Helmut-Schmidt-Universität
Universität der Bundeswehr Hamburg
Fakultät für Maschinenbau

Prof. Dr. Thomas Carraro
Dr. Frank Gimbel
Janna Puderbach

Mathematik III **Blatt 8**

FT 2022 Integration, Laplacetransformation

Einführende Bemerkungen

- Vermeiden Sie die Verwendung von Taschenrechnern oder Online-Ressourcen.
- Die mit einem Stern *) markierten (Teil-)Aufgaben entfallen in diesem Trimester. Stattdessen werden einzelne Online-Aufgaben im ILIAS-Kurs kenntlich gemacht, zu denen Sie dort Ihre Lösungswege zur Korrektur hochladen können.
- Die mit zwei Sternen **) markierten (Teil-)Aufgaben richten sich an Studierende, die die übrigen Aufgaben bereits gelöst haben und die Inhalte weiter vertiefen möchten.

Aufgabe 8.1: δ–Distribution

Bestimmen Sie die folgenden Integrale:

i) $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{1+x^2} \cdot \delta\,(x-\pi)\ \mathrm{d}x\,.$$ **ii)** $$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(x) \cdot \delta\,(x-\pi)\ \mathrm{d}x\,.$$

Aufgabe 8.2: AWP und δ–Distribution

Ein mechanisches Pendel werde durch das folgende Anfangswertproblem beschrieben

$$u''(t) + 2\,u'(t) + 5\,u(t) = f(t)\ , \quad u(0) = 2\ , \quad u'(0) = -2\ .$$

$u''(t)$ steht nach dem zweiten Newtonschen Gesetz für die Beschleunigung einer Masse. Der Term $5u(t)$ modelliert ein repulsives Potential (Federkraft) und der Term $2u'(t)$ die Dämpfung des Systems. Das Pendel befindet sich zum Zeitpunkt $t = 0$ am Ort $u(0) = 2$ und hat die Geschwindigkeit $u'(0) = -2$.

a) Bestimmen Sie mit Hilfe der Laplace–Transformation die Lösung des AWPs für $f(t) = 0$, $t > 0$. (Es wirken keine äußeren Kräfte.)

b) Bestimmen Sie den Zeitpunkt t_0 des ersten Nulldurchgangs, d.h. $u(t_0) = 0$, der Lösung aus Teil a).

c) Zum Zeitpunkt t_0 aus Teil b) wird ein δ–Impuls $f(t) = \alpha \cdot \delta(t - t_0)$ so auf das System ausgeübt, dass das System anschließend in Ruhe ist.
Dies modelliert ein starres Hindernis, auf welches das Pendel (nicht elastisch) aufprallt, so dass die Bewegung sofort endet.
Wie groß muss die Impulsstärke α sein?

Aufgabe 8.3: Balkenbiegung

Ein homogener Balken (E, J konstant) der Länge $L = 3$ möge an beiden Enden gelenkig gelagert sein. Bei 2/3 der Länge greife eine punktförmige Last F an. Berechnen Sie die Lage des tiefsten Punktes des Balkens, wobei sein Eigengewicht vernachlässigt werden darf.
Das Materialgesetz des Balkens wird als

$$EJ \cdot w''''(x) = -F \cdot \delta(x - l) \qquad (\text{mit } l = \frac{2}{3}L)$$

angenommen.
Hinweise: EJ bezeichnet die Biegesteifigkeit des Balkens. Zur Vereinfachung können Sie annehmen $EJ = 1$.
Ebenson können Sie $F = 1$ setzen. Gehen Sie in den folgenden Schritten vor:

a) Ermitteln Sie die Lösung $w_H(x)$ der homogenen Differentialgleichung.

b) Bestimmen Sie eine spezielle Lösung $w_P(x)$ (bzw. $W_P(s)$) der inhomogenen Differentialgleichung, indem Sie die Laplace-Transformation nutzen, wobei Sie von homogenen Anfangswerten ausgehen können.

c) Bestimmen Sie die Integrationskonstanten der allgemeinen Lösung der inhomogenen Gleichung $w(x) = w_H(x) + w_P(x)$ aus den Randbedingungen

$$w(0) = w(L) = 0 \qquad \text{und} \qquad w''(0) = w''(L) = 0.$$

d) Berechnen Sie den Extremwert der so erhaltenen Funktion.

Aufgabe 8.4:

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$u''(t) - 2u'(t) + u(t) = \cos(t) \cdot h(t-\pi)$$

mit $u(0) = 0$ und $u'(0) = 0$. Dabei ist $h(t)$ die Heaviside-Funktion.

a) Zeigen Sie, dass die Lösung des Anfangswertproblems im Bildbereich der Laplace-Transformation die folgende Gestalt hat:

$$U(s) = -\frac{s\,\mathrm{e}^{-s\pi}}{(1+s^2)(s-1)^2}$$

b) Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung $u(t)$ im Urbildbereich.

Aufgabe 8.5:

a) Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$u''(x) - 16u(x) = 16x \qquad \text{mit} \qquad u(0) = 1,\ u'(0) = 4.$$

i) Überführen Sie diese gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung in ein System aus zwei Differentialgleichungen erster Ordnung,

$$\boldsymbol{y}'(x) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}(x) + \boldsymbol{g}(x), \qquad \text{mit} \qquad \boldsymbol{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}.$$

Geben Sie hierfür auch die Anfangsbedingung an.

ii) Bestimmen Sie die Lösung $\boldsymbol{y}(x)$ dieses Anfangswertproblems.

iii) Bestimmen Sie daraus die Lösung $u(x)$ der ursprünglichen Anfangswertaufgabe.

Aufgabe 8.6: Online Aufgabe

Bearbeiten Sie die aktuelle Online-Aufgabe im ILIAS-Kurs.
Beachten Sie, dass Sie dort auch die Lösungswege zu einzelnen Aufgaben zur Korrektur hochladen können.

Ergebnisse zu Aufgabe 8.1:

i) $\dfrac{-1}{1+\pi^2}$, ii) 0.

Ergebnisse zu Aufgabe 8.2:

a) $u_{\text{AWP}}(t) = 2\,\mathrm{e}^{-t} \cdot \cos(2t)$, **b)** $t_0 = \pi/4$, **c)** $\alpha = 4\,\mathrm{e}^{-\pi/4}$.

Ergebnisse zu Aufgabe 8.3:

$w_P(x) = -\frac{F}{6EJ}(x-l)^3 \cdot h(x-l)$, $x_{\min} = \sqrt{\frac{8}{27}}L$