Sprawozdanie - Lista 2

October 29, 2021

Małgorzata Kowalczyk, Kamil Kowalski

Naszym celem było stworzenie algorytmów do obliczania trójek pitagorejskich, czyli trzech liczb całkowitych, dodatnich, które spełniają równanie

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Musieliśmy znaleźć trójkę, która spełnia równanie

$$a + b + c = 1000.$$

Napisaliśmy pięć wersji algorytmu. Każda z nich jest usprawniona względem poprzedniej. Opiszemy pokrótce każdy z naszych algorytmów.

Wersja 1

Pierwsza wersja algorytmu jest dość pierwotna. Polega na dobieraniu kolejnych liczb i sprawdzaniu czy dane warunki zostają spełnione. Ten algorytm wykonuje około $1\ 790\ 786\ 250$ operacji.

Wersja 2

Druga wersja została usprawniona poprzez ograniczenie zakresu, w którym szukamy naszych liczb oraz dzięki wyeliminowaniu jednej z pętli.
Możemy bez straty ogólności założyć, że $a \leqslant b \leqslant c$. Dzięki temu jesteśmy w stanie ograniczyć zakres szukania liczby a oraz b.
Ostatnią pętlę możemy wyeliminować poprzez zapisanie liczby c jako różnicę sumy naszych liczb oraz liczb a oraz b. Ten algorytm wykonuje około $697\ 736$ operacji.

Wersja 3

Trzecia wersja programu to ponowne ograniczenie zakresu, w którym szukamy naszych liczb. Jeśli wiemy, że $a \leqslant b$ to szukanie liczby b możemy za każdym razem rozpoczynać nie od 1, tylko od liczby a. Ten algorytm wykonuje około $558\ 436$ operacji.

Wersja 4

Czwarta wersja algorytmu to analityczny sposób rozwiązania naszego problemu. Wykorzystując różne przekształcenia algebraiczne, które przedstawimy poniżej, możemy otrzymać, że

$$(a - b)^2 = c^2 - sum^2 + 2 \cdot sum \cdot c$$

gdzie sum to suma liczb a, b, c.

Jeśli pierwiastek z naszego równania będzie liczbą całkowitą, to liczby a i b również będą całkowite. Będziemy mogli je obliczyć z następujących wzorów

$$a = sum - b - c$$
$$b = \frac{sum - c + a - b}{2}$$

Ta wersja algorytmu jest niewątpliwie szybsza od poprzednich, ponieważ wykonuje około $3\ 027$ operacji.

Wyprowadzenie wzorów

Poniżej wypiszemy przekształcenia potrzebne do otrzymania wzoru

$$(a-b)^2 = c^2 - sum^2 + 2 \cdot sum \cdot c.$$

Punktem wyjściowym będą dwa wzory dane nam na początku

$$a^2 + b^2 = c^2$$
$$a + b + c = sum$$

Zaczynamy od przekształcenia pierwszego równania

$$a^2 + b^2 = c^2$$
$$(a+b)^2 = c^2 + 2ab$$

Ponieważ $a + b + c = sum$ podstawiamy $a + b = sum - c$ i otrzymujemy

$$2ab = (sum - c)^2 - c^2$$

Następnie odejmujemy stronami równania $a^2 + b^2 = c^2$ i $2ab = (sum - c)^2 - c^2$ otrzymując końcowy wzór

$$a^2 - 2ab + b^2 = c^2 - (sum - c)^2 + c^2$$
$$(a-b)^2 = c^2 - sum^2 + 2 \cdot sum \cdot c - c^2 + c^2$$
$$(a-b)^2 = c^2 - sum^2 + 2 \cdot sum \cdot c$$

Wypiszemy przekształcenia potrzebne do uzyskania wzoru $b = \frac{sum-c+a-b}{2}$.

$$a + b = sum - c$$
$$a + b - b = sum - c - b$$
$$b = sum - c - b - a + b$$
$$2b = sum - c - (a - b)$$

Ponieważ $a < b$ to $a - b < 0$, więc po spierwiastkowaniu $(a-b)^2$, nasze wyrażenie w module będzie ujemne. Zatem opuszczając go, zmieniamy znak i otrzymamy szukany wzór

$$b = \frac{sum - c + a - b}{2}.$$

Wersja 5

Finalna wersja algorytmu polega na ograniczeniu przedziału, w którym szukamy długości c. Jest to największa liczba, więc jej minimalna wartość to $\frac{sum}{3} + 1$. Ten algorytm wykonuje 699

operacji.

Podsumowanie

Napisaliśmy pięć wersji algorytmu rozwiązującego ten sam problem. Różnica w ilości wykonywanych operacji pomiędzy poszczególnymi programami może być ogromna. Sposób analityczny okazał się być najbardziej efektywny.
Poniżej przedstawiamy zestawienie ilości operacji poszczególnych wersji naszego programu.

Nazwa funkcji	Liczba operacji
version_1	$1\,790\,786\,250$
version_2	$697\,736$
version_3	$558\,436$
version_4	$3\,027$
version_5	699

Linki

https://github.com/github-kamilk/AiSD/blob/main/Lista_2/pythagorean_triplet.py