

Mathematik II/B (WI/ET)

Blatt 1

WT 2025

Grenzwerte, Folgen, Stetigkeit

---

Einführende Bemerkungen

- Vermeiden Sie die Verwendung von Taschenrechnern oder Online-Ressourcen.
- 

**Aufgabe 1.1: Grenzwertdefinition**

Bestimmen Sie zu den unten angegebenen Folgen  $(a_n)$  mit dem Grenzwert  $a$  und den angegebenen Werten für  $k$  jeweils ein  $N$  so, dass für alle  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n > N$  gilt

$$|a_n - a| < 10^{-k}.$$

- a)  $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}, a = 0, k = 2$
- b)  $a_n = \frac{3n+1}{n+1}, a = 3, k = 4$
- c)  $a_n = \frac{(-1)^n}{n!} + 1, a = 1, k = 3$

**Aufgabe 1.2:**

- a) Zeigen Sie anhand der Definition der Konvergenz, dass gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + n - 12}{n^2 - 8} = 2.$$

- b) Zeigen Sie: Konvergiert  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  gegen  $a$ , so konvergiert auch  $\{|a_n|\}_{n \in \mathbb{N}}$  gegen  $|a|$ .
- c) Gilt die Umkehrung von b)? Begründen Sie Ihre Aussage mit einem Beweis oder einem Gegenbeispiel.

**Aufgabe 1.3: Grenzwerte monotoner Folgen**

Es seien  $a_1 = \sqrt{2}$  und  $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$  für  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Zeigen Sie,

- a) dass  $(a_n)$  beschränkt ist,
- b) dass  $(a_n)$  monoton wächst und
- c) gegen die größte Lösung der Gleichung  $x^2 - x - 2 = 0$  konvergiert.

**Aufgabe 1.4: Funktionenlimes**

- a) Gegeben sei die Funktion

$$f(x) := \frac{x^3 + |x+1| + \operatorname{sign}(x+1)}{\operatorname{sign} x}, \quad x \in D(f) := \mathbb{R}.$$

Bestimmen Sie  $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0-} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow (-1)+} f(x)$  und  $\lim_{x \rightarrow (-1)-} f(x)$ .

- b) Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \frac{\sinh x}{\cosh(ax)}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Bestimmen Sie  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$ .

**Hinweise:**

- Mit der zunächst als bekannt vorausgesetzten Exponentialfunktion  $e^x$  gilt

$$\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{und} \quad \cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

- Die Signum-Funktion liefert das Vorzeichen des Argumentes:

$$\operatorname{sign}(z) = \begin{cases} +1 & , z \geq 0 \\ -1 & , z < 0 \end{cases}$$

### Aufgabe 1.5: Grenzwert Analyse - Definition

- a) Notieren Sie die Definition des Grenzwertes und zeigen Sie, dass die Folge  $a_n = \frac{1}{n}$  gegen den Grenzwert  $a = 0$  konvergiert.  
(Dies ist gleichbedeutend mit dem Nachweis, dass  $\forall k \in \mathbb{N}$  eine Zahl  $N \in \mathbb{R}$  existiert, so dass für alle  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n > N$  gilt:  $|a_n - a| < 10^{-k}$ ).
- b) Berechnen Sie den Grenzwert  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  der untenstehenden Folgen und dokumentieren Sie die Rechenregel, die Sie zur Berechnung des Grenzwertes verwendet haben (Produktregel, Einschließungssatz, Produkt beschränkter Folgen, Produkt von Nullfolgen etc).

i)  $a_n = \frac{n^2 + 5n}{3n^2 + 1}$       ii)  $a_n = \log_{10}(10n^2 - 2n) - \log_{10}(n^2 + 1)$

iii)  $a_n = \frac{(n+1)!}{n! - (n+1)!}$       iv)  $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3n}$

v)  $a_n = \frac{\cos n}{n}$       vi)  $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

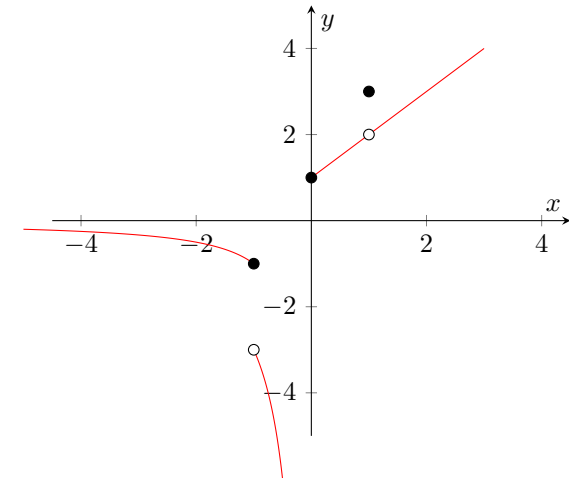
vii)  $a_n = \frac{2^n}{n!}$

### Aufgabe 1.6: Stetigkeit

Betrachten Sie die Funktion  $y = f(x)$  mit

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{für } x \in (-\infty, -1], \\ \frac{3}{x} & \text{für } x \in (-1, 0), \\ \frac{x^2-1}{x-1} & \text{für } x \in [0, 1) \cup (1, \infty), \\ 3 & \text{für } x = 1. \end{cases}$$

und deren Graphen



- a) Finden Sie alle Werte an denen die Funktion unstetig ist.
- b) Begründen Sie für jeden dieser Werte, weshalb die formale Definition der Stetigkeit verletzt ist.
- c) Klassifizieren Sie jede der Unstetigkeitsstellen als **Sprungstelle**, **hebbare Unstetigkeit** oder **Polstelle**.

---

### Ergebnisse zu Aufgabe 1.1:

a)  $N = 10000$ , b)  $N = 19999$ , c)  $N = 6$

### Ergebnisse zu Aufgabe 1.2:

c) Betrachten Sie  $a_n = (-1)^n$ .

**Ergebnisse zu Aufgabe 1.3:**

a)/b) Es ist z. B.  $0 < a_n \leq 2$ .

**Ergebnisse zu Aufgabe 1.4:**

a)  $\lim_{x \rightarrow 0 \pm} f(x) = \pm 2, \quad \lim_{x \rightarrow -1 \pm} f(x) = 1 \pm (-1)$

b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \begin{cases} 0, & |a| > 1 \\ 1, & |a| = 1 \\ \infty, & |a| < 1 \end{cases}$

**Ergebnisse zu Aufgabe 1.5:**

b)

i)  $a = \frac{1}{3}$

ii)  $a = 1$

iii)  $a = -1$

iv)  $a = e^3$

v)  $a = 0$

vi)  $a = 0$

vii)  $a = 0$

### **Temporary page!**

L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X was unable to guess the total number of pages correctly. As there was some unprocessed data that should have been added to the final page this extra page has been added to receive it.

If you rerun the document (without altering it) this surplus page will go away, because L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X now knows how many pages to expect for this document.