第一章　测度论

1.1　Lebesgue 测度

1.1.1　引论

Lebesgue 测度的性质

我们期望 Lebesgue 测度具有如下一些性质。

区间的测度为其长度　非空区间是可测集，且

$$m(I) = \ell(I).$$

测度是平移不变的　若 E 为 Lebesgue 可测集且 y 为一数，则

$$m(E+y) = m(E).$$

无交集的可数并的测度可加　E_k 为可数个无交可测集，则

$$m\left(\bigcup E_k\right) = \sum m(E_k).$$

且 Lebesgue 可测集全体构成一 σ-代数。

定义 1.1.1. *一集族构成代数，如果其元素的补，有限交与有限并皆封闭。*

定义 1.1.2. *一集族构成 σ-代数，如果其元素的补，可数交与可数并皆封闭。*

在全体集合上定义满足条件的测度是不可能的，甚至仅仅满足前两个条件而具有有限可加性都是不能指望的。但在定义 Lebesgue 测度前，仍可先构造对任意集合都适用的外测度，满足前二条件，而第三条件替换为无论诸 E_k 无交与否，皆有

$$m^*\left(\bigcup E_k\right) \leq \sum m^*(E_k).$$

1.1.2 Lebesgue 外测度

定义无界区间的长度为 ∞。对于任意集合，定义外测度

$$m^*(A) = \inf \sum \ell(I_k).$$

其中 $\{I_k\}$ 为 A 的区间覆盖。立即可得空集外测度为零且外测度具有单调性，即若 $A \subset B$ 则

$$m^*(A) \leq m^*(B).$$

可以由此证明，可数集的测度为零。

命题 1.1.1. 区间的测度为其长度。

证明. 考虑有界闭区间 $[a,b]$，易证 $m* \leq (b-a)$。另一方向的不等号需要

$$\sum \ell(I_k) \geq b-a.$$

由紧致性只需要对有限开覆盖证明

$$\sum^n \ell(I_k) \geq b-a.$$

选取包含 a 的区间 1，若右端点在 (a,b) 内则选取另一包含其右端点的区间 2，重复这一过程直到右端点在 (a,b) 外，则上述不等式成立。

对于任意有界区间，选取其闭区间的上下逼近并注意外测度的单调性即可。对于无界区间，易得其测度为 ∞。 □

命题 1.1.2. *Lebesgue* 外测度是平移不变的。

证明. 注意区间的平移不变即可。 □

命题 1.1.3. 对任意 $\{E_k\}$，有

$$m^*\left(\bigcup E_k\right) \leq \sum m^*(E_k).$$

证明. 对 E_k 取误差不超过 $2^{-k}\epsilon$ 的覆盖区间，加和即可。 □

1.1.3 Lebesgue 可测集的 σ-代数

Carathéodory 可测

定义 1.1.3. 若对于任意集合 A，都有

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*\left(A \cap \complement E\right),$$

则称 E 可测。

鉴于外测度的次可加性，上述条件可弱化为

$$m^*(A) \geq m^*(A \cap E) + m^*\left(A \cap \complement E\right).$$

此外还应注意到，对于无交集，若其中任一可测，立刻有

$$\begin{aligned} m*(A \cup B) &= m^*([A \cup B] \cap A) + m^*\left([A \cup B] \cap \complement A\right) \\ &= m^*(A) + m^*(B). \end{aligned}$$

故有可加性。此外，可测集的补仍为可测集。

定理 1.1.1. 零测集为可测集。

证明. 代入弱化后的条件，注意外测度的单调性即可。 □

定理 1.1.2. 可测集的有限并可测。故可测集构成代数。

证明. 只证二可测集的并可测。借助二集可测的 Carathéodory 条件，有

$$\begin{aligned} m^*(A) &= m^*(A \cap E_1) + m^*\left(A \cap \complement E_1 \cap E_2\right) + m^*\left(A \cap \complement E_1 \cap \complement E_2\right) \\ &\geq m^*(A \cap [E_1 \cup E_2]) + m^*\left(A \cap \complement [E_1 \cup E_2]\right). \end{aligned}$$

□

定理 1.1.3. 无交可测集的有限并满足

$$m^*\left(A \cap \bigcup E_k\right) = \sum m^*(A \cap E_k).$$

证明. 注意到 Carathéodory 条件的

$$A \cap \bigcup^n E_k \cap E_n = A \cap E_n$$

以及

$$A \cap \bigcup^n E_k \cap \complement E_n = A \cap \bigcup^{n-1} E_n,$$

归纳即可。 □

推论 1.1.1. 可测集的测度有限可加。

定理 1.1.4. 可测集的可数并可测。故可测集构成 σ-代数。

证明. 不妨设诸集无交。设其并为 E，则根据前开命题及单调性，有

$$m^*(A) \geq \sum^n m^*(A \cap E_k) + m^*\left(A \cap \complement E\right).$$

让 $n \to \infty$，借助次可加性即可。 □

定理 1.1.5. 区间是可测集。

证明. 只证 $I=(a,\infty)$ 型区间可测。不妨设 a 不在 A 内且将之分割为 $A\cap \complement I=A_1$ 与 $A\cap I=A_2$。对于 A 的任意覆盖 $\{I_k\}$ 均同样割裂之，有

$$m^*(A_1)+m^*(A_2)\le \sum \ell(I_k),$$

故满足弱化后条件。 □

定义 1.1.4. 开集的可数交为 G_δ 型集。

定义 1.1.5. 闭集的可数并为 F_σ 型集。

注意 $\mathbb{R}$ 中开集为区间的并，故 G_δ 型（以及 F_σ 型）集可测。

定义 1.1.6. 包含开集的最小 σ-代数称为 *Borel* σ-代数，其元素称为 *Borel* 集。

定理 1.1.6. $\mathbb{R}$ 中可测集包含 *Borel* σ-代数。区间，开集，闭集，G_δ 与 F_σ 型集可测。

命题 1.1.4. 可测集平移后可测。

证明. 在 Carathéodory 条件中将 E 的平移转化为 A 的平移，注意外测度的平移不变即可。 □

1.1.4 Lebesgue 可测集的内外逼近

引理 1.1.1. 对 $A\subset B$，有

$$m^*(B-A)=m^*(B)-m^*(A).$$

证明. 注意由 Carathéodory 条件，

$$m^*(B)=m^*(B\cap A)+m^*(B-A).$$ □

定理 1.1.7. 下列条件与 E 的可测性等价。

(a) 对 $\epsilon>0$，存在包含 E 的开集 $\mathcal{O}$ 满足 $m^*(\mathcal{O}-E)<\epsilon$;

(b) 存在包含 E 的 G_δ 型集满足 $m^*(G-E)=0$;

(c) 对 $\epsilon>0$，存在 E 内的闭集 F 满足 $m^*(E-F)<\epsilon$;

(d) 存在 E 内的 F_σ 型集满足 $m^*(E-F)=0$。

证明. 只证前二者。后二者取补可得。

设 E 可测，则存在区间并任意逼近其外测度，取 $\mathcal{O}$ 为区间并即可。有

$$m^*(\mathcal{O}-E)=m^*(\mathcal{O})-m^*(E)<\epsilon.$$

对于无界 E，分为可数个有界部分即可。不断缩小 ϵ，可得所求 G_δ 型集。鉴于零测集可测，又 $E=G\cap\complement(G-E)$，知 E 可测。 □

注意到对于任意集合 E 都存在开集使 $m^*(\mathcal{O})-m^*(E)$ 任意小，然而外测度的减性仅对可测集成立。

定理 1.1.8. 对有限测度的 $E\subset\mathbb{R}$，存在有限多个区间的并 $\mathcal{O}$ 满足 $m*(E-\mathcal{O})+m^*(\mathcal{O}-E)<\epsilon$。

证明. 取开集 U 为 E 的 $\epsilon/2$ 外逼近，写 U 为区间并，选取其中有限个以 $\epsilon/2$ 逼近之，注意到两差均小于 $\epsilon/2$ 即可。 □

1.1.5 Lebesgue 测度的其他性质

定义 1.1.7. 对可测集定义其 *Lebesgue* 测度为外测度。

定理 1.1.9. *Lebesgue* 测度是可数可加的。

证明. $m(\cup)\leq\sum m$ 由次可加性可得，由有限可加性和单调性又有 $m(\cup)\geq\sum^n m$，让右侧 $n\to\infty$ 即可。 □

定理 1.1.10. $\mathbb{R}$ 中可测集包含 *Borel* σ-代数。区间测度为长度，且平移不变，可数可加。

定义 1.1.8. 一个可数集族称为升链，如果 $E_k\subset E_{k+1}$，相似定义降链。

定理 1.1.11. *Lebesgue* 测度满足

(a) 若 $\{A_k\}$ 为升链，则

$$m\left(\bigcup A_k\right)=\lim_{k\to\infty}m(A_k).$$

(b) 若 $\{B_k\}$ 为降链且 $m(B_1)<\infty$，则

$$m\left(\bigcap B_k\right)=\lim_{k\to\infty}m(B_k).$$

证明. 不妨设诸 A_k 测度有限，则构造 A_k 的差得到等价的无交序列，后应用可数可加性即可。

对于 B 则关于 B_1 取补后构造等价无交序列，借助减性即可。 □

定义 1.1.9. 称一性质在 E 上几乎处处成立，如果它在除一零测集外成立。

引理 1.1.2 (Borel-Cantelli)**.** 若 $\{E_k\}$ 测度和有限，则几乎任意 $x \in \mathbb{R}$ 最多属于有限多个 E_k。

证明.

$$m\left(\bigcap \bigcup_{k=n} E_k\right) = \lim_{n\to\infty} m\left(\bigcup_{k=n} E_k\right) = 0.$$

□

1.1.6 不可测集

引理 1.1.3. 设 $E \subset \mathbb{R}$ 有界且存在可数无限有界实数集 Λ 其元素使诸 $\lambda + E$ 无交，则 $m(E) = 0$。

证明. 注意平移不变性与可数可加性，以及有界性即可。 □

定义 1.1.10. 定义二实数有理等价，若其差为有理数。

定理 1.1.12 (Vitali)**.** 任意正测度的实数集 E 存在一不可测子集。

证明. 不妨设 E 有界，取 E 内有理等价类的代表元集 $\mathcal{C}$，有上述引理知 $m(\mathcal{C}) = 0$。再选取 Λ 为 $\mathbb{Q}$ 足够大的子集，使诸 $\lambda + E$ 可覆盖 E，矛盾。 □

定理 1.1.13. 存在 $\mathbb{R}$ 的无交子集 A 与 B 满足

$$m^*(A \cup B) < m^*(A) + m^*(B).$$

1.1.7 Cantor 集与 Cantor-Lebesgue 函数

定义 1.1.11. 定义 *Cantor* 集为 $I = [0,1]$ 不断挖去各连通分量之三等分之中间部分的结果。令诸 C_k 为每一步的结果，$\mathbf{C} = \cap C_k$。

定理 1.1.14. *Cantor* 集不可数，且 $m(\mathbf{C}) = 0$。

证明. 易证其可测且测度为零。参考定理**??**的证明过程知不可数。 □

定义 Cantor-Lebesgue 函数 φ 函数如下。对 $\mathcal{O}_k = [0,1] - C_k$ 的 $2^k - 1$ 个连通分量分别赋值

$$\left\{1/2^k, 2/2^k, 3/2^k, \cdots, \left(2^k - 1\right)/2^k\right\}.$$

令 $\varphi(0) = 0$ 且

$$\varphi(x) = \sup\{\varphi(t) \mid t \in [0,x)\}.$$

定理 1.1.15. φ 连续单调递增且在 $\mathcal{O}$ 内导数为零，并将 $[0,1]$ 映满 $[0,1]$。

证明. 注意 φ 在 $x \in \mathbf{C}$ 附近的跳跃不超过其两侧 $\mathcal{O}$ 的跳跃，而随 k 增大其可任意小。故其连续，由介值定理知映满。 □

定理 1.1.16. 连续严格递增映射 $\psi(x) = \varphi(x) + x$ 满足:

(a) 将零测 $\mathbf{C}$ 映为一正测集;

(b) 将一可测 $E \subset \mathbf{C}$ 映为不可测集。

证明. 注意到 $[0,2] = \psi(\mathcal{O}) + \psi(\mathbf{C})$ 且开集与闭集映射后仍为开集与闭集，故仍可测。将 $\mathcal{O}$ 分解成区间，映射后区间长度不变即知 $m(\psi(\mathcal{O})) = 1$。

因此，$m(\psi(\mathbf{C})) = 1$ 而含有不可测集，其原像为零测可测集。 □

引理 1.1.4. 严格递增映射存在连续逆。

引理 1.1.5. 连续映射 f 的 *Borel* 集像的原像为 *Borel* 集。

证明. 注意 $f^{-1}\left(\complement U\right) = \complement f^{-1}(U)$，$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$。 □

定理 1.1.17. 存在非 *Borel* 集的可测集。

证明. Borel 集经严格增映射后仍为 Borel 集,可测集映射后可能不可测。 □

1.2　可测函数

1.2.1　可测函数的和、积与复合

命题 1.2.1. 对于在可测集上定义的函数 f，下列命题等价。

1. 对任意 c，$f(x) > c$ 的 x 可测;
2. 对任意 c，$f(x) \geq c$ 的 x 可测;

3. 对任意 c，$f(x) < c$ 的 x 可测；

4. 对任意 c，$f(x) \leq c$ 的 x 可测；

证明. 只证前二。将 $f(x) \geq c$ 的 x 视为诸 $f(x) > c - 1/k$ 的交，而 $f(x) > c$ 视为诸 $f(x) \geq c + 1/k$ 的并。 □

定义 1.2.1. 可测集上定义的函数 f 称为可测的，若其满足前开命题之一。

命题 1.2.2. 可测集上定义的 f 为可测当且仅当开集的原像均可测。

证明. 注意开集可写为区间并，而 $(a,b) = (-\infty, b) \cap (a, +\infty)$。 □

命题 1.2.3. 可测集上定义的连续函数可测。

命题 1.2.4. 区间上定义的单调函数可测。

命题 1.2.5. 设 $f: E \to \overline{\mathbb{R}}$。

1. 若 f 可测而 g 与 f 几乎处处相等，则 g 可测；

2. 设 D 为可测子集，f 可测当且仅当在 D 和 $E - D$ 上可测。

定理 1.2.1. f 和 g 为几乎处处有界的可测函数，则 $\alpha f + \beta g$ 与 fg 可测。

证明. 只证 $f+g$ 和 fg 可测。$f+g<c$，则存在 $q \in \mathbb{Q}$ 满足 $f < q < c - g$，将诸可数个 q 并起即可。又注意

$$fg = \frac{1}{2}\left[(f+g)^2 - f^2 - g^2\right]$$

以及可测函数的平方可测即可。 □

例 1.2.1. 由定理*1.1.16*可知，可测函数的复合 $\chi_E \circ \psi^{-1} > 0$ 的原像 $\psi(E)$ 不可测。

定理 1.2.2. 设 f 连续可测而 g 可测，则 $f \circ g$ 可测。

证明. 注意 $(f \circ g)^{-1}(\mathcal{O}) = g^{-1}\left(f^{-1}(\mathcal{O})\right)$ 即可。 □

由是立得 $|(f)|$ 与 $|(f)|^p$ 可测。

命题 1.2.6. $max\{f_1, \cdots, f_n\}$ 与 $min\{f_1, \cdots, f_n\}$ 可测。

由是立得诸

$$|f| = \max\{f, -f\}, \quad f^+ = \max\{f, 0\}, \quad f^- = \max\{-f, 0\}$$

可测。故 f 可写为可测函数之差 $f = f^+ - f^-$。

1.2.2　可测函数的极限与逼近

定义 1.2.2. 称 $\{f_n\}$ 一致收敛于 f，若对于充分大的 n 有 $\|f-f_n\|<\epsilon$。

命题 1.2.7. 若可测函数列 $\{f_n\}$ 逐点收敛于 f，则 f 可测。

证明. 若 $f(x)<c$，对于充分大的 N 有 $f_{N:}(x)<c$，并起诸 N 即可。 □

定义 1.2.3. 简单函数为仅取有限多个值的可测函数。

注意简单函数 φ 均可写为

$$\varphi=\sum^{n}c_k\cdot\chi_{E_k}.$$

引理 1.2.1 (简单函数逼近)**.** 可测函数存在 ϵ-接近的上下逼近 φ_ϵ 与 ψ_ϵ。

证明. 将可测函数的值域分割为若干 ϵ 小区间即可。 □

定理 1.2.3 (简单函数逼近)**.** 可测函数存在满足 $|\varphi_n|<\left|f:E\to\overline{\mathbb{R}}\right|$ 的逼近。若 f 恒正，则存在诸 φ_n 递增。

证明. 设 f 恒正。在第 n 步截断 f 的值域至 n 后作 $1/n$ 逼近即可。取 $\varphi_n=\max\{\varphi_1,\cdots,\varphi_n\}$ 可得递增序列。

一般情形将 f 写为 f^+-f^- 即可。 □

1.2.3　Littlewood 的三大原理

三大原理谓

1. 每个可测集都几乎是区间的并；（定理1.1.8）
2. 每个可测函数都几乎是连续的；（定理1.2.5）
3. 每个可测函数的逐点收敛序列都几乎是一致收敛的。（定理1.2.4）

引理 1.2.2. 对有限测度的 E 上定义的逐点收敛可测函数列 $\{f_n\}\to f$，存在充分大的 N 使 $f_{N:}$ 在任意逼近 E 的集合上任意逼近 f。

证明. 注意由逐点收敛，诸 N 的 A 为升列且并为 E 即可。 □

定理 1.2.4 (Egoroff 定理)**.** 有限测度的 E 上定义的逐点收敛可测函数列 $\{f_n\}\to f$ 在一 ϵ-接近 E 的闭集 F 上一致收敛。

证明. 据上引理, 对任意 n 取 A_n 与 E 为 $\epsilon/2^{n+1}$-接近而 $f_{N:}$ 与 f 为 $1/n$-接近，由是其交 A 与 E 为 ϵ-接近且一致收敛。再取闭集逼近 A 即可。 □

命题 1.2.8. 对在 E 上定义的简单函数，存在连续函数在任意逼近 E 的集合上与之相等。

证明. 对诸 E_k 选取闭集逼近之，后调用 Urysohn 引理。 □

定理 1.2.5 (Lusin 定理)**.** 对可测函数，前开命题成立。

证明. 由简单函数逼近之，后以连续函数逼近之，再选取一致收敛的闭集。 □