Helmut-Schmidt-Universität
Universität der Bundeswehr Hamburg
Fakultät für Maschinenbau und Bauingenieurwesen

Prof. Dr. Thomas Carraro
M. Sc. Janna Puderbach

HELMUT SCHMIDT UNIVERSITÄT
Universität der Bundeswehr Hamburg

Mathematik II/B (WI/ET) **Blatt 2**

WT 2025 Grenzwerte, Stetigkeit, Ableitungen

Einführende Bemerkungen

- Vermeiden Sie die Verwendung von Taschenrechnern oder Online-Ressourcen.

Aufgabe 2.1: Grenzwert Analyse - Definition

a) Notieren Sie die Definition des Grenzwertes und zeigen Sie, dass die Folge $a_n = \frac{1}{n}$ gegen den Grenzwert $a = 0$ konvergiert.
(Dies ist gleichbedeutend mit dem Nachweis, dass $\forall k \in \mathbb{N}$ eine Zahl $N \in \mathbb{R}$ existiert, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > N$ gilt: $|a_n - a| < 10^{-k}$).

b) Berechnen Sie den Grenzwert $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ der untenstehenden Folgen und dokumentieren Sie die Rechenregel, die Sie zur Berechnung des Grenzwertes verwendet haben (Produktregel, Einschließungssatz, Produkt beschränkter Folgen, Produkt von Nullfolgen etc).

i) $a_n = \dfrac{n^2 + 5n}{3n^2 + 1}$ **ii)** $a_n = \log_{10}(10n^2 - 2n) - \log_{10}(n^2 + 1)$

iii) $a_n = \dfrac{(n+1)!}{n! - (n+1)!}$ **iv)** $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{3n}$

v) $a_n = \dfrac{\cos n}{n}$ **vi)** $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

vii) $a_n = \dfrac{2^n}{n!}$

Lösung 2.1:

a) Es ist zu zeigen: $\forall k \in \mathbb{N} : \exists N \in \mathbb{R}$:

$$|n^{-1} - 0| < 10^{-k},\ \forall n > N.$$

Wählen Sie $N = 10^k$, um die Eigenschaft zu zeigen.

b) Im vorigen Aufgabenteil wurde gezeigt, dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Mit dem Ergebnis aus **a)** gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0, \text{ for all } \alpha \in \mathbb{R},\ \alpha > 0.$$

Des Weiteren wird die Stetigkeit der Funktionen vorausgesetzt und ausgenutzt.

i) Teilen von Zähler und Nenner durch n^2 liefert

$$\frac{1 + \frac{5}{n}}{3 + \frac{1}{n^2}}$$

Der Grenzwert des Zählers ist 1, der Grenzwert des Nenners ist 3. Somit liefert die Quotientenregel für Grenzwerte das Ergebnis $a = \frac{1}{3}$.

ii)

$$\begin{aligned}\log_{10}(10n^2 - 2n) - \log_{10}(n^2 + 1) &= \log_{10} \frac{10n^2 - 2n}{n^2 + 1} \\ &= \log_{10} \frac{10 - \frac{2}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}}.\end{aligned}$$

Der Grenzwert des Arguments b des Logarithmus-Terms liefert

$$b = \lim_{n\to\infty} \frac{10 - \frac{2}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}} = 10.$$

Aufgrund der Stetigkeit der Logarithmus-Funktionen innerhalb ihres Definitionsbereichs auf $x > 0$, berechnet sich der Grenzwert zu

$$a = \lim_{n\to\infty} \log_{10} b_n = \log_{10} b = 1.$$

iii) Umformung des Bruchausdrucks liefert

$$\frac{(n+1)!}{n!-(n+1)!} = \frac{(n+1)n!}{n!-(n+1)n!} = \frac{(n+1)}{-n} = -(1+\frac{1}{n}).$$

Unter Verwendung der Summenregel ergibt sich der Grenzwert

$$a = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!-(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} -(1+\frac{1}{n}) = -1.$$

iv) Es gilt

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n} = \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{3}$$

Der Grenzwert der Folge $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ ist genau die Eulersche Zahl e.

$$b = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = \mathrm{e}\,.$$

Die Produktregel liefert dann

$$\lim_{n\to\infty} b_n^3 = \lim_{n\to\infty} b_n \lim_{n\to\infty} b_n \lim_{n\to\infty} b_n = b^3 = \mathrm{e}^3\,.$$

Alternativ kann auch die Stetigkeit der Funktion x^3 ausgenutzt werden, um das Ergebnis zu erhalten.

v) Die Folge

$$a_n = \frac{\cos n}{n}$$

kann als Produkt $a_n = b_n c_n$ einer beschränkten Teilfolgen $b_n = \cos n \neq 0$ und einer Nullfolge $c_n = \frac{1}{n}$ aufgefasst werden. Entsprechend ist deren Produkt ebenfalls eine Nullfolge und der Grenzwert ist $a = 0$.

vi) Es gilt

$$\begin{aligned}\sqrt{n+1}-\sqrt{n} &= \frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{\frac{1}{n}}}.\end{aligned}$$

Unter Verwendung der Produkt und Additionsregel erhalten wir den Grenzwert $a = 0$.

vii) Die Folge $a_n = \dfrac{2^n}{n!}$ kann für $n > 3$ nach oben und unten beschränkt werden

$$0 \leq \frac{2^n}{n!} = \frac{\overbrace{2\cdot 2\cdot 2\ldots 2}^{n}}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n} \leq \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{2}\cdot\underbrace{\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{4}\cdots\frac{2}{n-1}}_{\leq 1}\cdot\frac{2}{n} \leq \frac{4}{n}.$$

Da die Folge von oben und unten durch zwei Nullfolge beschränkt ist, erhält man mit dem Einschließungssatz den Grenzwert $a = 0$.

Aufgabe 2.2: Folgenkonvergenz

Untersuchen Sie die nachfolgenden Folgen auf Konvergenz und bestimmten Sie, wenn möglich, den Grenzwert:

$$a_n = \frac{2n^2+3n}{2n^2+7} \qquad b_n = \frac{2n^3-2}{5n^2-1}$$

$$c_n = \frac{2n^2+7n+(-1)^n}{5n+2} - \frac{2n^3-2}{5n^2-1}, \qquad d_n = \left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$$

$$e_n = n\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}\right) \qquad f_n = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \text{ (mit ganzzahligem } x)$$

$$g_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n+1}$$

Hinweise:
- Setzen Sie voraus, dass f_n konvergiert und ermitteln Sie den Grenzwert.
- Benutzen Sie zur Untersuchung von g_n das Ergebnis für f_n.

Lösung 2.2:

a) Der Bruch wird zunächst mit dem Kehrwert der höchsten auftretenden n-Potenz ($1/n^2$) erweitert:

$$a_n = \frac{2+\frac{3}{n}}{2+\frac{7}{n^2}}$$

Die beiden Ausdrücke $\frac{3}{n}$ und $\frac{7}{n^2}$, die noch von n abhängen, konvergieren beide gegen Null, damit konvergieren Zähler und Nenner jeweils gegen 2 und man hat insgesamt:

$$a_n = \frac{2+\frac{3}{n}}{2+\frac{7}{n^2}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{2+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n}}{2+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{7}{n^2}} = \frac{2+0}{2+0} = 1.$$

b) Da die n-Potenz des Zählers größer als die des Nenners ist, nehmen wir an, dass b_n divergiert. Um dies zu zeigen, schätzen wir ab:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2n^3-2}{5n^2-1} = \frac{\frac{2}{5}(5n^2-1)n+\frac{2}{5}\cdot n-2}{5n^2-1} = \frac{2}{5}n + \underbrace{\frac{2n-10}{25n^2-5}}_{\geq 0 \text{ für } n\geq 5} \\ &\geq \frac{2}{5}n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty \end{aligned}$$

Also ist b_n größer als die divergente Folge $\frac{2}{5}n$ und divergiert ebenfalls.

c) Der Ausdruck für c_n wird zunächst auf einen Bruchstrich gebracht und dann mit dem Kehrwert der höchsten n-Potenz ($1/n^3$) erweitert:

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{(2n^2+7n+(-1)^n)(5n^2-1)-(2n^3-2)(5n+2)}{(5n+2)(5n^2-1)} \\ &= \frac{31n^3+(5\cdot(-1)^n-2)n^2+3n-(-1)^n+4}{25n^3+10n^2-5n-2} \\ &= \frac{31+\frac{5\cdot(-1)^n-2}{n}+\frac{3}{n^2}+\frac{4-(-1)^n}{n^3}}{25+\frac{10}{n}-\frac{5}{n^2}-\frac{2}{n^3}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{31}{25} \end{aligned}$$

Alle Ausdrücke, die noch von n abhängen, haben die Form $\frac{z}{n^l}$, wobei z entweder konstant oder zumindest beschränkt ist, deswegen konvergieren diese Ausdrücke z/n^l gegen Null.
Bringt man beide Ausdrücke nicht auf einen Hauptnenner, kann man nichts weiter über die Konvergenzeigenschaften sagen, da die einzelnen Brüche divergieren. (siehe b_n)

d) Wir zeigen, dass d_n durch eine divergente Folge nach unten abgeschätzt werden kann und folgern die Divergenz von d_n: Für $n \geq 2$ gilt

$$\begin{aligned} d_n &= \left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n = \left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 \cdot \left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n-2} \\ &= \left(1+\frac{2}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n-3} \\ &= \left(1+\frac{2}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{2}{n}+\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n-3} \\ &= \left(1+\frac{3}{\sqrt{n}}+\ldots\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n-3} \\ &\geq 1+\frac{n}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

Die Ungleichung gilt, da die wegfallenden Summanden auf jeden Fall positiv sind, also kann man abschätzen:

$$d_n \geq 1+\frac{n}{\sqrt{n}} = 1+\sqrt{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

Damit muss auch für d_n gelten $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = \infty$.

e) Wir erweitern den Ausdruck für die Folge e_n mit $(\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1})$ um die dritte binomische Formel anzuwenden:

$$\begin{aligned}
e_n =& \frac{n(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1})(\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1})}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}} = \frac{n(\sqrt{n^2+1}^2-\sqrt{n^2-1}^2)}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}}\\
=& \frac{n(n^2+1-n^2+1)}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}} = \frac{2n}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}}
\end{aligned}$$

Erweitern mit dem Kehrwert der höchsten n-Potenz $\frac{1}{n}$ liefert nun

$$e_n = \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{2}{1+1} = 1.$$

f) Im ersten Schritt werden nur $x > 0$ zugelassen.
Der Vollständigkeit halber überprüfen wir zunächst als Ergänzung der Aufgabenstellung, dass die Folge f_n konvergiert, dies geschieht in zwei Schritten und unter Nutzung der Bernoulli-Ungleichung

$$(1+y)^m \geq 1+my \qquad \text{für } m \in \mathbb{N} \text{ und } y \geq -1$$

i) Die Folge f_n steigt monoton:

$$\begin{aligned}
\frac{f_{n+1}}{f_n} =& \frac{\left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n} = \left(\frac{1+\frac{x}{n+1}}{1+\frac{x}{n}}\right)^{n+1}\left(1+\frac{x}{n}\right)\\
=& \left(1+\frac{-\frac{x}{n}+\frac{x}{n+1}}{1+\frac{x}{n}}\right)^{n+1}\left(1+\frac{x}{n}\right) = \left(1+\frac{-x}{(n+x)(n+1)}\right)^{n+1}\cdot\frac{n+x}{n}\\
\geq& \left(1+(n+1)\cdot\frac{-x}{(n+x)(n+1)}\right)\cdot\frac{n+x}{n} \qquad \text{(Bernoulli-Ungleichung)}\\
=& \frac{n+x-x}{n+x}\cdot\frac{n+x}{n} = 1\\
\Rightarrow \quad f_{n+1} \geq& f_n
\end{aligned}$$

ii) Die Folge f_n ist beschränkt:
Wegen der Monotonie muss lediglich gezeigt werden, dass f_n eine obere Schranke besitzt:

$$\begin{aligned}
1+\frac{x}{n} <& 1+\frac{2x}{n}\\
\leq& \left(1+\frac{1}{n}\right)^{2x} \qquad \text{(Bernoulli-Ungleichung)}\\
\Rightarrow \quad \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \leq& \left(1+\frac{1}{n}\right)^{2x\cdot n}\\
=& \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{2x} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^{2x}
\end{aligned}$$

Damit ist f_n begrenzt durch eine konvergente Folge und somit selbst auch beschränkt.

Als beschränkte, monotone Folge muss f_n auch konvergieren.

Für $x > 0$ lässt sich f_n umformen zu

$$f_n = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \left(\left(1+\frac{1}{n/x}\right)^{n/x}\right)^x$$

f_n hat mit $n_k = k\cdot x$ die konvergente Teilfolge

$$f_{n_k} = \left(\left(1+\frac{1}{k\cdot x/x}\right)^{kx/x}\right)^x = \left(\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\right)^x \xrightarrow[k\to\infty]{} e^x.$$

Wenn also f_n konvergiert muss der Grenzwert mit dem der Teilfolge übereinstimmen und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} f_n = e^x.$$

Der Fall negativer $x < 0$ lässt sich mit Hilfe des Falls $x > 0$ behandeln: Wir untersuchen dazu mit $y = -x > 0$ die Folge

$$h_n := f_n\cdot\left(1+\frac{y}{n}\right)^n = \left(\left(1-\frac{y}{n}\right)\left(1+\frac{y}{n}\right)\right)^n = \left(1-\frac{y^2}{n^2}\right)^n.$$

Es gilt einerseits $h_n < 1$. Andererseits liefert die Bernoulli-Ungleichung zumindest für $n > y$:

$$h_n \geq 1-n\cdot\frac{y^2}{n^2} = 1-\frac{y^2}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1.$$

Wegen dieser beiden Ungleichungen muss h_n konvergieren:

$$\lim_{n\to\infty} h_n = 1.$$

Nach Definition von h_n ist

$$f_n = \frac{h_n}{\left(1+\frac{y}{n}\right)^n}.$$

Zähler und Nenner dieses Ausdruckes konvergieren und somit konvergiert auch f_n:

$$\lim_{n\to\infty} f_n = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} h_n}{\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{y}{n}\right)^n} = \frac{1}{\mathrm{e}^y} = \mathrm{e}^{-y} = \mathrm{e}^x.$$

Für $x = 0$ hat man ohnehin

$$\lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} 1^n = 1 = \mathrm{e}^0.$$

Es gilt also für alle $x \in \mathbb{Z}$:

$$\lim_{n\to\infty} f_n = \mathrm{e}^x.$$

g) Es ist

$$g_n = \left(\frac{n+1-2}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{-2}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Also ist $g_n = f_{n+1}$ mit $x = -2$ und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} g_n = \lim_{n\to\infty} f_n = \mathrm{e}^{-2}.$$

Aufgabe 2.3: Ableitungen

Berechnen Sie die erste Ableitung der folgenden Funktionen

a) $f(x) = x^x$

b) $g(x) = x^{3^x}$

c) $h(x) = x^{\cos(x)}$

Lösung 2.3:

Wir nutzen die folgende Identität:

$$a^b = \mathrm{e}^{b\ln(a)}\,.$$

a) Wir schreiben zunächst:
$f(x) = \mathrm{e}^{x\ln(x)}$
Mit der Ketten- und der Produktregel erhalten wir die Ableitung
$f'(x) = x^x\left(\ln(x) + 1\right)$

b) Wir schreiben $g(x)$ als:
$g(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{x\ln(3)}\ln(x)}$
Mit der Ketten- und der Produktregel erhalten wir die Ableitung
$g'(x) = x^{3^x}\left(\ln(3)\,3^x\ln(x) + \frac{3^x}{x}\right)$

c) Wir schreiben $h(x)$ als:
$h(x) = \mathrm{e}^{\cos(x)\ln(x)}$
Mit der Ketten- und Produktregel erhalten wir die Ableitung
$h'(x) = x^{\cos(x)}\left(\frac{\cos(x)}{x} - \ln(x)\sin(x)\right)$

Aufgabe 2.4: Differenzieren

Bestimmen Sie jeweils die erste Ableitung. (Eventuell notwendige Beschränkungen des Definitionsgebietes sind nicht angegeben.)

$$f_{11}(t) = t^2\, \mathrm{e}^{-2t}\, \sin(3t), \qquad f_{12}(t) = \sqrt{t}\, \mathrm{e}^{2t},$$
$$f_{13}(t) = \sin^3\left(\mathrm{e}^{2t^2} + t^5\right), \qquad f_{14}(t) = \sqrt{2\,t^2 + 1},$$
$$f_{15}(t) = \ln(t) - \ln(5t), \qquad f_{16}(t) = \ln(t^2) - \ln(t^5).$$

Lösung 2.4:

$$\begin{aligned}
f'_{11}(t) =& 2t\mathrm{e}^{-2t} \sin(3t) + t^2(-2\mathrm{e}^{-2t}) \sin(3t) + t^2\mathrm{e}^{-2t} \cdot 3\cos(3t) \\
=& t\mathrm{e}^{-2t}\big(2(1-t)\sin(3t) + 3t\cos(3t)\big) \\
f'_{12}(t) =& \frac{1}{2\sqrt{t}}\mathrm{e}^{2t} + \sqrt{t} \cdot 2\mathrm{e}^{2t} = \frac{1+4t}{2\sqrt{t}}\mathrm{e}^{2t} \\
f'_{13}(t) =& 3\sin^2\left(\mathrm{e}^{2t^2} + t^5\right) \cdot \cos\left(\mathrm{e}^{2t^2} + t^5\right) \cdot \left(4t\mathrm{e}^{2t^2} + 5t^4\right) \\
f'_{14}(t) =& \frac{4t}{2\sqrt{2t^2+1}} \\
f'_{15}(t) =& \frac{1}{t} - \frac{5}{5t} = 0 \\
f'_{16}(t) =& \frac{d}{dt}(\ln(t^2) - \ln(t^5)) = \frac{d}{dt}(2\ln t - 5\ln t) = \frac{-3}{t}
\end{aligned}$$

Aufgabe 2.5: Differenzieren

Bestimmen Sie die n–te Ableitung folgender Funktionen.

$$\begin{aligned} f_{21}(t) &= \sin(3t), & f_{22}(t) &= t\,\mathrm{e}^{2t} \\ f_{23}(t) &= t \cdot \cos(t), & f_{24}(t) &= t\,\ln(2t) \end{aligned}$$

Lösung 2.5:

i) Jedes Ableiten der Funktion f_{21} führt wegen der inneren Ableitung aus der Kettenregel zu einem Faktor 3. Außerdem ergibt jedes zweite Ableiten der äußeren Funktion (immer die Ableitung einer cos-Funktion) einen weiteren Faktor (-1). Die äußere Funktion wird nach gradzahligem Ableiten zu einem Sinus, bei ungradzahligen Ableitungen zu einem Kosinus. Insgesamt ergibt sich also:

$$f_{21}^{(n)}(t) = \begin{cases} 3^n \sin(3t) & \text{für } n = 4k+0\,(k \in \mathbb{N}_0) \\ 3^n \cos(3t) & \text{für } n = 4k+1\,(k \in \mathbb{N}_0) \\ -3^n \sin(3t) & \text{für } n = 4k+2\,(k \in \mathbb{N}_0) \\ -3^n \cos(3t) & \text{für } n = 4k+3\,(k \in \mathbb{N}_0) \end{cases}$$

ii) Die erste Ableitung von f_{22} ist

$$f_{22}'(t) = \mathrm{e}^{2t} + 2t\mathrm{e}^{2t} = \mathrm{e}^{2t} + 2f_{22}(t).$$

Setzt man dies sukzessive fort, ergibt sich

$$\begin{aligned} f_{22}^{(n)}(t) &= n \cdot 2^{n-1}\mathrm{e}^{2t} + 2^n f_{22}(t) \\ &= \left(n \cdot 2^{n-1} + 2^n \cdot t\right)\mathrm{e}^{2t} = (n+2t)2^{n-1}\mathrm{e}^{2t} \end{aligned}$$

iii) Die ersten vier Ableitungen von f_{23} sind:

$$\begin{aligned} f_{23}(t) &= t \cdot \cos(t), & f_{23}'(t) &= \cos(t) - t\sin(t) \\ f_{23}''(t) &= -2\sin(t) - t\cos(t), & f_{23}'''(t) &= -3\cos(t) + t\sin(t), \\ f_{23}^{(4)}(t) &= 4\sin(t) + t\cos(t), & f_{23}^{(5)} &= 5\cos(t) - t\sin(t) \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich für $n \geq 1$:

$$f_{23}^{(n)} = \begin{cases} +n\cos(t) - t\sin(t) & \text{für } n = 4k+1\,(k \in \mathbb{N}_0) \\ -n\sin(t) - t\cos(t) & \text{für } n = 4k+2\,(k \in \mathbb{N}_0) \\ -n\cos(t) + t\sin(t) & \text{für } n = 4k+3\,(k \in \mathbb{N}_0) \\ +n\sin(t) + t\cos(t) & \text{für } n = 4k+4\,(k \in \mathbb{N}_0) \end{cases}.$$

iv) Die ersten beiden Ableitungen von f_{24} sind

$$\begin{aligned} f_{24}'(t) &= \ln(2t) + t \cdot \frac{2}{2t} = \ln(2t) + 1 \\ f_{24}''(t) &= \frac{1}{t}. \end{aligned}$$

Alle weiteren Ableitungen $(n = 2, 3, \ldots)$ ergeben sich zu

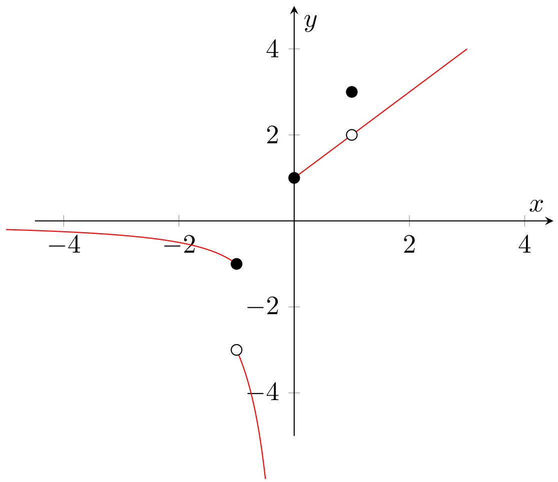
$$f_{24}^{(n)}(t) = (-1) \cdot (-2) \cdot \ldots \cdot (-(n-2))t^{-(n-1)} = (-1)^n(n-2)!t^{-(n-1)}.$$

Aufgabe 2.6: Stetigkeit

Betrachten Sie die Funktion $y = f(x)$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{für } x \in (-\infty, -1], \\ \frac{3}{x} & \text{für } x \in (-1, 0), \\ \frac{x^2-1}{x-1} & \text{für } x \in [0, 1) \cup (1, \infty), \\ 3 & \text{für } x = 1. \end{cases}$$

und deren Graphen



a) Finden Sie alle Werte an denen die Funktion unstetig ist.

b) Begründen Sie für jeden dieser Werte, weshalb die formale Definition der Stetigkeit verletzt ist.

c) Klassifizieren Sie jede der Untetigkeitsstellen als **Sprungstelle**, **hebbare Unstetigkeit** oder **Polstelle**.

Lösung 2.6:

Die Funktion ist unstetig bei

i) $x = -1$,

ii) $x = 0$,

iii) $x = 1$.

i) Die Funktion ist unstetig für $x = -1$. Diese Unstetigkeit entspricht einer Sprungstelle, da die links- und rechtsseitigen Grenzwerte existieren (sprich, auf einen endlichen Wert konvergieren), diese aber nicht übereinstimmen:

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} \frac{1}{x} = -1,$$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \frac{3}{x} = -3.$$

ii) Die Funktion ist unstetig bei $x = 0$. Dies ist eine Polstelle, da der linksseitiger Grenzwert nicht existiert.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{3}{x} = -\infty,$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 0^+} x + 1 = 1.$$

iii) Die Unstetigkeit bei $x = 1$ ist hebbar, da deren links- und rechtsseitige Grenzwerte existieren und übereinstimmen

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} x + 1 = 2,$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} x + 1 = 2,$$

jedoch vom Funktionswert $f(1) = 3$ an der Stelle abweichen.