Helmut-Schmidt-Universität
Universität der Bundeswehr Hamburg
Fakultät für Maschinenbau

Prof. Dr. Thomas Carraro
Dr. Frank Gimbel

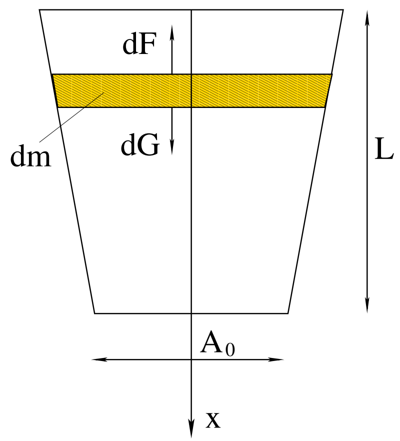
ISA: Ing. Studienkompetenzen — Blatt 3

WT 2022

Aufgabe 3.1: Dimensionierung eines Zugstabes

Die Querschnittsfläche eines Zugstabes soll dimensioniert werden. Diese soll als positionsabhängige Funktion $A(x)$ bestimmt werden, siehe Abbildung.
Der Zugstab ist am oberen Ende fixiert und am unteren Ende mit einer konstanten Kraft $F_0\,[N]$ belastet.
Wie muss die Querschnittsfläche $A, [m^2]$ in Abhängigkeit von der Koordinate $x, [m]$ gewählt werden, damit die Zugspannung $\sigma\,[Pa]$ an jeder Schnittstelle den gleichen Wert $\sigma_c\,[Pa]$ hat?

- $L = 10\,[cm]$: Länge des Zugstabes,
- $A_0 = 0.002\,[m^2]$: Querschnittsfläche am unteren Ende,
- $\rho = 7.85\,[g/cm^3]$: Dichte des Zugstabes als Funktion der Position x,
- $g = 9.81\,[m/s^2]$: Gravitationsbeschleunigung,
- $F_0 = 15\,[N]$: Konstante Belastung.



Lösungsansatz:

Auf das gelbe Massenelement in der Abbildung $\mathrm{d}m = \rho \mathrm{d}V = \rho A \mathrm{d}x$ wirken die folgenden Kraftelemente ein

- Zugkraft: $\mathrm{d}F = \mathrm{d}(\sigma(x)\mathrm{d}A) = \sigma_c \mathrm{d}A$, die über das Flächenelement $\mathrm{d}A$ mit einer konstanten Zugspannung σ_c wirkt,
- Gewichtskraft: $\mathrm{d}G = \rho g A \mathrm{d}x$, die über das Volumenelement $\mathrm{d}V = A\mathrm{d}x$ wirkt.

Die Terme $\mathrm{d}F$, $\mathrm{d}A$ und $\mathrm{d}x$ heißen Differentiale. Das Massenelement befindet sich im Gleichgewicht, wenn die Zugkraft die Gewichtskraft in ihrer Wirkung ausgleicht. Somit gilt

$$\mathrm{d}F + \mathrm{d}G = 0,$$

oder

$$\sigma_c \mathrm{d}A + \rho g A \mathrm{d}x = 0,$$

Wir schreiben die Gleichung so um, dass die Variablen, A und x, und ihre Differentiale getrennt sind

$$\frac{\mathrm{d}A}{A} = -\frac{\rho g}{\sigma_c}\mathrm{d}x.$$

und integrieren beide Seiten.

Hinweis: Man beachte die Einheiten!

Aufgabe 3.2: Dimensionierung eines Behälters

Ein oben offener Behälter mit rechteckigem Querschnitt soll ein Fassungsvermögen von $10\,m^3$ haben und aus dünnem Blech hergestellt werden. Berechnen Sie die Abmessungen des Behälters, wenn so wenig Metall wie möglich verwendet werden soll.

Ergebnisse zu Aufgabe 3.2:

$A(x) = A_0\, \mathrm{e}^{\frac{g}{\sigma_c}\rho(L-x)}$.
$A(x) = 0.002\, \mathrm{e}^{10.27\,(0.1-x)} \quad [m^2]$.

Ergebnisse zu Aufgabe 3.2:

Der Behälter hat eine Länge von 2.714 m, eine Breite von 2.714 m und eine Höhe von 1.357 m. Die tatsächliche Fläche des verwendeten Metalls beträgt dann 22.1 m^2.