

Mathematik II/B (WI/ET)

Blatt 5

WT 2024

Kurvendiskussion, Taylorpolynom

Einführende Bemerkungen

- Vermeiden Sie die Verwendung von Taschenrechnern oder Online-Ressourcen.
-

Aufgabe 5.1: Taylor-Entwicklung

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \ln(x).$$

- a) Bestimmen Sie das Taylor-Polynom der Ordnung zwei, $T_2(x)$, von $f(x)$ an der Stelle $x = 1$.
- b) Bestimmen Sie das Restglied $R_2(x; 1)$ und schätzen Sie

$$\max_{x \in [1, 2]} |R_2(x; 1)|.$$

Aufgabe 5.2: Taylor-Entwicklung

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \sin(x) \ln(x).$$

- a) Bestimmen Sie das Taylor-Polynom zweiter Ordnung $T_2(x)$ von $f(x)$ um den Punkt $x = 1$.
- b) Bestimmen Sie die Differenz zwischen dem Taylor-Polynom $T_2(x)$ und der Funktion $f(x)$ im Punkt $x = 0$, d.h. bestimmen Sie $d(0)$, wobei

$$d(x) := |T_2(x) - f(x)|.$$

Man beachte, dass die Funktion $f(x)$ an der Stelle $x = 0$ stetig fortgesetzt werden muss.

Aufgabe 5.3: Taylor-Polynom

- a) Geben Sie das Taylorpolynom n -ter Ordnung der folgenden Funktionen um den angegebenen Entwicklungspunkt x_0 an:
- i) $f(x) = \sin(x) \cdot \cos(x)$ um $x_0 = 0, n = 4$
- ii) $g(x) = \cos(x)$ um $x_0 = \pi/2, n = 4$
- iii) $h(x) = e^{1-x}(x^2 - 2x)$ um $x_0 = 1, n = 2$
- b) Geben Sie die Nullstellen der Funktionen sowie der Taylor-Polynome im Intervall $[0, 5]$ an.
- c) Skizzieren Sie die Funktionen und deren Taylor-Polynome.

Aufgabe 5.4: Asymptoten

Man bestimme die (waagerechten bzw. senkrechten bzw. schrägen) Asymptoten der folgenden Funktionen:

- a) $f(x) = \frac{x}{4-x^2}$
- b) $g(x) = e^{-x^2}$
- c) $h(x) = \frac{x^2-3x}{2x-2}$
- d) $l(x) = x^2 e^{-x}$

Aufgabe 5.5: Kurvendiskussion

Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich, die Symmetrie, alle Nullstellen, sowie Art und Lage der kritischen Punkte und Wendepunkte der reellen Funktion

$$f(x) = x\sqrt{16 - x^2}.$$

Aufgabe 5.6: Kurvendiskussion

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x}{1 - x}.$$

- i) Geben Sie den maximalen Definitionsbereich der Funktion f an.
 - ii) Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion.
 - iii) Bestimmen Sie die kritischen Punkte der Funktion und deren Funktionswerte. Klassifizieren Sie alle kritischen Punkte als Minimum, Maximum oder Wendepunkt.
 - iv) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten der Funktion.
 - v) Bestimmen Sie alle Asymptoten der Funktion.
 - vi) Bestimmen Sie den Wertebereich der Funktion.
 - vii) Skizzieren Sie die Funktion.
-

Ergebnisse zu Aufgabe 5.1:

Eine Abschätzung des Restglieds ist

$$R_2(x; 1) \leq \frac{1}{3}.$$

Ergebnisse zu Aufgabe 5.2:

Die Differenz ist

$$d(0) = \frac{3 \sin(1)}{2} - \cos(1).$$

Ergebnisse zu Aufgabe 5.3:

- i) $T_4(x) = x - 2x^3/3$, ii) $T_4(x) = -(x - \pi/2) + 1/6 \cdot (x - \pi/2)^3$
- iii) $T_2(x) = -1 + (x - 1) + 1/2 \cdot (x - 1)^2$

Ergebnisse zu Aufgabe 5.4:

Ergebnisse zu Aufgabe 5.5:

$D(f) = [-4, 4]$, f ist ungerade, Nullstellen: $x = 0, \pm 4$, Extrema bei $x = \pm 2\sqrt{2}$, Wendepunkt bei $x = 0$

Ergebnisse zu Aufgabe 5.6:

- a) ii) $0, -3$, iii) $-1, 3$, iv) $g(x) = -x - 4$