Helmut-Schmidt-Universität
Universität der Bundeswehr Hamburg
Fakultät für Maschinenbau und Bauingenieurwesen
Prof. Dr. Thomas Carraro

HELMUT SCHMIDT UNIVERSITÄT
Universität der Bundeswehr Hamburg

Mathematik II/B (WI/ET) — Zusatzblatt

WT 2025 — Taylor-Entwicklung

Aufgabe 1

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \ln(1+x),$$

a) Bestimmen Sie das Taylor-Polynom 3. Ordnung $T_3(x)$ von $f(x)$ um den Punkt $x_0 = 0$.

b) Geben Sie das Restglied $R_3(x;0)$ an.

c) Schätzen Sie das Restglied für $|x| < \frac{1}{2}$ ab.

Lösung:

a) Die Taylor-Entwicklung von $f(x)$ um $x_0 = 0$ ist:

$$T_3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 \cdots$$

$$\begin{aligned}
f(0) &= 0 \\
f'(x) &= \frac{1}{x+1} \quad \Rightarrow \quad f'(0) = 1 \\
f''(x) &= -\frac{1}{(x+1)^2} \quad \Rightarrow \quad f''(0) = -1 \\
f'''(x) &= \frac{2}{(x+1)^3} \quad \Rightarrow \quad f'''(0) = 2
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich das Taylor-Polynom zu

$$T_3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 \qquad = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3.$$

b) Das Restglied wird wie folgt bestimmt:

$$R_3(x;0) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}x^4,$$

wobei $-\frac{1}{2} \leq \xi \leq \frac{1}{2}$ gilt.

$$f^{(4)}(x) = -\frac{6}{(x+1)^4}.$$

Das Restglied wird damit

$$R_3(x;0) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}x^4 = -\frac{1}{4(\xi+1)^4}x^4.$$

c) Für $|x| < \frac{1}{2}$ ergibt sich $-\frac{1}{2} \leq \xi \leq \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned}
|R_3(x;0)| &= \left|-\frac{1}{4(\xi+1)^4}x^4\right| = \frac{1}{4}\frac{1}{(\xi+1)^4}x^4 \leq \frac{1}{4}\frac{1}{(-\frac{1}{2}+1)^4}\left(\frac{1}{2}\right)^4 \\
&= \frac{1}{4}\frac{1}{(1/2)^4}\frac{1}{16} = \frac{1}{4}\cdot 16 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

D.h.

$$|R_3(x;0)| \leq \frac{1}{4}.$$

Aufgabe 2

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = e^{-2x}.$$

a) Bestimmen Sie das Taylor-Polynom 3. Ordnung $T_3(x)$ von $f(x)$ um den Punkt $x_0 = 0$.

b) Geben Sie das Restglied $R_3(x;0)$ an.

c) Schätzen Sie das Restglied für $|x| < \frac{1}{2}$ ab.

Lösung:

a) Die Taylor-Entwicklung von $f(x)$ um $x_0 = 0$ ist:

$$T_3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots$$

Berechnung der Ableitungen:

$$\begin{aligned} f(0) &= 1 \\ f'(x) &= -2e^{-2x} \quad \Rightarrow \quad f'(0) = -2 \\ f''(x) &= 4e^{-2x} \quad \Rightarrow \quad f''(0) = 4 \\ f'''(x) &= -8e^{-2x} \quad \Rightarrow \quad f'''(0) = -8 \end{aligned}$$

Damit ergibt sich das Taylor-Polynom dritter Ordnung:

$$T_3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3$$

$$T_3(x) = 1 - 2x + 2x^2 - \frac{4}{3}x^3.$$

b) Das Restglied wird durch die Lagrange-Formel gegeben:

$$R_3(x;0) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}x^4,$$

Die vierte Ableitung von $f(x)$ ist:

$$f^{(4)}(x) = 16e^{-2x}.$$

Damit folgt für das Restglied:

$$R_3(x;0) = \frac{16e^{-2\xi}}{24}x^4 = \frac{2}{3}e^{-2\xi}x^4.$$

c) Für $|x| < \frac{1}{2}$ setzen wir die obere Schranke für $e^{-2\xi}$:
Da $e^{-2\xi}$ auf $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ maximal ist für $\xi = -\frac{1}{2}$, gilt:

$$e^{-2\xi} \leq e.$$

Damit ergibt sich die Abschätzung:

$$|R_3(x;0)| \leq \frac{2}{3}e \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4.$$

$$= \frac{2}{3}e \cdot \frac{1}{16} = \frac{2e}{48} = \frac{e}{24}.$$

Also:

$$|R_3(x;0)| \leq \frac{e}{24}.$$

Aufgabe 3

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \frac{e^x}{(x+1)^2}.$$

1. Bestimmen Sie das Taylor-Polynom 2. Ordnung $T_2(x)$ von $f(x)$ um den Punkt $x_0 = 0$.
2. Geben Sie das Restglied $R_2(x;0)$ an.
3. Schätzen Sie das Restglied für $|x| < \frac{1}{3}$ ab.

Hinweis: Es ist nicht notwendig, das Restglied optimal abzuschätzen.

Lösung:

1. Die Taylor-Entwicklung von $f(x)$ um $x_0 = 0$ lautet:

$$T_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots$$

Berechnung der Ableitungen:

$$f(0) = \frac{e^0}{(0+1)^2} = 1$$
$$f'(x) = \frac{(x-1)e^x}{(x+1)^3} \quad \Rightarrow \quad f'(0) = -1$$
$$f''(x) = \frac{(x^2-2x+3)e^x}{(x+1)^4} \quad \Rightarrow \quad f''(0) = 3$$

Damit ergibt sich das Taylor-Polynom 2. Ordnung:

$$T_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 = 1 - x + \frac{3}{2}x^2.$$

2. Das Restglied ist gegeben durch:

$$R_2(x;0) = \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}x^3,$$

wobei $-\frac{1}{3} \leq \xi \leq \frac{1}{3}$.

Dritte Ableitung:

$$f'''(x) = \frac{(x^3-3x^2+9x-11)e^x}{(x+1)^5}.$$

3. Abschätzung des Restglieds für $|x| < \frac{1}{3}$:

$$|R_2(x;0)| = \left|\frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}x^3\right| = \left|\frac{(\xi^3-3\xi^2+9\xi-11)e^\xi}{6(\xi+1)^5}x^3\right|.$$

Da $|x| < \frac{1}{3}$, maximieren wir den Bruch für $-\frac{1}{3} \leq \xi \leq \frac{1}{3}$. Eine grobe Abschätzung liefert:

$$|f'''(\xi)| = \left|\frac{(\xi^3-3\xi^2+9\xi-11)e^\xi}{(\xi+1)^5}\right|$$

$$|f'''(\xi)| \leq \frac{\left|\xi^3-3\xi^2+9\xi-11\right| e^\xi}{|(\xi+1)^5|}$$

$$\left|\xi^3-3\xi^2+9\xi-11\right| \leq \left|\xi^3\right| + \left|-3\xi^2\right| + |9\xi| + |-11|$$

Wir wählen $\xi = \frac{1}{3}$:

$$\frac{1}{27} + \frac{1}{3} + 3 + 11 = \frac{388}{27}$$

$$(\xi+1)^5\Big|_{\xi=-\frac{1}{3}} = \left(\frac{-1}{3}+1\right)^5 = \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{32}{243} \approx 0.1317.$$

$$\max_\xi |f'''(\xi)| = \frac{\frac{388}{27}\cdot e^\xi}{(\xi+1)^5} = \frac{\frac{388}{27}\times 1.3956}{1024/243} = 4.76.$$

$$|R_2(x;0)| \leq \frac{4.76}{6}x^3 = 0.79x^3.$$

Daraus ergibt sich die Schranke für das Restglied:

$$|R_2(x;0)| \leq 0.79 \left(\frac{1}{3}\right)^3 .$$

Aufgabe 4

Gegeben sei die Funktion
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}},$$

a) Bestimmen Sie das Taylor-Polynom 2.Ordnung $T_2(x)$ von $f(x)$ um den Punkt $x_0 = 1$.

b) Geben Sie das Restglied $R_2(x;1)$ an.

c) Schätzen Sie das Restglied für $\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$ ab.

Hinweis: Es ist nicht notwendig das Restglied optimal abzuschätzen.

Lösung:

a) Die Taylor-Entwicklung von $f(x)$ um $x_0 = 1$ ist:

$$f(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 \cdots$$

$$f(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{(x^2+1)^3}} \quad \Rightarrow \quad f'(1) = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$
$$f''(x) = \frac{2x^2-1}{\sqrt{(x^2+1)^5}} \quad \Rightarrow \quad f''(1) = \frac{1}{4\sqrt{2}}$$

Damit ergibt sich das Taylor-Polynom zu

$$T_2(x) = f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}(x-1) + \frac{1}{8\sqrt{2}}(x-1)^2.$$

b) Das Restglied wird wie folgt bestimmt:

$$R_2(x;1) = \frac{f'''(\xi)}{3!}(x-1)^3,$$

wobei $\frac{1}{2} \le \xi \le \frac{3}{2}$ gilt.

$$f'''(x) = -\frac{6x^3-9x}{\sqrt{(x^2+1)^7}}.$$

Das Restglied wird damit

$$R_2(x;1) = \frac{f'''(\xi)}{3!}(x-1)^3 = -\frac{2\xi^3-3\xi}{2\sqrt{(\xi^2+1)^7}}(x-1)^3.$$

c) Für $\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$ ergibt sich $\frac{1}{2} \le \xi \le \frac{3}{2}$:

$$\begin{aligned}
|R_2(x;1)| &= \left| -\frac{2\xi^3-3\xi}{2\sqrt{(\xi^2+1)^7}}(x-1)^3 \right| \\
&= \left| -\frac{\xi(2\xi^2-3)}{2\sqrt{(\xi^2+1)^7}}(x-1)^3 \right| \\
&\le \left| -\frac{\frac{3}{2}(2\frac{3}{2}^2-3)}{2\sqrt{(\frac{1}{2}^2+1)^7}}(\frac{3}{2}-1)^3 \right| \\
&= \frac{144}{\sqrt{5^7}}\frac{1}{8} \\
&= \frac{18}{\sqrt{5^7}} \\
&\le \frac{18}{\sqrt{4^7}} \\
&= \frac{18}{2^7} \\
&= \frac{9}{2^6}
\end{aligned}$$

D.h.

$$|R_2(x;1)| \le \frac{9}{2^6}.$$

Aufgabe 5

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \cos(x^2),$$

a) Bestimmen Sie das Taylor-Polynom 3. Ordnung $T_3(x)$ von $f(x)$ um den Punkt $x_0 = 0$.

b) Geben Sie das Restglied $R_3(x; 0)$ an.

c) Schätzen Sie das Restglied für $|x| < \frac{1}{2}$ ab.

Hinweis: Es ist nicht notwendig das Restglied optimal abzuschätzen.

Lösung:

a) Das Taylor-Polynom n-ter Ordnung einer Funktion $f(x)$ um den Punkt x_0 ist gegeben durch:

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

Für $n = 3$ und $x_0 = 0$ lautet das Taylor-Polynom:

$$T_3(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} \cdot x^3$$

Schritt 1: Berechnung der Ableitungen von $f(x) = \cos(x^2)$

1. $f(x) = \cos(x^2)$
2. $f'(x) = -\sin(x^2) \cdot 2x$
3. $f''(x) = -\cos(x^2) \cdot (2x)^2 - \sin(x^2) \cdot 2 = -4x^2 \cos(x^2) - 2\sin(x^2)$
4. $f'''(x) = 8x^3 \sin(x^2) - 12x \cos(x^2)$

Schritt 2: Auswertung der Ableitungen an der Stelle $x_0 = 0$

1. $f(0) = \cos(0) = 1$
2. $f'(0) = -\sin(0) \cdot 0 = 0$
3. $f''(0) = -4 \cdot 0^2 \cos(0) - 2\sin(0) = 0$
4. $f'''(0) = 8 \cdot 0^3 \sin(0) - 12 \cdot 0 \cos(0) = 0$

Schritt 3: Einsetzen in das Taylor-Polynom

$$T_3(x) = 1 + 0 \cdot x + \frac{0}{2!} \cdot x^2 + \frac{0}{3!} \cdot x^3 = 1$$

Das Taylor-Polynom 3. Ordnung von $f(x) = \cos(x^2)$ um $x_0 = 0$ lautet also:

$$T_3(x) = 1$$

b) Abschätzung des Restglieds für $|x| < \frac{1}{2}$

Wir schätzen das Restglied $R_3(x; 0)$ für $|x| < \frac{1}{2}$ ab. Dazu betrachten wir den Betrag des Restglieds:

$$|R_3(x; 0)| = \left| \frac{f^{(4)}(\xi)}{24} x^4 \right|$$

Da $|x| < \frac{1}{2}$, gilt $x^4 < \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$. Um $|f^{(4)}(\xi)|$ abzuschätzen, betrachten wir den maximalen Wert der 4. Ableitung im Intervall $|\xi| < \frac{1}{2}$.

Schritt 1: Abschätzung von $|f^{(4)}(\xi)|$

Für $|\xi| < \frac{1}{2}$:

$$|f^{(4)}(\xi)| = \left|16\xi^4 \cos(\xi^2) + 48\xi^2 \sin(\xi^2) - 12\cos(\xi^2)\right|$$

Da $|\cos(\xi^2)| \leq 1$ und $|\sin(\xi^2)| \leq 1$, gilt:

$$|f^{(4)}(\xi)| \leq 16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot 1 + 48 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 1 + 12 \cdot 1 = 16 \cdot \frac{1}{16} + 48 \cdot \frac{1}{4} + 12 = 1 + 12 + 12 = 25$$

Schritt 2: Abschätzung des Restglieds

$$|R_3(x; 0)| \leq \frac{25}{24} \cdot \frac{1}{16} = \frac{25}{384} \approx 0,0651$$

Für $|x| < \frac{1}{2}$ gilt also:

$$|R_3(x; 0)| \leq \frac{25}{384}$$