

Mathematik III/B (WI/ET)

FT 2024

Blatt 12

Integration

Einführende Bemerkungen

- Vermeiden Sie die Verwendung von Taschenrechnern oder Online-Ressourcen.

Aufgabe 12.1: Frühere Klausuraufgabe

- a) Berechnen Sie die Integrale

$$I = \int_0^{\pi} (\sin x) \cdot e^{2 \cos x} dx \quad \text{und} \quad J = \int_1^2 (t^3 - 2t) e^{3t^2} dt.$$

- b) Berechnen Sie das Integral  $\int_B \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$ , wobei  $B$  der Kreisring in der  $(x, y)$ -Ebene mit Mittelpunkt  $(0, 0)^\top$ , Innenradius  $a$  und Außenradius  $b$  (mit  $0 < a < b$ ) ist.

- c) Berechnen Sie das Integral

$$\iiint_D e^{5z+3y+2x} dx dy dz$$

über dem Gebiet  $D = \left\{ (x, y, z)^\top \mid x, y, z \geq 0 \text{ und } 5z + 3y + 2x \leq 2 \right\}$ .

Lösung 12.1:

- a) Im ersten Integral substituieren wir

$$u(x) = 2 \cos x, \quad du = -2 \sin x dx.$$

Eingesetzt ergibt das

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi} \sin x e^{2 \cos x} dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_{u(0)}^{u(\pi)} e^u du = -\frac{1}{2} [e^u]_{u=2}^{-2} = \frac{e^2 - e^{-2}}{2} = \sinh(2). \end{aligned}$$

Zur Berechnung des zweiten Integrals integrieren wir partiell:

$$\begin{aligned} J &= \int_1^2 \underbrace{(t^2 - 2)}_u \underbrace{te^{3t^2}}_{v'} dt = \left[ \underbrace{(t^2 - 2)}_u \underbrace{\left( \frac{1}{6} e^{3t^2} \right)}_v \right]_1^2 - \int_1^2 \underbrace{2t}_{u'} \underbrace{\frac{1}{6} e^{3t^2}}_v dt \\ &= \frac{1}{3} e^{12} + \frac{1}{6} e^3 - \frac{2}{36} e^{3t^2} \Big|_1^2 = \frac{e^3}{6} (2e^9 + 1) + \frac{1}{18} (e^3 - e^{12}) \\ &= \frac{e^3}{18} (5e^9 + 4). \end{aligned}$$

- b) Es bietet sich eine Berechnung in Polarkoordinaten an:

$$\int_B \sqrt{x^2 + y^2} dx dy = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=a}^b r r dr d\varphi = 2\pi \frac{b^3 - a^3}{3}.$$

- c) Wir integrieren in kartesischen Koordinaten, wobei zu beachten ist, dass die Integrationsgrenzen für  $z$  von  $x$  und  $y$  abhängen und die für  $y$  von  $x$ . Deswegen ist die Integrationsreihenfolge – nachdem sie einmal gewählt wurde – festgelegt. Die

oberen Integrationsgrenzen resultieren aus der Ebenengleichung  $2x + 3y + 5z = 2$ :

$$\begin{aligned}
 \int_D e^{5z+3y+2x} d(x, y, z) &= \int_{x=0}^1 e^{2x} \int_{y=0}^{\frac{2-2x}{3}} e^{3y} \int_{z=0}^{\frac{2-2x-3y}{5}} e^{5z} dz dy dx \\
 &= \int_{x=0}^1 e^{2x} \int_{y=0}^{\frac{2-2x}{3}} e^{3y} \left[ \frac{e^{5z}}{5} \right]_{z=0}^{\frac{2-2x-3y}{5}} dy dx \\
 &= \frac{1}{5} \int_{x=0}^1 e^{2x} \int_{y=0}^{\frac{2-2x}{3}} e^{3y} (e^{2-2x-3y} - 1) dy dx \\
 &= \frac{1}{5} \int_{x=0}^1 e^{2x} \left[ e^{2-2x} y - \frac{e^{3y}}{3} \right]_{y=0}^{\frac{2-2x}{3}} dx \\
 &= \frac{1}{15} \int_{x=0}^1 (e^2(2-2x) - e^2 + e^{2x}) dx \\
 &= \frac{1}{15} \left[ e^2(x - x^2) + \frac{1}{2} e^{2x} \right]_{x=0}^1 = \frac{e^2 - 1}{30}
 \end{aligned}$$


---

### Aufgabe 12.2: Parametrisierung von Integrationsbereichen

Gegeben seien die folgenden drei Körper im  $\mathbb{R}^3$ :

- ein Quader  $Q = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1, -3 \leq x_3 \leq 3\}$
- eine Kugel  $K = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\mathbf{x}\| \leq 1\}$
- ein Zylinder  $Z = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1, 0 \leq x_3 \leq 3\}$

Skizzieren und parametrisieren Sie die Schnittmenge eines jeden einzelnen dieser Körper mit den beiden folgenden Mengen:

$$M_1 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x_3\}, M_2 = \{\mathbf{x} \mid 3x_1 \leq x_3\}.$$

D. h. geben Sie die Integrationsgrenzen der zugehörigen Volumenintegrale über die Bereiche  $Q \cap M_1$ ,  $Q \cap M_2$ ,  $K \cap M_1$ , ... an.

### Lösung 12.2:

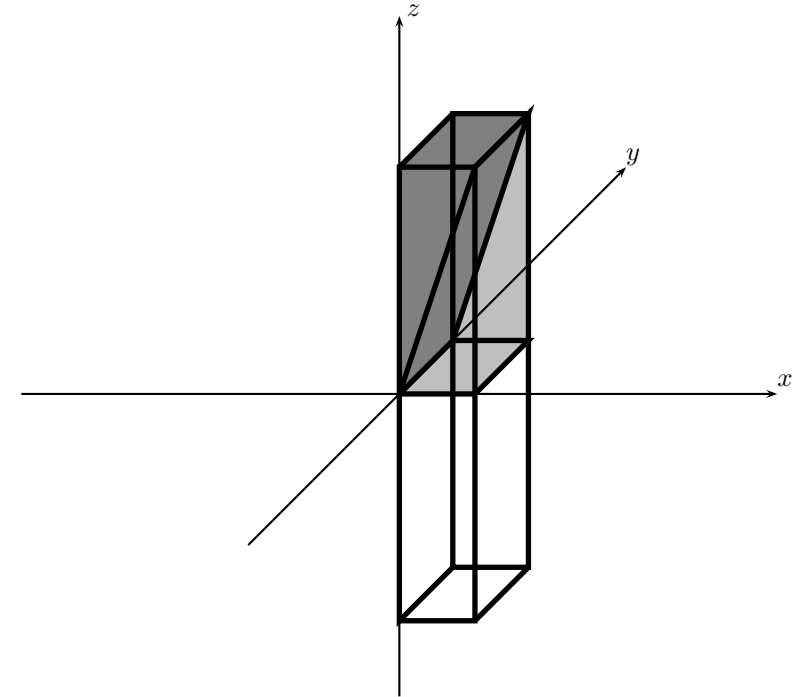
$M_1$  beschreibt den oberen Halbraum  $z \geq 0$ .  $M_2$  beschreibt die Menge der Punkte oberhalb der Ebene  $z = 3x$ . Für die Schnittmengen mit den drei Körpern hat man jeweils:

- Für den Quader:

$$Q \cap M_1 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1, 0 \leq x_3 \leq 3\}$$

$$Q \cap M_2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1, 3x_1 \leq x_3 \leq 3\}$$

Für  $Q \cap M_2$  muss man keine Fallunterscheidung der  $x_3$ -Grenzen vornehmen, da die Obergrenze des Quaders ( $z = 3$ ) die Ebene  $3x = z$  nur an der Kante des Quaders schneidet.



- Für die Kugel:

$$K \cap M_1 =$$

$$\left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid -1 \leq x_1 \leq +1, -\sqrt{1-x_1^2} \leq x_2 \leq +\sqrt{1-x_1^2}, 0 \leq x_3 \leq \sqrt{1-x_2^2-x_1^2} \right\}$$

Die zweite Schnittmenge  $K \cap M_2$  besteht aus zwei Bereichen:  $B_1$  der Bereich, der von oben durch die Kugeloberfläche und von unten durch die Ebene  $3x = z$  begrenzt wird.

$B_2$ , der von oben und von unten durch die Kugeloberfläche begrenzt wird, da die Ebene dort außerhalb der Kugel liegt.

Für die Schnittkurve der Kugeloberfläche  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  mit der Ebene  $3x = z$  gilt

$$x^2 + y^2 + 9x^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\frac{1-y^2}{10}}$$

Damit darf  $y$  nur Werte zwischen  $-1$  und  $+1$  annehmen.

$B_1$  lässt sich somit parametrisieren als

$$B_1 = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid -1 \leq x_2 \leq 1, -\sqrt{\frac{1-x_2^2}{10}} \leq x_1 \leq \sqrt{\frac{1-x_2^2}{10}}, \right. \\ \left. 3x_1 \leq x_3 \leq \sqrt{1-x_1^2-x_2^2} \right\}$$

Für den zweiten Teil von  $K \cap M_2$  ergibt sich

$$B_2 = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid -1 \leq x_2 \leq 1, -\sqrt{1-x_2^2} \leq x_1 \leq -\sqrt{\frac{1-x_2^2}{10}}, \right. \\ \left. -\sqrt{1-x_1^2-x_2^2} \leq x_3 \leq \sqrt{1-x_1^2-x_2^2} \right\}$$

Eine Parametrisierung in Kugelkoordinaten, deren  $z$ -Achse ( $\tilde{z}$  in der Skizze) senkrecht auf der Ebene  $3x = z$  steht, wäre für diesen Körper deutlich einfacher. Die entsprechende Rotation um die  $y$ -Achse wird durch die (orthogonale) Matrix

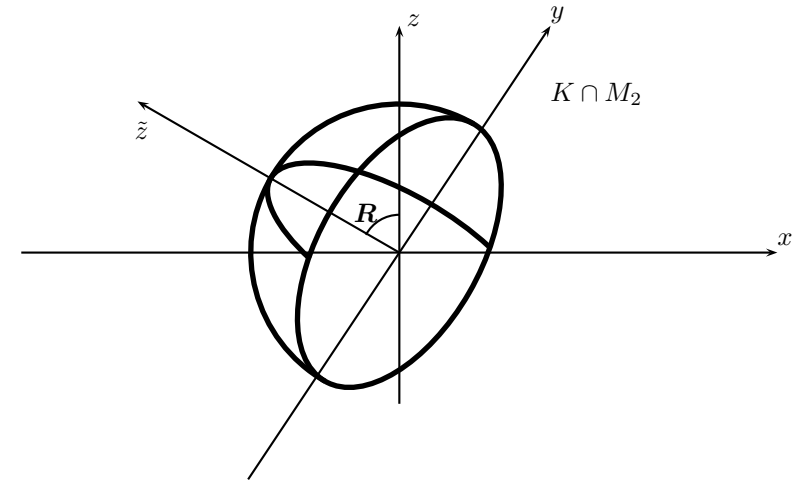
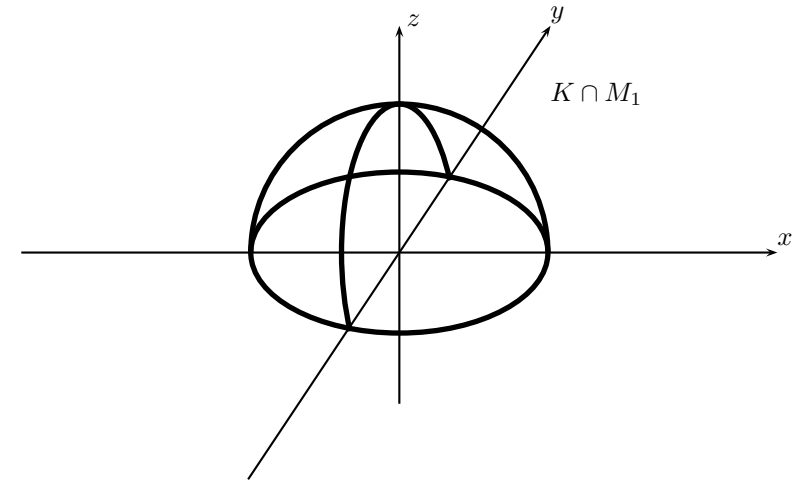
$$\mathbf{R} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & \sqrt{10} & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

beschrieben. Damit ergibt sich dann

$$\mathbf{x}(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \varphi \\ r \sin \theta \sin \varphi \\ r \cos \theta \end{pmatrix} \\ = \frac{r}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi - 3 \cos \theta \\ \sin \theta \sin \varphi \\ 3 \sin \theta \cos \varphi + \cos \theta \end{pmatrix}$$

und weiter

$$K \cap M_2 = \{ \mathbf{x}(r, \theta, \varphi) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \pi/2, 0 \leq \varphi \leq 2\pi \}.$$



- Für den Zylinder nutzen wir die Parametrisierung in Zylinderkoordinaten

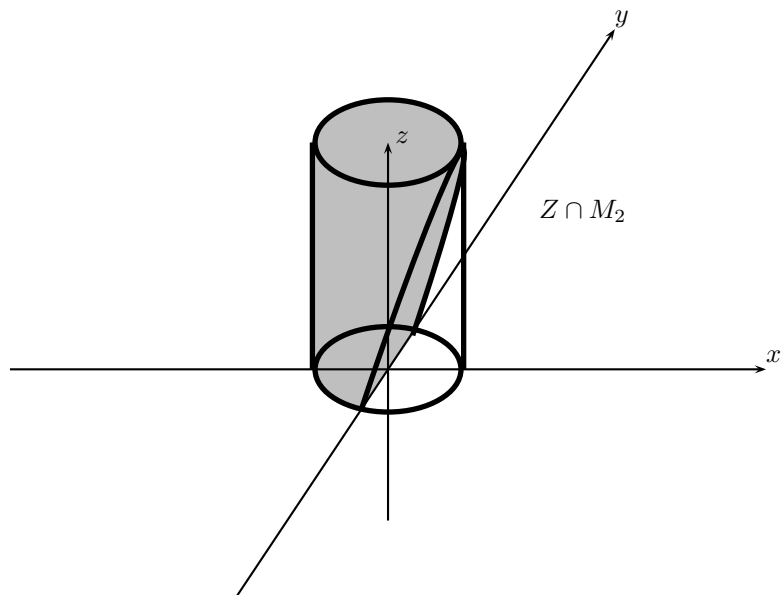
$$\mathbf{x}(r, \varphi, z) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}$$

Die erste Menge  $Z \cap M_1$  stimmt mit dem Zylinder überein.

$$Z = Z \cap M_1 = \{ \mathbf{x}(r, \varphi, z) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq z \leq 3 \} \\ Z \cap M_2 = \{ \mathbf{x}(r, \varphi, z) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, z_0(r, \varphi) \leq z \leq 3 \}$$

Dabei berücksichtigt  $z_0(r, \varphi)$ , dass die Ebene  $3x = z$  den Zylinderboden in der Mitte schneidet. Dies führt dazu, dass für positive  $x$  die Untergrenze des Integrationsbereichs von der Ebene beschrieben wird und für negative  $x$  durch den Zylinderboden  $z = 0$ :

$$z_0(r, \varphi) = \begin{cases} 0, & \text{für } \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2} \\ 3r \cos(\varphi), & \text{sonst} \end{cases}.$$



### Aufgabe 12.3: Integration in Kugelkoordinaten

Berechnen Sie

$$I = \int \int_B \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} d(x, y, z),$$

wobei  $B$  das Innere der Kugel  $x^2 + y^2 + z^2 + 2Ry = 0$  ist.

**Hinweis:** Verwenden Sie die Kugelkoordinaten

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \sin \varphi \sin \theta \\ r \cos \theta \\ r \cos \varphi \sin \theta \end{pmatrix}.$$

### Lösung 12.3:

Zunächst wird der Rand des Bereiches  $B$  untersucht:

$$0 = x^2 + y^2 + z^2 + 2Ry = x^2 + (y + R)^2 + z^2 - R^2.$$

$B$  ist also eine Kugel mit Radius  $R$  um den Mittelpunkt  $(0, -R, 0)$ . In den gegebenen Kugelkoordinaten hat man dann folgende Integrationsbereiche:

- $\varphi \in [0, 2\pi]$ , da die Kugel  $B$  rotationssymmetrisch bezüglich der  $y$ -Achse ist und  $\varphi$  einen Winkel um eben diese Achse beschreibt.
- $\theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ , da die Kugel  $B$  im negativen  $y$ -Bereich liegt.
- An den Grenzen für  $r$  soll gelten

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 + y^2 + z^2 + 2Ry \\ &= r^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \theta + r^2 \cos^2 \theta + r^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \theta + 2Rr \cos \theta \\ &= r^2 \sin^2 \theta + r^2 \cos^2 \theta + 2Rr \cos \theta = r^2 + 2Rr \cos \theta \\ \Rightarrow \quad r &= 0 \text{ oder } r = -2R \cos \theta (> 0, \text{ da } \cos \theta < 0) \end{aligned}$$

Der Integrationsbereich ist also  $r \in [0, -2R \cos \theta]$ .

Das Integral berechnet sich damit zu

$$\begin{aligned} I &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=\pi/2}^{\pi} \int_{r=0}^{-2R \cos \theta} \frac{1}{r} r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \\ &= 2\pi \int_{\theta=\pi/2}^{\pi} \frac{(-2R \cos \theta)^2}{2} \sin \theta d\theta = 4\pi R^2 \left. \frac{-\cos^3 \theta}{3} \right|_{\pi/2}^{\pi} = \frac{4\pi R^2}{3}. \end{aligned}$$

---

#### Aufgabe 12.4: Masse einer Halbkugel

Berechnen Sie die Masse einer Halbkugel mit Mittelpunkt  $(0, 0, 0)^\top$ , Radius  $a > 0$  sowie  $z \geq 0$  und der Massendichte

- a) mithilfe von Kugelkoordinaten,
- b) mithilfe von Zylinderkoordinaten.

$$\rho(x, y, z) = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

**Hinweis:** Die Masse  $M$  eines Körpers  $K$  mit Massendichte  $\rho(\mathbf{x})$  ergibt sich aus

$$M = \int_K \rho(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

#### Lösung 12.4:

- a) Es bietet sich die Rechnung in Kugelkoordinaten an. Wegen der Bedingung  $z \geq 0$  wird  $\theta$  auf das Intervall  $[0, \pi/2]$  eingeschränkt.

$$\begin{aligned} M &= \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^a \rho \cdot r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta = \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^a \frac{r \cos \theta}{r \sin \theta} r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta \\ &= \frac{a^3}{3} \cdot 2\pi \int_{\theta=0}^{\pi/2} \cos \theta d\theta = \frac{2\pi a^3}{3}. \end{aligned}$$

- b) Aus der Beziehung  $a^2 = r^2 + z^2$  erhalten wir  $0 < r < \sqrt{a^2 - z^2}$ . In Zylinderkoordinaten erhalten wir das Integral

$$\begin{aligned} M &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{z=0}^a \int_{r=0}^{\sqrt{a^2 - z^2}} \frac{z}{r} r dr dz d\varphi \\ &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{z=0}^a \int_{r=0}^{\sqrt{a^2 - z^2}} z dr dz d\varphi \\ &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{z=0}^a z \sqrt{a^2 - z^2} dz d\varphi \end{aligned}$$

Mit der Substitution  $u = a^2 - z^2$  erhalten wir

$$\begin{aligned} M &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{u=a^2}^0 -\frac{1}{2} \sqrt{u} du d\varphi \\ &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{1}{3} a^3 d\varphi \\ &= \frac{2\pi a^3}{3}. \end{aligned}$$

---

### Aufgabe 12.5: Volumenintegrale

Berechnen Sie

$$\int_V \frac{e^{-x^2-y^2}}{1+z^2} dx dy dz$$

mit

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq 0\}.$$

**Hinweise:**

- Es empfiehlt sich die Rechnung in Zylinderkoordinaten.
- Der Integrationsbereich ist unendlich groß. Dadurch treten uneigentliche Integrale auf.

### Lösung 12.5:

Es werden Zylinderkoordinaten  $(r, \varphi, z)$  verwandt:  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ ,  $z = z$ .  
Dann gilt

$$\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \varphi, z)} \right| = r.$$

Es folgt

$$V' = \{(r, \varphi, z) : r \in [0, \infty), \varphi \in [0, 2\pi], z \in [0, \infty)\}$$

$$\begin{aligned} \int_V \frac{e^{-x^2-y^2}}{1+z^2} dx dy dz &= \int_{V'} \frac{e^{-r^2}}{1+z^2} r dr d\varphi dz \\ &= \int_0^{2\pi} \left( \int_0^\infty \left( \int_0^\infty \frac{e^{-r^2} r}{1+z^2} dr \right) dz \right) d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \left( \int_0^\infty \left[ \frac{-e^{-r^2}}{2(1+z^2)} \right]_0^\infty dz \right) d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \left( \int_0^\infty \frac{1}{2(1+z^2)} dz \right) d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \left[ \frac{1}{2} \arctan z \right]_0^\infty d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{\pi}{4} d\varphi = \frac{\pi^2}{2}. \end{aligned}$$

---



### Aufgabe 12.6: Alte Klausuraufgabe

a) Berechnen Sie das Integral  $\iint_D \frac{x^2}{y^2} dx dy$ , wobei  $D$  den von den Geraden  $x = 2$ ,  $y = x$  und der Hyperbel  $xy = 1$  begrenzten Bereich des  $\mathbb{R}^2$  bezeichne.

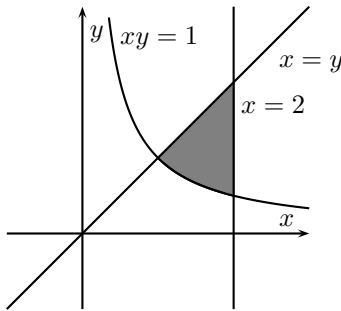
b) Gegeben sei der Körper

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 \leq 1, -1 \leq z \leq 2\}.$$

Skizzieren Sie den Körper und berechnen Sie dessen Volumen.

### Lösung 12.6:

a) Der Integrationsbereich hat die folgende Gestalt:



$D$  ist Normalbereich bezüglich  $x$ ,

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{x} \leq y \leq x, \quad 1 \leq x \leq 2 \right\}.$$

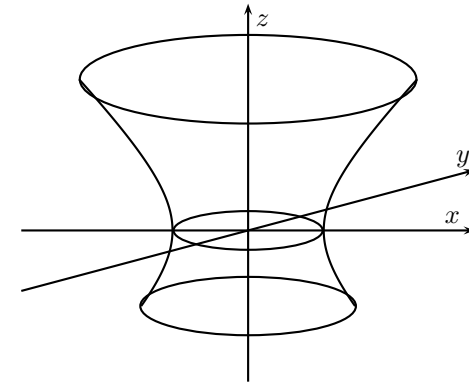
Es gilt

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{x^2}{y^2} dx dy &= \int_1^2 \left( \int_{1/x}^x \frac{x^2}{y^2} dy \right) dx \\ &= \int_1^2 x^2 \cdot \left[ \frac{-1}{y} \right]_{y=1/x}^{y=x} dx \\ &= \int_1^2 (-x + x^3) dx = \frac{9}{4}. \end{aligned}$$

b) Die Ungleichung in der Definition des Integrationsgebietes lässt sich schreiben als

$$x^2 + y^2 \leq 1 + z^2.$$

Skizze:



Das Volumen berechnet man in Zylinderkoordinaten,

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z.$$

Die zugehörige Funktionaldeterminante ist  $\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \varphi, z)} \right| = r$ . Das Volumen ist:

$$\begin{aligned} \int_{z=-1}^2 \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{\sqrt{1+z^2}} r \, dr \, d\varphi \, dz &= \int_{z=-1}^2 2\pi \frac{1+z^2}{2} dz \\ &= \pi \left( 3 + \left[ \frac{z^3}{3} \right]_{z=-1}^2 \right) \\ &= \pi \left( 3 + \frac{8}{3} + \frac{1}{3} \right) = 6\pi. \end{aligned}$$

---

**Ergebnisse zu Aufgabe 12.1:**

a)  $I = \sinh(2)$ ,  $J = \frac{e^3}{18}(5e^9 + 4)$ , b)  $\frac{2\pi(b^3 - a^3)}{3}$ , c)  $e \sinh(1)/6$

**Ergebnisse zu Aufgabe 12.3:**

$$I = \frac{4\pi R^2}{3}$$

**Ergebnisse zu Aufgabe 12.4:**

$$M = 2\pi a^3/3$$

**Ergebnisse zu Aufgabe 12.5:**

$$V = \frac{\pi^2}{2}.$$

**Ergebnisse zu Aufgabe 12.6:**

a)  $9/4$ , b)  $6\pi$