

Aufgabe 4.1: Schwerpunkt und Trägheitsmoment einer Kreisscheibe

Gegeben sei die Kreisscheibe

$$K = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \|\mathbf{x}\|_2 \leq 2\}$$

mit der Massendichte $\rho(x, y) = x^2 + 4$.

- a) Berechnen Sie die Masse $M = \int_K \rho(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ der Kreisscheibe. Führen Sie die Rechnung in kartesischen Koordinaten durch.

- b) Berechnen Sie ebenso den Schwerpunkt

$$\mathbf{s} = \frac{1}{M} \int_K \rho(\mathbf{x}) \mathbf{x} d\mathbf{x}.$$

Führen Sie die Rechnung in Polarkoordinaten

$\mathbf{x}(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)^\top$ aus.

- c) Berechnen Sie das Trägheitsmoment bezüglich der x -Achse

$$\Theta_y = \int_K \rho(x, y) y^2 d(x, y).$$

Hinweise:

- Für $\alpha \in \mathbb{R}$ gelten die folgenden Zusammenhänge:

$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1$$

$$\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha) \cos(\alpha)$$

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1.$$

- Für Aufgabenteil **a)** kann die Substitution $x = 2\sin(u)$ hilfreich sein.