

Mathematik II/B (WI/ET)

Blatt 2

WT 2024

Grenzwerte, Folgen, Stetigkeit

Einführende Bemerkungen

- Vermeiden Sie die Verwendung von Taschenrechnern oder Online-Ressourcen.

Aufgabe 2.1: Stetige Fortsetzung

- a) Untersuchen Sie, ob die folgenden reellen Funktionen im Punkt  $x = 0$  stetig sind oder stetig fortgesetzt werden können.

$$f_1(x) = |x|, \quad f_2(x) = \frac{x}{|x|}, \quad f_3(x) = \frac{x^3}{|x|}, \quad f_4(x) = \frac{x^2}{|x|^2}$$

- b) Bestimmen Sie die Definitionslücken der Funktionen

$$g(x) = \frac{2x^3 - 12x^2 + 18x}{x^3 - 9x}$$

In welchen dieser Lücken ist die Funktion stetig fortsetzbar?

Aufgabe 2.2: Differenzieren

Berechnen Sie folgende Aufgaben:

i)  $f(t) := (2t + 1)^4 \cdot \sin(3t)$  gesucht:  $f'''(t)$

ii)  $g(t) := t^4 \cdot \cos(3t) \cdot e^{-2t}$  gesucht:  $g''(t)$

iii)  $h(t) := \frac{2t^2 - 2t + 1}{3t - 2}$  gesucht:  $h'''(t)$

**Hinweis:** Vergessen Sie nicht die Ergebnisse (auch die Zwischenergebnisse) sinnvoll zusammenzufassen!

Aufgabe 2.3: Iterierte Grenzwerte

Berechnen Sie für folgende Funktionen  $f(x, y)$  die Grenzwerte

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y); \quad \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y); \quad \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}} f(\mathbf{x}) \text{ mit } \mathbf{x} := (x, y)^\top,$$

(falls diese existieren):

a)  $f(\mathbf{x}) := \frac{x - y}{x + y},$

b)  $f(\mathbf{x}) := \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2}$

c)  $f(\mathbf{x}) := (x + y) \sin\left(\frac{1}{x}\right) \sin\left(\frac{1}{y}\right).$

**Hinweis zu b):** Betrachten Sie auch den Fall  $y = \alpha x$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Aufgabe 2.4:

- a) Zeigen Sie anhand der Definition der Konvergenz, dass gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + n - 12}{n^2 - 8} = 2.$$

- b) Zeigen Sie: Konvergiert  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  gegen  $a$ , so konvergiert auch  $\{|a_n|\}_{n \in \mathbb{N}}$  gegen  $|a|$ .

- c) Gilt die Umkehrung von b)? Begründen Sie Ihre Aussage mit einem Beweis oder einem Gegenbeispiel.

Aufgabe 2.5: Stetige Fortsetzung

- a) Untersuchen Sie, ob die folgenden reellen Funktionen im Punkt  $x = 0$  stetig sind oder stetig fortgesetzt werden können.

$$f_1(x) = |x|, \quad f_2(x) = \frac{x}{|x|}, \quad f_3(x) = \frac{x^3}{|x|}, \quad f_4(x) = \frac{x^2}{|x|^2}$$

- b) Bestimmen Sie die Definitionslücken der Funktionen

$$g(x) = \frac{2x^3 - 12x^2 + 18x}{x^3 - 9x}$$

In welchen dieser Lücken ist die Funktion stetig fortsetzbar?

## Aufgabe 2.6: Differenzieren

Bestimmen Sie jeweils die erste Ableitung. Zur Kontrolle sind die Werte der Ableitung an Kontrollpunkten angegeben. (Eventuell notwendige Beschränkungen des Definitionsbereiches sind nicht angegeben.)

$$\begin{array}{lll} f_1(t) = 3t^4 - 4t + 7, & f_2(t) = (2t - 3)^4, & f_3(t) = t^3(t + 3)^4 \\ f_4(t) = 3 \cos(2t), & f_5(t) = \sin^2(3t), & f_6(t) = \tan(2 - t/2) \\ f_7(t) = \frac{2t - 3}{(t + 2)^3}, & f_8(t) = \frac{4t \sin(t)}{\cos(2t)}, & f_9(t) = t^2 e^{\sqrt{t}} \\ f_{10}(t) = \sqrt{t \sqrt{t \sqrt{t}}}, & f_{11}(t) = e^{\frac{1}{1+t^2}}, & f_{12}(t) = \tan(t) \\ f_{13}(t) = \frac{t + \cos(t) \sin(t)}{2}, & f_{14}(t) = \frac{t^2 - t + 2}{2t + 3}, & f_{15}(t) = \frac{\sin^2(t)}{\cos(t)} \end{array}$$

## Aufgabe 2.7: Differentiation

a) Geben Sie Konstanten  $b, c, d \in \mathbb{R}$  an, damit die Funktion

$$g(x) = \begin{cases} bx^3 + cx^2 + d & \text{für } x \leq 1 \\ \ln x & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

auf  $\mathbb{R}$  zweimal differenzierbar ist.

Ist  $g(x)$  für diese Wahl auch dreimal differenzierbar?

b\*\*) Die Funktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

ist in  $x = 0$  differenzierbar. Ist die Ableitung dort stetig? Hinweis: Betrachten Sie die Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $x_n = \frac{1}{2n\pi}$ .

## Aufgabe 2.8: Sekantensteigung

a) Gegeben ist der Funktionsgraph der Funktion  $f$ .

xunit=2cm, yunit=2cm (0,-1)(3,3) [subgriddiv=5,griddots=1,gridlabels=.3](0,-1)(3,3)  
[plotpoints=100,plotstyle=curve,linewidth=1pt] 03 x x mul -2 x mul add

Zeichnen Sie an den Punkten

$$(x_j, y_j) \text{ mit } x_j = j, y_j = f(x_j) \text{ für } j = 0, 1, 2, 3$$

Steigungsdreiecke mit  $\Delta x = 1$  an den Funktionsgraphen und berechnen Sie aus  $x$ - und  $y$ -Achsenabschnitt die Sekantensteigung  $s(x_j)$ . Wiederholen Sie dies für  $\Delta x = \frac{1}{2}$  und für  $\Delta x = \frac{1}{4}$ . Skizzieren Sie die so berechneten Steigungswerte im zweiten Graphen.

$$(0,-2)(3,4) \text{ [subgriddiv=5,griddots=1,gridlabels=.3]}(0,-2)(3,4)$$

b) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion  $f(x) = x^2 - 2x$  anhand der Definition als Grenzwert eines Differenzenquotienten. Skizzieren Sie auch diese im zweiten Graphen.

## Ergebnisse zu Aufgabe 2.5:

a) stetig, nicht stetig fortsetzbar, stetig fortsetzbar, stetig fortsetzbar  
b)  $g$  ist stetig fortsetzbar in 0 und +3 und nicht stetig fortsetzbar in -3.

## Ergebnisse zu Aufgabe 2.2:

$$\begin{aligned} f'''(t) &= \left[ 192(2t + 1) - 216(2t + 1)^3 \right] \sin(3t) + \left[ 432(2t + 1)^2 - 27(2t + 1)^4 \right] \cos(3t) \\ g''(t) &= \left[ (12t^2 - 16t^3 - 5t^4) \cos(3t) + (-24t^3 + 12t^4) \sin(3t) \right] e^{-2t} \\ h'''(t) &= \frac{-90}{(3t - 2)^4} \end{aligned}$$

## Ergebnisse zu Aufgabe 2.4:

c) Betrachten Sie  $a_n = (-1)^n$ .

## Ergebnisse zu Aufgabe 2.5:

a) stetig, nicht stetig fortsetzbar, stetig fortsetzbar, stetig fortsetzbar  
b)  $g$  ist stetig fortsetzbar in 0 und +3 und nicht stetig fortsetzbar in -3.

**Ergebnisse zu Aufgabe 2.6:**

$$f'_1(2) = 92,$$

$$f'_2(2) = 8,$$

$$f'_3(2) = 11500,$$

$$f'_4(\pi/3) = -3\sqrt{3},$$

$$f'_5(\pi/3) = 0,$$

$$f'_6(4 + 2\pi) = -1/2,$$

$$f'_7(2) = 5/256,$$

$$f'_8(\pi/3) = \frac{20\pi}{3} - 4\sqrt{3},$$

$$f'_9(4) = 12e^2,$$

$$f'_{10}(256) = \frac{7}{16},$$

$$f'_{11}(2) = -\frac{4e^{1/5}}{25},$$

$$f'_{12}(\pi/3) = 4,$$

$$f'_{13}(\pi/3) = \frac{1}{4},$$

$$f'_{14}(2) = \frac{13}{49},$$

$$f'_{15}(\pi/3) = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

**Ergebnisse zu Aufgabe 2.8:**

b)  $f'(x) = 2x - 2$

### **Temporary page!**

L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X was unable to guess the total number of pages correctly. As there was some unprocessed data that should have been added to the final page this extra page has been added to receive it.

If you rerun the document (without altering it) this surplus page will go away, because L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X now knows how many pages to expect for this document.