# 第一章　测度论

## 1.1　Lebesgue 测度

### 1.1.1　引论

**Lebesgue 测度的性质**

我们期望 Lebesgue 测度具有如下一些性质。

**区间的测度为其长度**　非空区间是可测集，且

$$m(I) = \ell(I).$$

**测度是平移不变的**　若 $E$ 为 Lebesgue 可测集且 $y$ 为一数，则

$$m(E+y) = m(E).$$

**无交集的可数并的测度可加**　$E_k$ 为可数个无交可测集，则

$$m\left(\bigcup E_k\right) = \sum m(E_k).$$

且 Lebesgue 可测集全体构成一 $\sigma$-代数。

**定义 1.1.1.** *一集族构成代数，如果其元素的补，有限交与有限并皆封闭。*

**定义 1.1.2.** *一集族构成 $\sigma$-代数，如果其元素的补，可数交与可数并皆封闭。*

在全体集合上定义满足条件的测度是不可能的，甚至仅仅满足前两个条件而具有有限可加性都是不能指望的。但在定义 Lebesgue 测度前，仍可先构造对任意集合都适用的外测度，满足前二条件，而第三条件替换为无论诸 $E_k$ 无交与否，皆有

$$m^*\left(\bigcup E_k\right) \leq \sum m^*(E_k).$$

### 1.1.2 Lebesgue 外测度

定义无界区间的长度为 $\infty$。对于任意集合，定义外测度

$$m^*(A) = \inf \sum \ell(I_k).$$

其中 $\{I_k\}$ 为 $A$ 的区间覆盖。立即可得空集外测度为零且外测度具有单调性，即若 $A \subset B$ 则

$$m^*(A) \leq m^*(B).$$

可以由此证明，可数集的测度为零。

**命题 1.1.1.** 区间的测度为其长度。

证明. 考虑有界闭区间 $[a, b]$，易证 $m* \leq (b-a)$。另一方向的不等号需要

$$\sum \ell(I_k) \geq b - a.$$

由紧致性只需要对有限开覆盖证明

$$\sum^n \ell(I_k) \geq b - a.$$

选取包含 $a$ 的区间 1，若右端点在 $(a, b)$ 内则选取另一包含其右端点的区间 2，重复这一过程直到右端点在 $(a, b)$ 外，则上述不等式成立。

对于任意有界区间，选取其闭区间的上下逼近并注意外测度的单调性即可。对于无界区间，易得其测度为 $\infty$。 □

**命题 1.1.2.** *Lebesgue* 外测度是平移不变的。

证明. 注意区间的平移不变即可。 □

**命题 1.1.3.** 对任意 $\{E_k\}$，有

$$m^*\left(\bigcup E_k\right) \leq \sum m^*(E_k).$$

证明. 对 $E_k$ 取误差不超过 $2^{-k}\epsilon$ 的覆盖区间，加和即可。 □

### 1.1.3 Lebesgue 可测集的 $\sigma$-代数

#### Carathéodory 可测

**定义 1.1.3.** 若对于任意集合 $A$，都有

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*\left(A \cap \complement E\right),$$

则称 $E$ 可测。

鉴于外测度的次可加性，上述条件可弱化为

$$m^*(A) \geq m^*(A \cap E) + m^*\left(A \cap \complement E\right).$$

此外还应注意到，对于无交集，若其中任一可测，立刻有

$$\begin{aligned} m*(A \cup B) &= m^*([A \cup B] \cap A) + m^*\left([A \cup B] \cap \complement A\right) \\ &= m^*(A) + m^*(B). \end{aligned}$$

故有可加性。此外，可测集的补仍为可测集。

**定理 1.1.1.** 零测集为可测集。

证明. 代入弱化后的条件，注意外测度的单调性即可。 □

**定理 1.1.2.** 可测集的有限并可测。故可测集构成代数。

证明. 只证二可测集的并可测。借助二集可测的 Carathéodory 条件，有

$$\begin{aligned} m^*(A) &= m^*(A \cap E_1) + m^*\left(A \cap \complement E_1 \cap E_2\right) + m^*\left(A \cap \complement E_1 \cap \complement E_2\right) \\ &\geq m^*(A \cap [E_1 \cup E_2]) + m^*\left(A \cap \complement [E_1 \cup E_2]\right). \end{aligned}$$ □

**定理 1.1.3.** 无交可测集的有限并满足

$$m^*\left(A \cap \bigcup E_k\right) = \sum m^*(A \cap E_k).$$

证明. 注意到 Carathéodory 条件的

$$A \cap \bigcup^n E_k \cap E_n = A \cap E_n$$

以及

$$A \cap \bigcup^n E_k \cap \complement E_n = A \cap \bigcup^{n-1} E_n,$$

归纳即可。 □

**推论 1.1.1.** 可测集的测度有限可加。

**定理 1.1.4.** 可测集的可数并可测。故可测集构成 $\sigma$-代数。

证明. 不妨设诸集无交。设其并为 $E$，则根据前开命题及单调性，有

$$m^*(A) \geq \sum^n m^*(A \cap E_k) + m^*\left(A \cap \complement E\right).$$

让 $n \to \infty$，借助次可加性即可。 □

**定理 1.1.5.** 区间是可测集。

证明. 只证 $I = (a, \infty)$ 型区间可测。不妨设 $a$ 不在 $A$ 内且将之分割为 $A \cap \complement I = A_1$ 与 $A \cap I = A_2$。对于 $A$ 的任意覆盖 $\{I_k\}$ 均同样割裂之，有

$$m^*(A_1) + m^*(A_2) \leq \sum \ell(I_k),$$

故满足弱化后条件。 □

**定义 1.1.4.** 开集的可数交为 $G_\delta$ 型集。

**定义 1.1.5.** 闭集的可数并为 $F_\sigma$ 型集。

注意 $\mathbb{R}$ 中开集为区间的并，故 $G_\delta$ 型（以及 $F_\sigma$ 型）集可测。

**定义 1.1.6.** 包含开集的最小 $\sigma$-代数称为 *Borel* $\sigma$-代数，其元素称为 *Borel* 集。

**定理 1.1.6.** $\mathbb{R}$ 中可测集包含 *Borel* $\sigma$-代数。区间，开集，闭集，$G_\delta$ 与 $F_\sigma$ 型集可测。

**命题 1.1.4.** 可测集平移后可测。

证明. 在 Carathéodory 条件中将 $E$ 的平移转化为 $A$ 的平移，注意外测度的平移不变即可。 □

### 1.1.4 Lebesgue 可测集的内外逼近

**引理 1.1.1.** 对 $A \subset B$，有

$$m^*(B - A) = m^*(B) - m^*(A).$$

证明. 注意由 Carathéodory 条件，

$$m^*(B) = m^*(B \cap A) + m^*(B - A).$$ □

**定理 1.1.7.** 下列条件与 $E$ 的可测性等价。

(a) 对 $\epsilon > 0$，存在包含 $E$ 的开集 $\mathcal{O}$ 满足 $m^*(\mathcal{O} - E) < \epsilon$;

(b) 存在包含 $E$ 的 $G_\delta$ 型集满足 $m^*(G - E) = 0$;

(c) 对 $\epsilon > 0$，存在 $E$ 内的闭集 $F$ 满足 $m^*(E - F) < \epsilon$;

(d) 存在 $E$ 内的 $F_\sigma$ 型集满足 $m^*(E-F)=0$。

证明. 只证前二者。后二者取补可得。

设 $E$ 可测，则存在区间并任意逼近其外测度，取 $\mathcal{O}$ 为区间并即可。有

$$m^*(\mathcal{O}-E)=m^*(\mathcal{O})-m^*(E)<\epsilon.$$

对于无界 $E$，分为可数个有界部分即可。不断缩小 $\epsilon$，可得所求 $G_\delta$ 型集。鉴于零测集可测，又 $E=G\cap\complement(G-E)$，知 $E$ 可测。 □

注意到对于任意集合 $E$ 都存在开集使 $m^*(\mathcal{O})-m^*(E)$ 任意小，然而外测度的减性仅对可测集成立。

**定理 1.1.8.** 对有限测度的 $E\subset\mathbb{R}$，存在有限多个区间的并 $\mathcal{O}$ 满足 $m*(E-\mathcal{O})+m^*(\mathcal{O}-E)<\epsilon$。

证明. 取开集 $U$ 为 $E$ 的 $\epsilon/2$ 外逼近，写 $U$ 为区间并，选取其中有限个以 $\epsilon/2$ 逼近之，注意到两差均小于 $\epsilon/2$ 即可。 □

### 1.1.5 Lebesgue 测度的其他性质

**定义 1.1.7.** 对可测集定义其 *Lebesgue* 测度为外测度。

**定理 1.1.9.** *Lebesgue* 测度是可数可加的。

证明. $m(\cup)\leq\sum m$ 由次可加性可得，由有限可加性和单调性又有 $m(\cup)\geq\sum^n m$，让右侧 $n\to\infty$ 即可。 □

**定理 1.1.10.** $\mathbb{R}$ 中可测集包含 *Borel* $\sigma$-代数。区间测度为长度，且平移不变，可数可加。

**定义 1.1.8.** 一个可数集族称为升链，如果 $E_k\subset E_{k+1}$，相似定义降链。

**定理 1.1.11.** *Lebesgue* 测度满足

(a) 若 $\{A_k\}$ 为升链，则

$$m\left(\bigcup A_k\right)=\lim_{k\to\infty}m(A_k).$$

(b) 若 $\{B_k\}$ 为降链且 $m(B_1)<\infty$，则

$$m\left(\bigcap B_k\right)=\lim_{k\to\infty}m(B_k).$$

证明. 不妨设诸 $A_k$ 测度有限，则构造 $A_k$ 的差得到等价的无交序列，后应用可数可加性即可。

对于 $B$ 则关于 $B_1$ 取补后构造等价无交序列，借助减性即可。 □

**定义 1.1.9.** 称一性质在 $E$ 上几乎处处成立，如果它在除一零测集外成立。

**引理 1.1.2** (Borel-Cantelli)**.** 若 $\{E_k\}$ 测度和有限，则几乎任意 $x \in \mathbb{R}$ 最多属于有限多个 $E_k$。

证明.
$$m\left(\bigcap \bigcup_{k=n} E_k\right) = \lim_{n\to\infty} m\left(\bigcup_{k=n} E_k\right) = 0.$$
□

### 1.1.6　不可测集

**引理 1.1.3.** 设 $E \subset \mathbb{R}$ 有界且存在可数无限有界实数集 $\Lambda$ 其元素使诸 $\lambda + E$ 无交，则 $m(E) = 0$。

证明. 注意平移不变性与可数可加性，以及有界性即可。 □

**定义 1.1.10.** 定义二实数有理等价，若其差为有理数。

**定理 1.1.12** (Vitali)**.** 任意正测度的实数集 $E$ 存在一不可测子集。

证明. 不妨设 $E$ 有界，取 $E$ 内有理等价类的代表元集 $\mathcal{C}$，有上述引理知 $m(\mathcal{C}) = 0$。再选取 $\Lambda$ 为 $\mathbb{Q}$ 足够大的子集，使诸 $\lambda + E$ 可覆盖 $E$，矛盾。 □

**定理 1.1.13.** 存在 $\mathbb{R}$ 的无交子集 $A$ 与 $B$ 满足

$$m^*(A \cup B) < m^*(A) + m^*(B).$$

### 1.1.7　Cantor 集与 Cantor-Lebesgue 函数

**定义 1.1.11.** 定义 *Cantor* 集为 $I = [0,1]$ 不断挖去各连通分量之三等分之中间部分的结果。令诸 $C_k$ 为每一步的结果，$\mathbf{C} = \cap C_k$。

**定理 1.1.14.** *Cantor* 集不可数，且 $m(\mathbf{C}) = 0$。

证明. 易证其可测且测度为零。参考定理**??**的证明过程知不可数。 □

定义 Cantor-Lebesgue 函数 $\varphi$ 函数如下。对 $\mathcal{O}_k=[0,1]-C_k$ 的 $2^k-1$ 个连通分量分别赋值

$$\left\{1/2^k,2/2^k,3/2^k,\cdots,\left(2^k-1\right)/2^k\right\}.$$

令 $\varphi(0)=0$ 且

$$\varphi(x)=\sup\{\varphi(t)\mid t\in[0,x)\}.$$

**定理 1.1.15.** *$\varphi$ 连续单调递增且在 $\mathcal{O}$ 内导数为零，并将 $[0,1]$ 映满 $[0,1]$。*

*证明.* 注意 $\varphi$ 在 $x\in\mathbf{C}$ 附近的跳跃不超过其两侧 $\mathcal{O}$ 的跳跃，而随 $k$ 增大其可任意小。故其连续，由介值定理知映满。 □

**定理 1.1.16.** *连续严格递增映射 $\psi(x)=\varphi(x)+x$ 满足:*

(a) *将零测 $\mathbf{C}$ 映为一正测集;*

(b) *将一可测 $E\subset\mathbf{C}$ 映为不可测集。*

*证明.* 注意到 $[0,2]=\psi(\mathcal{O})+\psi(\mathbf{C})$ 且开集与闭集映射后仍为开集与闭集，故仍可测。将 $\mathcal{O}$ 分解成区间，映射后区间长度不变即知 $m(\psi(\mathcal{O}))=1$。

因此，$m(\psi(\mathbf{C}))=1$ 而含有不可测集，其原像为零测可测集。 □

**引理 1.1.4.** *严格递增映射存在连续逆。*

**引理 1.1.5.** *连续映射 $f$ 的 Borel 集像的原像为 Borel 集。*

*证明.* 注意 $f^{-1}\left(\complement U\right)=\complement f^{-1}(U)$，$f^{-1}(A\cap B)=f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B)$。 □

**定理 1.1.17.** *存在非 Borel 集的可测集。*

*证明.* Borel 集经严格增映射后仍为 Borel 集,可测集映射后可能不可测。 □

## 1.2　可测函数

### 1.2.1　可测函数的和、积与复合

**命题 1.2.1.** *对于在可测集上定义的函数 $f$，下列命题等价。*

1. *对任意 $c$，$f(x)>c$ 的 $x$ 可测;*
2. *对任意 $c$，$f(x)\geq c$ 的 $x$ 可测;*

3. 对任意 $c$，$f(x) < c$ 的 $x$ 可测；

4. 对任意 $c$，$f(x) \leq c$ 的 $x$ 可测；

证明. 只证前二。将 $f(x) \geq c$ 的 $x$ 视为诸 $f(x) > c - 1/k$ 的交，而 $f(x) > c$ 视为诸 $f(x) \geq c + 1/k$ 的并。 □

**定义 1.2.1.** 可测集上定义的函数 $f$ 称为可测的，若其满足前开命题之一。

**命题 1.2.2.** 可测集上定义的 $f$ 为可测当且仅当开集的原像均可测。

证明. 注意开集可写为区间并，而 $(a,b) = (-\infty, b) \cap (a, +\infty)$。 □

**命题 1.2.3.** 可测集上定义的连续函数可测。

**命题 1.2.4.** 区间上定义的单调函数可测。

**命题 1.2.5.** 设 $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$。

1. 若 $f$ 可测而 $g$ 与 $f$ 几乎处处相等，则 $g$ 可测；

2. 设 $D$ 为可测子集，$f$ 可测当且仅当在 $D$ 和 $E - D$ 上可测。

**定理 1.2.1.** $f$ 和 $g$ 为几乎处处有界的可测函数，则 $\alpha f + \beta g$ 与 $fg$ 可测。

证明. 只证 $f + g$ 和 $fg$ 可测。$f + g < c$，则存在 $q \in \mathbb{Q}$ 满足 $f < q < c - g$，将诸可数个 $q$ 并起即可。又注意

$$fg = \frac{1}{2}\left[(f+g)^2 - f^2 - g^2\right]$$

以及可测函数的平方可测即可。 □

**例 1.2.1.** 由定理 *1.1.16*可知，可测函数的复合 $\chi_E \circ \psi^{-1} > 0$ 的原像 $\psi(E)$ 不可测。

**定理 1.2.2.** 设 $f$ 连续可测而 $g$ 可测，则 $f \circ g$ 可测。

证明. 注意 $(f \circ g)^{-1}(\mathcal{O}) = g^{-1}(f^{-1}(\mathcal{O}))$ 即可。 □

由是立得 $|(f)|$ 与 $|(f)|^p$ 可测。

**命题 1.2.6.** $max\{f_1, \cdots, f_n\}$ 与 $min\{f_1, \cdots, f_n\}$ 可测。

由是立得诸

$$|f| = \max\{f, -f\}, \quad f^+ = \max\{f, 0\}, \quad f^- = \max\{-f, 0\}$$

可测。故 $f$ 可写为可测函数之差 $f = f^+ - f^-$。

### 1.2.2　可测函数的极限与逼近

**定义 1.2.2.** 称 $\{f_n\}$ 一致收敛于 $f$，若对于充分大的 $n$ 有 $\|f - f_n\| < \epsilon$。

**命题 1.2.7.** 若可测函数列 $\{f_n\}$ 逐点收敛于 $f$，则 $f$ 可测。

*证明.* 若 $f(x) < c$，对于充分大的 $N$ 有 $f_{N:}(x) < c$，并起诸 $N$ 即可。 □

**定义 1.2.3.** 简单函数为仅取有限多个值的可测函数。

注意简单函数 $\varphi$ 均可写为

$$\varphi = \sum^{n} c_k \cdot \chi_{E_k}.$$

**引理 1.2.1** (简单函数逼近)**.** 可测函数存在 $\epsilon$-接近的上下逼近 $\varphi_\epsilon$ 与 $\psi_\epsilon$。

*证明.* 将可测函数的值域分割为若干 $\epsilon$ 小区间即可。 □

**定理 1.2.3** (简单函数逼近)**.** 可测函数存在满足 $|\varphi_n| < \left| f : E \to \overline{\mathbb{R}} \right|$ 的逼近。若 $f$ 恒正，则存在诸 $\varphi_n$ 递增。

*证明.* 设 $f$ 恒正。在第 $n$ 步截断 $f$ 的值域至 $n$ 后作 $1/n$ 逼近即可。取 $\varphi_n = \max\{\varphi_1, \cdots, \varphi_n\}$ 可得递增序列。

一般情形将 $f$ 写为 $f^+ - f^-$ 即可。 □

### 1.2.3　Littlewood 的三大原理

三大原理谓

1. 每个可测集都几乎是区间的并；（定理 1.1.8）
2. 每个可测函数都几乎是连续的；（定理 1.2.5）
3. 每个可测函数的逐点收敛序列都几乎是一致收敛的。（定理 1.2.4）

**引理 1.2.2.** 对有限测度的 $E$ 上定义的逐点收敛可测函数列 $\{f_n\} \to f$，存在充分大的 $N$ 使 $f_{N:}$ 在任意逼近 $E$ 的集合上任意逼近 $f$。

*证明.* 注意由逐点收敛，诸 $N$ 的 $A$ 为升列且并为 $E$ 即可。 □

**定理 1.2.4** (Egoroff 定理)**.** 有限测度的 $E$ 上定义的逐点收敛可测函数列 $\{f_n\} \to f$ 在一 $\epsilon$-接近 $E$ 的闭集 $F$ 上一致收敛。

证明. 据上引理，对任意 $n$ 取 $A_n$ 与 $E$ 为 $\epsilon/2^{n+1}$-接近而 $f_{N:}$ 与 $f$ 为 $1/n$-接近，由是其交 $A$ 与 $E$ 为 $\epsilon$-接近且一致收敛。再取闭集逼近 $A$ 即可。 □

**命题 1.2.8.** 对在 $E$ 上定义的简单函数，存在连续函数在任意逼近 $E$ 的集合上与之相等。

证明. 对诸 $E_k$ 选取闭集逼近之，后调用 Urysohn 引理。 □

**定理 1.2.5** (Lusin 定理)**.** 对可测函数，前开命题成立。

证明. 由简单函数逼近之，后以连续函数逼近之，再选取一致收敛的闭集。 □