Aufgabe 1: Lineare Abbildung im Komplexen

Gegeben ist die lineare Abbildung $\boldsymbol{L} : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^3$ mit der Matrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1+\mathrm{i} & 1 & \mathrm{i} \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2\,\mathrm{i} & \mathrm{i} & 2\,\mathrm{i}-1 \end{pmatrix}$$

sowie der Vektor $\boldsymbol{b}_\lambda = (\lambda - \mathrm{i},\ 0,\ -2\,\mathrm{i})^\top$.

a) Geben Sie $\mathrm{Rang}(\boldsymbol{A})$ und Orthonormalbasen von $\mathrm{Bild}\boldsymbol{A}$ sowie $\mathrm{Kern}\boldsymbol{A}$ und $(\mathrm{Bild}\boldsymbol{A})^\perp$ an.

Hinweise:

- Der Orthogonalraum $\boldsymbol{U}^\perp$ eines Unterraumes $\boldsymbol{U} \subset \mathbb{C}^n$ enthält alle Vektoren, die senkrecht zu allen Vektoren aus $\boldsymbol{U}$ sind:

$$\boldsymbol{U}^\perp = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n |\ \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}\rangle = 0 \text{ für alle } \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{U}\}$$

- Im Komplexen gilt $(\mathrm{Bild}\boldsymbol{A})^\perp = \mathrm{Kern}(\boldsymbol{A}^*)$.

b) Für welche $\lambda \in \mathbb{C}$ ist $\boldsymbol{b}_\lambda \in \mathrm{Bild}\boldsymbol{A}$ enthalten?

c) Geben Sie für beliebige $\lambda \in \mathbb{C}$ eine Zerlegung von $\boldsymbol{b}_\lambda$ in Komponenten aus $\mathrm{Bild}\boldsymbol{A}$ und $(\mathrm{Bild}\boldsymbol{A})^\perp$ an.

d) Bestimmen Sie alle $\boldsymbol{x}_\lambda \in \mathbb{C}^4$, so dass $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_\lambda$ die orthogonale Projektion von $\boldsymbol{b}_\lambda$ auf $\mathrm{Bild}\boldsymbol{A}$ ist.

Aufgabe 2: Basiswechsel

Gegeben sei der Vektor $\boldsymbol{v} = (2,1)^T$ bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{R}^2$.
Bestimmen Sie die Koordinaten von $\boldsymbol{v}$ bezüglich der Basis

$$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

Aufgabe 3: Lineares Gleichungssystem mit komplexen Zahlen

Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem mit Hilfe des Gauß-Eliminationsverfahrens für $u, v \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} (2+3\,\mathrm{i})\cdot u + (1-1\,\mathrm{i})\cdot v &= 7+6\,\mathrm{i}\,, \\ (3-2\,\mathrm{i})\cdot u + (2\,\mathrm{i})\cdot v &= 2-9\,\mathrm{i}\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 4: Lineare Gleichungssysteme

a) Betrachten Sie ein lineares Gleichungssystem beliebiger Dimension mit zwei unterschiedlichen Lösungen. Hat ein solches System immer unendlich viele Lösungen?

b) Gibt es ein lineares Gleichungssystem mit weniger Gleichungen als Variabelen, sodass es eine eindeutige Lösung ist?

c) Seien a, b, c, d, r und s reelle Zahlen. Überprüfen Sie, ob das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a\,x_1 + b\,x_2 &= r \\ c\,x_1 + d\,x_2 &= s \end{aligned}$$

eindeutig lösbar ist, falls $ad - bc \neq 0$ und berechnen Sie die Lösung.

Aufgabe 5: Lineare Gleichungssystem

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 2x_1 & - & x_2 & + & ax_3 \\ -4x_1 & & & + & (1-2a)x_3 \\ -2x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b \\ -4b-4 \\ -6 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}\,.$$

a) Bringen Sie das Gleichungssystem in die Zeilenstufenform.

b) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von a den Rang der Systemmatrix.

c) Bestimmen Sie, für welche Werte von a und b das Gleichungssystem

- **i)** eine eindeutige Lösung hat,
- **ii)** unendlich viele Lösungen hat,
- **iii)** keine Lösung hat.

d) Geben Sie die Lösungsmenge für $a = 1$ und $b = -1$ an.

e) Geben Sie die Lösungsmenge für $a = 3$ und $b = 1$ an.

f) Bestimmen Sie das Bild der Systemmatrix für $a = 3$.

g) Bestimmen Sie den Kern der Systemmatrix für $a = 3$.

Aufgabe 6: Lineare Abbildungen

Gegeben seien die linearen Abbildungen $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ und $\boldsymbol{g} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ durch

$$\boldsymbol{f}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 + 2x_3 \\ x_1 - x_2 + x_3 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \boldsymbol{g}(y_1, y_2, y_3) = \begin{pmatrix} y_2 - y_3 \\ y_1 + y_2 - y_3 \end{pmatrix}.$$

a) Geben Sie die Matrixdarstellungen der beiden linearen Abbildungen $\boldsymbol{f}$ und $\boldsymbol{g}$ sowie der Abbildung $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f}$ an.

b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Matrixdarstellungen aus Aufgabenteil **a)** $\boldsymbol{f}(1, 1, -1)$, $\boldsymbol{g}(1, 2, 1)$ sowie $\boldsymbol{h}(1, 1, -1)$.

Aufgabe 7:

Im $\mathbb{R}^3$ sind die Vektoren

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gegeben.

a) Wählen Sie eine Basis von $\boldsymbol{V} = \operatorname{span}\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}\}$ aus, die nur Vektoren $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ oder $\boldsymbol{d}$ enthält.

b) Welche Dimension hat $\boldsymbol{V}$?

c) Bilden Sie ausgehend von der in Aufgabenteil **a)** gewählten Basis eine Orthonormalbasis von $\boldsymbol{V}$.

d) Stellen Sie die Vektoren $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ und $\boldsymbol{d}$ bezüglich der Orthonormalbasis dar, geben Sie also die zugehörigen Koeffizienten an, mittels derer die Vektoren mit der ausgewählten Basis dargestellt werden können.

Aufgabe 8: Basis des $\mathbb{R}^3$

Gegeben seien die Vektoren

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ \alpha \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix},$$

$\alpha \in \mathbb{R}$, bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{R}^3$.

a) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ bilden $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$?

b) Bestimmen Sie für solch ein α die Komponenten des Vektors $\boldsymbol{b}$ bezüglich der Basis $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$.

Aufgabe 9: Basis von $\mathbb{R}^3$

Welche der folgenden Mengen bilden eine Basis von $\mathbb{R}^3$?

i) $\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

iii) $\mathcal{B}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

ii) $\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

iv) $\mathcal{B}_4 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Aufgabe 10: Basis des $\mathbb{R}^5$

Im $\mathbb{R}^5$ sind die Vektoren

$$\boldsymbol{c}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{c}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{c}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix}$$

gegeben.

a) Sind die Vektoren der Menge $\mathcal{C} = \{\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_3\}$ linear unabhängig?

b) Ergänzen Sie $\mathcal{C}$ zu einer Basis des $\mathbb{R}^5$.

Aufgabe 11: Basiswechsel

Gegeben seien die Vektoren

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{v}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

bezüglich der Standardbasis von $\mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie die Koordinatendarstellung von jedem Vektor bezüglich der Basis

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}.$$

Aufgabe 12: Determinanten

Gegeben sei die Matrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Determinante unter Verwendung von

a) Gauß-Elimination,

b) Laplace-Entwicklung,

Aufgabe 13: Determinanten

Bestimmen Sie die Determinante der folgenden Matrix mit Hilfe des Gauß'schen Algorithmus:

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 & 0 \\ -3 & -6 & -4 & 7 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & -5 & 2 \\ -3 & -8 & -2 & 7 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 14: Determinanten

Bestimmen Sie die Determinanten folgender Matrizen:

a) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 3 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, b) $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -7 & 8 & 3 \\ 3 & -4 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

c) $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & -1 \\ -5 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ d) $\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 7 & 7 \\ 4 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 15: Determinanten

a) Bestimmen Sie die Determinante der Matrix

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Bestimmen Sie die Determinante der folgenden Matrix:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -7 & 8 & 0 & 4 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & -5 & 0 \\ 2 & -5 & 3 & 1 & -7 \\ -5 & -3 & 0 & 4 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 16: Drehmatrizen

Eine Matrix der Form

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

beschreibt eine Drehung eines Vektors um den Winkel α.
Gegeben seien die Vektoren

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \ , \ \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Euklidische Norm von $\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{w}$ und skizzieren Sie die beiden Vektoren.

b) Bestimmen Sie jeweils die Matrix-Vektor-Produkte $\boldsymbol{Av}$ und $\boldsymbol{Aw}$ für die Winkel $\alpha = \frac{\pi}{2}$ und $\beta = -\frac{\pi}{3}$.

c) Skizzieren Sie die Ergebnisvektoren und bestimmen Sie jeweils die Euklidische Norm.

Aufgabe 17: alte Klausuraufgabe

a) Berechnen Sie eine Gleichung der Ebene, die den Punkt mit Ortsvektor $\boldsymbol{x}_0 = (2,3,1)^\top$ enthält und den Normalenvektor $\boldsymbol{n} = \left(\frac{4}{5}, 0, -\frac{3}{5}\right)^\top$ hat.

b) Wie viele Ebenen gibt es, die senkrecht auf dem Vektor $(-2,1,-2)^\top$ stehen und vom Nullpunkt den Abstand $d = 12$ haben? Bestimmen Sie die Gleichungen aller dieser Ebenen.

Aufgabe 18: Eigenwerte und Eigenvektoren

a) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenräume der Matrizen

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -4 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & -7 & -4 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -4 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Die Matrix $\boldsymbol{M} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ habe den Eigenwert λ.
Welchen Eigenwert hat dann $\boldsymbol{M} + \boldsymbol{E}_n$?

Aufgabe 19: Eigenwerte und -vektoren

Es seien

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 8 & 10 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ -6 & 0 & 2 \\ -11 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrizen.

b) Geben Sie die zu den Eigenwerten gehörenden Eigenvektoren an.

c) Bestimmen Sie jeweils die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten aller Eigenwerte.

d) Welche der Matrizen sind diagonalisierbar?

e) Multiplizieren Sie die Matrizen mit den jeweiligen gefundenen Eigenvektoren.

Aufgabe 20: Darstellungen von Ebenen im $\mathbb{R}^3$

Gegeben sind die Punkte im $\mathbb{R}^3$ mit den Ortsvektoren

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ z \end{pmatrix}, \quad z \in \mathbb{R}.$$

a) Geben Sie für die durch $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{c}$ aufgespannte Ebene $\boldsymbol{E}$ im $\mathbb{R}^3$

- **i)** eine Parameterdarstellung,
- **ii)** eine Hessesche Normalform und
- **iii)** eine allgemeine Ebenengleichung an.

b) Bestimmen Sie $z \in \mathbb{R}$ so, dass $\boldsymbol{d}$ in der Ebene $\boldsymbol{E}$ liegt.

Aufgabe 21: Abstand von Geraden im $\mathbb{R}^3$

Gegeben sind die Geraden

$$\boldsymbol{g}_1 = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \boldsymbol{x} = (2,3,3)^\top + \lambda\,(-1,1,2)^\top, \quad \lambda \in \mathbb{R} \right\}, \quad \text{und}$$
$$\boldsymbol{g}_2 = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \boldsymbol{x} = (3,0,4)^\top + \lambda\,(2,-2,1)^\top, \quad \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Bestimmen Sie den Abstand zwischen den Geraden $\boldsymbol{g}_1$ und $\boldsymbol{g}_2$.

Aufgabe 22: Schmidt'sches Orthonormalisierungsverfahren

Gegeben seien die Vektoren

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie mit Hilfe des Schmidt'schen Orthonormalisierungsverfahren eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$.

Hinweis: Wählen Sie $\boldsymbol{u}_1$ als ersten Vektor zur Bestimmung einer Orthonormalbasis mithilfe des Schmidt'schen Orthonormalisierungsverfahren.

Aufgabe 23: Hessesche Normalform einer Ebene

Gegeben sei die Gerade

$$\boldsymbol{g} = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \boldsymbol{x} = (1,0,2)^\top + \lambda\,(2,3,1)^\top, \quad \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

und $\boldsymbol{p} = (1,0,1)^\top \in \mathbb{R}^3$.

Geben Sie eine Hessesche Normalform der Ebene $\boldsymbol{E}$, mit $\boldsymbol{p} \in \boldsymbol{E}$ an, welche orthogonal zu $\boldsymbol{g}$ liegt.

Aufgabe 24: Ebenen und Normalenvektor

Gegeben sei der Punkt $\boldsymbol{p} = (1,1,0)^\top$ und der Unterraum $\boldsymbol{U} \subset \mathbb{R}^3$

$$\boldsymbol{U} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$

a) Bestimmen Sie einen Vektor $\boldsymbol{n}$, der zu der Ebene

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{p} + \boldsymbol{U}$$

normal ist.

b) Gegeben sei die Normalform der Ebene durch

$$\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{n} \rangle = \langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{n} \rangle$$

mit einem variablen Vektor $\boldsymbol{v} = (x,y,z)^\top$. Leiten Sie aus der Normalform die allgemeine Gleichung der Ebene her.

c) Überprüfen Sie, ob der Punkt $\boldsymbol{p}_1 = (2,2,2)^\top$ auf der Ebene $\boldsymbol{E}$ liegt.

d) Schreiben Sie die Ebene in der Hesseschen Normalform auf.

e) Berechnen Sie den Abstand von $\boldsymbol{E}$ zu dem Koordinatenursprung $(0,0,0)^\top$.

f) Berechnen Sie den Abstand des Punktes $\boldsymbol{w} = (1,2,3)^\top$ zu der Ebene.

Aufgabe 25: LGS mit Gauß'schem Algorithmus

a) Bestimmen Sie die Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} & & 3x_2 & + & 2x_3 \\ 5x_1 & & & + & 6x_3 \\ -2x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 13 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

b) Bestimmen Sie die Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} & & 3y_2 & + & 2y_3 \\ 5y_1 & & & + & 6y_3 \\ -2y_1 & + & y_2 & - & 2y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{13}{2} \\ 3 \end{pmatrix}.$$

c) Bestimmen Sie die Lösung des LGS mit Hilfe des Gauß'schen Algorithmus:

$$\begin{pmatrix} & - & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 \\ 4x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & + & 2x_4 \\ 2x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 \\ 6x_1 & - & 2x_2 & - & 2x_3 & - & 4x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \\ 16 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 26: LGS mit Gauß'schem Algorithmus und kompl. Koeffizienten

Gegeben sei das LGS

$$\begin{pmatrix} (2+3\,\mathrm{i})z_1 & + & (1-1\,\mathrm{i})z_2 \\ (3-2\,\mathrm{i})z_1 & + & (0+2\,\mathrm{i})z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7+6\,\mathrm{i} \\ 2-9\,\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Lösung mit Hilfe des Gauß'schen Algorithmus ohne Taschenrechner.

Aufgabe 27: LGS mit Gauß'schem Algorithmus

Bestimmen Sie die Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} & & x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 \\ 1x_1 & + & 2x_2 & & & - & 3x_4 \\ 2x_1 & + & 6x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -9 \\ 4 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 28: Lineare Gleichungssysteme

Finden Sie mit Hilfe des Gauß-Algorithmus die Lösungsmengen der folgenden linearen Gleichungssysteme:

a)
$$\begin{array}{rcrcrcr} -3x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 6 \\ 9x_1 & - & 8x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \\ 6x_1 & + & 0x_2 & + & 3x_3 & = & 15 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & & & + & x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 6 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & 6x_3 & = & 10 \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & & & + & x_3 & = & 2 \\ -x_1 & + & 1x_2 & + & 3x_3 & = & 4 \\ 4x_1 & + & 3x_2 & + & 16x_3 & = & 26 \end{array}$$

d)
$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & & & + & x_3 & = & 2 \\ -x_1 & + & 1x_2 & + & 3x_3 & = & 4 \\ 4x_1 & + & 3x_2 & + & 16x_3 & = & -1 \end{array}$$

Aufgabe 29: Polynominterpolation

Gesucht ist ein Polynom mit $\mathrm{Grad}(P) \leq 4$ und $p(x_j) = y_j$, $j = 0, \ldots, 4$, mit den Werten

x_j	-2	-1	0	1	2
y_j	11	1	1	0	31

Setzen Sie

$$P(x) = a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + a_3\,x^3 + a_4\,x^4$$

an.

Geben Sie ein lineares Gleichungssystem für $(a_0,\, a_1,\, a_2,\, a_3,\, a_4)$ an und lösen Sie dieses.

Aufgabe 30: Lösungen eines LGS in Abhängigkeit von einem Parameter

Gegeben ist das inhomogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & 1\,, \\ & & x_2 & & & + & x_4 & = & 0\,, \\ & & & & x_3 & + & a\,x_4 & = & 2\,, \\ & & & & a\,x_3 & + & x_4 & = & 2\,, \end{array}$$

mit $a \in \mathbb{R}$.

a) Für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ hat das zugehörige **homogene** lineare Gleichungssystem genau eine, keine oder mehrere Lösungen?

b) Für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ hat das gegebene **inhomogene** lineare Gleichungssystem genau eine, keine oder mehrere Lösungen?

c) Geben Sie die Lösungen $\boldsymbol{x}_1 \in \mathbb{R}^4$ des zugehörigen **homogenen** Systems und $\boldsymbol{x}_2 \in \mathbb{R}^4$ des gegebenen **inhomogenen** Systems für $a = 0$ an.

d) Geben Sie die Lösungsmengen $\mathbb{L}_1$ des zugehörigen **homogenen** Systems und $\mathbb{L}_2$ des gegebenen **inhomogenen** Systems für $a = 1$ an.

Aufgabe 31: Lösbarkeit Linearer Gleichungssysteme

Für ein festes $t \in \mathbb{R}$ sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & - & 2x_2 & + & 1x_3 & - & 3x_4 & = & 1 \\ -2x_1 & - & 2tx_2 & + & tx_3 & + & (4+t)x_4 & = & 0 \\ -4tx_1 & - & 4x_2 & + & (2-2t)x_3 & + & 8tx_4 & = & 2 \\ 6x_1 & - & 6x_2 & + & (3+t)x_3 & + & (-9+t)x_4 & = & 3-t^2 \end{array}$$

gegeben.

a) Wenden Sie das Gaußsche Eliminationsverfahren auf das Gleichungssystem an. (**ohne Rückwärtseinsetzen, Stufenform genügt!**).

b) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von t den Rang des Gleichungssystems.

c) Wieviele Freiheitsgrade hat das Gleichungssystem?

d) Für welche Werte von $t \in \mathbb{R}$ ist das inhomogene Gleichungssystem lösbar? **Die Lösung selbst ist nicht zu berechnen!**

Aufgabe 32: Grundtypen linearer Gleichungssysteme

Überführen Sie die folgenden erweiterten Matrizen in ein lineares Gleichungssystem und bestimmen Sie die Lösungsmenge.

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{array}\right)$

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

c) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

d) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{array}\right)$

Aufgabe 33: Lineare Abbildungen

a) Seien $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ eine lineare Abbildung und $\boldsymbol{x}_1 = (1\,,\,2)^\top$ und $\boldsymbol{x}_2 = (-1\,,\,2)^\top$ zwei Vektoren. Die lineare Abbildung sei durch

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1) = \boldsymbol{y}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ und } \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_2) = \boldsymbol{y}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

definiert.

Bestimmen Sie die Matrix $\boldsymbol{A}$, die diese lineare Abbildung beschreibt.

b) Das Kreuzprodukt für zwei Vektoren $\boldsymbol{a},\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ ist erklärt durch

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_2x_3 - a_3x_2 \\ a_3x_1 - a_1x_3 \\ a_1x_2 - a_2x_1 \end{pmatrix}.$$

Ist die Abbildung

$$\boldsymbol{k}_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{x}$$

linear?
Falls ja, geben Sie die Abbildungsmatrix bezüglich der Standardbasis $\{\boldsymbol{e}_1,\, \boldsymbol{e}_2,\, \boldsymbol{e}_3\}$ des $\mathbb{R}^3$ an.

c) Ist die Abbildung $\boldsymbol{k}_6 : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^3$

$$\boldsymbol{k}_6(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix}$$

linear?
Falls nein, wieso nicht?

d) Zu zwei fest gegebenen Vektoren $\boldsymbol{a},\, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$ sei das Spatprodukt $\boldsymbol{s}_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert als

$$\boldsymbol{s}_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{x}) = \langle(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{x}),\, \boldsymbol{b}\rangle\,.$$

Zeigen Sie, dass diese Abbildung linear bezüglich des Vektors $\boldsymbol{x}$ ist.

Aufgabe 34: Lineare Unabhängigkeit in Polynomräumen

Untersuchen Sie, ob die Elemente der Menge

$$M_1 = \left\{p_1(x) = x^2\,, \quad p_2(x) = (x+1)^2\,, \quad p_3(x) = (x-1)^2\right\}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,,$$

linear unabhängig im Vektorraum P_2 der reellwertigen Polynome vom maximalen Grad 2 sind und geben Sie die Dimension von span M_1 an.

Aufgabe 35: Matrix-Multiplikation komplex

Gegeben seien

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2+3\,\mathrm{i} & -1+\mathrm{i} \\ 0 & 4+3\,\mathrm{i} \\ 1-\mathrm{i} & -\mathrm{i} \end{pmatrix}\,, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2-3\,\mathrm{i} & -1+2\,\mathrm{i} \\ 1 & 2-3\,\mathrm{i} \end{pmatrix} \text{ und } \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2+3\,\mathrm{i} \\ -4-2\,\mathrm{i} \end{pmatrix}\,.$$

Bestimmen Sie $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ und $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$.

Aufgabe 36: Matrizenmultiplikation reell

Gegeben seien die Matrizen

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-2\\3&0\\1&-2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&1&5\\-1&3&2\\1&2&3\\-2&-1&0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&2&-1&2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}0\\1\\2\\-1\end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie alle möglichen Produkte der Matrizen.

Aufgabe 37: Symmetrische Matrizen

a) Bestimmen Sie mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus die inverse Matrix von

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&2\end{pmatrix}.$$

b) Ist $\boldsymbol{A}^{-1}$ wieder symmetrisch? Gilt diese Aussage für beliebige invertierbare symmetrische Matrizen?

Aufgabe 38: Matrizen-Produkte

Gegeben seien

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&3\\-1&5\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}3&-1\\-5&0\\2&4\end{pmatrix}\quad\text{und}\quad \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}2&-3&1\\0&2&-4\\-3&0&5\end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie alle möglichen Matrizen-Produkte.

Aufgabe 39: Klausuraufgabe Dez. 2010

Gegeben seien

$$\boldsymbol{A}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&-\mathrm{i}\\\mathrm{i}&-1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\mathrm{i}&1\\1&\mathrm{i}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\-2+2\,\mathrm{i}\end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die Matrizenprodukte $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^*$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{B}^2$, $\boldsymbol{B}^4$, $\boldsymbol{B}^8$.

b) Sind die Matrizen $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ symmetrisch, hermitesch, orthogonal, unitär oder haben sie keine der genannten Eigenschaften?

c) Lösen Sie die Gleichungssysteme $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{b}$.

Aufgabe 40: frühere Klausuraufgabe

Die **symmetrische** Matrix $\boldsymbol{A}:=\begin{pmatrix}1&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{(3,3)}$ habe den Bildraum

$$\text{Bild}\,\boldsymbol{A}=\text{span}\,\{(1,0,1)^\top,\,(1,-1,1)^\top\}.$$

a) Berechnen Sie eine Orthonormalbasis für Bild $\boldsymbol{A}$, den Unterraum Kern $\boldsymbol{A}$ sowie die Matrix $\boldsymbol{P}$ der orthogonalen Projektion auf Bild $\boldsymbol{A}$.

Hinweis: Es gilt Kern $\boldsymbol{A}^\top=(\text{Bild}\,\boldsymbol{A})^\perp$.

b) Bekannt sei, dass das inhomogene lineare Gleichungssystem $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ zu gegebenem $\boldsymbol{b}:=(1,2,1)^\top$ die partikuläre Lösung $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{e}_2:=(0,1,0)^\top$ besitze. Bestimmen Sie daraus die Matrix $\boldsymbol{A}$.

Aufgabe 41*: Lösbarkeit eines LGS

Gegeben seien

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&1&2\\0&1&-1&2\\1&-2&5&-6\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{(3,4)}\text{ sowie }\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}-1\\4\\1\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3.$$

Im Folgenden seien $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{a}_4\in\mathbb{R}^3$ die Spaltenvektoren der Matrix $\boldsymbol{A}$.

a) Man berechne Kern$(\boldsymbol{A}^\top)$.

b) Man bestimme dim Kern$(\boldsymbol{A})$. Welcher Zusammenhang muss zwischen den Komponenten des Vektors $\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^3$ bestehen, damit das lineare Gleichungssystem $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ lösbar ist? Ist die Lösung im Existenzfall eindeutig? (Begründung!)

c) Man zeige $\boldsymbol{a}_1\perp\boldsymbol{a}_2$. Danach berechne man Rang$(\boldsymbol{A})$ und bestimme eine Orthonormalbasis von Bild$(\boldsymbol{A})$.

d) Man bestimme in der Menge der besten Lösungen (im Sinne kleinster Fehlerquadrate) von $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{v}$ den Vektor $\boldsymbol{x}_0\in\mathbb{R}^4$ mit kleinster euklidischer Länge $\|\boldsymbol{x}_0\|$.

Aufgabe 42: Ähnlichkeitstransformation

Gegeben sind

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&4\\0&6&0\\4&0&2\end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}1\\\alpha\\-1\end{pmatrix}\ \text{und}\ \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}\beta\\-\beta\\1\end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie – wenn möglich – α und β so, dass $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ Eigenvektoren der Matrix $\boldsymbol{A}$ sind.

b) Berechnen Sie einen weiteren (linear unabhängigen) Eigenvektor nebst zugehörigem Eigenwert.

c) Bestimmen Sie orthogonale Matrizen $\boldsymbol{Q}_i$, sowie Diagonalmatrizen $\boldsymbol{D}_i$ ($i = 1, 2, 3$), so dass gilt

$$\boldsymbol{D}_i = \boldsymbol{Q}_i^\top \boldsymbol{B}_i \boldsymbol{Q}_i, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Dabei sind $\boldsymbol{B}_1 = \boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}_2 = \boldsymbol{A}^{-1}$ und $\boldsymbol{B}_3 = \boldsymbol{A}^3$.

Aufgabe 43:

Gegeben seien die Vektoren

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ von $\boldsymbol{U} = \text{span}\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3\}$. Dabei sei $\text{span}\{\boldsymbol{b}_1\} = \text{span}\{\boldsymbol{a}_1\}$ und $\text{span}\{\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3\} = \text{span}\{\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$.

b) Prüfen Sie nach, ob der Vektor $\boldsymbol{x}$ im Unterraum $\boldsymbol{U}$ enthalten ist. Vesuchen Sie dazu, den Vektor bezüglich der Orthogonalbasis $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ darzustellen.

c) Geben Sie eine Basis des Orthogonalraumes $\boldsymbol{U}^\perp$ an.

Aufgabe 44: Orthogonale Projektion, Klausuraufgabe Dez. 2010

Gegeben seien die Matrix $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{(3,3)}$ und die Vektoren $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^3$ gemäß

$$\boldsymbol{A} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} := \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c} := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie Orthonormalbasen für Kern $\boldsymbol{A}$ und Bild $\boldsymbol{A}$.

b) Berechnen Sie die Matrix $\boldsymbol{P}$ der Orthogonalprojektion auf den Unterraum Bild $\boldsymbol{A}$.

c) Überprüfen Sie, ob $\boldsymbol{b} \in (\text{Bild } \boldsymbol{A})^\perp$ erfüllt ist. Bestimmen Sie die Orthogonalprojektion von $\boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{c}$ auf Bild $\boldsymbol{A}$.

Aufgabe 45: Orthogonale Projektion und minimaler Abstand

Seien $\boldsymbol{V} = \mathbb{R}^3$ und $\boldsymbol{u} = (1, 2, -5)^T$. Sei $\boldsymbol{U} \subset \boldsymbol{V}$ der Unterraum $\boldsymbol{U} = \text{span}\{\boldsymbol{u}\}$ und $\boldsymbol{U}^\perp$ das Orthogonalkomplement.

a) Bestimmen Sie eine Basis von $\boldsymbol{U}^\perp$.

b) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $\boldsymbol{U}^\perp$.

c) Bestimmen Sie den Abstand von $\boldsymbol{v} = (3, 1, 7)^\top$ zu $\boldsymbol{U}^\perp$.

Aufgabe 46: Methode der kleinsten Quadrate

Gegeben seien die Messwerte

i	1	2	3
t_i	-3	1	2
y_i	33	-3	-22

a) Es soll ein Polynom $p(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2$ bestimmt werden, welches diese Messwerte interpoliert:

$$p(t_j) = y_j, \qquad j = 1, 2, 3.$$

i) Geben Sie das lineare Gleichungssystem für den Koeffizientenvektor $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)^\top$ an.

ii) Ermitteln Sie die Lösung des Gleichungssystems.

b) Nun soll dasselbe Interpolationsproblem für ein lineares Polynom $q(x) = b_1 + b_2 x$ gelöst werden:

$$q(t_j) = y_j, \qquad j = 1, 2, 3.$$

i) Ist dieses Problem lösbar? (Begründen Sie Ihre Antwort.)

ii) Geben Sie ein Gleichungssystem für die Koeffizienten b_1, b_2 an, deren Polynom $q(x)$ das geforderte Problem bestmöglich löst, es soll also gelten:

$$\left\| (q(t_1) - y_1, q(t_2) - y_2, q(t_3) - y_3)^\top \right\|_2^2 = \text{min!}.$$

Hinweis: Die Lösung des Gleichungssystems ist **nicht** zu bestimmen.

Aufgabe 47: Positive Definitheit

Welche der folgenden Matrizen ist positiv definit?

a) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, b) $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

c) $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ d) $\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1+\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$

Aufgabe 48: Skalarprodukte

Gegeben sind die folgenden „Produkte“ für $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)^\top \in \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2)^\top \in \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)^\top \in \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)^\top \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle_a &:= x_2\, y_2 + x_1\, y_1 \,,\\
\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle_b &:= x_1\, y_1 - x_2\, y_2 \,,\\
\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle_c &:= x_1\, y_1 + 3\, x_2\, y_2 \,,\\
\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle_d &:= x_1^2 + (2\, y_2)^2 \,,\\
\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle_e &:= u_1\, v_1 + u_3\, v_3 \,.
\end{aligned}$$

Welche der „Produkte“ definieren Skalarprodukte? Begründen Sie Ihre Aussage durch das Überprüfen der Definitionen eines Skalarproduktes, beziehungsweise geben Sie ein Beispiel an, welches zeigt, dass eine Bedingung verletzt ist.

Aufgabe 49: Skalarprodukte

Gegeben sind die folgenden „Produkte“ für $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)^\top \in \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2)^\top \in \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)^\top \in \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)^\top \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle_a &:= x_2\, y_2 + x_1\, y_1 \,,\\
\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle_b &:= x_1\, y_1 - x_2\, y_2 \,,\\
\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle_c &:= x_1\, y_1 + 3\, x_2\, y_2 \,,\\
\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle_d &:= x_1^2 + (2\, y_2)^2 \,,\\
\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle_e &:= u_1\, v_1 + u_3\, v_3 \,.
\end{aligned}$$

Welche der „Produkte“ definieren Skalarprodukte? Begründen Sie Ihre Aussage durch das Überprüfen der Definitionen eines Skalarproduktes, beziehungsweise geben Sie ein Beispiel an, welches zeigt, dass eine Bedingung verletzt ist.

Aufgabe 50: Spiegelung und Projektion

Gegeben sei der Vektor $\boldsymbol{n} = (1,\ 2,\ -3)^\top$.

a) Geben Sie die Hessesche Normalform der Ebene $\boldsymbol{H}$ durch den Ursprung mit Normalenvektor $\boldsymbol{n}$ an.

b) Bestimmen Sie

i) die Matrix $\boldsymbol{S} \in \mathbb{R}^{(3,3)}$ der orthogonalen Spiegelung an $\boldsymbol{H}$ und

ii) die Matrix $\boldsymbol{P} \in \mathbb{R}^{(3,3)}$ der orthogonalen Projektion auf $\boldsymbol{H}$.

Hinweis: Die Spiegelung des Punktes $\boldsymbol{x}$ ist der Punkt, der auf der Geraden durch $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{P}(x)$ liegt und dieselbe Entfernung wie $\boldsymbol{x}$ von der Ebene hat.

Aufgabe 51: Volumenberechnung mittels Determinanten

Im $\mathbb{R}^3$ sei der Tetraeder gegeben, der durch die Vektoren

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

aufgespannt wird.

a) Berechnen Sie unter Nutzung einer Determinante das Volumen des Tetraeders.

b) Wie groß ist das Volumen des Tetraeders, der durch

$$\boldsymbol{Aa},\ \boldsymbol{Ab}, \boldsymbol{Ac} \text{ mit } \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

aufgespannt wird?

Aufgabe 52: Volumenberechnung mittels Determinanten

Im $\mathbb{R}^3$ sei der Tetraeder gegeben, der durch die Vektoren

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

aufgespannt wird.

a) Berechnen Sie unter Nutzung einer Determinante das Volumen des Tetraeders.

b) Wie groß ist das Volumen des Tetraeders, der durch

$$\boldsymbol{Aa},\ \boldsymbol{Ab}, \boldsymbol{Ac} \text{ mit } \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

aufgespannt wird?

Aufgabe 53: Lineare Unterräume

Sind die folgenden Mengen Untervektorräume des $\mathbb{R}^2$?

a) $\mathbb{U} = \left\{ (x,\ y)^\top \in \mathbb{R}^2 \middle| x + y = 1 \right\}$

b) $\mathbb{U} = \left\{ (x,\ y)^\top \in \mathbb{R}^2 \middle| 2x - 3y = 0 \right\}$

c) $\mathbb{U} = \left\{ (x,\ y)^\top \in \mathbb{R}^2 \middle| xy = 0 \right\}$

d) $\mathbb{U} = \left\{ (x,\ y)^\top \in \mathbb{R}^2 \ \middle|\ x \geq y \right\}$

Aufgabe 54: Lineare Unterräume (frühere Klausuraufgabe)

Der Unterraum $\boldsymbol{U} \subset \mathbb{R}^3$ werde von den Vektoren

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

aufgespannt.

a) Zeigen Sie $\dim \boldsymbol{U} = 2$ und bestimmen Sie den Unterraum $\boldsymbol{U}^\perp$.

b) Es sei $\boldsymbol{p} := (1,0,1)^\top$. Geben Sie die Hessesche Normalform der Hyperebene $\boldsymbol{H} := \boldsymbol{p} + \boldsymbol{U}$ an und bestimmen Sie den Abstand der Ebene $\boldsymbol{H}$ vom Koordinatenursprung.

Aufgabe 55: Dimensionssatz für Unterräume

Bestätigen Sie den Dimensionssatz für Unterräume für
$\boldsymbol{U}_1 = \operatorname{span}\{\,(1,0,0)^\top,\ (0,1,0)^\top\,\} \subset \boldsymbol{V}$ und
$\boldsymbol{U}_2 = \operatorname{span}\{\,(2,2,0)^\top,\ (0,0,3)^\top\,\} \subset \boldsymbol{V}$ mit $\boldsymbol{V} = \mathbb{R}^3$.

Aufgabe 56: Dimensionssatz für Unterräume

Bestätigen Sie den Dimensionssatz für Unterräume für
$\boldsymbol{U}_1 = \operatorname{span}\{\,(1,0,0)^\top,\ (0,1,0)^\top\,\} \subset \boldsymbol{V}$ und
$\boldsymbol{U}_2 = \operatorname{span}\{\,(2,2,0)^\top,\ (0,0,3)^\top\,\} \subset \boldsymbol{V}$ mit $\boldsymbol{V} = \mathbb{R}^3$.

Aufgabe 57: Vektor- und Matrix-Normen

a) Bestimmen Sie die drei Standard-Normen (Betragssummen-, Euklidische- und Maximums-Norm) der Vektoren:

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) Bestimmen Sie die drei Standard-Normen
(Spaltensummen-, Zeilensummen-, Frobenius-Norm) der Matrizen:

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 58: Vektornormen

Gegeben sind folgende Ausdrücke für $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)^\top \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{x}\|_a &:= |x_1|\,, \\ \|\boldsymbol{x}\|_b &:= |x_1| \cdot |x_2|\,, \\ \|\boldsymbol{x}\|_c &:= 2\,|x_1| + \tfrac{2}{3}\,|x_2|\,. \end{aligned}$$

a) Welche der Ausdrücke definieren Normen im $\mathbb{R}^2$?
Begründen Sie Ihre Aussage durch das Überprüfen der Definition einer Norm. Falls es sich nicht um eine Norm handelt, geben Sie ein Beispiel an, welches zeigt, dass eine Bedingung verletzt ist.

b) Skizzieren Sie für die *Normen* aus **a)** die Einheitskreise, d.h. die Menge

$$\left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \|\boldsymbol{x}\| = 1 \right\}.$$

Aufgabe 59: Matrix-Matrix-Multiplikation

Seien

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Entscheiden Sie, welche Matrix-Matrix-Produkte möglich sind und berechnen Sie diese.

Aufgabe 60: Matrix-Operationen und Skalarprodukt

Gegeben seien die folgenden Matrizen und Vektoren

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{C} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke $\boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{AB}^T$, $\boldsymbol{d}^T\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{e}^T\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{e}\,\boldsymbol{f}^T$, $\boldsymbol{e}\,\boldsymbol{f}^T + \boldsymbol{B}$. Begründen Sie Ihre Antwort, falls der Ausdruck nicht existiert.

b) Berechnen Sie die Skalarprodukte $\langle \boldsymbol{d}, \boldsymbol{e} \rangle$, $\langle \boldsymbol{d} - \boldsymbol{e}, \boldsymbol{d} \rangle$.

Aufgabe 61: Rang einer Matrix

Bestimmen Sie den Rang der folgenden Matrizen

a)

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 3 & -1 & -4 \\ 2 & 3 & -4 & -7 & -3 \\ 3 & 8 & 1 & -7 & -8 \end{pmatrix}.$$

b)

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

c)

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 6 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & -7 & 8 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & 4 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 62: Matrix rank

Calculate the rank of the matrix

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Aufgabe 63: Matrix rank

Determine the rank of the matrix

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 3 & 8 & 6 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & -7 & 8 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & 4 \end{bmatrix}.$$

Aufgabe 64: Tensorprodukt

Gegeben seien die Vektoren $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^4$ und $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$.

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke

i) $(\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b})\, \boldsymbol{x}$

ii) $\boldsymbol{a} \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \rangle$

Was fällt Ihnen auf?

Aufgabe 65: Dimensionssatz für Untervektorräume

Weisen Sie den Dimensionssatz nach für den Unterraum $\boldsymbol{U} = \{\, \lambda\, \boldsymbol{a} \,|\, \lambda \in \mathbb{R} \,\} \subset \boldsymbol{V}$ und $\boldsymbol{W} = \{\, \mu\, \boldsymbol{b} \,|\, \mu \in \mathbb{R} \,\} \subset \boldsymbol{V}$ mit festen $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{V} = \mathbb{R}^n$, $0 < n < \infty$.

Temporary page!

LaTeX was unable to guess the total number of pages correctly. As there was some unprocessed data that should have been added to the final page this extra page has been added to receive it.

If you rerun the document (without altering it) this surplus page will go away, because LaTeX now knows how many pages to expect for this document.