Helmut-Schmidt-Universität
Universität der Bundeswehr Hamburg
Fakultät für Maschinenbau

Prof. Dr. Thomas Carraro
Dr. Frank Gimbel

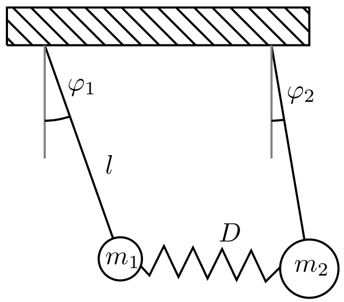
ISA: Ing. Studienkompetenzen — Blatt 3

WT 2022

Aufgabe 3.1: Gekoppelte Schwingung

Zu untersuchen ist das unten skizzierte mechanische System aus zwei durch eine Feder (Federkonstante D) verbundene Massen m_1 und m_2. Die beiden Massen sind im Schwerefeld der Erde ($\boldsymbol{g}$) an Fäden der Länge l so aufgehängt, dass die Feder entspannt ist, wenn beide Fäden senkrecht sind ($\varphi_1 = \varphi_2 = 0$). Für kleine Auslenkungen der Massen um die Winkel φ_1 bzw. φ_2 ergibt der Impulserhaltungssatz:

$$\begin{aligned} m_1 l \ddot{\varphi}_1 &= -\, m_1 \varphi_1 g + Dl(\varphi_2 - \varphi_1) \\ m_2 l \ddot{\varphi}_2 &= -\, m_2 \varphi_2 g + Dl(\varphi_1 - \varphi_2). \end{aligned}$$



Durch den Übergang von den Auslenkungen φ_1, φ_2 und deren Geschwindigkeiten $\dot{\varphi}_1$, $\dot{\varphi}_2$ zu $\boldsymbol{y} = (\varphi_1,\, \dot{\varphi}_1,\, \varphi_2,\, \dot{\varphi}_2)^\top$ lässt sich das obige (Differential-)Gleichungssystem schreiben als

$$\dot{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} \text{ mit } \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\left(\frac{g}{l} + \frac{D}{m_1}\right) & 0 & \frac{D}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{D}{m_2} & 0 & -\left(\frac{g}{l} + \frac{D}{m_2}\right) & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Eigenfrequenzen des Systems. Die Eigenfrequenzen sind die Imaginärteile der komplexen Eigenwerte der Systemmatrix $\boldsymbol{A}$.

b) Bestimmen Sie auch die Eigenvektoren zu den ermittelten Eigenwerten.

c) Nehmen Sie nun an, dass der Realteil eines Eigenvektors die jeweilige *Eigenschwingung* des Systems beschreibt: Die erste und dritte Komponente (Beachte $\boldsymbol{y} = (\varphi_1,\, \dot{\varphi}_1,\, \varphi_2,\, \dot{\varphi}_2)^\top$) geben jeweils den Maximalausschlag des jeweiligen Pendels an.
Beschreiben Sie anhand der Eigenvektoren die beiden Eigenschwingungen.

Aufgabe 3.2: Approximation der Flugbahn eines Projektils

Ein kugelförmiges Projektil mit einem Radius von 5 cm aus Stahl wird mit einer bestimmten Anfangsgeschwindigkeit $\boldsymbol{v}_0 = (v_{x,0}, v_{y,0})^T$ geworfen. Die Flugbahn wird unter Berücksichtigung des Luftwiderstands approximiert. Die Formel für die Luftwiderstandskraft lautet

$$F = \frac{1}{2} c \rho A |\boldsymbol{v}|^2,$$

wobei die Parameter in der Formel sind

- $c = 0.47 \quad [-]$: Luftwiderstandsbeiwert für ein kugelförmiges Projektil,
- $A \quad [m^2]$: Querschnittsfläche des kugelförmigen Projektils,
- $\rho = 1.225 \quad [Kg/m^3]$: Dichte der Luft.

Die Flugbahn liegt in der xy-Ebene. Die Position des Projektils $\boldsymbol{P}(t)$ in der Zeit wird von beiden Komponenten des Positionsvektors bestimmt

$$\boldsymbol{P}(t) = (x_p(t), y_p(t))^T.$$

Wir sind nur an der x-Komponente interessiert, welche mit der folgenden Formel beschrieben werden kann

$$x_p(t) = \frac{1}{\mu} \ln(1 + \mu v_{x,0} t),$$

wobei die Parameter in der Formel sind

- $\mu = \frac{1}{2m} c \rho A \quad [1/m]$,
- $v_{x,0} = 60 \quad [m/s]$: x-Komponente der Anfangsgeschwindigkeit,
- $m \quad [kg]$: Masse des Projektils, die unter Berücksichtigung der Dichte des Stahls, $\rho_s = 7.85\,[gr/cm^3]$, bestimmt werden muss.

- Bestimmen Sie das Taylor-Polynom zweiter Ordnung $T_2(t)$, das die x-Komponente $x_p(t)$ der Flugbahn um den Zeitpunkt $t = 0$ approximiert.

- Berechnen Sie die Differenz zwischen der Position $x_p(t)$ des Projektils und seiner Taylor-Approximation $T_2(t)$ zum Zeitpunkt $t = 10$: $d(t) = |T_2(t) - x_p(t)|$.
- Bestimmen Sie das Restglied und geben Sie eine obere Schranke für seinen Betrag im Zeitintervall $t = [0, 10]$ an. Vergleichen Sie dies mit der oben berechneten Differenz $d(10)$.

Hinweis: Man achtet auf die Einheiten!

Ergebnisse zu Aufgabe 3.1:

Eigenwerte: $\lambda_{1,2} = \pm\,\mathrm{i}\sqrt{\alpha}$, $\lambda_{3,4} = \pm\,\mathrm{i}\sqrt{\alpha + \delta_1 + \delta_2}$ mit $\alpha = g/l$, $\delta_j = D/m_j$
Eigenfrequenzen: $\omega_1 = \sqrt{\alpha}$, $\omega_2 = \sqrt{\alpha + \delta_1 + \delta_2}$

Ergebnisse zu Aufgabe 3.2:

Die Ableitungen der Funktion x_p zum Zeitpunkt $t = 0$ sind

$$\begin{aligned} x_p'(0) &= 60, \\ x_p''(0) &\approx -1.9803, \\ x_p'''(0) &\approx 0.1307. \end{aligned}$$

Die Differenz zwischen der Funktion x_p und dem Taylor-Polynom zum Zeitpunkt $t = 10$ ist

$$d(10) = |T_2(10) - x_p(10)| \approx 17.5117.$$

Graph der x-Koordinate der Flugbahn und des Taylor-Polynoms