Helmut-Schmidt-Universität
Universität der Bundeswehr Hamburg
Fakultät für Maschinenbau und Bauingenieurwesen

Prof. Dr. Thomas Carraro
Dr. Ulrike Kochan-Eilers

Mathematik II/B (WI/ET) — Blatt 2

WT 2025 — Grenzwerte, Stetigkeit, Ableitungen

Einführende Bemerkungen

- Vermeiden Sie die Verwendung von Taschenrechnern oder Online-Ressourcen.

Aufgabe 2.1: Ableitungen

Berechnen Sie die erste Ableitung der folgenden Funktionen

a) $f(x) = x^x$

b) $g(x) = x^{3^x}$

c) $h(x) = x^{\cos(x)}$

Aufgabe 2.2: Stetige Fortsetzung

a) Untersuchen Sie, ob die folgenden reellen Funktionen im Punkt $x = 0$ stetig sind oder stetig fortgesetzt werden können.

$$f_1(x) = |x|, \qquad f_2(x) = \frac{x}{|x|}, \qquad f_3(x) = \frac{x^3}{|x|}, \qquad f_4(x) = \frac{x^2}{|x|^2}$$

b) Bestimmen Sie die Definitionslücken der Funktion

$$g(x) = \frac{2x^3 - 12x^2 + 18x}{x^3 - 9x}$$

In welchen dieser Lücken ist die Funktion stetig fortsetzbar?

Aufgabe 2.3: Differenzieren

Bestimmen Sie jeweils die erste Ableitung. Zur Kontrolle sind die Werte der Ableitung an Kontrollpunkten angegeben. (Eventuell notwendige Beschränkungen des Definitionsgebietes sind nicht angegeben.)

$$f_1(t) = 3t^4 - 4t + 7\,, \qquad f_2(t) = (2t-3)^4\,, \qquad f_3(t) = t^3\,(t+3)^4$$

$$f_4(t) = 3\,\cos(2t)\,, \qquad f_5(t) = \sin^2(3t)\,, \qquad f_6(t) = \tan(2 - t/2)$$

$$f_7(t) = \frac{2t-3}{(t+2)^3}\,, \qquad f_8(t) = \frac{4t\,\sin(t)}{\cos(2t)}\,, \qquad f_9(t) = t^2 e^{\sqrt{t}}$$

$$f_{10}(t) = \sqrt{t\sqrt{t\sqrt{t}}}\,, \qquad f_{11}(t) = e^{\frac{1}{1+t^2}}\,, \qquad f_{12}(t) = \tan(t)$$

$$f_{13}(t) = \frac{t + \cos(t)\sin(t)}{2}\,, \qquad f_{14}(t) = \frac{t^2 - t + 2}{2t+3}\,, \qquad f_{15}(t) = \frac{\sin^2(t)}{\cos(t)}$$

Aufgabe 2.4: Differentiation

a) Geben Sie die Konstanten b, c, $d \in \mathbb{R}$ an, damit die Funktion

$$g(x) = \begin{cases} bx^3 + cx^2 + d & \text{für } x \le 1 \\ \ln x & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

auf $\mathbb{R}$ zweimal differenzierbar ist.
Ist $g(x)$ für diese Wahl auch dreimal differenzierbar?

b) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x\sin(1/x) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

in $x = 0$ stetig ist, aber *nicht* differenzierbar.
Hinweis: Betrachten Sie zur Untersuchung der Differenzierbarkeit die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n = \frac{1}{n\pi + \pi/2}$.

Aufgabe 2.5: Kurven im $\mathbb{R}^n$

Ein Satellit bewege sich auf der Bahn

$$\boldsymbol{r}(t) = \left(\sqrt{1+t^2},\, 3t\right)^\top$$

.

a) Berechnen Sie die Geschwindigkeit $\dot{\boldsymbol{r}}(t)$ des Satelliten.

b) Geben Sie die Grenzwerte (für $t \to +\infty$ und für $t \to -\infty$) der Bahnrichtung r_2/r_1 und Geschwindigkeit $\dot{\boldsymbol{r}}$ des Satelliten an.

Ergebnisse zu Aufgabe 2.1:

- $f'(x) = x^x\left(\ln(x) + 1\right)$
- $g'(x) = x^{3^x}\left(\ln(3)\, 3^x \ln(x) + \dfrac{3^x}{x}\right)$
- $h'(x) = x^{\cos(x)}\left(\dfrac{\cos(x)}{x} - \ln(x)\sin(x)\right)$

Ergebnisse zu Aufgabe 2.2:

a) stetig, nicht stetig fortsetzbar, stetig fortsetzbar, stetig fortsetzbar
b) g ist stetig forstetzbar in 0 und $+3$ und nicht stetig fortsetzbar in -3.

Ergebnisse zu Aufgabe 2.3:

$$\begin{aligned}
f_1'(2) &= 92, & f_2'(2) &= 8, & f_3'(2) &= 11500,\\
f_4'(\pi/3) &= -3\sqrt{3}, & f_5'(\pi/3) &= 0, & f_6'(4+2\pi) &= -1/2,\\
f_7'(2) &= 5/256, & f_8'(\pi/3) &= \frac{20\pi}{3} - 4\sqrt{3}, & f_9'(4) &= 12\mathrm{e}^2,\\
f_{10}'(256) &= \frac{7}{16}, & f_{11}'(2) &= -\frac{4\mathrm{e}^{1/5}}{25}, & f_{12}'(\pi/3) &= 4,\\
f_{13}'(\pi/3) &= \frac{1}{4}, & f_{14}'(2) &= \frac{13}{49}, & f_{15}'(\pi/3) &= \frac{5\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}$$

Ergebnisse zu Aufgabe 2.5:

$\lim\limits_{t\to\infty} \frac{r_2(t)}{r_1(t)} = 3$, $\lim\limits_{t\to\pm\infty} \dot{\boldsymbol{r}}(t) = (\pm 1, 3)^\top$