的 r 存在 c 满足 $f(c)=r$。

例 1.2.7. 有序矩形是连通的，只需验证上确界性质。分 $\sup\pi_1(A)$ 在 $\pi_1(A)$ 内或外取 $b\times c$ 或 $b\times 0$ 即可。

例 1.2.8. 良序集 X 有 $X\times[0,1)$ 关于字典序为线性连续统。

定义 1.2.3. X 中 x 到 y 到一条道路是连续的 $f:[a,b]\to X$ 满足 $f(a)=x$ 与 $f(b)=y$。若 X 中任意两点之间都存在道路，则称之道路连通的。

显然道路连通蕴含连通。

例 1.2.9. $\mathbb{R}^n$ 中的球是道路连通的，$f(t)=(1-t)\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{y}$ 是一条道路。

例 1.2.10. $\mathbb{R}^n-\{\mathbf{0}\}$ 是连通的。

例 1.2.11. 单位球面是连通的，因为它可以从球由 $f:\boldsymbol{x}\to x/\|x\|$ 得到。

例 1.2.12. 有序矩形 I_o^2 连通而非道路连通。在每个被映射到竖线的 $[a_i,b_i]$ 中选取有理数，只能得到可数竖线。

例 1.2.13. $S=\{x\times\sin(1/x)\}$ 的闭包 $\overline{S}$ 连通而非道路连通。任何 S 到 $0\times[-1,1]$ 的路径都必然震荡 $t_n\times(-1)^n$，故无法收敛，不可能连续。

1.2.3　分支与局部连通性

定义 1.2.4. X 中的连通等价类谓分支。

定理 1.2.7. X 的所有分支是 X 中无交的连通子空间，其并为 X，且任意连通子空间必定包含在某分量内。

证明. 如果某连通子空间和两个分量相交，那么 $x_1\sim x_2$。 □

定义 1.2.5. X 中的道路连通等价类谓道路连通分支。

可以证明这是一个等价关系。

定理 1.2.8. X 的道路连通分支是无交的道路连通子空间，其并为 X，且任意道路连通子空间必定包含在某分量内。

连通分支的闭包也是连通的，因此它们是闭集。如果只有有限分支，它们还会是开集。但道路连通不一定。

例 1.2.14. $\mathbb{Q}$ 的每个分支为单点集，但不是开集。

例 1.2.15. 拓扑学家的正弦曲线，两个道路分支一个纯开一个纯闭。

定义 1.2.6. 空间谓局部连通的，如果处处给定 U 有连通邻域 $V\subset U$。谓局部道路连通的，如果处处有道路连通邻域。

例 1.2.16. 这里的定义不能改成「每个 x 都存在连通邻域」，因为连通邻域的子开集不一定连通。见局部连通与无穷扫帚。

例 1.2.17. 区间的并是局部连通的，$\mathbb{Q}$ 不是局部连通的。

定理 1.2.9. 空间是局部连通的当且仅当任何开集的每一个分支都是开的。

证明. 后半句成立则显然，前半句成立则对邻域取交可得内含的开集。 □

定理 1.2.10. 空间是局部道路连通的当且仅当开集的所有道路连通分量都是开的。

定理 1.2.11. 道路分支包含在分支内。局部道路连通则分支与道路分支同。

证明. 前句显然。后句若分支内有多个道路分支都是开的，则构成分割。 □

1.2.4　紧致空间

定义 1.2.7. X 的子集族 $\mathscr{C}$ 称为具有有限交性质（*finite intersection property*），如果 $\mathscr{C}$ 的任意有限子族交非空。

定理 1.2.12. X 是紧致的当且仅当 X 中具有有限交性质的每一个闭集族 $\mathscr{C}$，其交非空。

证明. 这些集合的补是一堆开集，这些开集中的任意有限个都不能覆盖 X，但 X 是紧致的，所以它们合起来也不能覆盖 X。 □

1.2.5　实直线上的紧致子空间

定理 1.2.13. 非空紧致 *Hausforff* 空间 X，若无孤立点则不可数。

证明. 对于 X 的任意元素 x，由 Hausdorff 性质皆可以选取一非空开集 V，满足 $x \notin \overline{V}$。

假设有 $f : \mathbb{Z}_+ \to X$，则可以选取 V_1 其闭包不包含 x，且可选取 $V_2 \subset V_1$ 其闭包不包含 x_2，以此类推。考虑

$$\overline{V}_1 \supset \overline{V}_2 \supset \cdots,$$

由 x 的紧致性与定理1.2.12，知其交非空故有元素 x 在诸 x_n 之外。 □

1.2.6　极限点紧致性

定义 1.2.8. 度量空间内的映射 f，若

$$d\left(f\left(x\right),f\left(y\right)\right)<d\left(x,y\right),$$

则称 f 为收紧映射（*shrinking map*）。

定义 1.2.9. 度量空间内的映射 f，若

$$d\left(f\left(x\right),f\left(y\right)\right)\leq\alpha d\left(x,y\right),$$

其中 $\alpha<1$，则称 f 为压缩映射（*contraction map*）。

定理 1.2.14. 若 X 为完备度量空间，则压缩映射存在不动点。