

Mathematik II/B (WI/ET)

Blatt 6

WT 2024

Kurvendiskussion, Taylorpolynom, Newton-Verfahren

Einführende Bemerkungen

- Vermeiden Sie die Verwendung von Taschenrechnern oder Online-Ressourcen.
-

Aufgabe 6.1: Taylor-Entwicklung in einer Variablen

Bestimmen Sie die Taylor-Entwicklung zweiter Ordnung der Exponentialfunktion e^x um den Punkt $x_0 = 0$ in dem Intervall $0 \leq x \leq 1$ einschließlich des Restgliedtermes. Zeigen Sie damit die Abschätzung:

$$e \leq 3.$$

Lösung 6.1:

Wir beginnen mit der Taylor-Entwicklung der Exponentialfunktion in dem Intervall $0 \leq x \leq 1$:

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{e^\xi}{3!}x^3,$$

mit $0 \leq \xi \leq 1$.

Da die Exponentialfunktion monoton steigend ist und $\xi \leq 1$, gilt $e^\xi \leq e^1$. Daher gilt die folgende Abschätzung

$$e^x \leq 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{e}{3!}x^3,$$

für $0 \leq x \leq 1$. Der obige Ausdruck an der Stelle $x = 1$ ausgewertet führt zu

$$\begin{aligned} e &\leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{e}{6}, \\ \frac{5}{6}e &\leq \frac{5}{2}, \\ e &\leq 3. \end{aligned}$$

Aufgabe 6.2: Kurvendiskussion, Taylorentwicklung

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = e^{-x^2/2}(2x - 3).$$

- a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich von f .
- b) Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion f .
- c) Bestimmen Sie die Asymptoten von f .
- d) Bestimmen Sie die kritischen Punkte der Funktion f und charakterisieren Sie diese **ohne** Berechnung der zweiten Ableitung.
- e) Geben Sie die Taylorentwicklung in den Extrempunkten bis zum Grad 2 an.
- f) Skizzieren Sie die Funktion, die Asymptote, sowie die Taylorapproximationen.

Lösung 6.2:

- a) Die Funktion f ist auf ganz \mathbb{R} definiert.
- b) Die einzige Nullstelle der Funktion ist $x_0 = \frac{3}{2}$.
- c)

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (e^{-x^2/2}(2x - 3)) \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x - 3}{e^{x^2/2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2}{xe^{x^2/2}}, \quad (\text{L'Hospital}) \\ &= 0\end{aligned}$$

- d) Kritische Punkte sind Nullstellen der ersten Ableitung von f :

$$\begin{aligned}0 &\stackrel{!}{=} f'(x) = e^{-x^2/2}(-x(2x - 3) + 2) = e^{-x^2/2}(-2x^2 + 3x + 2) \\ \Leftrightarrow \quad 0 &= x^2 - \frac{3}{2}x - 1 \\ \Leftrightarrow \quad x_{1,2} &= \frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16} + 1} = \left\{ \begin{array}{l} 2 \\ -\frac{1}{2} \end{array} \right.\end{aligned}$$

Da die Funktion $f(x)$ zwischen den beiden kritischen Punkten x_1 und x_2 bei x_0 eine Nullstelle hat und links davon negativ und rechts von x_0 positiv ist und sich asymptotisch der x -Achse annähert, muss in $x_1 = 2$ ein Maximum und in $x_2 = -\frac{1}{2}$ ein Minimum liegen.

- e) Zur Bestimmung der Taylorpolynome wird die zweite Ableitung von f benötigt:

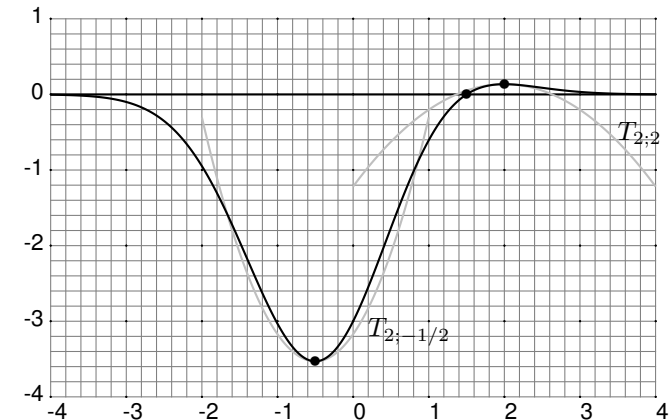
$$f''(x) = e^{-x^2/2}(2x^3 - 3x^2 - 2x - 4x + 3) = e^{-x^2/2}(2x^3 - 3x^2 - 6x + 3)$$

Die Taylor-Polynome in den beiden Extrempunkten sind damit

$$\begin{aligned}\text{in } x_1 = 2: \quad T_{2;2}(x) &= f(x_1) + \frac{f'(x_1)}{1!}(x - x_1) + \frac{f''(x_1)}{2!}(x - x_1)^2 \\ &= e^{-2} + 0 + \frac{e^{-2} \cdot (-5)}{2}(x - 2)^2 = e^{-2} \left(1 - \frac{5}{2}(x - 2)^2 \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{in } x_2 = -1/2: \quad T_{2;-1/2}(x) &= f(x_2) + \frac{f'(x_2)}{1!}(x - x_2) + \frac{f''(x_2)}{2!}(x - x_2)^2 \\ &= e^{-1/8}(-4) + 0 + 5e^{-1/8} \frac{(x + \frac{1}{2})^2}{2} \\ &= e^{-1/8} \left(-4 + \frac{5}{2} \left(x + \frac{1}{2} \right)^2 \right)\end{aligned}$$

- f)



Aufgabe 6.3: Kurvendiskussion

Führen Sie eine Kurvendiskussion für die Funktion

$$f(x) = \ln(3x^2 + 2x + 1)$$

durch. Bestimmen Sie dazu:

- a) den maximalen Definitionsbereich von f ,
- b) die Symmetrieachsen von f , d. h. Werte $\alpha \in \mathbb{R}$, so dass $f(\alpha + x) = f(\alpha - x)$,
- c) das Verhalten von f im Unendlichen,
- d) die Nullstellen von f ,
- e) die Extrema und das Monotonieverhalten von f ,
- f) sowie die Wendepunkte und das Krümmungsverhalten von f .
- g) Skizzieren Sie den Graphen von f .

Lösung 6.3:

- a) Die Funktion ist für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert, weil das Argument der Logarithmusfunktion immer positiv ist:

$$3x^2 + 2x + 1 = \left(\sqrt{3}x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1 - \frac{1}{3} > 1 - \frac{1}{3} > 0.$$

- b) Gesucht ist ein $\alpha \in \mathbb{R}$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$f(\alpha + x) = f(\alpha - x)$$

$$\Leftrightarrow \ln(3(\alpha + x)^2 + 2(\alpha + x) + 1) = \ln(3(\alpha - x)^2 + 2(\alpha - x) + 1)$$

$$\Leftrightarrow 3(\alpha + x)^2 + 2(\alpha + x) + 1 = 3(\alpha - x)^2 + 2(\alpha - x) + 1 \quad (\text{Monotonie von } \ln)$$

$$\Leftrightarrow 6x\alpha + 2x = -6x\alpha - 2x$$

$$\Leftrightarrow (12\alpha + 4)x = 0$$

$$\Leftrightarrow 12\alpha + 4 = 0$$

Also liegt die Symmetrieachse bei $\alpha = -1/3$.

- c) Es ist

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \infty.$$

- d) Die einzige Nullstelle des Logarithmus liegt bei 1, also muss für $f(x) = 0$ gelten:

$$1 = 3x^2 + 2x + 1 \Rightarrow x \in \{0, -2/3\}.$$

- e) Die Nullstellen der Ableitung berechnen sich zu:

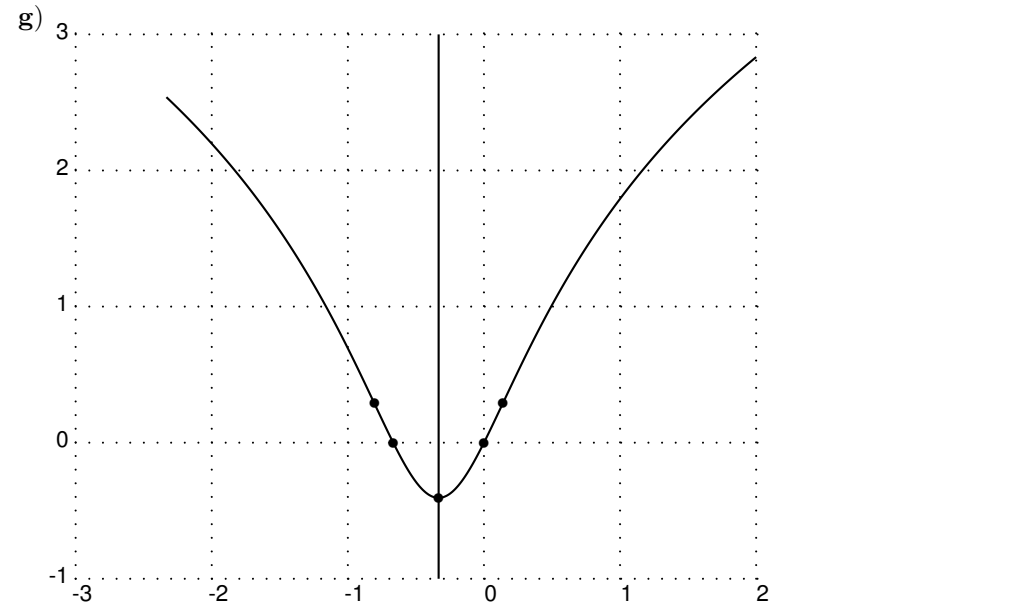
$$0 = f'(x) = \frac{1}{3x^2 + 2x + 1} \cdot (6x + 2) \Rightarrow x = -\frac{1}{3}.$$

Dies ist die einzige Nullstelle der Ableitung. Da die Funktion bezüglich dieser Achse symmetrisch ist, und für $x \rightarrow \pm\infty$ gegen ∞ geht, liegt bei $x = -1/3$ ein Minimum.

- f) Die Wendepunkte liegen an den Nullstellen der zweiten Ableitung:

$$0 = f''(x) = \frac{6(3x^2 + 2x + 1) - (6x + 2)^2}{(3x^2 + 2x + 1)^2} = \frac{-18x^2 - 12x + 2}{(3x^2 + 2x + 1)^2}$$
$$\Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{2}}{3}.$$

Links von $-1/3 - \sqrt{2}/3$ ist $f''(x) < 0$, also ist die Funktion dort konkav, rechts von $-1/3 - \sqrt{2}/3$ ist $f''(x) > 0$ und die Funktion f ist dort konvex. Rechts von $-1/3 + \sqrt{2}/3$ ist die Funktion wegen der Symmetrie wiederum konkav.



Aufgabe 6.4: Newton-Verfahren

a) Gegeben seien die Funktionen

$$f(x) = \frac{x}{3} \text{ und } g(x) = \sin(x^2).$$

- Skizzieren Sie die Funktionen und bestimmen Sie Näherungen für die Schnittstellen der beiden Funktionsgraphen.
- Bestimmen Sie die kleinste positive Schnittstelle mit dem Newton-Verfahren auf fünf Nachkommastellen genau.

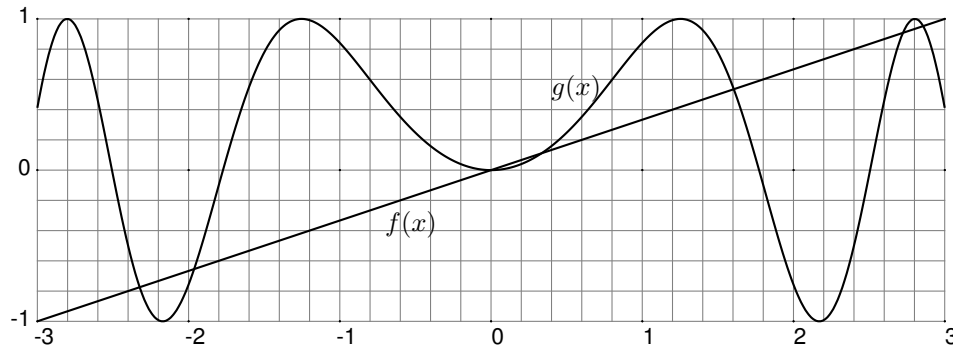
b) Führen Sie das Verfahren ebenso für die Funktionen

$$f(x) = x^3 \text{ und } g(x) = \cos(2\pi x)$$

und die betragskleinste Schnittstelle durch.

Lösung 6.4:

a)



i) Aus der Skizze kann man die ungefähren Schnittpunkte

$$(-2.3, -0.8), (-0.2, 0), (0.2, 0.1), (1.6, 0.5), (2.7, 0.9), (2.9, 0.9)$$

ablesen.

ii) Die kleinste positive Schnittstelle z liegt im Intervall $[0.3, 0.4]$. Sie ist Nullstelle der Funktion $F(x) = f(x) - g(x)$ mit

$$F'(x) = \frac{1}{3} - 2x \cos(x^2).$$

Die Iterationsvorschrift für das Newton-Verfahren lautet:

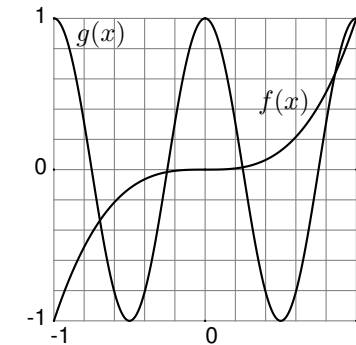
$$x_{i+1} = x_i - \frac{F(x_i)}{F'(x_i)}.$$

Mit $x_0 = 0.35$ liefert sie

n	x_n	$F(x_n)$	$F'(x_n)$	$F(x_n)/F'(x_n)$
0	0.3500000	-0.0055272	-0.3614210	0.0152929
1	0.3347071	-0.0002256	-0.3318845	0.0006798
2	0.3340273	-0.0000004	-0.3305673	0.0000014
3	0.3340259	0.0000000	-0.3305647	-0.0000000

Bereits nach drei Schritten findet keine Korrektur der ersten sechs Nachkommastellen mehr statt, der gesuchte Schnittpunkt liegt also bei $z \approx 0.33403$.

b)



i) Aus der Skizze kann man die ungefähren Schnittpunkte

$$(-0.6, -0.4), (-0.2, 0), (0.2, 0), (0.9, 0.6), (1.0, 1.0)$$

ablesen.

ii) Die betragskleinste Schnittstelle z liegt im Intervall $[0.2, 0.3]$. Sie ist Nullstelle der Funktion $G(x) = f(x) - g(x)$ mit

$$G'(x) = 3x^2 + 2\pi \sin(2\pi x).$$

Die Iterationsvorschrift für das Newton-Verfahren lautet:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{G(x_i)}{G'(x_i)}.$$

Mit $x_0 = 0.25$ liefert sie

n	x_n	$G(x_n)$	$G'(x_n)$	$G(x_n)/G'(x_n)$
0	0.250000	0.015625	6.470685	0.002415
1	0.247585	0.000004	6.466358	0.000001
2	0.247585	0.000000	6.466356	0.000000
3	0.247585			

Für diesen Fall hat das Verfahren bereits nach zwei Schritten die gewünschte Genauigkeit erreicht und das Ergebnis ist $z \approx 0.24759$.

Aufgabe 6.5: Ableitung der Umkehrfunktion

- a) Leiten Sie die Formel für die Ableitung der Umkehrfunktion her.
- b) Leiten Sie eine Formel für die zweite Ableitung der Umkehrfunktion her.
- c) Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = e^x + 2x.$$

- i) Zeigen Sie, dass $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ umkehrbar ist.
- ii) Bestimmen Sie die Ableitungen $g'(1)$ und $g''(1)$ der Umkehrfunktion

$$g = f^{-1}.$$

Lösung 6.5:

- a) Für die Umkehrfunktion von f gilt:

$$x = f(f^{-1}(x))$$

Wir leiten beide Seiten dieser Identität einmal ab. Damit erhalten wir mit der Kettenregel

$$1 = f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1}(x))'$$

Wir stellen nach der Ableitung der Umkehrfunktion um und erhalten.

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

- b) Um die Formel für die zweite Ableitung der Umkehrfunktion herzuleiten, leiten wir die Identität

$$x = f(f^{-1}(x))$$

zweimal ab. Wir erhalten

$$0 = f''(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1}(x))' \cdot (f^{-1}(x))' + f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1}(x))''$$

Wir stellen nach der zweiten Ableitung der Umkehrfunktion um. Damit erhalten wir:

$$(f^{-1})''(x) = -f''(f^{-1}(x)) \cdot \frac{((f^{-1}(x))')^2}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Wir setzen die Formel für die erste Ableitung der Umkehrfunktion ein. Damit erhalten wir:

$$(f^{-1})''(x) = -f''(f^{-1}(x)) \cdot \frac{1}{(f'(f^{-1}(x)))^3}$$

Alternativ kann man die Formel auch herleiten, indem man die Formel für die erste Ableitung der Umkehrfunktion nochmals ableitet.

- c) i) Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist streng monoton steigend, denn $x \mapsto 2x$ und $x \mapsto e^x$ sind beide streng monoton steigend. Außerdem ist $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ und $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Also werden von der stetigen Funktion $f(x)$ alle reellen Werte angenommen. Wegen der Monotonie wird jeder Wert nur genau ein Mal angenommen und die Funktion $f(x)$ ist umkehrbar.
- ii) Es ist $f(0) = e^0 + 2 \cdot 0 = 1$, also hat man $x_0 = 0$ und $y_0 = f(x_0) = 1$. Mit den Formeln für die Ableitung der Umkehrfunktion aus der Vorlesung und den Ableitungen $f'(x) = e^x + 2$ sowie $f''(x) = e^x$ folgt

$$g'(1) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{3} \text{ und } g''(1) = -\frac{f''(0)}{(f'(0))^3} = -\frac{1}{27}.$$
