Helmut-Schmidt-Universität
Universität der Bundeswehr Hamburg
Fakultät für Maschinenbau und Bauingenieurwesen

Prof. Dr. Thomas Carraro
M.Sc Janna Puderbach

Mathematik II/B (WI/ET) Blatt 7

WT 2024 Newton-Verfahren, Kurvendiskussion, Integration

Einführende Bemerkungen

- Vermeiden Sie die Verwendung von Taschenrechnern oder Online-Ressourcen.

Aufgabe 7.1: Newton-Verfahren

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = 17x^3 - 468x^2 + 2849x - 2294.$$

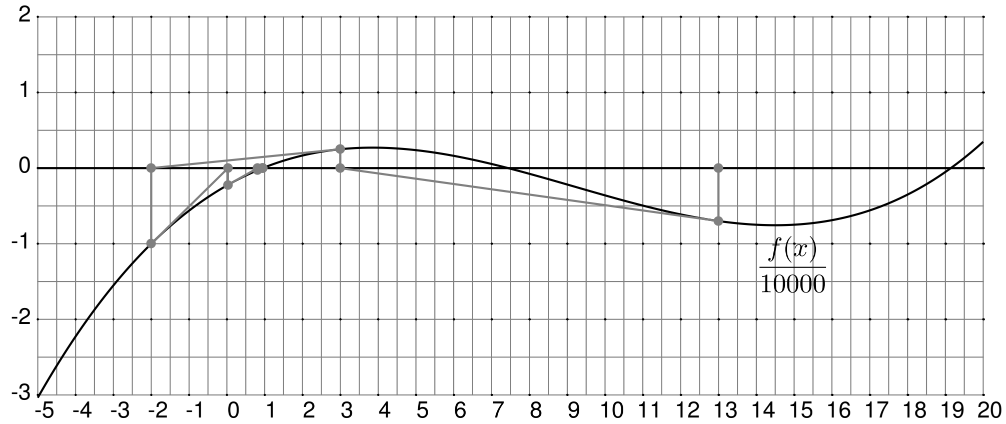
a) Skizzieren Sie die Funktion im Intervall $-5 \leq x \leq 20$.

b) Führen Sie mindestens zwei Schritte des Newton-Verfahrens mit dem Startwert $x_0 = 13$ für die Funktion $f(x)$ durch.

c) Skizzieren Sie im Funktionsgraphen die berechneten Iterationen x_0, x_1, x_2, ….

Lösung 7.1:

a)/c)



b) Das Newtonverfahren mit der Iterationsvorschrift:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

ergibt

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$-f(x_n)/f'(x_n)$
0	13.0000	-7000.0000	-700	-10.0000000
1	3.0000	2500.0000	500	-5.0000000
2	-2.0000	-10000.0000	4925	2.0304568
3	0.0304	-2207.6621	2821	0.7827090
4	0.8131	-277.6091	2122	0.1308489
5	0.9440	-7.2647	2011	0.0036127
6	0.9476	-0.0055	2008	0.0000027
7	0.9476			

Aufgabe 7.2:

a) Bestimmen Sie die folgenden Integrale

i) $\int\limits_{t=0}^{x} (t^2+3t-4)\mathrm{d}t$

ii) $\int\limits_{x=-4}^{4} (x^3-x)\mathrm{d}x$

iii) $\int\limits_{x=-1}^{3} \left(5x^4+\frac{x^3}{3}+2\right)\mathrm{d}x$

iv) $\int \frac{1}{(x+1)^3}\mathrm{d}x.$

b) Bestimmen Sie desweiteren

i) $\int \cos(x)\mathrm{d}x$

ii) $\int\limits_{x=2}^{8} \frac{1}{x}\mathrm{d}x$

iii) $\int\limits_{x=0}^{2\pi} \sin(x)\mathrm{d}x$

iv) $\int\limits_{x=0}^{\pi/2} \cos(x)\mathrm{d}x.$

Lösung 7.2:

a) **i)**

$$\int\limits_{t=0}^{x} \left(t^2+3t-4\right)\mathrm{d}t = \left[\frac{t^3}{3}+\frac{3t^2}{2}-4t\right]_{t=0}^{x}$$
$$=\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}-4x$$

ii)

$$\int\limits_{x=-4}^{4} \left(x^3-x\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right]_{x=-4}^{4} = 0$$

(Dasselbe Ergebnis kann man auch ohne Rechnung begründen, da eine ungerade Funktion auf einem symmetrischen Intervall integriert wird.)

iii)

$$\int\limits_{x=-1}^{3} \left(5x^4+\frac{x^3}{3}+2\right)\mathrm{d}x = \left[x^5+\frac{x^4}{12}+2x\right]_{x=-1}^{3}$$
$$=3^5+\frac{3^4}{12}+2\cdot 3-\left((-1)^5+\frac{(-1)^4}{12}+2\cdot(-1)\right)$$
$$=243+\frac{27}{4}+6+1-\frac{1}{12}+2$$
$$=252+\frac{81-1}{12}=\frac{776}{3}$$

iv)

$$\int \frac{1}{(x+1)^3}\mathrm{d}x = -\frac{1}{2(x+1)^2}+C$$

b) **i)**

$$\int \cos(x)\mathrm{d}x = \sin(x)+C$$

ii)

$$\int\limits_{x=2}^{8} \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x|\Big|_{x=2}^{8} = \ln(8)-\ln(2) = \ln\frac{8}{2} = \ln(4)$$

iii)

$$\int\limits_{x=0}^{2\pi} \sin(x)\mathrm{d}x = -\cos(x)\Big|_{x=0}^{2\pi} = -\cos(2\pi)+\cos(0) = 0$$

(Auch hier hätte man mit der Symmetrie der Sinusfunktion argumentieren können.)

iv)

$$\int\limits_{x=0}^{\pi/2} \cos(x)\mathrm{d}x = \sin(x)\Big|_{x=0}^{\pi/2} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)-\sin(0) = 1-0 = 1.$$

Aufgabe 7.3:

a) **zur partiellen Integration**

$$\int u(t)\cdot v'(t)\ \mathrm{d}t \ = \ u(t)\cdot v(t) - \int u'(t)\cdot v(t)\ \mathrm{d}t$$

Berechnen Sie Stammfunktionen der beiden Funktionen

$$\textbf{i)}\ (2t-1)\ \cos(t), \qquad \textbf{ii)}\ \big(t^2+t-5\big)\ \mathrm{e}^{t/2}.$$

b) **zur Substitution**

$$\int f\big(g(t)\big)\cdot g'(t)\ \mathrm{d}t \ = \ \int f(z)\ \mathrm{d}z \text{ mit } z=g(t)\ , \quad \mathrm{d}z = g'(t)\,\mathrm{d}t$$

Berechnen Sie Stammfunktionen von

$$\textbf{i)}\ 4\,t\,\mathrm{e}^{t^2} \qquad \textbf{ii)}\ \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{e}^{\sqrt{t}}\ .$$

Lösung 7.3:

a) **i)** Mit $u(t)=(2t-1)\,,\ u'(t)=2$ und $v'(t)=\cos(t)\,,\ v(t)=\sin(t)$ erhält man

$$\int(2t-1)\ \cos(t)\,\mathrm{d}t \ = \ (2t-1)\sin(t)-\int 2\sin(t)\ \mathrm{d}t \ = \ (2t-1)\sin(t)+2\cos(t)+C\ .$$

ii) Mit $u(t) = t^2+t-5\,,\ u'(t) = 2t+1$ und $v'(t) = \mathrm{e}^{t/2}\,,\ v(t) = 2\,\mathrm{e}^{t/2}$ für die erste partielle Integration und mit $u(t) = 4t+2\,,\ u'(t) = 4$ und $v'(t)=\mathrm{e}^{t/2}\,,\ v(t)=2\,\mathrm{e}^{t/2}$ für die zweite erhält man

$$\begin{aligned}
\int\big(t^2+t-5\big)\,\mathrm{e}^{t/2}\ \mathrm{d}t &= \big(t^2+t-5\big)\,2\,\mathrm{e}^{t/2} - \int(2t+1)\,2\,\mathrm{e}^{t/2}\ \mathrm{d}t\\
&= \big(2\,t^2+2\,t-10\big)\,\mathrm{e}^{t/2} - (4t+2)\,2\,\mathrm{e}^{t/2} + \int 4\cdot 2\,\mathrm{e}^{t/2}\ \mathrm{d}t\\
&= \big(2\,t^2-6\,t-14\big)\,\mathrm{e}^{t/2} + 16\,\mathrm{e}^{t/2} + C\\
&= \big(2\,t^2-6\,t+2\big)\,\mathrm{e}^{t/2} + C\ .
\end{aligned}$$

b) **i)** Mit $z=t^2$ und $\mathrm{d}z = 2\,t\ \mathrm{d}t$ erhält man

$$\int 4\,t\,\mathrm{e}^{t^2}\ \mathrm{d}t \ = \ \int 2\,\mathrm{e}^z\ \mathrm{d}z \ = \ 2\,\mathrm{e}^z + C \ = \ 2\,\mathrm{e}^{t^2}+C\ .$$

ii) Mit $z=\sqrt{t}$ und $\mathrm{d}z = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ erhält man

$$\int \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{e}^{\sqrt{t}}\ \mathrm{d}t \ = \ 2\int \mathrm{e}^z\ \mathrm{d}z \ = \ 2\mathrm{e}^z + C \ = \ 2\mathrm{e}^{\sqrt{t}}+C\ .$$

Aufgabe 7.4: Partialbruchzerlegung

Berechnen Sie mit Hilfe der Partialbruchzerlegung die unbestimmten Integrale folgender Funktionen:

a) $f(x) = \dfrac{x^2-x-1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$, b) $f(x) = \dfrac{x^2}{(x-3)^3}$,

c) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{(x+1)(x-2)^2}$, d) $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)(x^2+x+1)}$.

Lösung 7.4:

Zu a) Die Funktion f lässt sich darstellen als

$$f(x) = \frac{x^2-x-1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}\,.$$

Durch Multiplikation mit dem Hauptnenner erhält man

$$x^2-x-1 = A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-2)(x-1)$$

Einsetzen der Nullstellen des Hauptnenners in die Gleichung liefert:
für $x=1:\quad -1 = A\cdot(-1)\cdot(-2) \Rightarrow A = -\frac{1}{2}$
für $x=2:\quad B=-1$
für $x=3:\quad 5 = C\cdot 2 \Rightarrow C = \frac{5}{2}\,.$

Es folgt

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\ln|x-1| - \ln|x-2| + \frac{5}{2}\ln|x-3| + C\,.$$

Zu b) Die Funktion f lässt sich darstellen als

$$f(x) = \frac{x^2}{(x-3)^3} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x-3)^2} + \frac{C}{(x-3)^3}\,.$$

Durch Multiplikation mit dem Hauptnenner erhält man

$$x^2 = A(x-3)^2 + B(x-3) + C$$

Es folgt Einsetzen der Nullstelle des Hauptnenners in die Gleichung liefert für $x=3$ den Wert $C=9$ und Koeffizientenvergleich für x^2 liefert $A=1$. Nun wählen wir noch $x=4$ und erhalten die Gleichung $16 = A+B+C \Rightarrow B = 16$.

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \ln|x-3| - \frac{6}{x-3} - \frac{9}{2(x-3)^2} + C\,.$$

Zu c) Hier existiert eine Partialbruchzerlegung der Form

$$f(x) = \frac{x^2+1}{(x+1)(x-2)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2}\,.$$

Durch Multiplikation mit dem Hauptnenner erhält man

$$x^2+1 = A(x-2)^2 + B(x+1)(x-2) + C(x+1)$$

Einsetzen der Nullstellen des Hauptnenners in die Gleichung liefert:
für $x=-1:\quad 2 = A\cdot 9 \Rightarrow A = \frac{2}{9}$
für $x=2:\quad 5 = C\cdot 3 \Rightarrow C = \frac{5}{3}\,.$

Mithilfe des Koeffizientenvergleichs für die Potenz x^2 erhält man $1 = A+B \Rightarrow B = 1-A = \frac{7}{9}$.
Folglich ist

$$f(x) = \frac{2}{9(x+1)} + \frac{7}{9(x-2)} + \frac{5}{3(x-2)^2}\,,$$

und

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{9}\ln|x+1| + \frac{7}{9}\ln|x-2| - \frac{5}{3(x-2)} + C\,.$$

Zu d) Der Faktor x^2+x+1 hat hier keine reellen Nullstellen und kann deshalb nicht in Linearfaktoren zerlegt werden (zumindest nicht in $\mathbb{R}$). Deshalb benutzt man den Ansatz

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}\,.$$

Durch Multiplikation mit dem Hauptnenner erhält man

$$1 = A(x^2+x+1) + (Bx+C)(x-1)$$

Einsetzen der reellen Nullstelle des Hauptnenners in die Gleichung liefert für $x=1$ die Gleichung $1 = 3\cdot A \Rightarrow A = \frac{1}{3}$ und Koeffizientenvergleich für x^2 liefert $0 = A+B \Rightarrow B = -\frac{1}{3}$. Nun wählen wir noch $x=0$ und erhalten $1 = A - C \Rightarrow C = A-1 = -\frac{2}{3}\,.$

Damit ist $f(x) = \dfrac{1}{3(x-1)} - \dfrac{x+2}{3(x^2+x+1)}$. Das Integral über $\dfrac{x+2}{x^2+x+1}$ berechnet man mit der Substitution $u = x + \dfrac{1}{2}$,

$$\begin{aligned}
\int \frac{x+2}{x^2+x+1}\mathrm{d}x &= \int \frac{x+2}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{u+\frac{3}{2}}{u^2+\frac{3}{4}}\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{2u}{u^2+\frac{3}{4}}\mathrm{d}u + \frac{3}{2}\int \frac{1}{u^2+\frac{3}{4}}\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2}\ln\left|u^2+\frac{3}{4}\right| + \frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\int \frac{1}{\frac{4u^2}{3}+1}\mathrm{d}u, \quad \text{substituiere } z = 2u/\sqrt{3} \\
&= \frac{1}{2}\ln\left|u^2+\frac{3}{4}\right| + \sqrt{3}\int \frac{1}{z^2+1}\mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{2}\ln\left|u^2+\frac{3}{4}\right| + \sqrt{3}\arctan(z) + C \\
&= \frac{1}{2}\ln\left|u^2+\frac{3}{4}\right| + \sqrt{3}\arctan\left(\frac{2u}{\sqrt{3}}\right) + C \\
&= \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \sqrt{3}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C
\end{aligned}$$

Damit gilt

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C\,.$$

Aufgabe 7.5: Integration

a) Berechnen Sie folgende Integrale mittels partieller Integration:

i) $\int x \cdot \sin x \, \mathrm{d}x$,

ii) $\int \sin^2(x) \, \mathrm{d}x$,

iii) $\int x^2 \mathrm{e}^{1-x} \, \mathrm{d}x$,

iv) $\int \frac{x}{\cos^2 x} \, \mathrm{d}x$,

v) $\int\limits_0^{\pi/4} \frac{x}{\cos^2 x} \, \mathrm{d}x$

b) Berechnen Sie folgende Integrale mittels einer geeigneten Substitution:

i) $\int\limits_1^2 \frac{3x^2+7}{x^3+7x-2} \, \mathrm{d}x$,

ii) $\int\limits_\pi^{3\pi/2} x^2 \cos(x^3+2) \, \mathrm{d}x$,

iii) $\int\limits_1^2 \frac{1}{x} \mathrm{e}^{1+\ln x} \, \mathrm{d}x$,

iv) $\int\limits_{1/4}^1 \mathrm{e}^{\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x$,

v) $\int \cosh^2 x \sinh x \, \mathrm{d}x$

Lösung 7.5:

a) **i)**

$$\int \underbrace{x}_{u} \underbrace{\sin x}_{v'} \, \mathrm{d}x = \underbrace{x}_{u} \underbrace{(-\cos x)}_{v} - \int \underbrace{1}_{u'} \cdot \underbrace{(-\cos x)}_{v}$$

$$= -x \cos x + \int \cos x = -x \cos x + \sin x + C$$

ii)

$$\int \underbrace{\sin x}_{u} \underbrace{\sin x}_{v'} \, \mathrm{d}x = \underbrace{\sin x}_{u} \underbrace{(-\cos x)}_{v} - \int \underbrace{\cos x}_{u'} \underbrace{(-\cos x)}_{v} \, \mathrm{d}x$$

$$= -\sin x \cos x + \int \underbrace{\cos x \cos x}_{=1-\sin^2 x} \, \mathrm{d}x$$

$$= -\sin x \cos x + \int 1 \, \mathrm{d}x - \int \sin^2 x \, \mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow \quad 2 \int \sin^2 x \, \mathrm{d}x = -\sin x \cos x + x + 2C$$

$$\Rightarrow \quad \int \sin^2 x \, \mathrm{d}x = \frac{x - \sin x \cos x}{2} + C$$

Alternativ kann man die Beziehung $\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$ (siehe Formelsammlung) nutzen. Damit bekommt man:

$$\int \sin^2(x) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int (1 - \cos(2x)) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{2} \sin(2x) \right) + C$$

Dies lässt sich mithilfe von $\sin(x)\cos(x) = \frac{1}{2}\sin(x)$ in die andere Darstellung der Lösung umwandeln.

iii)

$$\int \underbrace{x^2}_{u} \underbrace{\mathrm{e}^{1-x}}_{v'} \, \mathrm{d}x = \underbrace{x^2}_{u} \underbrace{(-\mathrm{e}^{1-x})}_{v} - \int \underbrace{2x}_{u'=u_2} \underbrace{(-\mathrm{e}^{1-x})}_{v=v_2'} \, \mathrm{d}x$$

$$= -x^2 \mathrm{e}^{1-x} - \underbrace{2x}_{u_2} \underbrace{\mathrm{e}^{1-x}}_{v_2} + \int \underbrace{2}_{u_2'} \underbrace{\mathrm{e}^{1-x}}_{v_2} \, \mathrm{d}x$$

$$= -(x^2 + 2x)\mathrm{e}^{1-x} - 2\mathrm{e}^{1-x} + C = -(x^2 + 2x + 2)\mathrm{e}^{1-x} + C$$

iv)

$$\int \underbrace{x}_{u} \underbrace{\frac{1}{\cos^2 x}}_{v'} \, \mathrm{d}x = \underbrace{x}_{u} \underbrace{\tan x}_{v} - \int \underbrace{1}_{u'} \underbrace{\tan x}_{v} \, \mathrm{d}x$$

$$= x \tan x + \ln|\cos x| + C$$

v) $\left[x \tan x + \ln|\cos x| \right]_{x=0}^{\pi/4} = \frac{\pi}{4} + \ln \frac{1}{\sqrt{2}} - 0 = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$

b) **i)** Mit $y = x^3 + 7x - 2$ und $\mathrm{d}y = (3x^2 + 7) \, \mathrm{d}x$ hat man:

$$\int\limits_1^2 \frac{3x^2+7}{x^3+7x-2} \, \mathrm{d}x = \int\limits_{y(1)}^{y(2)} \frac{1}{y} \, \mathrm{d}y = \Big[\ln|y| \Big]_6^{20} = \ln \frac{20}{6} = \ln \frac{10}{3}$$

ii) Hier wählt man $y = x^3 + 2$ und erhält daraus $\mathrm{d}y = 3x^2 \, \mathrm{d}x$ und setzt ein:

$$\frac{1}{3} \int\limits_\pi^{3\pi/2} 3x^2 \cos(x^3 + 2) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{3} \int\limits_{y(\pi)}^{y(3\pi/2)} \cos(y) \, \mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{3} \left(\sin\left(\left(\frac{3\pi}{2} \right)^3 + 2 \right) - \sin(\pi^3 + 2) \right)$$

iii) Mit $y = 1 + \ln x$ und $\mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}x}{x}$ hat man

$$\int\limits_1^2 \frac{1}{x} \mathrm{e}^{1+\ln x} \, \mathrm{d}x = \int\limits_{y(1)}^{y(2)} \mathrm{e}^y \, \mathrm{d}y = \mathrm{e}^{1+\ln 2} - \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$$

iv) Wir wählen $y = \sqrt{x}$. Damit folgt (für $x > 0$):

$$x = y^2 \;\Rightarrow\; \mathrm{d}x = 2y \, \mathrm{d}y$$

und schließlich

$$\begin{aligned}
\int\limits_{1/4}^{1} \mathrm{e}^{\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x = \int\limits_{y(1/4)}^{y(1)} \mathrm{e}^y \cdot 2y \, \mathrm{d}y = 2 \int\limits_{1/2}^{1} y\mathrm{e}^y \, \mathrm{d}y \\
= \big[2y\mathrm{e}^y\big]_{1/2}^{1} - 2 \int\limits_{1/2}^{1} \mathrm{e}^y \, \mathrm{d}y \text{ (partielle Integration)} \\
= 2\mathrm{e} - \sqrt{\mathrm{e}} - 2(\mathrm{e} - \sqrt{\mathrm{e}}) = \sqrt{\mathrm{e}}
\end{aligned}$$

v) Mit $y = \cosh x$ und $\mathrm{d}y = \sinh x \, \mathrm{d}x$ hat man

$$\int \cosh^2 x \sinh x \, \mathrm{d}x = \int y^2 \, \mathrm{d}y = \frac{y^3}{3} + C = \frac{\cosh^3 x}{3} + C$$

Aufgabe 7.6: Kurvendiskussion

Gegeben sei die reelle Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 + 7\,x + 10}{x+1} \ .$$

i) Geben Sie den maximalen Definitionsbereich der Funktion an.

ii) Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion.

iii) Bestimmen Sie die kritischen Punkte für die Extrema der Funktion und deren Funktionswerte.

iv) Bestimmen Sie die (nicht vertikale) Asymptote der Funktion, d. h. diejenige Gerade $g(x) = a + bx$, für die

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left(f(x) - g(x)\right) = 0$$

gilt.

v) Skizzieren Sie die Funktion.

Lösung 7.6:

Zu a)

i) Die Funktion ist nur an der Nullstelle des Nenners, $x_{\text{Pol}} = -1$, nicht definiert und hat dort eine einfache Polstelle.

ii) Die Nullstellen sind die Nullstellen des Zählers: $x_{N1} = -5$ und $x_{N2} = -2$.

iii) Die kritischen Punkte für die Extrema sind die Nullstellen (des Zählers) der ersten Ableitung:

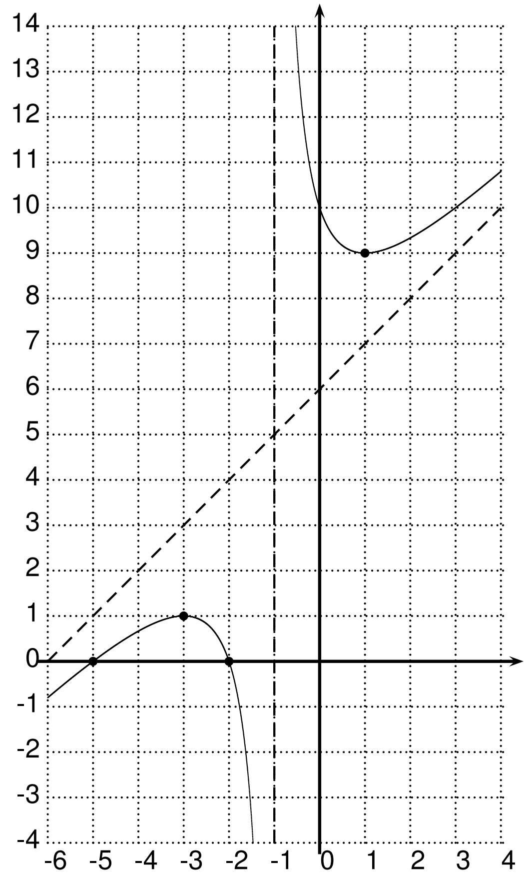
$$f'(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2} \quad \Longrightarrow \quad x_{E1} = -3 \text{ un d } x_{E2} = 1$$

mit $f(-3) = 1$ und $f(1) = 9$.

iv) Durch Polynomdivision erhält man die Asymptote:

$$f(x) = \frac{x^2 + 7\,x + 10}{x+1} = x + 6 + \frac{4}{x+1} \quad \Longrightarrow \quad g(x) = x + 6\,.$$

v) Skizze:



Aus der Skizze ersieht man, dass bei $x = -3$ ein Maximum vorliegt und bei $x = 1$ ein Minimum.

Zu b) Da die Funktion beliebig oft differenzierbar ist, können die Extrema nur an Nullstellen der ersten Ableitung liegen:

$$g'(x) = x^7 \cdot (8 + x) \cdot \mathrm{e}^x = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = -8 \text{ und } x_{2,\ldots,8} = 0\,.$$

Da $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 0$ und $g(0) = 0$ ist und $x = -8$ der einzige kritische Punkt im Innern dieses Intervalls ist, liegt wegen $g(-8) > 0$ an der Stelle $x = -8$ ein Maximum vor.
An der Stelle $x = 0$ gilt $g(x) = 0$. Da $x = 0$ die einzige Nullstelle ist, muß dies ein Minimum sein.