



Aufgabensammlung

Mathematik III/B

für WI/ET

Prof. Dr. Thomas Carraro
Frühjahstrimester 2025

Inhaltsverzeichnis

Gewöhnliche Differentialgleichungen	1
Laplace-Transformation	65
Lineare Systeme von Differentialgleichungen	102
Ergebnisse	142

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Hier kommen einleitende Worte zu den gewöhnlichen Differentialgleichungen, welche Typen es gibt und welche Lösungsverfahren. Und ein paar Worte zur Klassifizierung.

Aufgabe 1: Bernoulli'sche Differentialgleichung

Eine Differentialgleichung der Form

$$u'(x) = f(x) \cdot u(x) + g(x) \cdot \left(u(x)\right)^n$$

heißt **Bernoulli'sche Differentialgleichung**. Sie läßt sich mit Hilfe der Substitution

$$z(x) = \left(u(x)\right)^{1-n}$$

in eine lineare Differentialgleichung für $z(x)$ überführen.

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung für $y(x)$

$$y' = \frac{-2}{x} \cdot y + x^2 \cdot y^2 .$$

Lösung 1:

Die Bernoulli'sche Differentialgleichung teilt man zuerst durch $\left(u(x)\right)^n$:

$$\frac{u'(x)}{\left(u(x)\right)^n} = f(x) \cdot \frac{1}{u(x)} + g(x)$$

Nun substituiert man $z(x) = \frac{1}{u(x)} = \left(u(x)\right)^{1-n}$. Es gilt

$$z'(x) = (1-n) \cdot \left(u(x)\right)^{-n} \cdot u'(x) = (1-n) \cdot \frac{u'(x)}{\left(u(x)\right)^n} .$$

Somit wird die Bernoulli'sche Differentialgleichung in die folgende inhomogene lineare Dgl. überführt:

$$\frac{z'(x)}{1-n} = f(x) \cdot z(x) + g(x)$$

Für die gegebene Dgl. $y'(x) = \frac{-2}{x} y + x^2 \cdot y^2$ gilt

$$u(x) = y(x), \quad n = 2, \quad f(x) = \frac{-2}{x}, \quad g(x) = x^2 .$$

Diese Gleichung geht also durch die Substitution $z(x) = (y(x))^{-1} = \frac{1}{y(x)}$ in eine inhomogene lineare Dgl. für $z(x)$

$$-z'(x) = -\frac{2}{x} \cdot z + x^2$$

über. Durch Trennung der Veränderlichen und Variation der Konstanten erhält man die folgende Lösung

$$z(x) = C \cdot x^2 - x^3 .$$

Die Rücksubstitution ergibt die gesuchte Lösung für $y(x)$:

$$y(x) = \frac{1}{C \cdot x^2 - x^3} .$$

Aufgabe 2: Definitionsbereich der Lösung einer Dgl.

- a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'(x) = 2x y^2$$

und die spezielle Lösung für den Anfangswert $y(0) = 4$.

Wie groß ist der maximale Definitionsbereich dieser Lösung?

- b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$\cos(x) \cdot y'(x) = \sin(x) \cdot y(x).$$

Lösung 2:

- a) Die Dgl. ist vom trennbaren Typ

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int 2x \, dx \Rightarrow \frac{y^{-1}}{-1} = x^2 + C \quad \vee \quad y = 0$$

und hat die allgemeine Lösung

$$y(x) = \frac{-1}{x^2 + C} , \quad C \in \mathbb{R} \quad \text{bzw.} \quad y = 0$$

Der Anfangswert $y(0) = 4$ ergibt mit $C = -\frac{1}{4}$ die Lösung

$$y_{\text{AWP}}(x) = \frac{-1}{x^2 - \frac{1}{4}} .$$

Die Lösung ist nur im Bereich $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$ definiert und hat an den Rändern bei $x = \pm \frac{1}{2}$ Polstellen.

b) Lösen der homogenen linearen Dgl.

$$\cos(x) \cdot y'(x) = \sin(x) \cdot y(x)$$

durch Trennung der Veränderlichen:

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} dx \Rightarrow \ln(|y|) = -\ln(|\cos(x)|) + \tilde{C} \quad \vee \quad y = 0$$

also

$$y(x) = \frac{C}{\cos(x)}, C \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 3: Differentialgleichungen 1. Ordnung

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung folgender Differentialgleichungen:

i) $y'(x) = (2x + 3y + 4)^{-4} - \frac{2}{3}$

ii) $u'(t) = \sqrt{\frac{t}{u}} + \frac{u}{t}, \quad t > 0$

iii) $w'(s) = \frac{2}{s}w + 15s^4$

Hinweis:

Zu a) Nutzen Sie die Substitution $z = ax + by + c$.

Zu b) Nutzen Sie die Substitution $z = \frac{u}{t}$.

Zu c) Es handelt sich hier um eine lineare Differentialgleichung. Lösen Sie zuerst die homogene Differentialgleichung. Bestimmen Sie anschließend die partikuläre Lösung.

Lösung 3:

a) Mit der Substitution $z(x) = 2x + 3y(x) + 4$ erhält man

$$y(x) = \frac{z(x) - 2x - 4}{3} \Rightarrow y'(x) = \frac{1}{3}(z'(x) - 2).$$

Durch Einsetzen in die Dgl. ergibt sich

$$z'(x) - 2 = 3 \left(z^{-4} - \frac{2}{3} \right).$$

Daraus folgt

$$\frac{dz}{dx} = 3z^{-4}.$$

Trennung der Variablen:

$$\int z^4 dz = \int 3 dx \Rightarrow \frac{z^5}{5} = 3x + c \Rightarrow z(x) = (15x + C)^{1/5} \text{ mit } C = 5c \in \mathbb{R}.$$

Mit der Rücksubstitution ergibt sich:

$$y(x) = \frac{(15x + C)^{1/5} - 2x - 4}{3}.$$

- b) Mit der Substitution $z(x) = \frac{u(t)}{t}$ erhält man

$$u(t) = tz(t) \Rightarrow u'(t) = z(t) + tz'(t).$$

Einsetzen in die Dgl liefert dann

$$z + tz' = \frac{1}{\sqrt{z}} + z \Rightarrow z' = \frac{1}{t\sqrt{z}}.$$

Trennung der Variablen:

$$\int \sqrt{z} dz = \int \frac{1}{t} dt \Rightarrow \frac{2}{3} z^{3/2} = \ln|t| + c \Rightarrow z(t) = \left(\frac{3 \ln|t|}{2} + C \right)^{2/3} \text{ mit } C = \frac{3c}{2} \in \mathbb{R}.$$

Mit der Rücksubstitution ergibt sich:

$$\frac{u(t)}{t} = \left(\frac{3 \ln|t|}{2} + C \right)^{2/3} \Rightarrow u(t) = t \cdot \left(\frac{3 \ln(t)}{2} + C \right)^{2/3} \text{ mit } C \in \mathbb{R}, t > 0.$$

- c) Zunächst löst man die homogene lin. Dgl.:

$$w'(s) = \frac{2}{s} w.$$

Die homogene Lösung lautet:

$$w_h(s) = C \cdot e^{\left(\int \frac{2}{s} ds \right)} = C \cdot e^{2 \ln|s|} = C e^{\ln(s^2)} = C s^2.$$

Damit erhält man den Produktansatz für die inhomogen lin. Dgl. $w(s) = z(s) s^2$. Mit $w'(s) = z' s^2 + z \cdot 2s$ wird die inhomogene Gleichung wie folgt umgeformt:

$$z' s^2 + z 2s = \frac{2}{s} z s^2 + 15 s^4 \Rightarrow z' = 15 s^2 \Rightarrow z = 5 s^3 + C.$$

Damit erhält man die allgemeine Lösung

$$w(s) = C s^2 + 5 s^5 .$$

Aufgabe 4: Trennung der Veränderlichen und Anfangswertproblem

Klassifizieren die folgende Differentialgleichung und bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems mit $y(0) = 0$ und $y'(0) = 6$:

$$y''(x) - 2y'(x) - 3y(x) = 0.$$

Lösung 4:

Klassifizierung: lineare Dgl. 2. Ordnung, konstante Koeffizienten, homogen.

Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 3$ sind $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 3$. Die allgemeine Lösung ist

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x} \text{ mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R} .$$

Mit den Anfangswertbedingungen $y(0) = c_1 + c_2 \stackrel{!}{=} 0$ und $y'(0) = -c_1 + 3c_2 \stackrel{!}{=} 6$ erhalten wir das lineare System

$$\begin{array}{rcl} c_1 & + & c_2 = 0, \\ -c_1 & + & 3c_2 = 6 \end{array}$$

mit Lösung $c_2 = 3/2$ und $c_1 = -3/2$. Damit ist

$$y(x) = -\frac{3}{2}e^{-x} + \frac{3}{2}e^{3x}.$$



Aufgabe 5: Homogene lineare Differentialgleichungen

Bestimmen Sie die allgemeinen reellen Lösungen folgender homogener linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten mit Hilfe geeigneter Ansätze für $u(t)$:

$$\begin{array}{ll} \text{i)} & u'' - 7u' + 10u = 0 . \qquad \text{ii)} \quad 7u'' + 28u' + 91u = 0 . \\ \text{iii)} & u''' - 3u'' = 0 . \qquad \text{iv)} \quad u'''' + 8u'' + 16u = 0 . \end{array}$$

Lösung 5:

Der Ansatz ist jedesmal $u(t) = \alpha e^{\lambda t}$, $\alpha, \lambda = \text{const} \in \mathbb{C}$.

i) Die charakt. Gl. ist: $\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 5$.

$$\Rightarrow \underline{u(t) = a e^{2t} + b e^{5t}, \quad a, b \in \mathbb{R} .}$$

ii) Die charakt. Gl. ist: $\lambda^2 + 4\lambda + 13 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -2 \pm 3i$.

$$\Rightarrow \underline{u(t) = e^{-2t} (a \cos(3t) + b \sin(3t)), \quad a, b \in \mathbb{R} .}$$

iii) Die charakt. Gl. ist: $\lambda^3 - 3\lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 0, \lambda_3 = 3$.

$$\Rightarrow \underline{u(t) = a + bt + ce^{3t}, \quad a, b, c \in \mathbb{R} .}$$

iv) Die charakt. Gl. ist: $\lambda^4 + 8\lambda^2 + 16 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 2i, \lambda_{3,4} = -2i$.

$$\Rightarrow \underline{u(t) = (a + bt) \cdot \cos(2t) + (c + dt) \cdot \sin(2t), \quad a, b, c, d \in \mathbb{R} .}$$

Aufgabe 6: Inhomogene lineare Differentialgleichungen

Bestimmen Sie von folgenden inhomogenen linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten jeweils die allgemeine reelle Lösung, indem Sie zunächst die zugehörige homogene lineare Differentialgleichung allgemein lösen und eine spezielle (partikuläre) Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung mit Hilfe von geeigneten Ansätzen bestimmen.

a) $y''(x) - 5y'(x) + 6y(x) = r_k(x)$ mit

i) $r_1 = 108x^2$, ii) $r_2 = 7e^{3x}$, iii) $r_3 = 18 + 14e^{3x}$.

b) $y'''(x) + 25y'(x) = s_k(x)$ mit

i) $s_1 = 150x$, ii) $s_2 = \sin(x)$,

iii) $s_3 = \sin(5x) - 200x$, iv) $s_4 = 6 \sin(3x) \cos(2x)$.

Hinweis: Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt $\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta$.

c) $y''(x) - 2y'(x) = t_k(x)$ mit

i) $t_1 = 4e^{2x}$, ii) $t_2 = \cosh(2x)$.

Lösung 6:

a) Zunächst die zugehörige homogene lineare Differentialgleichung:

Die charakt. Gl. ist: $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$.

$$\Rightarrow \underline{y_h(x) = ae^{2x} + be^{3x}, \quad a, b \in \mathbb{R} .}$$

i) Faustregelansatz:

$$y_p = A + Bx + Cx^2 \Rightarrow y'_p = B + 2Cx \text{ und } y''_p = 2C .$$

Einsetzen in die Differentialgleichung:

$$2C - 5 \cdot (B + 2Cx) + 6 \cdot (A + Bx + Cx^2) = 108x^2 .$$

Koeffizientenvergleich:

$$\begin{aligned} 1 : & \quad 2C - 5B + 6A = 0 \\ x : & \quad -10C + 6B = 0 \\ x^2 : & \quad 6C = 108 \quad \Rightarrow C = 18, B = 30, A = 19. \end{aligned}$$

Partikuläre Lösung der inhomogen linearen Differentialgleichung:

$$\Rightarrow \underline{y_p(x) = 19 + 30x + 18x^2}.$$

Allgemeine Lösung der inhomogen linearen Differentialgleichung:

$$\Rightarrow \underline{y(x) = y_h + y_p = a e^{2x} + b e^{3x} + 19 + 30x + 18x^2, \quad a, b \in \mathbb{R}}.$$

ii) Faustregelansatz: $y_p = A x e^{3x}$ „ x -spendieren“.

Eingesetzt:

$$\left((6A + 9Ax) - 5 \cdot (A + 3Ax) + 6 \cdot Ax \right) \cdot e^{3x} = 7e^{3x} \Rightarrow A = 7 \text{ und } 0 = 0.$$

Partikuläre Lösung: $\underline{y_p(x) = 7x e^{3x}}$.

Allgemeine Lösung: $\underline{y(x) = y_h + y_p = a e^{2x} + b e^{3x} + 7x e^{3x}, \quad a, b \in \mathbb{R}}$.

iii) Faustregelansätze für beide Summanden der Inhomogenität einzeln.

Ansatz für $r = 18$: $y_{p_1} = A \Rightarrow \underline{y_{p_1}(x) = 3}$.

Für $r = 14 e^{3x}$ ergibt sich nach ii): $\underline{y_{p_2}(x) = 14x e^{3x}}$.

Allgemeine Lösung: $\underline{y(x) = y_h + y_{p_1} + y_{p_2} = a e^{2x} + b e^{3x} + 3 + 14x e^{3x}, \quad a, b \in \mathbb{R}}$.

- b) Das charakteristische Polynom der Differentialgleichung ist $\lambda^3 + 25\lambda$ mit den Nullstellen $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2/3} = \pm 5i$. Die zugehörige homogene lineare Differentialgleichung hat damit die allgemeine (reelle) Lösung

$$\underline{y_h(x) = a \cos(5x) + b \sin(5x) + c, \quad a, b, c \in \mathbb{R}}.$$

i) Faustregelansatz: $y_p = Ax + Bx^2$ („ x -spendieren“). Einsetzen in die

Differentialgleichung ergibt

$$\begin{aligned}
 & y'''(x) + 25y'(x) \\
 & = 0 + 25(A + 2Bx) \stackrel{!}{=} 150x \\
 \Rightarrow & \quad A = 0, B = 3 \\
 \Rightarrow & \quad y_p = 3x^2 \\
 \Rightarrow & \quad y(x) = y_h + y_p = a \cos(5x) + b \sin(5x) + c + 3x^2, \quad a, b, c \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

ii)

Faustregelansatz: $y_p = A \cos(x) + B \sin(x) \Rightarrow \underline{y_p(x) = -\frac{1}{24} \cos(x)}$.
 Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt

$$\begin{aligned}
 & y'''(x) + 25y'(x) \\
 & = A \sin(x) - B \cos(x) + 25(-A \sin(x) + B \cos(x)) \stackrel{!}{=} \sin(x) \\
 \Rightarrow & \quad -24A = 1, 24B = 0 \\
 \Rightarrow & \quad y_p = -\frac{1}{24} \cos(x)
 \end{aligned}$$

Beide Wege liefern dann die allgemeine Lösung

$$\Rightarrow \underline{y(x) = y_h + y_p = a \cos(5x) + b \sin(5x) + c - \frac{1}{24} \cos(x), \quad a, b, c \in \mathbb{R}} .$$

iii) Faustregelansätze für beide Summanden einzeln:

Ansatz für $s = \sin(5x) = \operatorname{Im}(e^{i5x})$: $y_{p_1} = \operatorname{Im}(Axe^{i5x})$ („x-spendieren“)
 liefert nach Einsetzen in die DGL

$$\begin{aligned}
 & A \cdot (3 \cdot (5i)^2 \cdot e^{i5x} + x \cdot (5i)^3 \cdot e^{i5x} + 25 \cdot (e^{i5x} + x \cdot 5i \cdot e^{i5x})) = e^{i5x} \\
 & A \cdot (-75 - 125ix + 25 + 125ix) = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{-50} \\
 \Rightarrow & y_{p_1} = \operatorname{Im}\left(\frac{1}{-50}xe^{i5x}\right) = -\frac{1}{50}x \sin(5x)
 \end{aligned}$$

Alternativ kann man den Ansatz $Ax \cos(5x) + Bx \sin(5x)$ benutzen. Ein-

setzen in die Differentialgleichung ergibt

$$\begin{aligned}
 & y'''(x) + 25y'(x) \\
 &= -3 \cdot 25A \cos(5x) + 125Ax \sin(5x) - 3 \cdot 25B \sin(5x) - 125Bx \cos(5x) + \\
 &\quad + 25(A \cos(5x) - 5Ax \sin(5x) + B \sin(5x) + 5Bx \cos(5x)) \stackrel{!}{=} \sin(5x) \\
 \Rightarrow & \sin(5x) = (-75A + 25A) \cos(5x) + (-75B + 25B) \sin(5x) \\
 \Rightarrow & A=0, B = -\frac{1}{50} \\
 \Rightarrow & y_{p1} = -\frac{1}{50} \sin(x)
 \end{aligned}$$

Für $s = -200$ ergibt sich die spezielle Lösung nach i) zu $y_{p2} = -4x^2$.

$$y(x) = y_h + y_{p1} + y_{p2} = a \cos(5x) + b \sin(5x) + c - \frac{1}{50} x \sin(5x) - 4x^2, \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

iv) Die Inhomogenität ist $s_4 = 6 \sin(3x) \cos(2x) = 3(\sin(x) + \sin(5x))$.

Nach ii) und iii) ist damit die spezielle Lösung: $y_p = -\frac{1}{8} \cos(x) - \frac{3}{50} x \sin(5x)$.

$$y(x) = y_h + y_p = a \cos(5x) + b \sin(5x) + c - \frac{1}{8} \cos(x) - \frac{3}{50} x \sin(5x), \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

- c)** Das charakteristische Polynom $\lambda^2 - 2\lambda$ hat die Nullstellen $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$.
Damit ist die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen linearen Differentialgleichung

$$\underline{y_h(x) = a + b e^{2x}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

i) Faustregelansatz $y_p = A x e^{2x}$ („ x -spendieren“) \Rightarrow $y_p = 2 x e^{2x}$.

$$\Rightarrow \underline{y(x) = y_h + y_p = a + b e^{2x} + 2 x e^{2x}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

ii) Die Inhomogenität ist $t_2 = \cosh(2x) = \frac{1}{2} e^{2x} + \frac{1}{2} e^{-2x}$.

Faustregelansätze für beide Summanden einzeln:

Für $t = \frac{1}{2} e^{2x}$ ergibt sich nach i) $y_{p1}(x) = \frac{1}{4} x e^{2x}$.

Ansatz für $t = \frac{1}{2} e^{-2x}$: $y = A e^{-2x}$ (**kein** „ x -spendieren“!) \Rightarrow $y_{p2} = \frac{1}{16} e^{-2x}$.

$$\Rightarrow \underline{y(x) = y_h + y_{p1} + y_{p2} = a + b e^{2x} + \frac{1}{4} x e^{2x} + \frac{1}{16} e^{-2x}, \quad a, b \in \mathbb{R}}$$

Aufgabe 7: Differentialgleichungen erster Ordnung

- a) Klassifizieren Sie die Differentialgleichung 1. Ordnung

$$u'(t) = \frac{-2u(t)}{t} + 5t^2, \quad t > 0,$$

und bestimmen Sie dann alle Lösungen der Differentialgleichung.

- b) Lösen Sie das Anfangswertproblem für $t > 0$

$$u'(t) = \left(\frac{2u(t)}{t}\right)^2 + \frac{u(t)}{t}, \quad u(1) = -2.$$

Lösung 7:

- a) Klassifikation: explizit, linear, variable Koeffizienten, inhomogen.

(Hinweis: Mindestens die 3 letzten Eigenschaften müssen benannt sein!)

Die homogene lineare Dgl. $u'(t) = -2u(t)/t$ ist eine trennbare Dgl.

$$\int \frac{1}{u} du = \int \frac{-2}{t} dt \Rightarrow u_h(t) = \frac{c}{t^2}.$$

Die Lösung der inhomogen linearen Dgl. erhält man mit dem Produktansatz

$$u_{allg}(t) = c(t)/t^2.$$

Das Einsetzen in die inhomogene Gleichung ergibt

$$\frac{-2}{t^3} \cdot c(t) + c'(t) \cdot \frac{1}{t^2} = \frac{-2 \frac{c(t)}{t^2}}{t} + 5t^2 \Rightarrow c'(t) = 5t^4.$$

Die Integration ergibt die Funktion $c(t)$ und dann die allgemeine Lösung

$$c(t) = t^5 + C \Rightarrow \underline{u_{allg}(t) = t^3 + \frac{C}{t^2}}.$$

- b) Die Substitution $z(t) = u(t)/t$ ergibt $u(t) = tz(t)$, $u'(t) = z(t) + tz'(t)$.
Eingesetzt in die Dgl. erhält man

$$z + tz' = \left(2z\right)^2 + z \Rightarrow z' = \frac{4z^2}{t}.$$

Die trennbare Dgl. für $z(t)$ hat die Lösung $z(t) = -1/(4 \ln(t) + C)$. Rücks-

ubstitution ergibt die allgemeine Lösung

$$u(t) = z(t) \cdot t = \frac{-t}{4 \ln(t) + C} \cdot$$

Einsetzen der Anfangswerte ergibt $C = 1/2$ und damit die Lösung des AWP's zu

$$\underline{u_{\text{AWP}}(t) = \frac{-2t}{8 \ln(t) + 1} \cdot}$$

Aufgabe 8: Lineare Differentialgleichungen n -ter Ordnung

Bestimmen Sie die allgemeinen Lösungen der folgenden Differentialgleichungen:

a) $y^{(4)} + 2y''' + y'' = 12x,$

b) $y'' + 4y' + 5y = 8 \sin t,$

c) $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}.$

Lösung 8:

- a) Das charakteristische Polynom $p(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^3 + \lambda^2$ hat die Nullstellen $\lambda_{1/2} = 0$ (doppelte Nullstelle), $\lambda_{3/4} = -1$ (ebenfalls doppelt). Ein Fundamentalsystem ist also $\{1, x, e^{-x}, xe^{-x}\}$. Für die Partikulärlösung ist der Ansatz $y_p(x) = (ax+b)x^2 = ax^3 + bx^2$ sinnvoll.

$$y'_p(x) = 3ax^2 + 2bx, y''_p(x) = 6ax + 2b, y_p^{(3)}(x) = 6a \text{ und } y_p^{(4)}(x) = 0.$$

Eingesetzt in die Dgl. ergibt

$$0 + 12a + 6ax + 2b = 12x.$$

Koeffizientenvergleich liefert dann $a = 2$, $b = -6a = -12$. Die allgemeine Lösung der Gleichung ist

$$y(x) = c_1 + c_2x + c_3e^{-x} + c_4xe^{-x} - 12x^2 + 2x^3 \text{ mit } c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}.$$

- b) Das charakteristische Polynom $p(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda + 5$ hat die Nullstellen

$$\lambda_1 = -2 + i, \lambda_2 = -2 - i.$$

Die homogene Lösung ist dann

$$\begin{aligned} y_h &= C_1 e^{-2t+it} + C_2 e^{-2t-it} = e^{-2t}(C_1(\cos t + i \sin t) + C_2(\cos t - i \sin t)) \\ &= e^{-2t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t), \text{ wobei } C_1 = \overline{C_2} = \frac{ic_1 + c_2}{2}. \end{aligned}$$

Eine Partikulärlösung berechnet man für die rechte Seite $8 \sin t = \operatorname{Im}(8e^{it})$ mit dem Ansatz $y_p(t) = \operatorname{Im}(ae^{it})$.

Man erhält durch Einsetzen in die Dgl.

$$a(-1 + 4i + 5)e^{it} = 8e^{it} \Rightarrow a = \frac{2}{1+i} = 1 - i.$$

Damit ist

$$y_p(t) = \operatorname{Im}((1-i)e^{it}) = \operatorname{Im}\left((1-i)(\cos t + i \sin t)\right) = \sin t - \cos t$$

eine Partikulärlösung. Die allgemeine Lösung der Gleichung ist

$$y(t) = e^{-2t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t) + \sin t - \cos t.$$

- c) Es ist $p(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2$.

Das Polynom hat die doppelte Nullstelle $\lambda = 2$.

Ein Fundamentalsystem ist daher $\{e^{2x}, xe^{2x}\}$.

Mit dem Ansatz $y_p(x) = ax^2e^{2x}$ folgt

$$y'_p(x) = a(2x^2 + 2x)e^{2x}, \quad y''_p(x) = a(4x^2 + 8x + 2)e^{2x}.$$

Das Einsetzen in die Dgl. liefert somit

$$ae^{2x}(4x^2 + 8x + 2 - 8x^2 - 8x + 4x^2) = e^{2x}.$$

Daraus folgt $a = 1/2$.

Die allgemeine Lösung lautet

$$y(x) = \left(c_1 + c_2x + \frac{1}{2}x^2\right)e^{2x} \text{ mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 9: Lineare Differentialgleichungen n -ter Ordnung

Bestimmen Sie die allgemeinen Lösungen der folgenden Differentialgleichungen:

a) $y^{(4)} + 4y = 0,$

b) $y^{(4)} - 18y'' + 81y = 0.$

Lösung 9:

- a) Das charakteristische Polynom ist $p(\lambda) = \lambda^4 + 4$, mit den Nullstellen $\lambda_\ell = \sqrt{2}e^{i(\pi/2+k\pi)/2}$ for $k = 0, 1, 2, 3$,

$$\lambda_0 = 1 + i, \lambda_1 = -1 + i, \lambda_2 = -1 - i, \lambda_3 = 1 - i.$$

Das Fundamentalsystem ist dann

$$\{e^x \cos x, e^x \sin x, e^{-x} \cos x, e^{-x} \sin x\}$$

Die allgemeine Lösung ist also gegeben als

$$y(x) = c_1 e^x \cos x + c_2 e^x \sin x + c_3 e^{-x} \cos x + c_4 e^{-x} \sin x \text{ with } c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}.$$

- b) Von der gegebenen Gleichung

$$y^{(4)} - 18y'' + 81y = 0,$$

ist das charakteristische Polynom

$$\lambda^4 - 18\lambda^2 + 81 = 0$$

und kann geschrieben werden als

$$(x^2 - 9)^2 = (x - 3)^2 \cdot (x + 3)^2 = 0$$

mit den zwei doppelten Nullstellen: $\lambda_1 = -3$ und $\lambda_2 = 3$. Die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung ist

$$y(x) = (c_1 + c_2 x)e^{-3x} + (c_3 + c_4 x)e^{3x}.$$

Die Koeffizienten vor der Exponentialfunktion sind lineare Funktionen, weil es sich um doppelte Nullstellen handelt.

Aufgabe 10: Komplexe Nullstellen des charakteristischen Problems

Bestimmen Sie die Lösung der folgenden Differentialgleichung:

$$y'' + 4y' + 5y = 0$$

Lösung 10:

Das charakteristische Polynom $p(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda + 5$ hat die Nullstellen

$$\lambda_1 = -2 + i, \lambda_2 = -2 - i$$

die Lösung ist dann

$$\begin{aligned} y &= C_1 e^{-2t+it} + C_2 e^{-2t-it} \\ &= e^{-2t} (C_1 (\cos t + i \sin t) + C_2 (\cos t - i \sin t)) \\ &= e^{-2t} (c_1 \cos t + c_2 \sin t), \end{aligned}$$

wobei $c_1 = C_1 + C_2$ und $c_2 = i(C_1 - C_2)$ die reellen Konstanten sind.

Die komplexen Konstanten können durch die reellen Konstanten wie folgt ausgedrückt werden: $C_1 = \overline{C_2} = \frac{c_1 - ic_2}{2}$.

Aufgabe 11: Lineare Differentialgleichungen n -ter Ordnung

Bestimmen Sie die allgemeinen Lösungen der folgenden Differentialgleichungen. Falls Anfangswerte gegeben sind, ermitteln Sie auch die Lösung des Anfangswertproblems.

- a) $y'' + 6y' + 8y = 0$,
- b) $y'' + 2y' + 5y = 17 \sin(2x)$.
- c) $y''(x) - 2y'(x) - 3y(x) = 4e^x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 6$,
- d) $y''(x) + 5y'(x) + 6y(t) = 3e^{3x}$,
- e) $y''(x) - y'(x) - 2y(x) = 4xe^x$.
- f) $y''' + y'' - y' - y = 3e^{-2x}$,

Lösung 11:

- a) Das charakteristische Polynom $p(\lambda) = \lambda^2 + 6\lambda + 8$ hat die Nullstellen $\lambda_1 = -2$ und $\lambda_2 = -4$. Damit ist

$$y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-4x} \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

- b) Das charakteristische Polynom $p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 5$ hat die Nullstellen $\lambda_{1/2} = -1 \pm \sqrt{1-5} = -1 \pm 2i$. Damit hat man das reelle Fundamentalsystem

$$\{e^{-x} \cos(2x), e^{-x} \sin(2x)\}.$$

Reeller Ansatz

Ein Ansatz für eine Partikulärlösung ist

$$y_p(x) = A \cos(2x) + B \sin(2x).$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert:

$$\begin{aligned} 17 \sin(2x) &\stackrel{!}{=} -4A \cos(2x) - 4B \sin(2x) - 4A \sin(2x) + 4B \cos(2x) + 5A \cos(2x) + 5B \sin(2x) \\ &= (-4A + 4B + 5A) \cos(2x) + (-4B - 4A + 5B) \sin(2x). \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich führt dann zum linearen Gleichungssystem für A und B :

$$\begin{aligned} \cos(2x) : \quad A + 4B &= 0 \\ \sin(2x) : \quad -4A + B &= 17 \end{aligned}$$

Mit der Lösung $B = 1$ und $A = -4$ haben wir die Partikulärlösung

$$y_p(x) = -4 \cos(2x) + \sin(2x)$$

Die Gesamtlösung lautet also

$$y(x) = \sin(2x) - 4 \cos(2x) + c_1 e^{-x} \cos(2x) + c_2 e^{-x} \sin(2x).$$

- c) Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 3$ sind $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 3$. Eine Partikulärlösung der inhomogenen Gleichung berechnet man mit dem Ansatz $y_p(x) = ae^x$, es folgt $-4ae^x \stackrel{!}{=} 4e^x$ und damit $a = -1$. Die allgemeine Lösung ist

$$y_{allq}(x) = -e^x + c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x} \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Aus den Anfangsbedingungen $y(0) = -1 + c_1 + c_2 \stackrel{!}{=} 0$ und $y'(0) = -1 - c_1 + 3c_2 \stackrel{!}{=} 6$ folgt das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcl} c_1 & + & c_2 = 1, \\ -c_1 & + & 3c_2 = 7 \end{array}$$

mit Lösung $c_2 = 2$ und $c_1 = -1$. Damit ist

$$y_{AWP}(x) = -e^x - e^{-x} + 2e^{3x}.$$

- d)** Man berechnet zuerst die Lösungen der homogenen Gleichung

$$y'' + 5y' + 6y = 0.$$

Das charakteristische Polynom $p(\lambda) = \lambda^2 + 5\lambda + 6$ hat die Nullstellen $\lambda_1 = -2$ und $\lambda_2 = -3$. Ein Fundamentalsystem ist $\{e^{-2x}, e^{-3x}\}$. Nun braucht man noch eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung. Diese berechnet man mit dem Ansatz $y_p(x) = ae^{3x}$ mit $a \in \mathbb{R}$. Einsetzen in die inhomogene DGL liefert $(9 + 15 + 6)ae^{3x} = 3e^{3x}$, also $a = 1/10$. Die allgemeine Lösung der Gleichung ist

$$y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-3x} + \frac{1}{10} e^{3x} \text{ mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

- e) Das Polynom $p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 2$ hat die Nullstellen $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = -1$, dies ergibt das Fundamentalsystem $\{e^{2x}, e^{-x}\}$. Der Ansatz für die Partikulärlösung ist $y_p(x) = (ax + b)e^x$. Mit $y_p'(x) = (ax + a + b)e^x$ und $y_p'' = (ax + 2a + b)e^x$

folgt

$$e^x(ax + 2a + b - (ax + a + b) - 2(ax + b)) = 4xe^x$$

$$-2ax + a - 2b = 4x$$

Koeffizientenvergleich liefert dann $a = -2$ und $2b = a$, $b = -1$. Damit hat man die allgemeine Lösung

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} - (2x + 1)e^x \text{ mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

- f) Das charakteristische Polynom ist $p(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 - \lambda - 1$. Eine Nullstelle kann man raten, zum Beispiel $\lambda_1 = 1$. Polynomdivision oder Anwendung des Horner-Schemas liefert dann

$$p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 2\lambda + 1),$$

damit ist $\lambda_2 = -1$ eine weitere, und zwar doppelte, Nullstelle. Folglich hat die homogene Gleichung das Fundamentalsystem

$$\{e^x, e^{-x}, xe^{-x}\}.$$

Zur Berechnung einer Partikulärlösung benutzt man den Ansatz $y_p(x) = ae^{-2x}$. Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$ae^{-2x}(-8 + 4 + 2 - 1) \stackrel{!}{=} 3e^{-2x}$$

und damit $a = -1$. Die allgemeine Lösung ist also

$$y(x) = -e^{-2x} + c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 xe^{-x} \text{ mit } c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 12: LR-Kreis

Ein Stromkreis habe einen Widerstand von $R = 0.8 \text{ Ohm}$ und eine Selbstinduktion von $L = 4 \text{ Henry}$. Bis zur Zeit $t_0 = 0$ fließe kein Strom. Dann wird eine Spannung von $U = 5 \text{ Volt}$ angelegt. Nach 5 Sekunden wird die Spannung abgeschaltet. Berechnen Sie den Stromverlauf $I(t)$ für $0 \leq t \leq 5$ und $t > 5$.

Hinweis: In diesem Stromkreis gilt $L\dot{I}(t) + RI(t) = U(t)$.

Lösung 12:

Es gilt die Differentialgleichung

$$L\dot{I}(t) + RI(t) = U(t).$$

Für $0 \leq t \leq 5$ gilt $U(t) = 5$. Die Trennung der Variablen führt zu

$$\int \frac{dI}{U - RI} = \int \frac{1}{L} dt, \Rightarrow -\frac{1}{R} \ln |U - RI(t)| = \frac{1}{L}t + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}.$$

Auflösen nach $I(t)$ liefert (mit $c_2 = e^{c_1}$)

$$U - RI(t) = c_2 e^{-Rt/L}$$

und somit

$$I(t) = \frac{1}{R} (U - c_2 e^{-Rt/L}).$$

Einsetzen der Anfangsbedingung $I(0) = 0$ ergibt $c_2 = U$ und

$$I(t) = \frac{U}{R} (1 - e^{-Rt/L}).$$

Einsetzen der gegebenen Zahlenwerte ergibt die Lösung

$$I(t) = 6.25 (1 - e^{-0.2t}) \text{ für } 0 < t < 5.$$

Im Zeitraum $t > 5$ ist $U(t) = 0$ und der Anfangsstrom ist

$$I(5) = I_0 = 6.25 (1 - e^{-1}).$$

Die Lösung der Differentialgleichung ist

$$\int \frac{dI}{I} = - \int \frac{R}{L} dt \Rightarrow \ln |I(t)| = -\frac{R}{L}t + c_3$$

und damit

$$I(t) = c_4 e^{-Rt/L} .$$

Aus $I(t_0) = I_0$ folgt

$$I(t) = I_0 e^{-R(t-t_0)/L} .$$

Einsetzen der Zahlenwerte ergibt die Lösung

$$I(t) = 6.25(1 - e^{-1})e^{-0.2(t-5)} \text{ für } t > 5 .$$

Aufgabe 13: Logistisches Wachstum

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(t) = \lambda(k - y(t))y(t) \quad , \quad y(0) = y_0$$

wobei $k, \lambda \in \mathbb{R}$.

Lösung 13:

Wir lösen diese Differentialgleichung durch Trennung der Variablen.

$$\int \frac{1}{(k - y(t))y(t)} dy = \int \lambda dt$$

Das Integral auf der linken Seite lösen wir mit einer Partialbruchzerlegung.

$$\frac{1}{(k - y)y} = \frac{A}{k - y} + \frac{B}{y}$$

Durch Multiplikation mit dem Nenner erhalten wir

$$Ay + B(k - y) = 1.$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir das Gleichungssystem

$$A - B = 0$$

$$B = \frac{1}{k}$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{k} \frac{1}{k - y} + \frac{1}{k} \frac{1}{y} dy &= \int \lambda dt \\ \frac{1}{k} \int \left(-\frac{1}{y - k} + \frac{1}{y} \right) dt &= \int \lambda dt \\ \frac{1}{k} (\ln |y| - \ln |y - k|) &= \lambda t + c^* \\ \frac{1}{k} \ln \left| \frac{y}{y - k} \right| &= \lambda t + c^* \end{aligned}$$

Wir stellen die Gleichung nach y um.

$$\begin{aligned}\frac{y}{y-k} &= c e^{\lambda k t} \\ \frac{1}{1-\frac{k}{y}} &= c e^{\lambda k t} \\ 1 &= \left(1 - \frac{k}{y}\right) c e^{\lambda k t} \\ 1 - c e^{\lambda k t} &= -\frac{ck}{y} e^{\lambda k t} \\ y &= -\frac{ck e^{\lambda k t}}{1 - c e^{\lambda k t}}\end{aligned}$$

Mit dem Anfangswert erhalten wir

$$\begin{aligned}y_0 = y(0) &= -\frac{ck}{1-c} \\ y_0 &= \frac{k}{1-\frac{1}{c}} \\ \left(1 - \frac{1}{c}\right) y_0 &= k \\ \frac{1}{c} y_0 &= k - y_0 \\ c &= \frac{y_0}{y_0 - k}\end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung ist

$$y = -\frac{ck e^{\lambda k t}}{1 - c e^{\lambda k t}}.$$

Die spezielle Lösung erhalten wir durch einsetzen der Konstanten.

$$\begin{aligned}y &= \frac{y_0}{k - y_0} \frac{k}{e^{\lambda k t} + \frac{y_0}{k - y_0}} \\ &= \frac{y_0 k}{y_0 + (k - y_0) e^{-\lambda k t}}\end{aligned}$$

Aufgabe 14: Differentialgleichungen erster Ordnung

1) Klassifizieren Sie die folgenden gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung als

- a) Linear oder nicht-linear.
- b) In dem Fall einer linearen Differentialgleichung klassifizieren Sie die Gleichung zusätzlich als
 - homogen oder inhomogen.
 - Differentialgleichung mit konstanten oder nicht-konstanten Koeffizienten.

c) Nutzen Sie die Vorlesungsunterlagen, um die Differentialgleichung als einen der folgenden Typen zu klassifizieren:

- (a) $y' = f(x) \cdot g(y)$, zu lösen mittels Trennung der Variablen,
- (b) $y' = g(y/x)$, homogen, zu lösen mittels Substitution mit $u = y/x$,
- (c) $y' = f(ax + by + c)$, rechte Seite mit bilinearen Argumenten, zu lösen mit der Substitution $u = ax + by + c$,
- (d) $y' + p(x) \cdot y = q(x)$, lineare Differentialgleichung.

- | | |
|----------------------------------|----------------------------------|
| i) $y' + 2y = 3x$. | v) $x^2 y' = xy + 2y^2$. |
| ii) $y' y + x = 0$. | vi) $y' = \frac{y(x-y)}{x^2}$. |
| iii) $y' = \frac{x^2+y^2}{xy}$. | vii) $y' = \frac{x-y}{x+y}$. |
| iv) $y' = (x + y + 1)^2$. | viii) $y' = \ln(y + 2x + 1)^2$. |

2) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Gleichungen i) bis iv).

Lösung 14:

- 1) i) $y' + 2y = 3x$. Linear, inhomogen, mit konstanten Koeffizienten, Typ: rechte Seite mit bilinearen Koeffizienten.
- ii) $y' y + x = 0$. Nicht-linear, Typ: Trennung der Variablen.
- iii) $y' = \frac{x^2+y^2}{xy}$. Nicht-linear, Typ: homogen mit Substitution $u = y/x$.
- iv) $y' = (x + y + 1)^2$. Nicht-linear, Typ: rechte Seite mit bilinearen Argumenten.
- v) $x^2 y' = xy + 2y^2$. Nicht-linear, Typ: homogen mit Substitution $u = y/x$.
- vi) $y' = \frac{y(x-y)}{x^2}$. Nicht-linear, Typ: homogen mit Substitution $u = y/x$.
- vii) $y' = \frac{x-y}{x+y}$. Nicht-linear, Typ: homogen mit Substitution $u = y/x$.

- viii) $y' = \ln(y + 2x + 1)^2$. Nicht-linear, Typ: rechte Seite mit bilinenen Argumenten.

2) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Gleichungen i) und ii).

Zu i)

Die Gleichung kann als lineare Gleichung gelöst werden: Die Gleichung ist linear, erster Ordnung, mit konstanten Koeffizienten und inhomogen. Die Lösung kann als Summe aus der Lösung der homogenen Gleichung und einer partikulären Lösung bestimmt werden:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x).$$

Die Lösung der homogenen Gleichung mit dem allgemeinen Lösungsverfahren für den Fall mit nicht-konstanten Koeffizienten, den wir hier zeigen. Man kann die Lösung auch durch Berechnung der Nullstellen des charakteristischen Polynoms bestimmen. Dieser Methode wird später gezeigt.

Die Gleichung kann interpretiert werden vom Typ rechte Seite mit bilinearen Argumenten.

$$y' = f(ax + by + c) = 3x - 2y$$

und wird mit der Substitution, wie unten gezeigt, gelöst.

Wir beginnen mit der allgemeinen Methode. Die Lösung des homogenen Problems ist

$$y_h(x) = C e^{-P(x)},$$

wobei

$$P(x) = \int^x p(t) dt$$

und $p(x)$ in diesem Fall 2 ist, sodass $P(x) = 2x$ gilt und

$$y_h(x) = C e^{-2x}.$$

Für die partikuläre Lösung nutzen wir die Methode der Variation der Konstanten

$$y_p(x) = C(x) e^{P(x)} = C(x) e^{-2x}.$$

Wir nutzen dieselbe Ansatzfunktion wie im homogenen Teil aber multipliziert mit der Funktion $C(x)$ statt der Konstanten C . Um den Ausdruck für $C(x)$ zu bestimmen, leiten wir $y_p(x)$ ab

$$y_p'(x) = C'(x) e^{-2x} - 2C(x) e^{-2x}$$

und setzen y und y' in die Differentialgleichung ein

$$C'(x) e^{-2x} - 2C(x) e^{-2x} + 2C(x) e^{-2x} = 3x$$

$$C'(x) e^{-2x} = 3x$$

$$C'(x) = 3x e^{2x}$$

$$\int dC = 3 \int x e^{2x} dx.$$

Das Integral auf der rechten Seite wird mit partieller Integration berechnet

$$\begin{aligned} u &= x, & u' &= 1, \\ v' &= e^{2x}, & v &= \frac{1}{2} e^{2x}. \end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \int x e^{2x} dx &= \frac{1}{2} e^{2x} - \int \frac{1}{2} e^{2x} dx \\ &= \frac{1}{2} e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + \tilde{C} \\ &= \frac{1}{2} e^{2x} \left(x - \frac{1}{2} \right) + \tilde{C}. \end{aligned}$$

Zurück zu dem Integral

$$\int dC = 3 \int x e^{2x} dx,$$

erhalten wir

$$C(x) = \frac{3}{2} e^{2x} \left(x - \frac{1}{2} \right) + \tilde{C}.$$

Die Konstante \tilde{C} kann null gesetzt werden, weil sie bereits in der Lösung der homogenen Gleichung berücksichtigt wurde.

Die partikuläre Lösung ist

$$\begin{aligned} y_p(x) &= C(x) e^{-2x} = \left(\frac{3}{2} e^{2x} \left(x - \frac{1}{2} \right) \right) e^{-2x} \\ &= \frac{3}{2} \left(x - \frac{1}{2} \right). \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung ist

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C e^{-2x} + \frac{3}{2} \left(x - \frac{1}{2} \right).$$

Wir lösen die Gleichung nun als Typ: rechte Seite mit bilinearen Argumenten.

$$y' = f(ax + by + c) = 3x - 2y.$$

Mit der Substitution $u = 3x - 2y$, erhalten wir

$$u' = 3 - 2y'.$$

Da $y' = 3x - 2y = u$ gilt

$$u' = 3 - 2u.$$

Diese lösen wir mit Trennung der Variablen

$$\begin{aligned}\frac{du}{dx} &= 3 - 2u \\ \int \frac{du}{3 - 2u} &= \int dx \\ -\frac{1}{2} \ln |3 - 2u| &= x + C \\ \frac{1}{3 - 2u} &= C e^{2x},\end{aligned}$$

mit der Rücksubstitution erhalten wir

$$\begin{aligned}\frac{1}{3 - 6x + 4y} &= C e^{2x} \\ 3 - 6x + 4y &= C e^{-2x} \\ y &= C e^{-2x} + \frac{3}{2}x - \frac{3}{4}.\end{aligned}$$

Die Differentialgleichung gelöst werden als lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten:

Wir bestimmen das charakteristische Polynom

$$p(\lambda) = \lambda + 2$$

mit den Nullstellen $\lambda = -2$. Damit ist die Lösung der homogenen Gleichung

$$y_h(x) = C e^{\lambda x} = C e^{-2x}.$$

Der Ansatz für die partikuläre Lösung ist

$$y_p(x) = A_1 x + A_0.$$

Durch Ableiten erhalten wir

$$y_p'(x) = A_1.$$

Wir setzen y_p und y_p' in die Differentialgleichung ein und erhalten

$$A_1 + 2A_1 x + 2A_0 = 3x.$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert

$$2A_1 = 3$$

$$A_1 + 2A_0 = 0$$

wodurch wir die Werte $A_0 = -\frac{3}{4}$ und $A_1 = \frac{3}{2}$ erhalten und die partikuläre Lösung

$$y_p(x) = \frac{3}{2}x - \frac{3}{4}.$$

Die allgemeine Lösung ist wieder

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C e^{-2x} + \frac{3}{2}x - \frac{3}{4}.$$

Zu ii)

Die Gleichung

$$y'y = -x,$$

ist vom Typ: Trennung der Variablen

$$\begin{aligned}\int y dy &= - \int x dx \\ \frac{y^2}{2} &= -\frac{x^2}{2} + \tilde{C} \\ y^2 &= C - x^2, \quad C = 2\tilde{C}, \\ y &= \pm \sqrt{C - x^2}.\end{aligned}$$

Die Gleichung $y'y - x = 0$ kann auch interpretiert werden als

Typ: nicht-linear, homogen mit der Substitution $u = y/x$

$$y' = -\frac{x}{y}$$

und kann mit der Substitution $u = \frac{y}{x}$ gelöst werden.

Aus der Beziehung $ux = y$, erhalten wir durch differenzieren beider Seiten

$$u'x + u = y',$$

wobei wir die Produktregel benutzen. Mit der Substitution $y' = -\frac{1}{u}$ erhalten wir

$$\begin{aligned}u'x + u &= -\frac{1}{u} \\ u' &= -\frac{1}{x}\left(u + \frac{1}{u}\right) \\ \int \frac{u}{u^2 + 1} du &= \int -\frac{1}{x} dx \\ \frac{1}{2} \ln(u^2 + 1) &= -\ln x + \ln \tilde{C} \\ u^2 + 1 &= \frac{C}{x^2}, \quad C = \tilde{C}^2 \\ u^2 &= \frac{C}{x^2} - 1,\end{aligned}$$

durch die Rücksubstitution erhalten wir

$$\begin{aligned}u^2 &= \frac{C}{x^2} - 1, \\ \frac{y^2}{x^2} &= \frac{C}{x^2} - 1, \\ y^2 &= C - x^2 \\ y &= \pm \sqrt{C - x^2}.\end{aligned}$$

Zu **iii)** Wir schreiben die Differentialgleichung als

$$y' = \frac{x^2 + y^2}{xy} = \frac{x^2}{xy} + \frac{y^2}{xy} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}.$$

Wir nutzen nun die Substitution $u = \frac{y}{x}$. Wir berechnen die Ableitung von $y = u(x)x$.

$$y' = u'x + u.$$

Durch Einsetzen erhalten wir:

$$u'x + u = \frac{1}{u} + u.$$

Dies vereinfacht sich zu

$$u'x = \frac{1}{u}.$$

Diese Gleichung können wir mit Trennung der Variablen lösen

$$\begin{aligned} u \, du &= \frac{1}{x} \, dx \\ \int u \, du &= \int \frac{1}{x} \, dx \\ \frac{1}{2} u^2 &= \ln |x| + C \\ u &= \pm \sqrt{2 \ln |x| + C}. \end{aligned}$$

Mit Rücksubstitution erhalten wir die Lösung

$$y = \pm x \sqrt{2 \ln |x| + C}.$$

Zu **iv)**

$$y' = (x + y + 1)^2$$

Wir lösen die Gleichung mittels der Substitution $u = x + y + 1$. Es gilt

$$y' = u' - 1$$

Damit erhalten wir

$$u' - 1 = u^2$$

Mit der Trennung der Variablen erhalten wir

$$\begin{aligned}\frac{du}{u^2 + 1} &= 1dx \\ \int \frac{du}{u^2 + 1} &= \int 1dx \\ \arctan(u) &= x + C \\ u &= \tan(x + C)\end{aligned}$$

Wir erhalten die Lösung durch Rücksubstitution

$$y = \tan(x + C) - x - 1$$

Aufgabe 15: Differentialgleichungen erster Ordnung

Klassifizieren Sie die folgenden Differentialgleichungen erster Ordnung:

1. $x^2 y' = 2y + 1$.

4. $y' = \sin(y + 1)$.

2. $y' = \cos(x)y$.

5. $y' = (4x - y + 1)^2$.

3. $x^2 y' + y^2 = xy$.

6. $y' + 3y + 2 = e^{2x}$.

- a) Klassifizieren Sie diese als linear oder nicht linear. In dem Fall einer linearen Differentialgleichung klassifizieren Sie die zusätzlich als
- i) homogen oder inhomogen.
 - ii) mit konstanten oder nicht-konstanten Koeffizienten.
- b) Klassifizieren Sie die Differentialgleichung als einen der folgenden Typen:
- i) $y' = f(x) \cdot g(y)$ zu Lösen mit Trennung der Variablen.
 - ii) $y' = g(y/x)$ zu Lösen mit der Substitution $u = y/x$.
 - iii) $y' = f(ax + by + c)$ zu Lösen mit der Substitution $u = ax + by + c$.
 - iv) $y' + p(x) \cdot y = q(x)$.
- c) Berechnen Sie die allgemeine Lösung aller Differentialgleichungen.

Lösung 15:

- 1) i) $x^2 y' = 2y + 1$. Linear, inhomogen, nicht-konstant Koeffizienten: Typ A (separabel) oder Typ D.
- ii) $y' = \cos(x)y$. Linear, homogen, nicht-konstant Koeffizienten, separabel (Typ A).
- iii) $x^2 y' + y^2 = xy(x)$. Nicht-linear, homogen, lösbar mit der Substitution von Typ B.
- iv) $y' = \sin(y + 1)$. Nicht-linear, separabel von Typ A.
- v) $y' = (4x - y + 1)^2$. Nicht-linear, Typ C.
- vi) $y' + 3y + 2 = e^{2x}$. Linear, inhomogen, Typ D mit konstanten Koeffizienten.
- 2) i) $x^2 y' = 2y + 1$. Linear, inhomogen, nicht-konstant Koeffizienten: Typ A (separabel)

$$\begin{aligned}\frac{dy}{2y+1} &= \frac{dx}{x^2}, \\ \frac{1}{2} \ln(2y+1) &= -\frac{1}{x}, \\ 2y+1 &= \tilde{C} e^{-\frac{2}{x}}, \\ y &= C e^{-\frac{2}{x}} - \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Diese Gleichung kann auch mit einem längeren Verfahren gelöst werden, wenn man sie als vom Typ D betrachtet: Zuerst wird die Lösung des homogenen Teils (H) bestimmt und dann die besondere Lösung (P) mit der Methode der unbestimmten Koeffizienten. Wir beginnen mit (H): Die Gleichung

$$x^2 y' = 2y$$

ist separabel und sie hat die Lösung

$$y_h(x) = C e^{\frac{-2}{x}}.$$

Für den Teil (P) machen wir den Ansatz

$$y_p(x) = C(x) e^{\frac{-2}{x}}.$$

Dann leiten wir ab:

$$y_p'(x) = C'(x) e^{\frac{-2}{x}} + C(x) \frac{2}{x^2} e^{\frac{-2}{x}}.$$

Einsetzen in die Gleichung ergibt

$$\begin{aligned}C'(x) x^2 e^{\frac{-2}{x}} + 2C(x) e^{\frac{-2}{x}} &= 2C(x) e^{\frac{-2}{x}} + 1 \\ C'(x) x^2 e^{\frac{-2}{x}} &= 1 \\ C'(x) &= \frac{e^{\frac{2}{x}}}{x^2} \\ \int dC &= \int \frac{e^{\frac{2}{x}}}{x^2} dx.\end{aligned}$$

Wir integrieren das Integral auf der rechten Seite mit der Substitution $u = 2/x$, woraus wir das Differential $du = -\frac{2}{x^2} dx$ berechnen. Wir haben also

$$\frac{dx}{x^2} = -\frac{du}{2}$$

und

$$\begin{aligned}\int dC &= -\frac{1}{2} \int e^u du, \\ C &= -\frac{1}{2} e^u + \tilde{C}, \quad (\text{z.B. } \tilde{C} = 0) \\ C &= -\frac{1}{2} e^{\frac{2}{x}}. \quad (\text{nach Rücksubstitution})\end{aligned}$$

Daher ist die partikuläre Gleichung

$$y_p(x) = -\frac{1}{2} e^{\frac{2}{x}} e^{\frac{-2}{x}} = -\frac{1}{2}$$

und die allgemeine Lösung ist

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C e^{\frac{-2}{x}} - \frac{1}{2}.$$

- ii) $y' = \cos(x)y$. Linear, homogen, nicht-konstant Koeffizienten, separabel (Typ A).

Lösung:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{y} dy &= \int \cos(x) dx, \\ \ln(y) &= \sin(x) + \ln(C), \\ y &= C e^{\sin(x)}.\end{aligned}$$

- iii) $x^2 y' + y^2 = xy(x)$. Nicht-linear, homogen, lösbar mit der Substitution von Typ B.

Die Gleichung kann umgeformt werden zu

$$y' = \frac{y}{x} - \frac{y^2}{x^2}.$$

Mit der Substitution $u = y/x$ erhalten wir

$$\begin{aligned}y &= ux \\ y' &= u'x + u.\end{aligned}$$

Wir substituieren y' und y/x in die Differentialgleichung und erhalten

$$u'x + u = u - u^2.$$

Diese kann mit Separation der Variablen gelöst werden.

$$\begin{aligned}
 u' &= -\frac{u^2}{x}, \\
 \int \frac{1}{u^2} du &= -\frac{1}{x} dx, \\
 -\frac{1}{u} &= \ln(x) + C, \\
 u &= \frac{1}{\ln(x) + C}, \\
 y &= \frac{x}{\ln(x) + C}. \quad (\text{nach Rücksubstitution } u = y/x)
 \end{aligned}$$

iv) $y' = \sin(y + 1)$. Nicht-linear, separabel von Typ A.

Wir lösen die Differentialgleichung mit Trennung der Variablen:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dy}{\sin(y + 1)} &= \int dx, \\
 \ln \left| \tan \left(\frac{y + 1}{2} \right) \right| &= x + \ln(C), \\
 \tan \left(\frac{y + 1}{2} \right) &= Ce^x, \\
 \frac{y + 1}{2} &= \arctan(Ce^x), \\
 y &= 2 \arctan(Ce^x) - 1.
 \end{aligned}$$

v) $y' = (4x - y + 1)^2$. Nicht-linear, Typ C.

Diese nichtlineare Differentialgleichung kann mit Substitution gelöst werden. Wir setzen

$$u = 4x - y + 1$$

und erhalten

$$u' = 4 - y' \quad \rightarrow \quad y' = 4 - u'.$$

Substituieren $u = 4x - y + 1$ und $y' = 4 - u'$ in die Gleichung, führt zu

der separablen Gleichung

$$4 - u' = u^2,$$

$$u' = 4 - u^2,$$

$$\frac{du}{4 - u^2} = dx,$$

$$\int \frac{du}{4 - u^2} = \int dx,$$

$$\frac{1}{4} \ln |u + 2| - \ln |u - 2| = x + \ln(\tilde{C}), \quad (\text{mit Partialbruchzerlegung, siehe unten})$$

$$\ln \frac{u + 2}{u - 2} = 4x + \ln(\tilde{C}^4),$$

$$u + 2 = Ce^{4x}(u - 2), \quad (\text{mit } C = \tilde{C}^4)$$

$$u = -2Ce^{4x} + uCe^{4x} - 2,$$

$$u(1 - Ce^{4x}) = -2(Ce^{4x} + 1)$$

$$u = -2 \frac{Ce^{4x} + 1}{1 - Ce^{4x}},$$

$$4x - y + 1 = -2 \frac{Ce^{4x} + 1}{1 - Ce^{4x}}, \quad (\text{Rücksubstitution})$$

$$y = 4x + \frac{3 + Ce^{4x}}{1 - Ce^{4x}}.$$

Für die Partialbruchzerlegung im 5. Schritt oben ergibt sich

$$\frac{-1}{u^2 - 4} = -\frac{1}{4} \frac{1}{x - 2} + \frac{1}{4} \frac{1}{x + 2}.$$

vi) $y' + 3y + 2 = e^{2x}$. Linear, inhomogen, Typ D mit konstanten Koeffizienten.

Diese Gleichung kann als Typ D mit der Methode der unbestimmten Koeffizienten oder als lineare inhomogene ODE mit konstanten Koeffizienten gelöst werden, wobei spezielle Ansätze für die Inhomogenitäten und das Superpositionsprinzip verwendet werden.

Beginnen wir mit der ersten Methode. Hier müssen wir das homogene Problem (H) lösen und dann eine partikuläre Lösung (P) finden.

Für das homogene Problem können wir die Variablentrennung verwenden oder im Falle konstanter Koeffizienten (nur in diesem Fall!) das charakteristische Polynom benutzen:

$$\lambda + 3 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = -3$$

um den Lösungsteil zu bestimmen

$$y_h(x) = Ce^{-3x}.$$

Um das Problem (P) zu lösen, machen wir den Ansatz

$$y_p(x) = C(x)e^{-3x}$$

und differentieren ihn

$$y_p'(x) = C'(x)e^{-3x} - C(x)3e^{-3x}.$$

Wir setzen y_p und y_p' in die Gleichung ein und erhalten

$$\begin{aligned} C'(x)e^{-3x} - 3C(x)e^{-3x} + 3Ce^{-3x} + 2 &= e^{2x} \\ C'(x) &= e^{5x} - 2e^{3x} \\ C(x) &= \frac{1}{5}e^{5x} - \frac{2}{3}e^{3x}. \end{aligned}$$

Die partikuläre Lösung ist

$$y_p(x) = \left(\frac{1}{5}e^{5x} - \frac{2}{3}e^{3x} \right) e^{-3x} = \frac{1}{5}e^{2x} - \frac{2}{3}$$

und die allgemeine Lösung ist

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Ce^{-3x} + \frac{1}{5}e^{2x} - \frac{2}{3}.$$

Wie bereits erwähnt, können wir das Problem mit Hilfe spezieller Ansätze für die Inhomogenitäten und dem Superpositionsprinzip lösen.

Die rechte Seite der Gleichung ist $e^{2x} - 2$, also finden wir zwei Lösungen für die beiden Terme getrennt. Zunächst für e^{2x} . Der Ansatz im exponentiellen Fall ist wieder exponentiell $y_{p1} = Ae^{\alpha x}$, wobei α der Exponent des rechten Terms ist:

$$y_{p1} = Ae^{2x}.$$

Die Konstante A wird durch Koeffizientenvergleich gefunden:

$$\begin{aligned} y_{p1}' + 3y_{p1} &= e^{2x}, \quad (\text{Bemerkung: der Term } -2 \text{ wird nicht betrachtet}) \\ 2Ae^{2x} + 3Ae^{2x} &= e^{2x}, \\ A &= \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

Der erste Teil der partikulären Lösung ist

$$y_{p1} = \frac{1}{5}e^{2x}.$$

Der zweite Teil wird mit dem Polynom-Ansatz nullter Ordnung $y_{p2} = B$ berechnet, da der Term -2 eine Konstante ist. Setzt man die Ansatzfunktion in die Differentialgleichung ein, so erhält man

$$3B = -2 \quad B = -\frac{2}{3}.$$

Wir haben also die partikuläre Lösung durch Superposition

$$y_p(x) = y_{p1}(x) + y_{p2}(x) = \frac{1}{5}e^{2x} - \frac{2}{3}$$

un die allgemeine Lösung

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Ce^{-3x} + \frac{1}{5}e^{2x} - \frac{2}{3}.$$

Aufgabe 16: Nichtlineare Differentialgleichung erster Ordnung

1) Klassifizieren Sie die folgenden Differentialgleichungen erster Ordnung als

1. Homogene Differentialgleichung: $y' = g(y/x)$ mit Substitution $u = y/x$.
2. Differentialgleichung mit bilinearen Argumenten: $y' = f(ax + by + c)$ mit Substitution $u = ax + by + c$.

a) $y'(x^2 + xy) = y^2 - xy,$	d) $y' = -\sin^2(x + y + 1),$
b) $y' = \frac{x^2 y}{x^3 + y^3},$	e) $x^2 y' = y^2 + xy - x^2,$
c) $y' = \frac{1}{x + y},$	f) $y' = \frac{y + e^{-\frac{y}{x}}}{x}$

2) Verwenden Sie eine angemessene Substitution und formulieren Sie die Gleichungen in Termen von u und u' um ohne sie zu lösen.

Lösung 16:

- 1) i) $y'(x^2 + xy) = y^2 - xy$, homogen.
ii) $y' = \frac{x^2 y}{x^3 + y^3}$, homogen.
iii) $y' = \frac{1}{x + y}$, bilineare Argumente.
iv) $y' = -\sin^2(x + y + 1)$, bilineare Argumente.
v) $x^2 y' = y^2 + xy - x^2$, homogen.
vi) $y' = \frac{y + e^{-\frac{y}{x}}}{x}$, homogen.
- 2) i) Mit der Substitution $u = y/x$ erhalten wir

$$\begin{aligned} y'(x^2 + xy) &= y^2 - xy \\ y' &= \frac{y^2 - xy}{x^2 + xy} \\ y' &= \frac{y^2/x^2 - y/x}{1 + y/x} \\ y' &= \frac{u^2 - u}{1 + u} \\ y' &= u'x + u = \frac{u^2 - u}{1 + u} \\ u' &= \frac{1}{x} \left(\frac{u^2 - u}{1 + u} - u \right) \\ u' &= -\frac{1}{x} \frac{2u}{1 + u}. \end{aligned}$$

Diese Gleichung kann durch Variablentrennung gelöst werden. Die Lösung wird in der Übung nicht verlangt, aber wir zeigen sie hier um einen Fall einer nicht expliziten Lösung zu zeigen.

$$\begin{aligned}
 u' &= -\frac{1}{x} \frac{2u}{1+u} \\
 \frac{1+u}{u} du &= -\frac{2}{x} \\
 \int \frac{1+u}{u} du &= -\int \frac{2}{x} \\
 \ln|u| + u &= \ln x^{-2} + C \\
 e^{\ln|u|} \cdot e^u &= C e^{\ln x^{-2}} \\
 u e^u &= \frac{C}{x^2} \\
 \frac{y}{x} e^{\frac{y}{x}} &= \frac{C}{x^2} \\
 y x e^{\frac{y}{x}} &= C.
 \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung liefert die Lösung y in impliziter Form. Die Lösung kann z.B. mit Matlab geplottet werden:

ii) $y' = \frac{x^2 y}{x^3 + y^3}.$

Mit der Substitution $u = y/x$ erhalten wir:

$$\begin{aligned}
 y' &= \frac{x^2 y}{x^3 + y^3}, \\
 y' &= \frac{y/x}{1 + y^3/x^3}, \\
 y' &= \frac{u}{1 + u^3}, \\
 y' &= u'x + u = \frac{u}{1 + u^3}, \\
 u' &= \frac{1}{x} \left(\frac{u}{1 + u^3} - u \right), \\
 u' &= -\frac{1}{x} \left(\frac{u^4}{1 + u^3} \right).
 \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung kann durch Variablentrennung gelöst werden und führt nach Rücksubstitution zu einer impliziten Gleichung für y .

iii) $y' = \frac{1}{x + y}.$

Mit der Substitution $u = y + x$ erhalten wir:

$$\begin{aligned}y' &= \frac{1}{u} \\y' &= u' - 1 = \frac{1}{u} \\u' &= \frac{1+u}{u}.\end{aligned}$$

Die letzte Gleichung kann durch Variablentrennung gelöst werden und führt nach Rücksubstitution zu einer impliziten Gleichung für y .

iv) $y' = -\sin^2(x + y + 1).$

Mit der Substitution $u = x + y + 1$ erhalten wir:

$$\begin{aligned}y' &= -\sin^2(u) \\y' &= u' - 1 = -\sin^2(u) \\u' &= \cos^2(u).\end{aligned}$$

Diese Gleichung kann mit Trennung der Variablen gelöst werden (Die Lösung ist hier nicht gefordert):

$$\begin{aligned}u' &= \cos^2(u), \\ \frac{du}{\cos^2(u)} &= dx, \\ \int \frac{du}{\cos^2(u)} &= \int dx, \\ \tan(u) &= x + C, \\ u &= \arctan(x + C), \\ y + x + 1 &= \arctan(x + C), \\ y &= \arctan(x + C) - x - 1.\end{aligned}$$

v) $x^2 y' = y^2 + xy - x^2.$

Mit der Substitution $u = y/x$ erhalten wir

$$\begin{aligned}y' &= \frac{y^2}{x^2} + \frac{y}{x} - 1, \\ y' &= u'x + u = u^2 + u - 1, \\ u' &= \frac{u^2 - 1}{x}.\end{aligned}$$

Diese Gleichung kann z. B. durch Trennung der Variablen und partielle Bruchzerlegung gelöst werden.

vi) $y' = \frac{y + e^{-\frac{y}{x}}}{x}.$

Mit der Substitution $u = y/x$ erhalten wir

$$y' = \frac{y}{x} + \frac{1}{x} e^{-\frac{y}{x}},$$

$$y' = u + \frac{1}{x} e^{-u},$$

$$y' = u'x + u = u + \frac{1}{x} e^{-u},$$

$$u' = \frac{1}{x^2} e^{-u}.$$

Das kann mit Trennung der Variablen gelöst werden.

Aufgabe 17: Trennung der Variablen

Lösen die folgenden Anfangswertprobleme und bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich der Lösung

a) $y'(x) = 6y^2(x)x, \quad y(1) = \frac{1}{6}.$

b) $y'(x) = \frac{3x^2 + 4x - 4}{2y(x) - 4}, \quad y(1) = 3.$

c) $y'(x) = e^{-y(x)} (2x - 4), \quad y(5) = 0.$

d) $y'(x) = \frac{1}{x^2}, \quad y(x_0) = 0.$

e) $y'(x) = x^2, \quad y(0) = y_0.$

Lösung 17:

a) $y'(x) = 6y^2(x)x, \quad y(1) = \frac{1}{6}.$ Mit Trennung der Variablen gilt

$$\begin{aligned}\frac{dy}{y^2} &= 6x dx \\ \int \frac{dy}{y^2} &= \int 6x dx \\ -\frac{1}{y} &= 3x^2 + C.\end{aligned}$$

Mit der Anfangsbedingung $y(1) = \frac{1}{6}$ erhalten wir

$$-6 = 3 + C$$

$$-9 = C.$$

Die Lösung ist dann

$$y = \frac{1}{9 - 3x^2}.$$

Wir bestimmen nun den Gültigkeitsbereich der Lösung. Es muss gelten

$$9 - 3x^2 \neq 0,$$

daher

$$x \neq \pm\sqrt{3}.$$

Die Werte $x = \pm\sqrt{3}$ müssen vermieden werden, damit erhalten wir die folgenden möglichen Gültigkeitsbereiche:

$$-\infty < x < -\sqrt{3}, \quad -\sqrt{3} < x < \sqrt{3}, \quad \sqrt{3} < x < \infty.$$

Da die Lösung in $x = 1 < \sqrt{3}$ positiv ist (siehe Anfangswert) ist der Gültigkeitsbereich in dem Intervall

$$-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}.$$

b) $y'(x) = \frac{3x^2 + 4x - 4}{2y(x) - 4}, \quad y(1) = 3.$ Es gilt

$$\begin{aligned} (2y - 4)dy &= (3x^2 + 4x - 4)dx \\ \int (2y - 4)dy &= \int (3x^2 + 4x - 4)dx \\ y^2 - 4y &= x^3 + 2x^2 - 4x + C. \end{aligned}$$

Durch Anwenden der der Anfangsbedingung, gilt

$$\begin{aligned} 9 - 12 &= 1 + 2 - 4 + C \\ -2 &= C. \end{aligned}$$

Mit $d = -x^3 - 2x^2 + 4x + 2$ gilt

$$y^2 - 4y + d = 0$$

welches eine quadratische Gleichung mit der Lösungsmenge

$$\begin{aligned} y &= 2 \pm \sqrt{4 - d} \\ &= 2 \pm \sqrt{x^3 + 2x^2 - 4x + 2}. \end{aligned}$$

Von den zwei Kandidaten für die Lösung ist nur eine eine gültige Lösung. Das kann mit Hilfe der Anfangsbedingung nachgewiesen werden $y(1) = 3$. In der Tat gilt

$$\begin{aligned} 3 &= 2 + \sqrt{1 + 2 - 4 + 2}, \\ 3 &\neq 2 - \sqrt{1 + 2 - 4 + 2}, \end{aligned}$$

daher ist die Lösung mit dem negativen Term $2 - \sqrt{4 - d}$ nicht gültig.

Um den Gültigkeitsbereich der Lösung zu untersuchen, nutzen wir

$$4 - d = x^3 + 2x^2 - 4x + 2 \geq 0.$$

Durch Einsetzen verschiedener Werte für x , können wir überprüfen, dass für $x = -3$ die Funktion $x^3 + 2x^2 - 4x + 2$ positiv und für $x = -4$ negativ ist.

Da die Funktion stetig ist, muss die Nullstelle zwischen -4 und -3 liegen. Wir bezeichnen diesen Wert mit \bar{x} , der Gültigkeitsbereich ist dann

$$x \geq \bar{x} \approx -3.36.$$

c) $y'(x) = e^{-y(x)}(2x - 4)$, $y(5) = 0$. Es gilt

$$\begin{aligned} \int e^y dy &= \int (2x - 4) dx \\ e^y &= x^2 - 4x + C. \end{aligned}$$

Durch Einsetzen des Anfangswertes, erhalten wir die Konstante $C = -4$. Die Lösung ist daher

$$y = \ln(x^2 - 4x - 4).$$

Für die Gültigkeit muss gelten

$$x^2 - 4x - 4 > 0.$$

Die Nullstellen der Funktion $x^2 - 4x - 4$ sind $x = 2 \pm 2\sqrt{2}$. Da die Funktion konvex ist, ist die Funktion positiv in dem Intervall

$$-\infty < x < 2 - 2\sqrt{2} \quad \text{and} \quad 2 + 2\sqrt{2} < x < \infty.$$

Da der Anfangswert bei $x = 5$ liegt, ist der Gültigkeitsbereich das Intervall $2 + 2\sqrt{2} < x < \infty$.

d) $y'(x) = \frac{1}{x^2}$, $y(x_0) = 0$. Es gilt

$$\begin{aligned} dy &= \frac{dx}{x^2} \\ \int dy &= \int \frac{dx}{x^2} \\ y &= -\frac{1}{x} + C. \end{aligned}$$

Durch Anwenden der Anfangwertbedingung erhalten wir

$$C = \frac{1}{x_0},$$

woraus wir $x_0 \neq 0$ erhalten. Die Lösung ist

$$y = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x_0}.$$

Für den Gültigkeitsbereich muss gelten, dass $x \neq 0$, damit ist er gegeben als $0 < x < \infty$ falls $x_0 > 0$ und $-\infty < x < 0$ falls $x_0 < 0$.

- e) $y'(x) = x^2$, $y(0) = y_0$. Diese einfache Gleichung hat die Lösung

$$y = \frac{x^3}{3} + y_0,$$

und der Gültigkeitsbereich ist der ganze \mathbb{R} .

Aufgabe 18: Anfangswertproblem

Gegeben sei das Anfangswertproblem:

$$y' = \sqrt{y}, \quad y(0) = 0.$$

- a) Bestimmen sie eine Lösung des gegebenen Anfangswertproblems.
- b) Hat das Anfangswertproblem eine eindeutige Lösung?

Lösung 18:

- a) Die Lösung kann mit Trennung der Variablen berechnet.

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{y}} dy &= dx \\ \int \frac{1}{\sqrt{y}} dy &= \int dx \\ 2\sqrt{y} &= x + C \\ y &= \frac{1}{4}(x + C)^2\end{aligned}$$

Mit dem Anfangswert erhalten wir $C = 0$ und die Lösung

$$y = \frac{1}{4}x^2,$$

Die Lösung ist nicht eindeutig, da offensichtlich die konstante Null-Funktion eine Lösung ist, die die Anfangswertbedingung erfüllt.

- b) Das Problem hat unendlich viele Lösungen der Form

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < \bar{x}, \\ \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}\bar{x}^2, & x > \bar{x}. \end{cases}$$

Das kann man daraus herleiten, dass die Differentialgleichung autonom und daher invariant gegenüber einer Verschiebung bezüglich x ist. Also falls $\bar{y}(t)$ eine Lösung der obigen Differentialgleichung ist, dann ist auch $\hat{y}(t) = \bar{y}(t + t_0)$ eine Lösung des Problems

$$y' = \sqrt{y}, \quad y(t_0) = 0.$$

Aufgabe 19: Substitution: Homogene Differentialgleichung erster Ordnung

Berechnen Sie die Lösung des folgenden Anfangswertproblems

a) $x y y' + 4x^2 + y^2 = 0, \quad y(2) = 0, \quad x > 0.$

b) $x y' = y (\ln x - \ln y), \quad y(1) = 4, \quad x > 0.$

Lösung 19:

a) $x y y' + 4x^2 + y^2 = 0, \quad y(2) = 0, \quad x > 0.$ Wir dividieren alle Terme durch x^2 und erhalten

$$\frac{y}{x} y' + 4 + \frac{y^2}{x^2} = 0.$$

Wir setzen $u = \frac{y}{x}$, also $y = ux$ und differenzieren beide Seiten und erhalten

$$y' = u'x + u.$$

Aus der ersten Gleichung können wir die explizite Differentialgleichung schreiben

$$y' = -\frac{x}{y} \left(4 + \frac{y^2}{x^2} \right),$$

mit der Substitution $u = \frac{y}{x}$ gilt

$$y' = -\frac{4 + u^2}{u}.$$

Wir nutzen $y' = u'x + u$ und erhalten

$$\begin{aligned} u'x + u &= -\frac{4 + u^2}{u}, \\ u' &= -\frac{1}{x} \frac{4 + 2u^2}{u}. \end{aligned}$$

Diese Gleichung lässt sich durch die Trennung von Variablen wie folgt lösen

$$\begin{aligned}\frac{u}{4+2u^2}du &= -\frac{1}{x}dx, \\ \int \frac{u}{4+2u^2}du &= -\int \frac{1}{x}dx, \\ \int \frac{1}{4} \frac{4u}{4+2u^2}du &= -\int \frac{1}{x}dx, \\ \frac{1}{4} \ln(4+2u^2) &= -\ln(|x|) + \ln(C), \\ \ln(4+2u^2)^{\frac{1}{4}} &= \ln(C|x|^{-1}).\end{aligned}$$

Hier müssen wir $x = 0$ aus dem Gültigkeitsintervall der Lösung ausschließen. Da die Anfangsbedingung auf den positiven Wert $x = 2$ gesetzt wird, wählen wir für die nächsten Schritte das Intervall $x > 0$. Daher gilt

$$4 + 2u^2 = \frac{C^4}{x^4}.$$

mit der Rücksubstitution erhalten wir

$$\begin{aligned}\frac{y^2}{x^2} &= \frac{1}{2} \left(\frac{C^4 - 4x^4}{x^4} \right), \\ y^2 &= \frac{x^2}{2} \left(\frac{C^4 - 4x^4}{x^4} \right).\end{aligned}$$

Wir wenden die Anfangsbedingung $y(2) = 0$ an. Damit erhalten wir $C^4 = 64$ und

$$\begin{aligned}y^2 &= \frac{64 - 4x^4}{2x^2}, \\ y &= \pm \frac{1}{x} \sqrt{32 - 2x^4}.\end{aligned}$$

Wir müssen sicherstellen, dass bei der Quadratwurzel nur positive Zahlen berücksichtigt werden können. Es muss also gelten

$$32 - 2x^4 \geq 0,$$

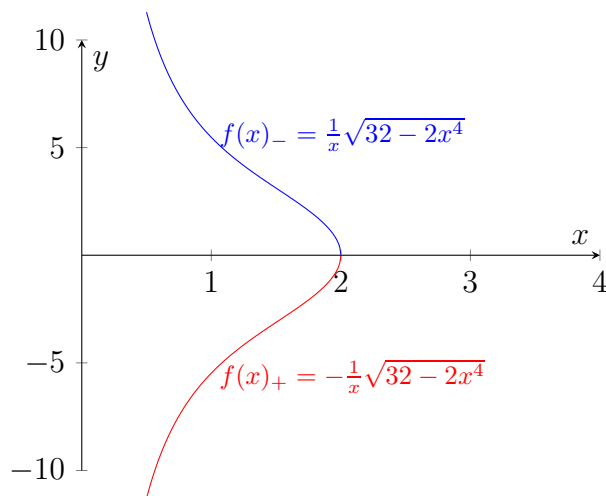
woraus sich das Gültigkeitsintervall ergibt

$$0 < x \leq 2.$$

Wir müssen prüfen, ob die Lösung eindeutig ist oder beide Lösungen akzeptiert werden können. Da die Anfangsbedingung in $x = 2$ liegt, wo die Lösung Null ist, kann dies eine gültige "Anfangsbedingung" für beide Zweige sein, also ist

die Lösung nicht eindeutig!

Der Graph der Lösung ist



- b) $x y' = y (\ln x - \ln y)$, $y(1) = 4$, $x > 0$. Mit Logarithmusgesetzen können wir die Gleichung schreiben als

$$xy' = y \ln\left(\frac{x}{y}\right),$$

$$y' = \frac{y}{x} \ln\left(\frac{x}{y}\right).$$

Mit der Substitution $u = \frac{y}{x}$ gilt

$$y' = u \ln(u^{-1}) = -u \ln(u).$$

Durch Ableiten der Substitution erhalten wir

$$y' = xu' + u,$$

$$u' = \frac{y' - u}{x} = \frac{-u \ln(u) - u}{x}.$$

Jetzt nutzen wir die Trennung der Variablen

$$\frac{du}{u \ln(u) + u} = -\frac{dx}{x},$$

$$\int \frac{du}{u \ln(u) + u} = -\int \frac{dx}{x}.$$

Das Integral auf der linken Seite kann mit der Substitution $v = \ln(u) + 1$ und

dem Differential $dv = \frac{1}{u} du$ berechnet werden und ergibt

$$\int \frac{dv}{v} = - \int \frac{dx}{x},$$

$$\ln |v| = - \ln |x| + C.$$

Mit der Rücksubstitution gilt

$$\ln |\ln(u) + 1| = - \ln |x| + C.$$

Da wir die Bedingung $x > 0$ in der Problemstellung haben, können wir den Betrag auf der rechten Seite weglassen.

$$\ln |\ln(u) + 1| = - \ln(x) + C.$$

Die Potenzierung beider Seiten ergibt

$$|\ln(u) + 1| = C \frac{1}{x},$$

wobei die Konstante C anstelle von e^C durch Umbenennung verwendet wurde, d.h. wir haben $C^* = e^C$ gesetzt und den Namen von C^* wieder in C geändert, um die Notation zu vereinfachen. Außerdem lassen wir den Betrag auf der linken Seite weg, da das Vorzeichen in der Konstante C aufgehen kann. Wir haben also

$$\ln(u) = C \frac{1}{x} - 1,$$

$$u = e^{\frac{C}{x} - 1}.$$

Mit der Rücksubstitution gilt

$$\frac{y}{x} = e^{\frac{C}{x} - 1},$$

$$y = x e^{\frac{C}{x} - 1},$$

und unter Verwendung der Anfangsbedingung $y(1) = 4$ ergibt sich

$$4 = e^{C-1},$$

$$\ln 4 = C - 1,$$

$$C = \ln(4) + 1.$$

Die Lösung der Differentialgleichung ist dann

$$y = x e^{\frac{\ln(4) + 1}{x} - 1}.$$

Aufgabe 20: Harmonischer Oszillator

Man betrachte die Differentialgleichung

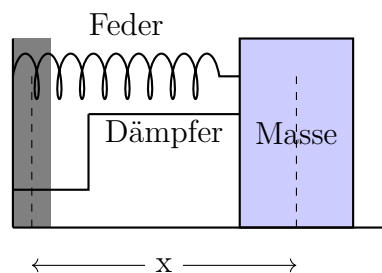
$$y'' + 2\rho y' + \omega^2 y = 0, \quad \text{mit } \rho, \omega \in \mathbb{R}_+$$

Die gegebene Differentialgleichung, ist eine klassische Form einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Aus physikalischer Sicht beschreibt diese Gleichung typischerweise gedämpfte harmonische Bewegungen, wobei:

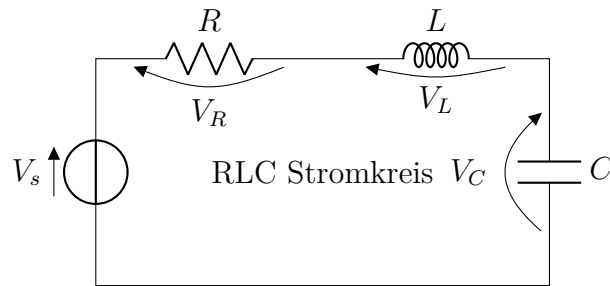
- $y(t)$ die Verschiebung des Systems vom Gleichgewicht über die Zeit darstellt.
- ρ (der Koeffizient der ersten Ableitung y') repräsentiert den Dämpfungsfaktor, der beeinflusst, wie schnell das System Energie durch Reibung oder andere resistive Kräfte verliert.
- ω^2 (der Koeffizient von y) steht im Zusammenhang mit der Steifigkeit des Systems oder der Kraft, die es ins Gleichgewicht zurückführt. Der Parameter ω selbst wird oft als natürliche Frequenz des ungedämpften Systems betrachtet.

Physikalische Interpretationen

1. **Mechanische Systeme:** In der Mechanik kann diese Gleichung ein Masse-Feder-Dämpfer-System modellieren, bei dem eine Masse an einer Feder und möglicherweise einem Dämpfungselement (wie einem Stoßdämpfer) befestigt ist. Die Masse oszilliert um eine Gleichgewichtsposition, wobei die Feder eine rückstellende Kraft proportional zur Verschiebung liefert und der Dämpfer eine Kraft proportional zur Geschwindigkeit bereitstellt, die der Bewegung entgegenwirkt.



2. **Elektrische Schaltkreise:** In der Elektrotechnik kann die Gleichung einen RLC-Schaltkreis (einen Schaltkreis, der einen Widerstand R , eine Induktivität L , und einen Kondensator C enthält) beschreiben. Hier könnte $y(t)$ die elektrische Ladung oder den Strom darstellen, $2\rho = R/L$ und $\omega^2 = 1/(LC)$. Das Verhalten des Schaltkreises — ob er oszilliert oder schnell stabilisiert wird — hängt von den Werten dieser Komponenten ab.



Diese Gleichung ist allgemein bekannt als "*Gedämpfter harmonischer Oszillator*" oder einfach als "*Gedämpfter Oszillator*". Sie umfasst drei spezifische Szenarien basierend auf dem Wert von ρ im Vergleich zu ω :

1. **Überdämpft** ($\rho > \omega$): Das System kehrt ohne Oszillation langsam zum Gleichgewicht zurück.
2. **Kritisch gedämpft** ($\rho = \omega$): Das System kehrt so schnell wie möglich ohne Oszillation zum Gleichgewicht zurück.
3. **Untergedämpft** ($\rho < \omega$): Das System oszilliert mit einer Amplitude, die allmählich auf null abnimmt.

Aufgabe: Bestimmen Sie die Lösung der DGL für alle drei Fälle: überdämpft, kritisch gedämpft und untergedämpft.

Hinweis: Bestimmen Sie das charakteristische Polynom und seine Nullstellen und verwenden Sie den Exponentialansatz. Man betrachte alle drei Fälle, in denen die Nullstellen einfach, doppelt oder komplex konjugiert sind.

Lösung 20:

Fall 1: Überdämpft ($\rho > \omega$) Die Wurzeln sind reell und unterschiedlich:

$$\lambda = -\rho \pm \sqrt{\rho^2 - \omega^2}$$

mit der Lösung:

$$y(t) = Ae^{(-\rho + \sqrt{\rho^2 - \omega^2})t} + Be^{(-\rho - \sqrt{\rho^2 - \omega^2})t}$$

Fall 2: Kritische Dämpfung ($\rho = \omega$) Die charakteristische Gleichung vereinfacht sich zu:

$$\lambda^2 + 2\omega\lambda + \omega^2 = 0$$

mit einer doppelten Wurzel $\lambda = -\omega$. Die Lösung ist:

$$y(t) = (A + Bt)e^{-\omega t}$$

Fall 3: Untergedämpft ($\rho < \omega$) Die Wurzeln sind komplex:

$$\lambda = -\rho \pm i\sqrt{\omega^2 - \rho^2}$$

was zu der Lösung führt:

$$y(t) = e^{-\rho t}(A \cos(\sqrt{\omega^2 - \rho^2}t) + B \sin(\sqrt{\omega^2 - \rho^2}t))$$

Aufgabe 21: Harmonischer Oszillator mit Resonanz

Man betrachte die Differentialgleichung des harmonischen Oszillators

$$y'' + 2\rho y' + \omega^2 y = r(t), \quad \text{mit } \rho, \omega \in \mathbb{R}_+$$

aus Aufgabe !!!!!, mit den drei Fällen

1. **Überdämpft** ($\rho > \omega$): Das System kehrt ohne Oszillation langsam zum Gleichgewicht zurück.

$$r(t) = e^{(-\rho + \sqrt{\rho^2 - \omega^2})t}$$

2. **Kritisch gedämpft** ($\rho = \omega$): Das System kehrt so schnell wie möglich ohne Oszillation zum Gleichgewicht zurück mit

$$r(t) = e^{-\omega t}$$

3. **Untergedämpft** ($\rho < \omega$): Das System oszilliert mit einer Amplitude, die allmählich auf null abnimmt.

$$r(t) = e^{-\rho t} \cos(\sqrt{\omega^2 - \rho^2} t)$$

Bestimmen Sie die Lösung der Dgl. für die Fälle überdämpft, kritisch gedämpft und untergedämpft.

Lösung 21:

Fall 1: Überdämpft ($\rho > \omega$)

Die Wurzeln sind reell und unterschiedlich:

$$\lambda = -\rho \pm \sqrt{\rho^2 - \omega^2}$$

mit der homogenen Lösung:

$$y_h(t) = A e^{(-\rho + \sqrt{\rho^2 - \omega^2})t} + B e^{(-\rho - \sqrt{\rho^2 - \omega^2})t}$$

Wir führen die Abkürzung $z = \sqrt{\rho^2 - \omega^2}$ ein. Für die partikuläre Lösung wählen wir den Ansatz

$$y_p = A t e^{(-\rho + z)t}.$$

mit den Ableitungen

$$\begin{aligned}y_p' &= A(1 + t(-\rho + z)) e^{(-\rho+z)t} \\y_p'' &= A(-\rho + z)(2 + t(-\rho + z)) e^{(-\rho+z)t}\end{aligned}$$

Durch Einsetzen und Zusammenfassen erhalten wir

$$2A\sqrt{\rho^2 - \omega^2} e^{(-\rho+\sqrt{\rho^2-\omega^2})t} = e^{(-\rho+\sqrt{\rho^2-\omega^2})t}$$

Damit ist $A = \frac{1}{2\sqrt{\rho^2-\omega^2}}$. Die partikuläre Lösung ist

$$y_p = \frac{1}{2\sqrt{\rho^2 - \omega^2}} t e^{(-\rho+\sqrt{\rho^2-\omega^2})t}.$$

Damit ist die allgemeine Lösung

$$y = A e^{(-\rho+\sqrt{\rho^2-\omega^2})t} + B e^{(-\rho-\sqrt{\rho^2-\omega^2})t} + \frac{1}{2\sqrt{\rho^2 - \omega^2}} t e^{(-\rho+\sqrt{\rho^2-\omega^2})t}.$$

Fall 2: Kritische Dämpfung ($\rho = \omega$)

Die charakteristische Gleichung vereinfacht sich zu:

$$\lambda^2 + 2\omega\lambda + \omega^2 = 0$$

mit einer doppelten Wurzel $\lambda = -\omega$. Die homogene Lösung ist:

$$y_h(t) = (A + Bt) e^{-\omega t}.$$

Da $\lambda = -\omega$ eine doppelte Nullstelle ist, wählen wir für die partikuläre Lösung den Ansatz

$$y_p = At^2 e^{-\omega t}.$$

Wir bilden die Ableitungen

$$\begin{aligned}y_p' &= A e^{-\omega t} (2t - \omega t^2) \\y_p'' &= A e^{-\omega t} (2 + \omega^2 t^2 - 4\omega t)\end{aligned}$$

Durch Einsetzen erhalten wir

$$\begin{aligned}e^{-\omega t} &= A e^{-\omega t} (2 + \omega^2 t^2 + 2\omega(2t - \omega t^2) + \omega^2 t^2) \\&= 2A e^{-\omega t}\end{aligned}$$

Damit ist $A = \frac{1}{2}$. Die partikuläre Lösung ist

$$y_p = \frac{1}{2} t^2 e^{-\omega t}.$$

Die allgemeine Lösung ist

$$y = (A + Bt) e^{-\omega t} + \frac{1}{2} t^2 e^{-\omega t}.$$

Fall 3: Untergedämpft ($\rho < \omega$)

Die Wurzeln sind komplex:

$$\lambda = -\rho \pm i\sqrt{\omega^2 - \rho^2}$$

was zu der homogenen Lösung führt:

$$y_h(t) = e^{-\rho t} (A \cos(\sqrt{\omega^2 - \rho^2} t) + B \sin(\sqrt{\omega^2 - \rho^2} t))$$

Wir führen die Abkürzung $z = \sqrt{\omega^2 - \rho^2}$ ein. Für die partikuläre Lösung wählen wir den Ansatz

$$y_p = t e^{-\rho t} (A \sin(zt) + B \cos(zt))$$

Die Ableitungen sind

$$\begin{aligned} y_p' &= e^{-\rho t} ((A - \rho t A - ztB) \sin(zt) + (B - \rho t B + ztA) \cos(zt)) \\ y_p'' &= e^{-\rho t} ((-2\rho A - 2zB + t(2\rho zB + \rho^2 A - z^2 A)) \sin(zt) \\ &\quad + (-2\rho B + 2zA + t(-2\rho zA + \rho^2 B - z^2 B)) \cos(zt)) \end{aligned}$$

Wir setzen die Ableitungen in die Differentialgleichung ein und erhalten

$$e^{-\rho t} (-2\sqrt{\omega^2 - \rho^2} B \sin(\sqrt{\omega^2 - \rho^2} t) + 2\sqrt{\omega^2 - \rho^2} A \cos(\sqrt{\omega^2 - \rho^2} t)) = e^{-\rho t} \cos(\sqrt{\omega^2 - \rho^2} t)$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir

$$A = \frac{1}{2}, \quad B = 0$$

Die partikuläre Lösung ist

$$y_p = \frac{1}{2} t e^{-\rho t} \sin((\sqrt{\omega^2 - \rho^2}) t).$$

Damit ist die allgemeine Lösung

$$y = e^{-\rho t} (A \cos(\sqrt{\omega^2 - \rho^2} t) + B \sin(\sqrt{\omega^2 - \rho^2} t)) + \frac{1}{2} t e^{-\rho t} \sin((\sqrt{\omega^2 - \rho^2}) t).$$

Aufgabe 22: Lineare Differentialgleichungen mit Resonanz

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden linearen Differentialgleichungen

a) $y'' - y = 1,$

b) $y''' + y'' = 1,$

c) $y'' + y' - 2y = e^x,$

d) $y'' + y = \cos(x).$

Lösung 22:

a) Wir lösen zunächst die homogene Gleichung

$$y'' - y = 0.$$

Das charakteristische Polynom ist

$$\lambda^2 - 1 = 0$$

mit den Nullstellen $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -1$. Damit ist die homogene Lösung

$$y_h = c_1 e^x + c_2 e^{-x}.$$

Für die partikuläre Lösung wählen wir den Ansatz

$$y_p = A.$$

Damit ist

$$y_p'' = 0.$$

Eingesetzt in die Differentialgleichung erhalten wir

$$0 - A = 1.$$

Also ist $y_p = -1$. Die allgemeine Lösung ist dann

$$\begin{aligned} y &= y_h + y_p \\ &= c_1 e^x + c_2 e^{-x} - 1. \end{aligned}$$

b) Wir lösen zunächst die homogene Gleichung

$$y''' + y'' = 1.$$

Das charakteristische Polynom ist

$$\lambda^3 + \lambda^2 = \lambda^2(\lambda + 1) = 0$$

mit der doppelten Nullstelle $\lambda = 0$ und der einfachen Nullstelle $\lambda = -1$. Damit ist die homogene Lösung

$$y_h = (c_1 + c_2 x) + c_3 e^{-x}.$$

Da $\lambda = 0$ eine doppelte Nullstelle ist und die rechte Seite eine Konstante, haben wir hier einen Fall mit Resonanz und wählen für die partikuläre Lösung den Ansatz

$$y_p = Ax^2.$$

Wir bestimmen die Ableitungen

$$\begin{aligned}y_p' &= 2Ax, \\y_p'' &= 2A, \\y_p''' &= 0\end{aligned}$$

und setzen sie in die Differentialgleichung ein:

$$0 + 2A = 1.$$

Damit ist $A = \frac{1}{2}$ und die partikuläre Lösung

$$y_p = \frac{x^2}{2}.$$

Die allgemeine Lösung ist

$$\begin{aligned}y &= y_h + y_p \\&= (c_1 + c_2 x) + c_3 e^{-x} + \frac{x^2}{2}.\end{aligned}$$

c) Wir lösen zunächst homogene Gleichung

$$y'' + y' - 2y = 0.$$

Das charakteristische Polynom ist

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

mit den Nullstellen $\lambda_1 = -2$ und $\lambda_2 = 1$. Damit ist die homogene Lösung

$$y_h = c_1 e^{-2x} + c_2 e^x.$$

Wir haben hier wieder einen Fall mit Resonanz. Daher wählen wir für die partikuläre Lösung den Ansatz

$$y_p = Ax e^x.$$

Wir bestimmen die Ableitungen

$$\begin{aligned} y_p' &= A e^x + Ax e^x, \\ y_p'' &= 2A e^x + Ax e^x. \end{aligned}$$

In die Gleichung eingesetzt erhalten wir

$$\begin{aligned} 2A e^x + Ax e^x + A e^x + Ax e^x - 2Ax e^x &= e^x \\ 3A e^x &= e^x. \end{aligned}$$

Wir erhalten dann $A = \frac{1}{3}$. Die partikuläre Lösung ist dann also

$$y_p = \frac{x e^x}{3}.$$

Die allgemeine Lösung ist dann

$$\begin{aligned} y &= y_h + y_p \\ &= c_1 e^{-2x} + c_2 e^x + \frac{x e^x}{3}. \end{aligned}$$

d) Wir lösen zunächst die homogene Gleichung

$$y'' + y = 0$$

mit dem charakteristischen Polynom

$$\lambda^2 + 1 = 0.$$

Die Nullstellen sind $\lambda = \pm i$. Damit ist die homogene Lösung

$$y_h = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x).$$

Als Ansatz für die partikuläre Gleichung wählen wir

$$y_p = x(A \cos(x) + B \sin(x)).$$

Wir erhalten die Ableitungen

$$\begin{aligned} y_p' &= (A + Bx) \cos(x) + (B - Ax) \sin(x), \\ y_p'' &= (2B - Ax) \cos(x) - (2A + Bx) \sin(x). \end{aligned}$$

Wir setzen die Ableitungen in die Gleichung ein:

$$(2B - Ax) \cos(x) - (2A + Bx) \sin(x) + x(A \cos(x) + B \sin(x)) = \cos(x).$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir $A = 0$ und $B = \frac{1}{2}$. Die partikuläre Lösung ist damit

$$y_p = x \frac{1}{2} \sin(x).$$

Die allgemeine Lösung ist

$$\begin{aligned} y &= y_h + y_p \\ &= c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x) + x \frac{1}{2} \sin(x). \end{aligned}$$

Laplace-Transformation

$f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Laplace-transformierbar, wenn das Integral

$$F(s) := \mathcal{L}f(t) := \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \quad \text{für } s \in \mathbb{R}$$

existiert. Dabei ist $F(s)$ die Bildfunktion (auch Laplace-Transformierte genannt) zum Urbildfunktion $f(t)$. Hilfreich bei der Laplace-Transformation bzw. bei der Rücktransformation sind sogenannte Korrespondenztabelle, die zur Urbildfunktion die dazugehörige Bildfunktion angeben.

Aufgabe 23:

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$u''(t) - 2u'(t) + u(t) = \cos(t) \cdot h(t - \pi)$$

mit $u(0) = 0$ und $u'(0) = 0$. Dabei ist $h(t)$ die Heaviside-Funktion.

- a) Zeigen Sie, dass die Lösung des Anfangswertproblems im Bildbereich der Laplace-Transformation die folgende Gestalt hat:

$$U(s) = -\frac{s e^{-s\pi}}{(1 + s^2)(s - 1)^2}$$

- b) Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung $u(t)$ im Urbildbereich.

Lösung 23:

- a) Die Laplace-Transformierte des Anfangswertproblems ist

$$s^2 U(s) - 2sU(s) + U(s) = \mathcal{L}\{\cos(t) \cdot h(t - \pi)\}.$$

Für die Transformation des letzten Terms wird der Verschiebungssatz angewendet:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\cos(t) \cdot h(t - \pi)\} &= \mathcal{L}\{\cos(t - \pi + \pi) \cdot h(t - \pi)\} = \mathcal{L}\{\cos(t + \pi)\} e^{-s\pi} \\ &= \mathcal{L}\{-\cos(t)\} e^{-s\pi} = \frac{-s}{1 + s^2} e^{-s\pi}. \end{aligned}$$

Damit ist die transformierte Differentialgleichung:

$$U(s)(s^2 - 2s + 1) = -\frac{s}{1 + s^2} e^{-s\pi}.$$

Die Lösung im Bildbereich ist

$$U(s) = -\frac{s}{(1+s^2)(s-1)^2} e^{-s\pi}.$$

b) Die Rücktransformation ergibt

$$u(t) = -\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{(s-1)^2(1+s^2)} e^{-s\pi} \right\}$$

Die Partialbruchzerlegung des Bruches ergibt

$$\begin{aligned} & \frac{s}{(s-1)^2(1+s^2)} \\ &= \frac{E}{s-1} + \frac{F}{(s-1)^2} + \frac{G+Hs}{1+s^2} \\ &= \frac{(E+H)s^3 + (-E+F+G-2H)s^2 + (E-2G+H)s - E + F + G}{(s-1)^2(1+s^2)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow E+H=0, -E+F+G-2H=0, E-2G+H=1, -E+F+G=0$$

$$\Rightarrow H=0, E=0, G=-\frac{1}{2}, F=\frac{1}{2}$$

Damit ist dann

$$\begin{aligned} u(t) &= -\frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \left(\frac{1}{(s-1)^2} - \frac{1}{1+s^2} \right) e^{-\pi s} \right\} \\ &= -\frac{1}{2} \left[te^t - \sin(t) \right]_{t \leftarrow t-\pi} h(t-\pi) \quad (\text{Verschiebungssatz}) \\ &= -\frac{1}{2} \left[(t-\pi)e^{t-\pi} - \sin(t-\pi) \right] h(t-\pi) \\ &= -\frac{1}{2} \left[(t-\pi)e^{t-\pi} + \sin(t) \right] h(t-\pi) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq \pi \\ -\frac{1}{2} [(t-\pi)e^{t-\pi} + \sin(t)] & \text{für } t > \pi. \end{cases} \end{aligned}$$

Aufgabe 24: Anfangswertprobleme zu linearen Differentialgleichungen n -ter Ordnung

Gegeben seien die folgenden Anfangswertprobleme:

- a) $y''(t) - 2y'(t) - 3y(t) = 4e^t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 6,$
b) $y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) = 4e^{-2t}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$

Bestimmen Sie die Lösungen jeweils mit Hilfe des Exponentialansatzes **und** zusätzlich mit Hilfe der Laplace-Transformation.

Lösung 24:

Zunächst die Lösung mittels Exponentialansatz:

- a) Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 3$ sind $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 3$. Eine Partikulärlösung der inhomogenen Gleichung berechnet man mit dem Ansatz $y_p(t) = ae^t$, es folgt $-4ae^t \stackrel{!}{=} 4e^t$ und damit $a = -1$. Die allgemeine Lösung ist

$$y_{\text{allg}}(t) = -e^t + c_1 e^{-t} + c_2 e^{3t} \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Aus den Anfangsbedingungen $y(0) = -1 + c_1 + c_2 \stackrel{!}{=} 0$ und $y'(0) = -1 - c_1 + 3c_2 \stackrel{!}{=} 6$ folgt das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcl} c_1 & + & c_2 = 1, \\ -c_1 & + & 3c_2 = 7 \end{array}$$

mit Lösung $c_2 = 2$ und $c_1 = -1$. Damit ist

$$y_{AWP}(t) = -e^t - e^{-t} + 2e^{3t}.$$

- b) Die Nullstelle von $p(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda + 4$ ist $\lambda = -2$, dies ist eine doppelte Nullstelle. Als Ansatz für die Partikulärlösung muss man $y_p(t) = at^2 e^{-2t}$ nehmen, denn man hat Resonanz der Ordnung 2. Mit $y_p'(t) = ae^{-2t}(2t - 2t^2)$ und $y_p''(t) = ae^{-2t}(2 - 8t + 4t^2)$ folgt $2ae^{-2t} \stackrel{!}{=} 4e^{-2t}$ und damit $a = 2$. Dies liefert die allgemeine Lösung

$$y_{\text{allg}}(t) = (2t^2 + c_1 t + c_2) e^{-2t} \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Die Anfangsbedingungen $y(0) = c_2 \stackrel{!}{=} 1$ und $y'(0) = c_1 - 2c_2 \stackrel{!}{=} 0$ liefern $c_2 = 1$

und $c_1 = 2$ und damit die Lösung

$$y_{AWP}(t) = (2t^2 + 2t + 1)e^{-2t}.$$

Nun die Lösung mit Hilfe der Laplace-Transformation:

a) Die Laplace-Transformation der Differentialgleichung ergibt

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{4e^t\} &= \mathcal{L}\{y''(t) - 2y'(t) - 3y(t)\} \\ \Rightarrow \quad \frac{4}{s-1} &= s^2Y(s) - y'(0) - sy(0) - 2(sY(s) - y(0)) - 3Y(s) \\ &= s^2Y(s) - 6 - 2sY(s) - 3Y(s)\end{aligned}$$

Die Lösung im Bildbereich ist dann

$$\begin{aligned}Y(s) &= \frac{1}{s^2 - 2s - 3} \cdot \left(\frac{4}{s-1} + 6 \right) \\ &= \frac{6s - 2}{(s-1)(s-3)(s+1)}\end{aligned}$$

Diese lässt sich mittels Partialbruchzerlegung darstellen als

$$Y(s) = \frac{-1}{s-1} + \frac{2}{s-3} + \frac{-1}{s+1}$$

und die Rücktransformation ergibt die Lösung des Anfangswertproblems:

$$\begin{aligned}y(t) &= -\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} + 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} \\ &= -e^t + 2e^{3t} - e^{-t}\end{aligned}$$

b) Die Laplace-Transformation der Differentialgleichung ergibt

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{4e^{-2t}\} &= \mathcal{L}\{y''(t) + 4y'(t) + 4y(t)\} \\ \Rightarrow \quad \frac{4}{s+2} &= s^2Y(s) - y'(0) - sy(0) + 4(sY(s) - y(0)) + 4Y(s) \\ &= s^2Y(s) - s + 4sY(s) - 4 + 4Y(s)\end{aligned}$$

Die Lösung im Bildbereich ist dann

$$\begin{aligned}Y(s) &= \frac{1}{s^2 + 4s + 4} \cdot \left(\frac{4}{s+2} + s + 4 \right) \\ &= \frac{s^2 + 6s + 12}{(s+2)^3}\end{aligned}$$

Diese lässt sich mittels Partialbruchzerlegung darstellen als

$$Y(s) = \frac{1}{s+2} + \frac{2}{(s+2)^2} + \frac{4}{(s+2)^3}$$

und die Rücktransformation ergibt die Lösung des Anfangswertproblems:

$$y(t) = e^{-2t} + 2te^{-2t} + 4\frac{t^2e^{-2t}}{2} = e^{-2t}(1 + 2t + 2t^2)$$

Aufgabe 25: Balkenbiegung

Ein homogener Balken (E, J konstant) der Länge $L = 3$ möge an beiden Enden gelenkig gelagert sein. Bei $2/3$ der Länge greife eine punktförmige Last F an. Berechnen Sie die Lage des tiefsten Punktes des Balkens, wobei sein Eigengewicht vernachlässigt werden darf.

Das Materialgesetz des Balkens wird als

$$EJ \cdot w''''(x) = -F \cdot \delta(x - l) \quad (\text{mit } l = \frac{2}{3}L)$$

angenommen.

Hinweise: EJ bezeichnet die Biegesteifigkeit des Balkens. Zur Vereinfachung können Sie annehmen $EJ = 1$. Ebenso können Sie $F = 1$ setzen.

Gehen Sie in den folgenden Schritten vor:

- a) Ermitteln Sie die Lösung $w_H(x)$ der homogenen Differentialgleichung.
- b) Bestimmen Sie eine spezielle Lösung $w_P(x)$ (bzw. $W_P(s)$) der inhomogenen Differentialgleichung, indem Sie die Laplace-Transformation nutzen, wobei Sie von homogenen Anfangswerten ausgehen können.
- c) Bestimmen Sie die Integrationskonstanten der allgemeinen Lösung der inhomogenen Gleichung $w(x) = w_H(x) + w_P(x)$ aus den Randbedingungen

$$w(0) = w(L) = 0 \quad \text{und} \quad w''(0) = w''(L) = 0.$$

- d) Berechnen Sie den Extremwert der so erhaltenen Funktion.

Lösung 25:

Wir vereinfachen die Differentialgleichung zu

$$w^{(4)}(x) = -6\alpha\delta(x - l)$$

mit der neuen Konstanten $\alpha = \frac{F}{6EJ}$.

- a) Die homogene Gleichung $w_H^{(4)}(x) = 0$ kann durch einfache Integration gelöst werden:

$$w_H(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3.$$

- b) Für $w_P(0) = w'_P(0) = w''_P(0) = w'''_P(0) = 0$ lautet die Laplace-Transformation der inhomogenen linearen Differentialgleichung $w_P^{(4)}(x) = -6\alpha \cdot \delta(x - l)$:

$$s^4 W_P(s) = -6\alpha \cdot e^{-ls} \Rightarrow W_P(s) = -6\alpha \cdot \frac{e^{-ls}}{s^4}.$$

Die Rücktransformation ergibt

$$w_P(x) = -6\alpha \cdot \frac{(x-l)^3}{6} \cdot h(x-l) = -\alpha(x-l)^3 \cdot h(x-l).$$

Dabei ist $h(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 1 & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$ die Heaviside-Funktion.

c) Damit lautet die allgemeine Lösung:

$$w(x) = w_H(x) + w_P(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 - \alpha(x-l)^3 \cdot h(x-l).$$

Die Randbedingungen ergeben:

$$w(0) = 0 \quad : \quad A = 0$$

$$w''(0) = 0 \quad : \quad 2C = 0$$

$$w(L) = 0 \quad : \quad B \cdot L + D \cdot L^3 - \alpha(L-l)^3 = 0$$

$$w''(L) = 0 \quad : \quad 6 \cdot D \cdot L - 6\alpha(L-l) = 0$$

In den letzten beiden Zeilen wurde $A = C = 0$ berücksichtigt.

Aus der letzten erhält man

$$D = \frac{\alpha(L-l)}{L} = \frac{\alpha}{3}$$

und damit aus der dritten:

$$B = \frac{\alpha(L-l)^3 - DL^3}{L} = \frac{\alpha \frac{L^3}{27} - \frac{\alpha}{3} L^3}{L} = \frac{-8\alpha L^2}{27}.$$

Insgesamt haben wir so als Lösung der Randwertaufgabe:

$$\begin{aligned} w(x) &= -\frac{8\alpha}{27}L^2x + \frac{\alpha}{3}x^3 - \alpha(x-l)^3 \cdot h(x-l) \\ &= -\frac{8}{3}\alpha x + \frac{\alpha}{3}x^3 - \alpha(x-2)^3 \cdot h(x-2). \end{aligned}$$

d) Das Minimum dieser Funktion liegt entweder in einem stationären Punkt ($w'(x) = 0$) oder an den Rändern des Definitionsbereichs ($x = 0$, $x = 3$) oder an der Sprungstelle der Funktionsdefinition ($x = 2$). Dort ist die Funktion zwar zweimal differenzierbar, aber auf die Berechnung der Ableitung wird hier verzichtet. Die stationären Punkte in den Teilintervallen $[0, 2]$ und $[2, 3]$

ergeben sich zu:

i) $0 < x < 2$:

$$0 = w'(x) = -\frac{8}{3}\alpha + \alpha x^2 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{\frac{8}{3}}$$

Die negative Wurzel entfällt wegen der Bedingung $0 < x$.

ii) $2 < x < 3$:

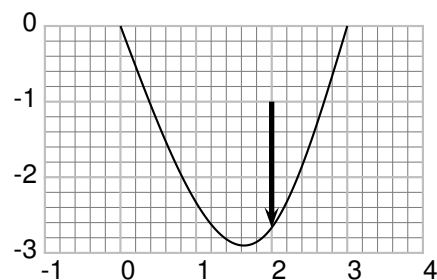
$$\begin{aligned} 0 &= w'(x) = -\frac{8}{3}\alpha + \alpha x^2 - 3\alpha(x-2)^2 \\ \Rightarrow \quad 0 &= (1-3)x^2 + 12x - 12 - \frac{8}{3} \\ \Rightarrow \quad 0 &= x^2 - 6x + \frac{22}{3} = (x-3)^2 - 9 + \frac{22}{3} \\ \Rightarrow \quad x &= 3 \pm \sqrt{\frac{5}{3}} \end{aligned}$$

Beide Lösungen liegen außerhalb des betrachteten Definitionsintervalls $(2 < x < 3)$

Kandidaten für das Minimum sind also $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt{8/3}$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$ mit

$$w(0) = 0, w(x_2) = -\frac{2}{3}x_2^3\alpha < w(2) = -\frac{8}{3}\alpha, w(3) = 0.$$

Damit liegt das Minimum bei $x_2 = \sqrt{\frac{8}{3}}$.



Aufgabe 26: δ -Distribution

Bestimmen Sie die folgenden Integrale:

$$\text{i)} \quad I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{1+x^2} \cdot \delta(x-\pi) \, dx. \quad \text{ii)} \quad I_2 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(x) \cdot \delta(x-\pi) \, dx.$$

Lösung 26:

$$\text{i)} \quad I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{1+x^2} \cdot \delta(x-\pi) \, dx = \frac{\cos(\pi)}{1+\pi^2} = \frac{-1}{1+\pi^2}.$$

$$\text{ii)} \quad I_2 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(x) \cdot \delta(x-\pi) \, dx = 0 \quad \text{da} \quad \pi \notin [-\pi/2, \pi/2].$$

Aufgabe 27: AWP und δ -Distribution

Ein mechanisches Pendel werde durch das folgende Anfangswertproblem beschrieben

$$u''(t) + 2u'(t) + 5u(t) = f(t), \quad u(0) = 2, \quad u'(0) = -2.$$

$u''(t)$ steht nach dem zweiten Newtonschen Gesetz für die Beschleunigung einer Masse. Der Term $5u(t)$ modelliert ein repulsives Potential (Federkraft) und der Term $2u'(t)$ die Dämpfung des Systems. Das Pendel befindet sich zum Zeitpunkt $t = 0$ am Ort $u(0) = 2$ und hat die Geschwindigkeit $u'(0) = -2$.

- Bestimmen Sie mit Hilfe der Laplace-Transformation die Lösung des AWP für $f(t) = 0, t > 0$. (Es wirken keine äußeren Kräfte.)
- Bestimmen Sie den Zeitpunkt t_0 des ersten Nulldurchgangs, d.h. $u(t_0) = 0$, der Lösung aus Teil a).
- Zum Zeitpunkt t_0 aus Teil b) wird ein δ -Impuls $f(t) = \alpha \cdot \delta(t - t_0)$ so auf das System ausgeübt, dass das System anschließend in Ruhe ist.
Dies modelliert ein starres Hindernis, auf welches das Pendel (nicht elastisch) aufprallt, so dass die Bewegung sofort endet.
Wie groß muss die Impulsstärke α sein?

Lösung 27:

Zu a) Die Laplace-Transformation des AWP ergibt mit $\mathcal{L}(u(t)) = \mathcal{U}(s)$:

$$s^2 \mathcal{U} - 2s + 2 + 2 \cdot [s\mathcal{U} - 2] + 5\mathcal{U} = 0 \Rightarrow \mathcal{U}(s) = \frac{2(s+1)}{(s+1)^2 + 2^2}.$$

Die Rücktransformation ergibt die Lösung des AWP

$$\boxed{u_{\text{AWP}}(t) = 2e^{-t} \cdot \cos(2t)}.$$

Zu b) Aus $2t_0 = \pi/2$ erhält man $\boxed{t_0 = \pi/4}$.

Zu c) Das inhomogene lineare AWP lautet

$$u''(t) + 2u'(t) + 5u(t) = \alpha \cdot \delta(t - \pi/4).$$

Die Laplace-Transformation ergibt

$$s^2 \mathcal{U} - 2s + 2 + 2 \cdot [s\mathcal{U} - 2] + 5\mathcal{U} = \alpha e^{-s \cdot \pi/4}$$

und nach $\mathcal{U}(s)$ aufgelöst:

$$\mathcal{U}(s) = \frac{2(s+1)}{(s+1)^2 + 2^2} + e^{-s \cdot \pi/4} \cdot \frac{\alpha}{(s+1)^2 + 2^2}.$$

Die Rücktransformation ergibt

$$\begin{aligned} u_{\text{AWP}}(t) &= 2 e^{-t} \cdot \cos(2t) + \frac{\alpha}{2} \cdot e^{-(t-\pi/4)} \cdot \sin\left(2\left(t - \frac{\pi}{4}\right)\right) \cdot h\left(t - \frac{\pi}{4}\right) \\ &= e^{-t} \cdot \left\{ 2 \cos(2t) + \frac{\alpha}{2} \cdot e^{\pi/4} \cdot \left[\sin(2t) \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \cos(2t) \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right] \cdot h\left(t - \frac{\pi}{4}\right) \right\} \\ &= e^{-t} \cos(2t) \cdot \left\{ 2 - \frac{\alpha}{2} e^{\pi/4} \cdot h\left(t - \frac{\pi}{4}\right) \right\} \end{aligned}$$

Damit die Lösung für $t \geq t_0$ verschwindet, muß $2 = \frac{\alpha}{2} e^{\pi/4}$ sein, der δ -Impuls also die Stärke

$$\boxed{\alpha = 4 e^{-\pi/4}}$$

haben.

Aufgabe 28: Integralgleichungen mit Laplace-Transformation

Bestimmen Sie die Lösung $y(t)$ (mit $t \geq 0$) der Integralgleichung

$$y(t) = t^2 + \int_0^t y(\tau) \sin(t - \tau) \, d\tau.$$

Lösung 28:

Die Laplace-Transformation der Integralgleichung ergibt mit $\mathcal{L}(y(t)) = Y(s)$ sowie

$$\int_0^t y(\tau) \sin(t - \tau) \, d\tau = \mathcal{L}(y(t) * \sin(t)) = \mathcal{L}(y(t)) \cdot \mathcal{L}(\sin(t))$$

die Gleichung im Frequenzraum:

$$Y(s) = \frac{2}{s^3} + Y(s) \cdot \frac{1}{s^2 + 1}$$

$$\Rightarrow \left(1 - \frac{1}{s^2 + 1}\right) Y(s) = \frac{2}{s^3} \Rightarrow Y(s) = \frac{2(s^2 + 1)}{s^3 \cdot s^2} = \frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^5}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{y(t) = t^2 + \frac{t^4}{12}}}.$$

Aufgabe 29: Lineare Differentialgleichung

Gegeben sei das Anfangswertproblem für $u(t)$

$$u'' + 4u' + 3u = 12 \cdot \left(1 - h(t-2)\right), \quad u(0) = u'(0) = 0$$

wobei $h(t)$ die Heaviside-Funktion ist.

- a) Bestimmen Sie die Lösung mit Hilfe der Laplace-Transformation.
- b) Geben Sie die Lösung in den Bereichen $0 \leq t < 2$ und $2 \leq t$ ohne Verwendung der Heaviside-Funktion an und fassen Sie die Terme sinnvoll zusammen.

Lösung 29:

- a) Die Laplace-Transformation des AWP's ergibt

$$s^2 U(s) + 4s U(s) + 3U(s) = \frac{12}{s} \cdot \left(1 - e^{-2s}\right).$$

Die Laplace-Transformierte der Lösung ergibt sich damit zu

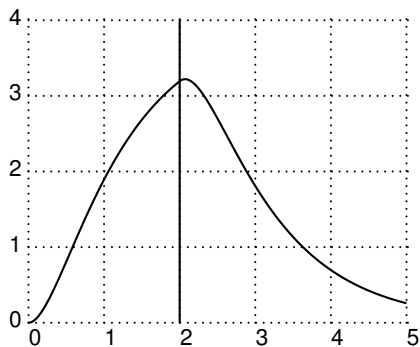
$$U(s) = \frac{12}{s \cdot (s+3) \cdot (s+1)} \cdot \left(1 - e^{-2s}\right) = \left(\frac{4}{s} + \frac{2}{s+3} + \frac{-6}{s+1}\right) \cdot \left(1 - e^{-2s}\right).$$

Die Rücktransformation ergibt die gesuchte Lösung

$$u(t) = 4 + 2e^{-3t} - 6e^{-t} - h(t-2) \cdot \left(4 + 2e^{-3(t-2)} - 6e^{-(t-2)}\right).$$

- b)

$$u(t) = \begin{cases} 4 + 2e^{-3t} - 6e^{-t} & \text{für } 0 \leq t < 2 \\ (2 - 2e^6) \cdot e^{-3t} + (-6 + 6e^2) \cdot e^{-t} & \text{für } 2 \leq t \end{cases}.$$



Aufgabe 30: Laplace-Transformierte

Berechnen Sie die Laplace-Transformierte von $f(t) = \sqrt{t}$:

$$F(s) := \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot \sqrt{t} dt.$$

Hinweise:

- Substituieren Sie $u = \sqrt{t}$.
- Spalten Sie u^2 in $u \cdot u$ auf und integrieren Sie partiell.
- Das Quadrat des verbleibenden Integrals können Sie lösen, indem Sie Polarkoordinaten einführen.

Lösung 30:

Mit der Substitution $u = \sqrt{t} \Rightarrow dt = 2u du$ erhält man

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-su^2} \cdot u \cdot 2u du = -\frac{1}{s} \cdot \int_0^{\infty} u \cdot (-2su) e^{-su^2} du.$$

Die partielle Integration ergibt

$$\begin{aligned} F(s) &= -\frac{1}{s} \left(ue^{-su^2} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} e^{-su^2} du \right) \\ &= -\frac{1}{s} \left(0 - 0 - \int_0^{\infty} e^{-su^2} du \right) \\ &= \frac{1}{s} \cdot \int_0^{\infty} e^{-su^2} du. \end{aligned}$$

Mit Quadrieren erhält man

$$\left(F(s)\right)^2 = \frac{1}{s} \int_0^{\infty} e^{-sx^2} dx \cdot \frac{1}{s} \int_0^{\infty} e^{-sy^2} dy = \frac{1}{s^2} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-s(x^2+y^2)} dx dy$$

und durch Übergang zu Polarkoordinaten

$$\left(F(s)\right)^2 = \frac{1}{s^2} \int_0^{\infty} \int_0^{\pi/2} e^{-sr^2} r d\phi dr = \frac{1}{s^2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \left[\frac{-1}{2s} e^{-sr^2} \right]_0^{\infty} = \frac{\pi}{4s^3}.$$

Damit ist

$$F(s) = \mathcal{L}(\sqrt{t}) = \sqrt{\frac{\pi}{4s^3}}.$$

Aufgabe 31: Laplace-Transformierte

Bestimmen Sie unter Verwendung von $\mathcal{L}\left\{\sin(t)\right\} = \frac{1}{s^2 + 1}$ und geeigneten Rechenregeln folgende Ausdrücke

$$\text{a) } \mathcal{L}\left\{\frac{\sin(t)}{t}\right\}, \quad \text{b) } \mathcal{L}\left\{\int_0^t \frac{\sin(\tau)}{\tau} d\tau\right\}, \quad \text{c) } \int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t} dt, \quad \text{d) } \mathcal{L}\left\{e^{-t} \frac{\sin(t)}{t}\right\}.$$

Lösung 31:

a) Mit der Transformationsformel $\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(\sigma) d\sigma$ erhält man

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\sin(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty \frac{1}{\sigma^2 + 1} d\sigma = \left[\arctan(\sigma)\right]_s^\infty = \frac{\pi}{2} - \arctan(s).$$

b) Mit der Transformationsformel $\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s}$ erhält man

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t \frac{\sin(\tau)}{\tau} d\tau\right\} = \frac{1}{s} \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(s)\right)$$

c) 1. Lösungsweg

Mit Hilfe des Anfangs- und Endwertsatzes ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t} dt &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau = \lim_{s \rightarrow 0} \left(s \cdot \mathcal{L}\left\{\int_0^t \frac{\sin(\tau)}{\tau} d\tau\right\} \right) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(s) \right) = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

2. Lösungsweg

Nach Definition der Laplace-Transformierten gilt

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\sin(t)}{t}\right\} = \int_0^\infty e^{-st} \cdot \frac{\sin(t)}{t} dt = U(s)$$

Aus der Teilaufgabe a) folgt $U(s) = \frac{\pi}{2} - \arctan(s)$.

Somit erhält man

$$\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t} dt = \int_0^\infty e^{-0 \cdot t} \cdot \frac{\sin(t)}{t} dt = U(0) = \frac{\pi}{2}$$

d) Mit der Transformationsformel $\mathcal{L}\{e^{-at}f(t)\} = F(s+a)$ erhält man

$$\mathcal{L}\left\{e^{-t}\frac{\sin(t)}{t}\right\} = \frac{\pi}{2} - \arctan(s+1) .$$

Aufgabe 32: Laplace-Transformierte

Berechnen Sie die Laplace-Transformierte der folgenden Funktionen:

- a) $f_1(t) = \begin{cases} A & \text{für } 0 \leq t \leq t_0 \\ Ae^{-2(t-t_0)} & \text{sonst} \end{cases}$ mit festem $A \in \mathbb{R}$.
- b) $f_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq t < a \\ A & \text{für } a \leq t < b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ mit festen $0 < a < b$ und $A \in \mathbb{R}$.
- c) $f_3(t) = \begin{cases} t & \text{für } 0 \leq t \leq 3 \\ 3 & \text{für } t > 3 \end{cases}$
- d) $f_4(t) = \begin{cases} \sin t & \text{für } t \leq \pi \\ 0 & \text{für } t > \pi \end{cases}$.

Lösung 32:

a)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f_1(t)\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} f_1(t) dt = \int_0^{t_0} e^{-st} A dt + \int_{t_0}^{\infty} Ae^{-2(t-t_0)-st} dt \\ &= \frac{A}{-s} \cdot e^{-st} \Big|_0^{t_0} + \frac{A}{-s-2} \cdot e^{(-s-2)t+2t_0} \Big|_{t_0}^{\infty} \\ &= \frac{A(1 - e^{-st_0})}{s} + \frac{Ae^{-st_0}}{2+s} = \frac{A}{s} - \frac{2Ae^{-st_0}}{s^2 + 2s} \end{aligned}$$

b) $\mathcal{L}\{f_2(t)\} = \int_a^b Ae^{-st} dt = \frac{A(e^{-as} - e^{-bs})}{s}$

c)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f_3(t)\} &= \int_0^3 te^{-st} dt + \int_3^{\infty} 3e^{-st} dt = t \frac{e^{-st}}{-s} \Big|_0^3 - \int_0^3 \frac{e^{-st}}{-s} dt + \frac{3e^{-st}}{-s} \Big|_3^{\infty} \\ &= -\frac{3e^{-3s}}{s} - \frac{e^{-st}}{s^2} \Big|_0^3 + \frac{3e^{-3s}}{s} = \frac{-e^{-3s} + 1}{s^2} \end{aligned}$$

d) 1.Lösungsweg:(komplexe Zahlen)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f_4(t)\} &= \int_0^{\pi} e^{-st} \sin t \, dt \\&= \int_0^{\pi} \operatorname{Im}(e^{-st+it}) \, dt \\&= \operatorname{Im} \left(\frac{e^{-st+it}}{-s+i} \right) \Big|_0^{\pi} \\&= \operatorname{Im} \left(\frac{(-s-i)e^{-st+it}}{s^2+1} \right) \Big|_0^{\pi} \\&= \frac{e^{-st}}{s^2+1} \cdot \operatorname{Im}((-s-i)(\cos t + i \sin t)) \Big|_0^{\pi} \\&= \frac{e^{-st}}{s^2+1} \cdot (-\cos t - s \sin t) \Big|_0^{\pi} \\&= \frac{e^{-s\pi} + 1}{1+s^2}\end{aligned}$$

2.Lösungsweg: (zweifache partielle Integration)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f_4(t)\} &= \int_0^{\pi} e^{-st} \sin t \, dt = -\cos t e^{-st} \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} s \cos t e^{-st} \, dt \\&= e^{-s\pi} + 1 - s \sin t e^{-st} \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} s^2 \sin t e^{-st} \, dt \\&= e^{-s\pi} + 1 - s^2 \cdot \mathcal{L}\{f_4(t)\} \\ \Rightarrow \quad \mathcal{L}\{f_4(t)\} &= \frac{e^{-s\pi} + 1}{1+s^2}\end{aligned}$$

Aufgabe 33: Laplace-Transformierte

a) Berechnen Sie die Laplace-Transformierte

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} \cdot f(t) dt$$

der folgenden Funktionen:

i) $f(t) = 1,$

vi) $f(t) = e^{-at} \cdot t,$

ii) $f(t) = t,$

vii) $\mathcal{L}\{g'(t)\},$ für eine allgemeine (gegebene) Funktion $g(t),$

iii) $f(t) = t^2,$

iv) $f(t) = t^3,$

viii) $\mathcal{L}\{g''(t)\},$ für eine allgemeine (gegebene) Funktion $g(t).$

v) $f(t) = e^{-at},$

Hinweis: Für die letzten beiden Aufgaben kann die Laplacetransformierte $G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}$ der Funktion $g(t)$ als bekannt vorausgesetzt werden.

b) Berechnen Sie die Laplace-Transformierte von $f(t) = \sqrt{t}.$

Hinweise:

- Substituieren Sie $u = \sqrt{t}.$
- Spalten Sie u^2 in $u \cdot u$ auf und integrieren Sie partiell.
- Das Quadrat des verbleibenden Integrals können Sie lösen, indem Sie Polarkoordinaten einführen.

Lösung 33:

a) Diese Laplace-Transformationen müssen durch Anwendung der Definition und Bestimmung der Integrale berechnet werden. Es wird in der Regel partiell integriert.

i)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{1\} &= \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} 1 dt = \left[\frac{e^{-st}}{-s} \right]_{t=0}^{\infty} \\ &= \frac{1}{s}\end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{t\} &= \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} t dt = \left[t \frac{e^{-st}}{-s} \right]_{t=0}^{\infty} + \frac{1}{s} \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} dt \\ &= 0 - \frac{e^{-st}}{-s^2} \Big|_{t=0}^{\infty} = \frac{1}{s^2}\end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{t^2\} &= \int_{t=0}^{\infty} t^2 e^{-st} dt = \left[t^2 \frac{e^{-st}}{-s} \right]_{t=0}^{\infty} + \frac{1}{s} \int_{t=0}^{\infty} 2te^{-st} dt \\ &= 0 + \left[\frac{2te^{-st}}{-s^2} \right]_{t=0}^{\infty} + \frac{2}{s^2} \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} dt \\ &= 0 + \frac{2e^{-st}}{-s^3} \Big|_{t=0}^{\infty} = \frac{2}{s^3}\end{aligned}$$

iv)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{t^3\} &= \int_{t=0}^{\infty} t^3 e^{-st} dt = \left[t^3 \frac{e^{-st}}{-s} \right]_{t=0}^{\infty} + \frac{1}{s} \int_{t=0}^{\infty} 3t^2 e^{-st} dt \\ &= 0 + \left[\frac{3t^2 e^{-st}}{-s^2} \right]_{t=0}^{\infty} + \frac{3}{s^2} \int_{t=0}^{\infty} 2te^{-st} dt \\ &= 0 + \frac{6te^{-st}}{-s^3} \Big|_{t=0}^{\infty} + \int_{t=0}^{\infty} \frac{6e^{-st}}{s^3} dt \\ &= 0 + \frac{6e^{-st}}{s^4} \Big|_{t=0}^{\infty} = \frac{6}{s^4}\end{aligned}$$

v)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{e^{-at}\} &= \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} e^{-at} dt = \left[\frac{e^{-(s+a)t}}{-(s+a)} \right]_{t=0}^{\infty} \\ &= \frac{1}{s+a}\end{aligned}$$

vi)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{te^{-at}\} &= \int_{t=0}^{\infty} te^{-at} e^{-st} dt = \left[\frac{te^{-(s+a)t}}{-(s+a)} \right]_{t=0}^{\infty} + \frac{1}{s+a} \int_{t=0}^{\infty} e^{-(s+a)t} dt \\ &= 0 + \frac{e^{-(s+a)t}}{-(s+a)^2} \Big|_{t=0}^{\infty} = \frac{1}{(s+a)^2}\end{aligned}$$

vii)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{g'(t)\} &= \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} g'(t) dt \\ &= \left[e^{-st} g(t) \right]_{t=0}^{\infty} - \int_{t=0}^{\infty} (-se^{-st} g(t)) dt \\ &= 0 - g(0) + s\mathcal{L}\{g(t)\} = sG(s) - g(0)\end{aligned}$$

viii)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{g''(t)\} &= \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} g''(t) dt \\ &= \left[e^{-st} g'(t) \right]_{t=0}^{\infty} - \int_{t=0}^{\infty} (-se^{-st} g'(t)) dt \\ &= 0 - g'(0) + s\mathcal{L}\{g'(t)\} \\ &= s(sG(s) - g(0)) - g'(0) = s^2 G(s) - g'(0) - sg(0)\end{aligned}$$

b) Mit der Substitution $u = \sqrt{t} \Rightarrow dt = 2u du$ erhält man

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-su^2} \cdot u \cdot 2u du = -\frac{1}{s} \cdot \int_0^{\infty} u \cdot (-2su) e^{-su^2} du .$$

Partielle Integration ergibt

$$\begin{aligned}F(s) &= -\frac{1}{s} \left(ue^{-su^2} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} e^{-su^2} du \right) \\ &= -\frac{1}{s} \left(0 - 0 - \int_0^{\infty} e^{-su^2} du \right) \\ &= \frac{1}{s} \cdot \int_0^{\infty} e^{-su^2} du .\end{aligned}$$

Durch Quadrieren der Gleichung erhält man

$$\left(F(s)\right)^2 = \frac{1}{s} \int_0^{\infty} e^{-sx^2} dx \cdot \frac{1}{s} \int_0^{\infty} e^{-sy^2} dy = \frac{1}{s^2} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-s(x^2+y^2)} dx dy$$

und durch Übergang zu Polarkoordinaten

$$\left(F(s)\right)^2 = \frac{1}{s^2} \int_0^\infty \int_0^{\pi/2} e^{-s r^2} r \, d\phi \, dr = \frac{1}{s^2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \left[\frac{-1}{2s} e^{-s r^2} \right]_0^\infty = \frac{\pi}{4 s^3} .$$

Damit ist

$$F(s) = \mathcal{L}(\sqrt{t}) = \sqrt{\frac{\pi}{4 s^3}} .$$

Aufgabe 34: Heaviside-Funktion

Gesucht ist die Laplace-Transformierte von

$$f(t) := h(t-2) \cdot t^2 ,$$

wobei h die Heaviside-Funktion ist.

- a) Mit Hilfe der Integraldarstellung der Definition.
- b) Mit Hilfe des Verschiebungssatzes und der Tabelle der Laplace-Transformierten.

Lösung 34:

a)

$$F(s) = \int_2^{\infty} e^{-st} t^2 \, dt = \left[- \left(\frac{t^2}{s} + \frac{2t}{s^2} + \frac{2}{s^3} \right) \cdot e^{-st} \right]_2^{\infty} = \left(\frac{4}{s} + \frac{4}{s^2} + \frac{2}{s^3} \right) \cdot e^{-2s} .$$

b) Für den Verschiebungssatz

$$\mathcal{L}\left(f(t-a) \cdot h(t-a)\right) = F(s) \cdot e^{-as} , \quad a > 0 ,$$

muss die Funktion erst umgeschrieben werden:

$$t^2 = (t-2)^2 + 4(t-2) + 4 .$$

Damit erhält man die Laplace-Transformierte

$$\mathcal{L}\left(\left((t-2)^2 + 4(t-2) + 4\right) \cdot h(t-2)\right) = \left(\frac{2}{s^3} + \frac{4}{s^2} + \frac{4}{s}\right) \cdot e^{-2s}$$

Aufgabe 35: Linear ODE

Gegeben sei das folgende Anfangswertproblem für $y(t)$ durch

$$y'' + 4y = t, \quad y(0) = 1, y'(0) = 2.$$

- a) Berechnen Sie die Lösung mit dem Exponentialansatz.
- b) Berechnen Sie die Lösung mit Hilfe der Laplace-Transformation.

Lösung 35:

a) Die allgemeine Lösung ist gegeben durch die Lösung des homogenen Systems und der partikulären Lösung

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t).$$

Für das homogene System betrachten wir die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\lambda^2 + 4 = 0,$$

welche die komplex Konjugierten sind

$$\lambda = \pm 2i.$$

Daher ist die Lösung des homogenen Systems

$$y_h(t) = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t.$$

Die beiden Konstanten werden mit den Anfangswerten bestimmt. Für die partikuläre Lösung machen wir den Ansatz

$$y_p(t) = A_0 + A_1 t,$$

weil die rechte Seite der Differentialgleichung ein lineares Polynom ist. Die beiden Konstanten A_0 und A_1 werden durch einsetzen in die Gleichung bestimmt. Da $y' = A_1$ und $y'' = 0$, erhalten wir

$$4(A_0 + A_1 t) = t$$

und mit Koeffizientenvergleich gilt

$$A_0 = 0, \quad A_1 = \frac{1}{4}.$$

Insgesamt ergibt sich die allgemeine Lösung

$$y(t) = \frac{1}{4}t + C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t.$$

Aus den Anfangswerten erhalten wir

$$y(0) = C_1 = 1$$

und

$$y'(0) = \frac{1}{4} + 2C_2 \stackrel{!}{=} 2 \rightarrow C_2 = \frac{7}{8}.$$

Die spezielle Lösung ist dann

$$y(t) = \frac{1}{4}t + \cos 2t + \frac{7}{8} \sin 2t.$$

b) Mit der Laplace-Transformation gilt

$$s^2 Y(s) - s - 2 + 4Y(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$(s^2 + 4)Y(s) = \frac{1}{s^2} + s + 2$$

$$Y(s) = \frac{s^3 + 2s^2 + 1}{s^2(s^2 + 4)}$$

Durchführen einer Partialbruchzerlegung:

$$\frac{s^3 + 2s^2 + 1}{s^2(s^2 + 4)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{Cs + D}{s^2 + 4}$$

Multiplikation beider Seiten mit $s^2(s^2 + 4)$ ergibt

$$s^3 + 2s^2 + 1 = As(s^2 + 4) + B(s^2 + 4) + (Cs + D)s^2.$$

Der Wert $s = 0$ führt zu $B = \frac{1}{4}$.

$$s^3 + 2s^2 + 1 = As^3 + 4As + \frac{1}{4}s^2 + 1 + Cs^3 + Ds^2$$

Mit Koeffizientenvergleich erhalten wir

$$A = 0$$

$$C = 1$$

$$D + \frac{1}{4} = 2 \quad \rightarrow \quad D = \frac{7}{4}$$

$$Y(s) = \frac{1}{4} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2} \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2 + 2^2} \right\} + \frac{7}{4} \frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2}{s^2 + 2^2} \right\}$$

$$y(t) = \frac{1}{4}t + \cos 2t + \frac{7}{8} \sin 2t.$$

Aufgabe 36: AWP mit Laplace-Transformation

Bestimmen Sie mit Hilfe der Laplace-Transformation die Lösung der Anfangswertaufgabe:

$$u''(t) + 4u'(t) - 12u(t) = 4e^{-2t}$$

mit den Anfangswerten

$$u(0) = 0 \text{ und } u'(0) = 0 .$$

Lösung 36:

Die Laplace-Transformation der AWP lautet mit $u_0 = u'_0 = 0$:

$$\left(s^2 U(s) - s u_0 - u'_0\right) + 4 \cdot (s U(s) - u_0) - 12 \cdot U(s) = \frac{4}{s+2}$$

$$\Rightarrow \left(s^2 + 4s - 12\right) \cdot U(s) = \frac{4}{s+2}$$

$$\Rightarrow U(s) = \frac{4}{(s+2)(s^2 + 4s - 12)} = \frac{\frac{-1}{4}}{s+2} + \frac{\frac{1}{8}}{s-2} + \frac{\frac{1}{8}}{s+6}$$

Die Rücktransformation ergibt die Lösung der AWP :

$$u_{\text{AW}}(t) = \frac{-1}{4} e^{-2t} + \frac{1}{8} e^{2t} + \frac{1}{8} e^{-6t} .$$

Aufgabe 37: Laplace-Transformation

Beantworten Sie die folgenden Fragen und geben Sie gegebenenfalls ein Beispiel.

- a) Wie ist die Laplace-Transformation definiert?
- b) Warum muss die Variable s positiv sein?
- c) Was ist die Heaviside-Funktion $h_{t_0}(t)$?
- d) Erklären Sie anhand eines Beispiels, was die Dämpfung einer Funktion $f(t)$.
- e) Ist die folgende Aussage wahr?

$$\mathcal{L}\{f(t) + g(t)\} = F(s) + G(s)$$

- f) Ist die folgende Aussage wahr?

$$\mathcal{L}\{f(t) g(t)\} = F(s) G(s)$$

- g) Wiederholen Sie, wie man ein Anfangswertproblem mithilfe der Laplace-Transformation lösen kann.
- h) Schreiben Sie die Eigenschaften der Dirac-Delta-Funktion $\delta(t)$ (auch δ -Distribution) auf.

Lösung 37:

- a) Wie ist die Laplace-Transformation definiert?

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt.$$

- b) Warum muss die Variable s positiv sein?

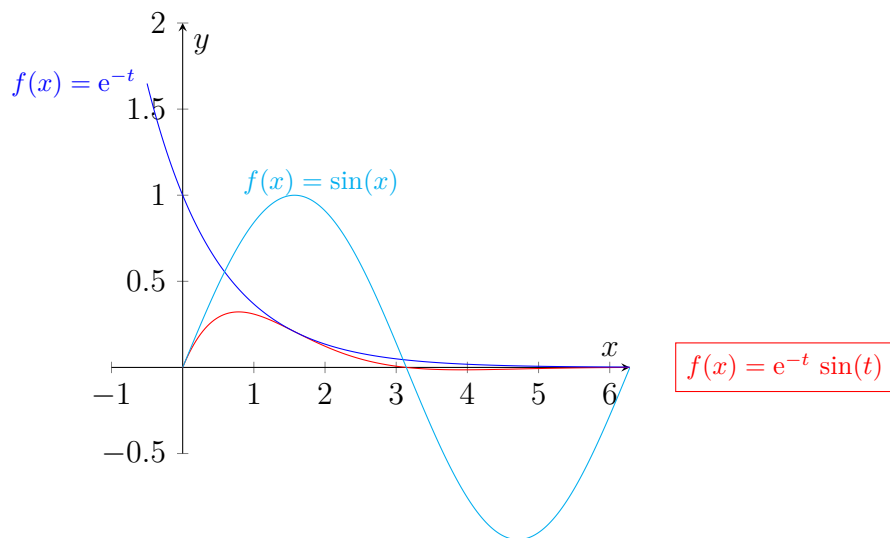
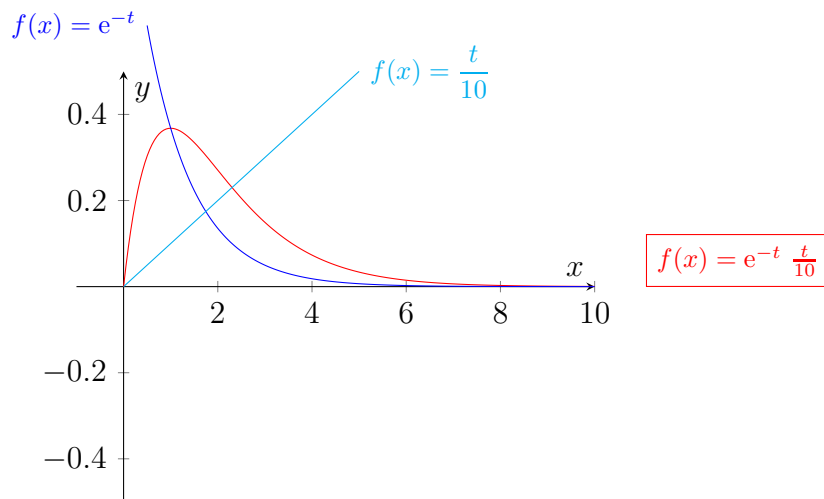
Weil die obere Grenze des Integrals der Definition der Laplace-Transformation ∞ ist und die Exponentialfunktion e^{-st} nur beschränkt ist für $t \rightarrow \infty$, wenn $s > 0$.

- c) Was ist die Heaviside-Funktion $h_{t_0}(t)$?

Die Heaviside-Funktion ist die Stufenfunktion, die 0 ist für $t < t_0$ und 1 für $t \geq t_0$.

- d) Erklären Sie anhand eines Beispiels, was die Dämpfung einer Funktion $f(t)$.

Zeigen Sie den Graphen von $e^{-t} f(t)$ mit $f(t) = \frac{t}{10}$ oder $f(t) = \sin(t)$.



- e) Ist die folgende Aussage wahr?

$$\mathcal{L}\{f(t) + g(t)\} = F(s) + G(s)$$

Ja.

- f) Ist die folgende Aussage wahr?

$$\mathcal{L}\{f(t) g(t)\} = F(s) G(s)$$

Nein.

- g) Wiederholen Sie, wie man ein Anfangswertproblem mithilfe der Laplace-Transformation lösen kann.

- i) Transformieren Sie die rechte und die linke Seite der Dgl.: Wende $\mathcal{L}\{\cdot\}$ an.
- ii) Setzen Sie die Anfangsbedingungen ein und lösen Sie nach $Y(s)$.

- iii)** Rücktransformieren Sie die linke und die rechte Seite der Gleichung (mit Hilfe der Tabelle), um die Lösung $y(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y(s))$ zu erhalten.
- h)** Schreiben Sie die Eigenschaften der Dirac-Delta-Funktion $\delta(t)$ (auch δ -Distribution) auf.

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt &= 1, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - a) dt &= 1, \quad (\text{beliebig } a) \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) f(t) dt &= f(t_0)\end{aligned}$$

Aufgabe 38: Verschiebungssatz

- a) Berechnen Sie die Laplace-Transformation der Funktion $f(t) = h(t-3)e^{t-3}$.
- b) Berechnen Sie die Inverse Laplace-Transformation von $\frac{1}{(s-2)^2}$.
- c) Berechnen Sie die Inverse Laplace-Transformation von $\frac{1}{(s-1)^2}e^{-3s}$.

Lösung 38:

- a) 1. Nutzen Sie die Verschiebungseigenschaft der Laplace-Transformation: Wenn $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, dann gilt $\mathcal{L}\{f(t-a)h(t-a)\} = e^{-as}F(s)$.

In diesem Fall ist $f(t-a) = e^{t-a}$. Bei $a = 3$ ist e^{t-3} .

2. Finden Sie die Laplace-Transformation von e^t (nicht von e^{t-3}):

$$\mathcal{L}\{e^t\} = \int_0^\infty e^t e^{-st} dt = \int_0^\infty e^{(1-s)t} dt$$

Damit das Integral konvergiert, muss $s > 1$ sein:

$$\mathcal{L}\{e^t\} = \frac{1}{s-1}$$

3. Wenden Sie die Verschiebungseigenschaft an:

$$\mathcal{L}\{e^{t-3}h(t-3)\} = e^{-3s} \cdot \mathcal{L}\{e^t\} = e^{-3s} \cdot \frac{1}{s-1}$$

- b) 1. Die allgemeine Formel für die Inverse Laplace-Transformation von $\frac{1}{(s-a)^n}$ ist:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-a)^n}\right\} = \frac{t^{n-1}e^{at}}{(n-1)!}$$

2. Für unseren speziellen Fall ist $a = 2$ und $n = 2$.

Mit der Formel erhalten wir:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)^2}\right\} = \frac{t^{2-1}e^{2t}}{(2-1)!} = \frac{te^{2t}}{1} = te^{2t}$$

- c) 1. Identifizieren Sie die Verschiebungseigenschaft: Der Term e^{-3s} deutet auf eine Zeitverschiebung in der ursprünglichen Funktion hin. Speziell gilt, wenn $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, dann ist $\mathcal{L}\{f(t-a)h(t-a)\} = e^{-as}F(s)$.
2. Finden Sie die Inverse Laplace-Transformation der unverschobenen Funktion: Betrachten Sie $\frac{1}{(s-1)^2}$. Wir erkennen, dass die Inverse Laplace-Transformation

von $\frac{1}{(s-a)^2}$ te^{at} ist:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s-1)^2} \right\} = te^t$$

3. Wenden Sie die Verschiebungseigenschaft an: Der Term e^{-3s} zeigt eine Verschiebung um 3 Einheiten an. Daher:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s-1)^2} e^{-3s} \right\} = (t-3)e^{(t-3)}h(t-3)$$

Aufgabe 39: LR-Kreis mit Hilfe der Laplace-Transformation

Ein Stromkreis habe einen Widerstand von $R = 0.8 \text{ Ohm}$ und eine Selbstinduktion von $L = 4 \text{ Henry}$. Bis zur Zeit $t_0 = 0$ fließe kein Strom. Dann wird eine Spannung von $U = 5 \text{ Volt}$ angelegt. Nach 5 Sekunden wird die Spannung abgeschaltet. Gesucht ist der Stromverlauf $I(t)$ für $0 \leq t \leq 5$ und $t > 5$. Ermitteln Sie $I(t)$ mit Hilfe der Laplace-Transformation.

Hinweis: In diesem Stromkreis gilt $L\dot{I}(t) + RI(t) = U(t)$ mit

$$U(t) = 5 \cdot (1 - h(t - 5)) = \begin{cases} 5, & 0 \leq t \leq 5 \\ 0, & t > 5 \end{cases}.$$

mit der Heaviside-Funktion $h(t)$.

Lösung 39:

Es sei $Y(s)$ die Laplace-Transformierte des Stroms $I(t)$. Damit gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{L\dot{I}(t) + RI(t)\} &= \mathcal{L}\{U(t)\} \\ \Rightarrow L(sY(s) - \underbrace{I(0)}_{=0}) + RY(s) &= 5 \cdot \mathcal{L}\{1 - h(t - 5)\} \\ &= 5 \left(\frac{1}{s} - \frac{e^{-5s}}{s} \right) \end{aligned}$$

Diese (algebraische) Gleichung hat die Lösung

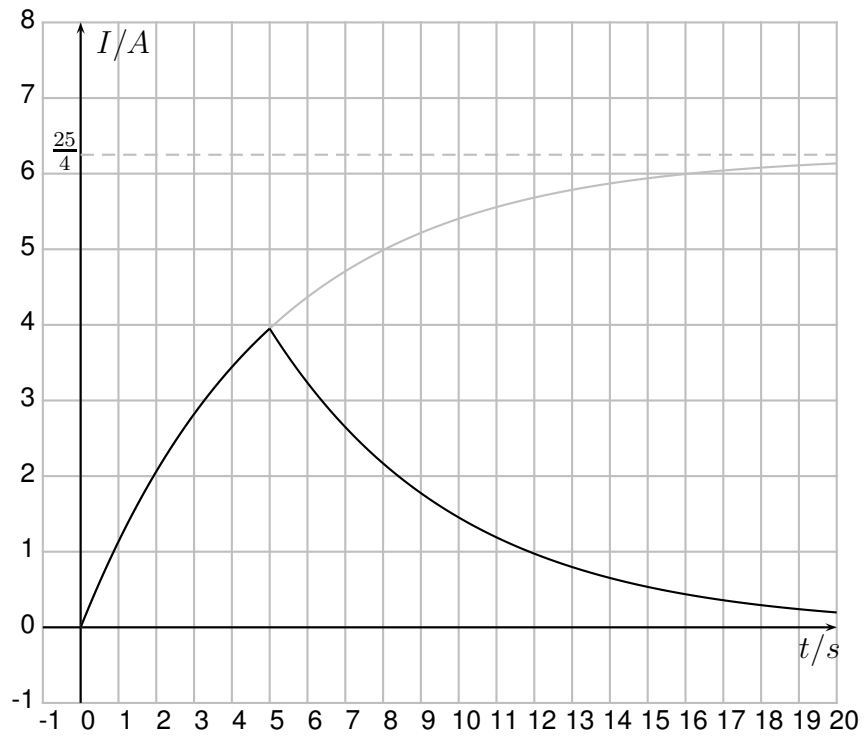
$$Y(s) = \frac{5(1 - e^{-5s})}{s(sL + R)} = \frac{25(1 - e^{-5s})}{4s(5s + 1)}.$$

Vor der eigentlichen Rücktransformation betrachten wir zunächst

$$\frac{1}{s(5s + 1)} = \frac{1}{s} - \frac{5}{5s + 1} = \mathcal{L}\{1 - e^{-t/5}\}$$

Daraus ergibt sich dann

$$\begin{aligned} I(s) &= \frac{25}{4} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1 - e^{-5s}}{s(5s + 1)} \right\} \\ &= \frac{25}{4} \left(1 - e^{-t/5} - \left(1 - e^{-(t-5)/5} \right) h(t - 5) \right) \\ &= \frac{25}{4} \cdot \begin{cases} (1 - e^{-t/5}), & 0 \leq t \leq 5 \\ (e - 1)e^{-t/5}, & t > 5 \end{cases}. \end{aligned}$$



Dieser Stromverlauf ist plausibel. Würde die Spannung bei $5V$ bleiben, würde sich asymptotisch (für $t \rightarrow \infty$) eine Stromstärke von $I = \frac{25}{4}A$ einstellen (graue Kurve). Stattdessen fällt der Strom nach fünf Sekunden exponentiell ab und wird für $t \rightarrow \infty$ ganz verschwinden.

Aufgabe 40: Inverse Laplace-Transformation

Bestimmen Sie

a)	$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{s+2}\right\}$	b)	$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4s-3}{s^2+4}\right\}$
c)	$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s-5}{s^2}\right\}$	d)	$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+2s}\right\}$
e)	$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5s^2-15s+7}{(s+1)(s-2)^2}\right\}$	f)	$\mathcal{L}^{-1}\{3e^{-2s}\}.$

Lösung 40:

a)

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{s+2}\right\} = 5\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} = 5e^{-2t}$$

b)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4s-3}{s^2+4}\right\} &= 4\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+2^2}\right\} - 3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+2^2}\right\} \\ &= 4\cos(2t) - \frac{3}{2}\sin(2t)\end{aligned}$$

c)

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s-5}{s^2}\right\} = 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - 5\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = 2 - 5t$$

d)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+2s}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{2}}{s} + \frac{-\frac{1}{2}}{s+2}\right\} = \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2t}\end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5s^2-15s+7}{(s+1)(s-2)^2}\right\} &= 3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} + 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)^2}\right\} \\ &= 3e^{-t} + 2e^{2t} - te^{2t}\end{aligned}$$

f)

$$\mathcal{L}^{-1}\{3e^{-2s}\} = 3\delta(t-2)$$

Lineare Systeme von Differentialgleichungen

Aufgabe 41: Differentialgleichungen und Systeme (Hauptvektoren)

Gegeben sei die lineare Differentialgleichung

$$u'''(t) - 4u''(t) + 4u'(t) = 9e^{-t}. \quad (0.1)$$

- a) Verwandeln Sie die Differentialgleichung (0.1) in ein System erster Ordnung

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t).$$

- b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des homogenen Systems $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$ aus Teil a).

- c) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Systems aus Teil a).

Hinweis: Eine spezielle Lösung des Systems aus Teil a) kann mit dem Ansatz $\mathbf{x}_p(t) = (\alpha, \beta, \gamma)^\top \cdot e^{-t}$, mit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, bestimmt werden.

Lösung 41:

- a) Mit den Substitutionen $u' =: v$ und $u'' = v' =: w$ erhält man das System erster Ordnung:

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} \cdot e^{-t}.$$

Mit $\boxed{\mathbf{x}(t) := (u(t), v(t), w(t))^\top}$ und $\boxed{\mathbf{f}(t) := (0, 0, 9)^\top e^{-t}}$ folgt

$$\boxed{\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t), \quad \mathbf{A} := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

- b) Die charakteristische Gleichung ist

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & -4 & 4 - \lambda \end{pmatrix} = -\lambda \cdot (\lambda^2 - 4\lambda + 4) = 0.$$

Die Eigenwerte sind somit $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_{2,3} = 2$. Ein Eigenvektor für $\lambda_1 = 0$ ist $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 0)^\top$. Für $\lambda_{2,3} = 2$ gibt es nur einen linear unabhängigen Eigenvektor, z.B. $\mathbf{v}_2 = (1, 2, 4)^\top$. Es muss also noch ein zugehöriger Hauptvektor bestimmt werden:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{h} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Damit erhält man die allgemeine Lösung des homogenen Systems zu

$$\mathbf{x}_{\text{hom}}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot e^{2t} + c_3 \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right] \cdot e^{2t}.$$

- c) Für das inhomogene System erhält man mit dem Ansatz $\mathbf{x}_p(t) = (\alpha, \beta, \gamma)^\top \cdot e^{-t}$ nach Kürzen durch den Exponentialterm das LGS

$$\begin{pmatrix} -\alpha \\ -\beta \\ -\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Eine partikuläre Lösung des inhomogenen Systems ist damit

$$\mathbf{x}_p(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot e^{-t}.$$

Die allgemeine Lösung ist die Summe aus der homogenen und der partikulären Lösung:

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot e^{2t} + c_3 \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right] \cdot e^{2t} \\ &\quad + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot e^{-t}. \end{aligned}}$$

Aufgabe 42: Inhomogenes lineares System von DGLn

a) Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$u''(x) - 16u(x) = 16x \quad \text{mit} \quad u(0) = 1, \quad u'(0) = 4.$$

- i) Überführen Sie diese gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung in ein System aus zwei Differentialgleichungen erster Ordnung,

$$\mathbf{y}'(x) = \mathbf{A}\mathbf{y}(x) + \mathbf{g}(x), \quad \text{mit} \quad \mathbf{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}.$$

Geben Sie hierfür auch die Anfangsbedingung an.

- ii) Bestimmen Sie die Lösung $\mathbf{y}(x)$ dieses Anfangswertproblems.
iii) Bestimmen Sie daraus die Lösung $u(x)$ der ursprünglichen Anfangswertaufgabe.

b) Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$\mathbf{y}'(x) = \mathbf{A}\mathbf{y}(x) + \mathbf{b}, \quad \text{mit} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

- i) Bestimmen Sie ein **reelles** Fundamentalsystem des zugehörigen homogenen Problems.
ii) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Differentialgleichungssystems

$$\mathbf{y}'(x) = \mathbf{A}\mathbf{y}(x) + \mathbf{b}.$$

Lösung 42:

a) i) Mit

$$\mathbf{y}(x) = \begin{pmatrix} u(x) \\ u'(x) \end{pmatrix}$$

ergibt sich

$$\mathbf{y}'(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 16 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{y}(x) + \begin{pmatrix} 0 \\ 16x \end{pmatrix}.$$

Die zugehörigen Anfangswerte sind $\mathbf{y}(0) = (1, 4)^\top$.

- ii) Die Systemmatrix hat die Eigenwerte $\lambda_1 = +4$ und $\lambda_2 = -4$ mit den

Eigenvektoren

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Die Fundamentalmatrix ist damit

$$\mathbf{Y}(x) = \begin{pmatrix} e^{4x} & -e^{-4x} \\ 4e^{4x} & 4e^{-4x} \end{pmatrix}.$$

Die Inverse der Matrix $\mathbf{Y}(0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$ ist

$$\mathbf{Y}(0)^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Eine Lösung des Anfangswertproblems ergibt sich dann zu

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(x) &= \mathbf{Y}(x)\mathbf{Y}(0)^{-1}\mathbf{y}(0) + \int_{t=0}^x \mathbf{Y}(x-t)\mathbf{Y}(0)^{-1}\mathbf{g}(t)dt, \quad \text{mit } \mathbf{g}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 16t \end{pmatrix}. \\ &= \mathbf{Y}(x) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_{t=0}^x \mathbf{Y}(x-t) \begin{pmatrix} 2t \\ 2t \end{pmatrix} dt \\ &= e^{4x} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \int_{t=0}^x 2t \begin{pmatrix} e^{4(x-t)} - e^{-4(x-t)} \\ 4e^{4(x-t)} + 4e^{-4(x-t)} \end{pmatrix} dt \\ &= e^{4x} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \left[2t \cdot \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -e^{4(x-t)} - e^{-4(x-t)} \\ -4e^{4(x-t)} + 4e^{-4(x-t)} \end{pmatrix} \right]_{t=0}^x + \\ &\quad - \int_{t=0}^x 2 \cdot \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -e^{4(x-t)} - e^{-4(x-t)} \\ -4e^{4(x-t)} + 4e^{-4(x-t)} \end{pmatrix} dt \\ &= e^{4x} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{x}{2} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{8} \begin{pmatrix} e^{4(x-t)} - e^{-4(x-t)} \\ 4e^{4(x-t)} + 4e^{-4(x-t)} \end{pmatrix} \bigg|_{t=0}^x \\ &= e^{4x} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{8} \begin{pmatrix} e^{4x} - e^{-4x} \\ 4e^{4x} + 4e^{-4x} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -x \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{9e^{4x}}{8} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{e^{-4x}}{8} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

b) i) Die Eigenwerte der Matrix \mathbf{A} ergeben sich aus dem charakteristischen

Polynom:

$$0 = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 3 & 1-\lambda & -2 \\ 2 & 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)((1-\lambda)^2 + 4)$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_{2/3} = 1 \pm 2i.$$

Die Eigenvektoren zu λ_1 und λ_2 ergeben sich aus dem charakteristischen Gleichungssystem:

$$\lambda_1 = 1 : \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{array} \Leftarrow \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 1 + 2i : \begin{array}{ccc|c} -2i & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2i & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & -2i \end{array} \Leftarrow \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ein reelles Fundamentalsystem ist damit gegeben durch

$$\mathbf{y}_1 = e^{\lambda_1 x} \mathbf{v}_1 = e^x \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{y}_2 = \Re(e^{\lambda_2 x} \mathbf{v}_2) = e^x \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin(2x) \\ \cos(2x) \end{pmatrix}$$

und $\mathbf{y}_3 = \Im(e^{\lambda_2 x} \mathbf{v}_2) = e^x \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(2x) \\ \sin(2x) \end{pmatrix}.$

ii) Da die Inhomogenität des Differentialgleichungssystems

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} = 2\mathbf{v}_1$$

ein Eigenvektor der Systemmatrix \mathbf{A} ist, kann man als Partikulärlösung $\mathbf{y}_p(x) = \alpha \mathbf{v}_1$ ansetzen. Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt:

$$\mathbf{y}'_p(x) = \mathbf{0} \stackrel{!}{=} \alpha \mathbf{A} \mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_1 = \alpha \cdot 1 \mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_1 \Rightarrow \alpha = -2.$$

Damit hat man als allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

chung:

$$\mathbf{y}(x) = \mathbf{y}_h(x) + \mathbf{y}_p(x) = c_1 \mathbf{y}_1(x) + c_2 \mathbf{y}_2(x) + c_3 \mathbf{y}_3(x) - 2\mathbf{v}_1.$$

Aufgabe 43: Inhomogenes lineares System von DGLn

Gegeben seien

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -7 & -5 & 6 \\ 9 & 8 & -9 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}(x) = \begin{pmatrix} x e^{-x} \\ e^{-x} \\ (x+1)e^{-x} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{y}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Zu untersuchen ist das Anfangswertproblem

$$\mathbf{y}'(x) = \mathbf{A}\mathbf{y}(x) + \mathbf{g}(x) \quad \text{mit} \quad \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0.$$

Hinweis: Ein Eigenwert der Matrix \mathbf{A} ist $\lambda = 2$.

- a) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem des zugehörigen homogenen Problems.
- b) Bestimmen Sie die Lösung des inhomogenen Anfangswertproblems.

Lösung 43:

- a) Die Eigenwerte der Matrix \mathbf{A} ergeben sich aus dem charakteristischen Polynom:

$$\begin{aligned} 0 &= \det \begin{pmatrix} -7-\lambda & -5 & 6 \\ 9 & 8-\lambda & -9 \\ 0 & 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (-7-\lambda) \det \begin{pmatrix} 8-\lambda & -9 \\ 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} - 9 \det \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (-7-\lambda)((8-\lambda)(-1-\lambda) + 9) - 9(-5(-1-\lambda) - 6) \\ &= (-7-\lambda)(\lambda^2 - 7\lambda + 1) - 9(5\lambda - 1) \\ &= -\lambda^3 + 3\lambda + 2 \end{aligned}$$

Ein Eigenwert ist $\lambda_1 = -1$:

	-1	0	3	2
	\	1	-1	-2
$\lambda = -1$	-1	1	2	0

Die verbliebenen Eigenwerte ergeben sich als Nullstellen des Restpolynoms $-\lambda^2 + \lambda + 2$:

$$\lambda_{2/3} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = \begin{Bmatrix} 2 \\ -1 \end{Bmatrix}.$$

Die Eigenvektoren ergeben sich aus dem jeweiligen charakteristischen Gleichungssystem:

$$\begin{array}{lcl}
 \lambda_2 = 2 : & \begin{array}{ccc|c|c}
 -9 & -5 & 6 & 0 & \\
 9 & 6 & -9 & 0 & +I \\
 0 & 1 & -3 & 0 & \\
 \hline
 -9 & -5 & 6 & 0 & \\
 0 & 1 & -3 & 0 & \\
 0 & 1 & -3 & 0 & -II \\
 \hline
 -9 & -5 & 6 & 0 & \\
 0 & 1 & -3 & 0 & \\
 0 & 0 & 0 & 0 &
 \end{array} & \Leftrightarrow \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 \\
 \lambda_1 = \lambda_3 = -1 : & \begin{array}{ccc|c|c}
 -6 & -5 & 6 & 0 & \\
 9 & 9 & -9 & 0 & +3/2 \times I \\
 0 & 1 & 0 & 0 & \\
 \hline
 -6 & -5 & 6 & 0 & \\
 0 & 3/2 & 0 & 0 & \\
 0 & 1 & 0 & 0 &
 \end{array} & \Leftrightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

Weitere linear unabhängige Eigenvektoren gibt es nicht. Es muss also ein Hauptvektor ermittelt werden, dieser ist Lösung des Gleichungssystems

$$(\mathbf{A} - (-1)\mathbf{E})\mathbf{w} = \mathbf{v}_1 :$$

$$\begin{array}{ccc|c|c}
 -6 & -5 & 6 & 1 & \\
 9 & 9 & -9 & 0 & +3/2 \times I \\
 0 & 1 & 0 & 1 & \\
 \hline
 -6 & -5 & 6 & 1 & \\
 0 & 3/2 & 0 & 3/2 & \\
 0 & 1 & 0 & 1 &
 \end{array} \Leftrightarrow \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ein Fundamentalsystem ist damit gegeben durch

$$\begin{aligned}\mathbf{y}_1 &= e^{\lambda_1 x} \mathbf{v}_1 = e^{-x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{y}_2 &= e^{\lambda_1 x} (\mathbf{w} + x \mathbf{v}_1) = e^{-x} \begin{pmatrix} x \\ 1 \\ 1+x \end{pmatrix}, \\ \mathbf{y}_3 &= e^{\lambda_2 x} \mathbf{v}_2 = e^{2x} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

b) Eine Fundamentalmatrix des Systems ergibt sich aus dem Fundamentalsystem:

$$\mathbf{Y}(x) = (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3) = \begin{pmatrix} e^{-x} & xe^{-x} & -e^{2x} \\ 0 & e^{-x} & 3e^{2x} \\ e^{-x} & (1+x)e^{-x} & e^{2x} \end{pmatrix}.$$

An der Stelle $x = 0$ hat man

$$\mathbf{Y}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Um $\mathbf{Y}(0)^{-1} \mathbf{g}(t)$ und $\mathbf{Y}(0)^{-1} \mathbf{y}(0)$ zu ermitteln wird das zugehörige Gleichungssystem gelöst:

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & te^{-t} & 1 & \\ 0 & 1 & 3 & e^{-t} & 0 & \\ 1 & 1 & 1 & (t+1)e^{-t} & 2 & -I \\ \hline 1 & 0 & -1 & te^{-t} & 1 & \\ 0 & 1 & 3 & e^{-t} & 0 & \\ 0 & 1 & 2 & e^{-t} & 1 & -II \\ \hline 1 & 0 & -1 & te^{-t} & 1 & \\ 0 & 1 & 3 & e^{-t} & 0 & \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & \end{array}$$

Lösung des Systems ist

$$\mathbf{Y}(0)^{-1} \mathbf{g}(t) = \begin{pmatrix} te^{-t} \\ e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

und

$$\mathbf{Y}(0)^{-t}\mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Damit ergibt sich dann die Lösung des Anfangswertproblems zu:

$$\begin{aligned} & \mathbf{y}_{AWP}(x) \\ &= \mathbf{Y}(x)\mathbf{Y}(0)^{-1}\mathbf{y}(0) + \int_{t=0}^x \mathbf{Y}(x-t)\mathbf{Y}(0)^{-1}\mathbf{g}(t)dt \\ &= \mathbf{Y}(x) \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \\ & \quad + \int_{t=0}^x \begin{pmatrix} e^{-(x-t)} & (x-t)e^{-(x-t)} & -e^{2(x-t)} \\ 0 & e^{-(x-t)} & 3e^{2(x-t)} \\ e^{-(x-t)} & (1+x-t)e^{-(x-t)} & e^{2(x-t)} \end{pmatrix} e^{-t} \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt \\ &= 3e^{-x}(\mathbf{w} + x\mathbf{v}_1) - e^{2x}\mathbf{v}_2 + \\ & \quad + e^{-x} \int_{t=0}^x \begin{pmatrix} x \\ 1 \\ 1+x \end{pmatrix} dt \\ &= e^{-x} \begin{pmatrix} 0+x \\ 1+0 \\ 1+x \end{pmatrix} - e^{2x} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + xe^{-x} \begin{pmatrix} x \\ 1 \\ 1+x \end{pmatrix} \\ &= e^{-x} \begin{pmatrix} x^2+x \\ x+1 \\ x^2+2x+1 \end{pmatrix} + e^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Aufgabe 44: Differentialgleichungssystem

Die Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{(3,3)}$ und die Vektoren $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$ seien wie folgt gegeben:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 4 & 4 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} := \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ a \end{pmatrix}, \quad \mathbf{z} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Offenbar gilt $\mathbf{A}\mathbf{v} = 4\mathbf{v}$. Berechnen Sie

- (i) $\lambda \in \mathbb{R}$ so, dass $\mathbf{A}\mathbf{z} = \lambda\mathbf{z}$ gilt, (ii) die Spur $\text{Sp}(\mathbf{A})$ von \mathbf{A} .

Bestimmen Sie mit diesen Ergebnissen alle Eigenwerte der Matrix \mathbf{A} .

(Selbstverständlich sollen Sie **nicht** das charakteristische Polynom bestimmen und lösen!)

- b) Berechnen Sie $a \in \mathbb{R}$ so, dass $(\mathbf{A} - 4\mathbf{E})\mathbf{w} = \mathbf{v}$ gilt. Bestimmen Sie nun alle Haupt- und Eigenvektoren von \mathbf{A} .
- c) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $\mathbf{y}(t)$ des DGL-Systems

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{y}(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Lösung 44:

a) i) Man berechnet ohne Schwierigkeit

$$\mathbf{A}\mathbf{z} = (2, 0, 2)^\top = 2\mathbf{z}, \quad \text{also} \quad \boxed{\lambda = 2}.$$

ii) Es gilt $\text{Sp}(\mathbf{A}) = 10$.

Mit den schon bekannten Eigenwerten $\boxed{\lambda_1 := 4}$, $\boxed{\lambda_2 = 2}$ folgt noch $\lambda_3 = \text{Sp}(\mathbf{A}) - \lambda_1 - \lambda_2$, also $\boxed{\lambda_3 = 4}$.

b) Die Gleichung

$$(\mathbf{A} - 4\mathbf{E})\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 4 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - a \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \mathbf{v} - a \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \mathbf{v}$$

führt auf $\boxed{a = 0}$.

Mit diesem Wert ($a = 0$) erfüllt \mathbf{w} die Hauptvektorgleichung, ist also ein **Hauptvektor 2. Stufe** zum Eigenwert $\lambda = 4$.

Eigenvektoren sind \boldsymbol{v} zum EW $\lambda = 4$ sowie \boldsymbol{z} zum EW $\lambda = 2$.

c) Die allgemeine Lösung des DGI-Systems lautet

$$\boldsymbol{y}(t) = e^{2t} C_1 \boldsymbol{z} + e^{4t} (C_2 \boldsymbol{v} + C_3 (\boldsymbol{w} + t\boldsymbol{v})), \quad C_k \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 45: Differentialgleichungssystem, Hauptvektoren

Gegeben sei die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

sowie die Vektoren

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{u}_5 = \begin{pmatrix} 9 \\ -10 \\ 8 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

- a) Berechnen Sie die Matrix-Vektor-Produkte $\mathbf{A}\mathbf{u}_j$, $j = 1, 2, 3, 4, 5$. Welche Eigenwerte und Hauptvektoren hat \mathbf{A} ?
- b) Lösen Sie das Differentialgleichungssystem

$$\mathbf{y}'(x) = \mathbf{A}\mathbf{y}(x).$$

- c) Lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem mit den Anfangswerten

$$\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0 = (0, 9, -8, 5, -8)^\top.$$

Lösung 45:

- a) Die gefragten Produkte ergeben sich zu

$$\mathbf{A}\mathbf{u}_1 = 4\mathbf{u}_1$$

$$\mathbf{A}\mathbf{u}_2 = (1, 4, 0, 0, 0)^\top = 4\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_1$$

$$\mathbf{A}\mathbf{u}_3 = (0, -7, 0, 4, 0)^\top = 4\mathbf{u}_3 + \mathbf{u}_2$$

$$\mathbf{A}\mathbf{u}_4 = (0, 14, -4, -11, 4)^\top = 4\mathbf{u}_4 + \mathbf{u}_3$$

$$\mathbf{A}\mathbf{u}_5 = (18, -20, 16, -8, 16)^\top = 2\mathbf{u}_5.$$

Damit hat \mathbf{A} den vierfachen Eigenwert $\lambda_1 = 4$ mit Eigenvektor \mathbf{u}_1 und den einfachen Eigenwert $\lambda_5 = 2$ mit Eigenvektor \mathbf{u}_5 . Die erweiterten Eigenvektoren zu λ_1 sind \mathbf{u}_2 , \mathbf{u}_3 und \mathbf{u}_4 , da jeweils gilt

$$\mathbf{A}\mathbf{u}_j = \lambda_1 \mathbf{u}_j + \mathbf{u}_{j-1}, \quad j = 2, 3, 4.$$

b) Das Differentialgleichungssystem $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$ hat dann die Lösung

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(x) = & e^{\lambda_1 x} \left(\alpha \mathbf{u}_1 + \beta (\mathbf{u}_2 + x \mathbf{u}_1) + \gamma \left(\mathbf{u}_3 + x \mathbf{u}_2 + \frac{x^2}{2} \mathbf{u}_1 \right) + \right. \\ & \left. + \delta \left(\mathbf{u}_4 + x \mathbf{u}_3 + \frac{x^2}{2} \mathbf{u}_2 + \frac{x^3}{6} \mathbf{u}_1 \right) \right) + \varepsilon e^{\lambda_5 x} \mathbf{u}_5 \\ = & e^{4x} \left(\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} x \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} x^2/2 \\ -2+x \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} x^3/6 \\ 4-2x+x^2/2 \\ -1 \\ -3+x \\ 1 \end{pmatrix} \right) + \varepsilon e^{2x} \begin{pmatrix} 9 \\ -10 \\ 8 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

c) Setzt man die gegebenen Anfangswerte ein, ergibt sich ein Gleichungssystem für die Integrationskonstanten:

α	β	γ	δ	ε		
1	0	0	0	9	0	
0	1	-2	4	-10	9	
0	0	0	-1	8	-8	4. Zeile
0	0	1	-3	-4	5	3. Zeile
0	0	0	1	8	-8	+3. Zeile
1	0	0	0	9	0	
0	1	-2	4	-10	9	
0	0	1	-3	-4	5	
0	0	0	-1	8	-8	
0	0	0	0	16	-16	

Hieraus ergeben sich die Koeffizienten

$$\varepsilon = -1, \delta = 0, \gamma = 1, \beta = 1, \alpha = 9$$

und damit

$$\mathbf{y}(x) = e^{4x} \begin{pmatrix} 9 + x + x^2/2 \\ -1 + x \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - e^{2x} \begin{pmatrix} 9 \\ -10 \\ 8 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 46: Inhomogene lineare Systeme (Hauptvektoren)

Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$\mathbf{y}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{y}(t) + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5t}$$

mit den Anfangswerten $\mathbf{y}(0) = (0, 1, 2)^\top$.

- a) Ermitteln Sie die Fundamentalmatrix $\mathbf{Y}(t)$ (des homogenen Systems).
- b) Berechnen Sie die Lösung des Anfangswertproblem, indem Sie die Schritte der Variation der Konstanten explizit ausführen.
- c) Berechnen Sie zusätzlich die Lösung des Anfangswertproblem unter Nutzung der entsprechenden Formel aus der Vorlesung.

Lösung 46:

- a) Die Eigenwerte der Systemmatrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

werden als Nullstellen des charakteristischen Polynoms berechnet:

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{!}{=} \det \begin{pmatrix} 0 - \lambda & 1 & -1 \\ -2 & 3 - \lambda & -1 \\ -1 & 1 & 1 - \lambda \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 - \lambda & -1 - \lambda + \lambda^2 \\ 0 & 1 - \lambda & -3 + 2\lambda \\ -1 & 1 & 1 - \lambda \end{pmatrix} \\ &= -1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & -1 - \lambda + \lambda^2 \\ 1 - \lambda & -3 + 2\lambda \end{pmatrix} = -(1 - \lambda)(-3 + 2\lambda + 1 + \lambda - \lambda^2) \\ &= (1 - \lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = (1 - \lambda)(\lambda - 2)(\lambda - 1) \\ \Rightarrow \lambda_1 &= \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2 \end{aligned}$$

Die Eigenvektoren sind Lösungen der charakteristischen Gleichungssysteme:

i) $\lambda_{1/2} = 1$ (weiße rechte Seite)

$$\begin{array}{ccc|c|c|l}
 -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & \\
 -2 & 2 & -1 & 0 & 1 & -2 \times 1. \text{ Zeile} \\
 -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1. \text{ Zeile} \\
 \hline
 -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & \\
 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & \\
 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -2. \text{ Zeile} \\
 \hline
 -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & \\
 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 &
 \end{array}$$

Die einzige (linear unabhängige) Lösung ist $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 0)^\top$. Daher wird noch ein Hauptvektor \mathbf{v}_2 gesucht. Dieser ist Lösung desselben Gleichungssystems mit der rechten Seite \mathbf{v}_1 (graue Spalte). Es ergibt sich $\mathbf{v}_2 = (0, 0, -1)^\top$ als möglicher Hauptvektor.

ii) $\lambda_3 = 2$:

$$\begin{array}{ccc|c|c|l}
 -2 & 1 & -1 & 0 & & \\
 -2 & 1 & -1 & 0 & & -1. \text{ Zeile} \\
 -1 & 1 & -1 & 0 & & -1/2 \times 1. \text{ Zeile} \\
 \hline
 -2 & 1 & -1 & 0 & & \\
 0 & 0 & 0 & 0 & & \\
 0 & 1/2 & -1/2 & 0 & &
 \end{array}$$

Es ergibt sich $\mathbf{v}_3 = (0, 1, 1)^\top$. Damit ist die Fundamentalmatrix

$$\mathbf{Y}(t) = \left(e^t \mathbf{v}_1, e^t \left(\mathbf{v}_2 + \frac{t}{1!} \mathbf{v}_1 \right), e^{2t} \mathbf{v}_3 \right) = \begin{pmatrix} e^t & e^t t & 0 \\ e^t & e^t t & e^{2t} \\ 0 & -e^t & e^{2t} \end{pmatrix}$$

b) Die Lösung des homogenen Systems ist damit

$$\mathbf{y}_h(t) = \mathbf{Y}(t) \mathbf{c} \text{ mit dem konstanten Vektor } \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3.$$

Zur Lösung des inhomogenen Systems setzen wir den Ansatz $\mathbf{y}_p(t) = \mathbf{Y}(t) \mathbf{c}(t)$

mit der vektorwertigen Funktion $\mathbf{c}(t)$ in das inhomogene System ein:

$$\begin{aligned}
 & (\mathbf{Y}(t)\mathbf{c}(t))' = \mathbf{A}\mathbf{Y}(t)\mathbf{c}(t) + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5t} \\
 \Rightarrow & \mathbf{Y}'(t)\mathbf{c}(t) + \mathbf{Y}(t)\mathbf{c}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{Y}(t)\mathbf{c}(t) + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5t} \\
 \Rightarrow & \underbrace{(\mathbf{Y}'(t) - \mathbf{A}\mathbf{Y}(t))}_{=0} \mathbf{c}(t) + \mathbf{Y}(t)\mathbf{c}'(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5t} \\
 \Rightarrow & \mathbf{c}'(t) = \mathbf{Y}(t)^{-1} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5t}
 \end{aligned}$$

Dabei wird der Ausdruck $\mathbf{Y}'(t) - \mathbf{A}\mathbf{Y}(t)$ Null, da die Spalten von $\mathbf{Y}(t)$ bereits Lösungen der homogenen Gleichung ($\mathbf{y}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{y}(t)$) sind.

Auf die Berechnung der inversen Matrix $\mathbf{Y}(t)^{-1}$ wird verzichtet, stattdessen

lösen wir das Gleichungssystem $\mathbf{Y}(t)\mathbf{c}' = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5t}$:

e^t	$e^t t$	0	$-1e^{5t}$	
e^t	$e^t t$	e^{2t}	$2e^{5t}$	– 1. Zeile
0	$-e^t$	e^{2t}	$1e^{5t}$	
e^t	$e^t t$	0	$-1e^{5t}$	
0	0	e^{2t}	$3e^{5t}$	– 3. Zeile
0	$-e^t$	e^{2t}	$1e^{5t}$	2. Zeile
e^t	$e^t t$	0	$-1e^{5t}$	
0	e^t	0	$2e^{5t}$	
0	0	e^{2t}	$3e^{5t}$	

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathbf{c}'(t) &= \begin{pmatrix} -(2t+1)e^{4t} \\ 2e^{4t} \\ 3e^{3t} \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \mathbf{c}(t) &= \begin{pmatrix} -\frac{4t+1}{8}e^{4t} \\ \frac{1}{2}e^{4t} \\ e^{3t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die Integrationskonstanten wurden hier zu Null gewählt.

Damit ist

$$\mathbf{y}_p(t) = \mathbf{Y}(t)\mathbf{c}(t)$$

eine Lösung des inhomogenen Systems. Die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems ist dann

$$\mathbf{y}_{allg}(t) = \mathbf{y}_p(t) + \mathbf{y}_h(t) = \mathbf{Y}(t)(\mathbf{c}(t) + \mathbf{c}).$$

Der konstante Vektor \mathbf{c} wird durch die Anfangsbedingungen festgelegt:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} &\stackrel{!}{=} \mathbf{y}(0) = \mathbf{Y}(0)(\mathbf{c}(0) + \mathbf{c}) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/8 + c_1 \\ 1/2 + c_2 \\ 1 + c_3 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow c_1 &= \frac{1}{8} \\ c_3 &= 0 \\ c_2 &= -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

Damit ist dann

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{AWP}(t) &= \mathbf{Y}(t) \begin{pmatrix} \frac{1}{8}((-4t-1)e^{4t} + 1) \\ \frac{1}{2}(e^{4t} - 3) \\ e^{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8}(-e^{5t} + (1-12t)e^t) \\ \frac{1}{8}(7e^{5t} + (1-12t)e^t) \\ \frac{1}{2}(e^{5t} + 3e^t) \end{pmatrix} \\ &= \frac{e^{5t}}{8} \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{e^t}{8} \begin{pmatrix} 1-12t \\ 1-12t \\ 12 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

c) Mit der Formel

$$\mathbf{y}_{AWP}(t) = \mathbf{Y}(t)\mathbf{Y}(0)^{-1}\mathbf{y}_0 + \int_0^t \mathbf{Y}(t-s)\mathbf{Y}(0)^{-1}\mathbf{f}(s)ds$$

ergibt sich mit

$$\mathbf{Y}(0)^{-1}\mathbf{y}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sowie

$$\mathbf{Y}(0)^{-1}\mathbf{f}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5s} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} e^{5s}$$

die Lösung des Anfangswertproblems:

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_{AWP}(t) &= \begin{pmatrix} e^t & e^t t & 0 \\ e^t & e^t t & e^{2t} \\ 0 & -e^t & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} e^{t-s} & e^{t-s}(t-s) & 0 \\ e^{t-s} & e^{t-s}(t-s) & e^{2(t-s)} \\ 0 & -e^{t-s} & e^{2(t-s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} e^{5s} ds \\
&= \begin{pmatrix} -e^t t \\ -e^t t + e^{2t} \\ e^t + e^{2t} \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} e^{t-s}(-1+2t-2s) \\ e^{t-s}(-1+2t-2s) + 3e^{2(t-s)} \\ -2e^{t-s} + 3e^{2(t-s)} \end{pmatrix} e^{5s} ds \\
&= \begin{pmatrix} -e^t t \\ -e^t t + e^{2t} \\ e^t + e^{2t} \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} e^{t+4s}(-1+2t-2s) \\ e^{t+4s}(-1+2t-2s) + 3e^{2t+3s} \\ -2e^{t+4s} + 3e^{2t+3s} \end{pmatrix} e^{5s} ds \\
&= \begin{pmatrix} -e^t t \\ -e^t t + e^{2t} \\ e^t + e^{2t} \end{pmatrix} + \frac{1}{4} e^{t+4s} \begin{pmatrix} -1+2t-2s \\ -1+2t-2s \\ -2 \end{pmatrix} \Big|_{s=0}^t - \frac{1}{4} \int_0^t e^{t+4s} \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} ds \\
&\quad + \frac{1}{3} e^{2t+3s} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \Big|_{s=0}^t \\
&= \begin{pmatrix} -e^t t \\ -e^t t + e^{2t} \\ e^t + e^{2t} \end{pmatrix} + \frac{1}{4} e^{5t} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} - \frac{1}{4} e^t \begin{pmatrix} -1+2t \\ -1+2t \\ -2 \end{pmatrix} - \frac{1}{16} (e^{5t} - e^t) \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\quad + \frac{1}{3} (e^{5t} - e^{2t}) \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \\
&= e^t \begin{pmatrix} -t + \frac{1}{4} - \frac{t}{2} - \frac{1}{8} \\ -t + \frac{1}{4} - \frac{t}{2} - \frac{1}{8} \\ 1 + \frac{1}{2} \end{pmatrix} + e^{5t} \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} + \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + 1 \\ -\frac{1}{2} + 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{e^t}{8} \begin{pmatrix} 1-12t \\ 1-12t \\ 12 \end{pmatrix} + \frac{e^{5t}}{8} \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Aufgabe 47: Systeme homogener linearer Differentialgleichungen

Bestimmen Sie die allgemeinen reellen Lösungen und gegebenenfalls auch die Lösungen des Anfangswertproblems der folgenden Systeme von homogenen linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Benutzen Sie dazu die Matrixschreibweise.

- i)
$$\begin{cases} x'(t) = 4x(t) + 5y(t) & , \quad x(0) = 3, \\ y'(t) = -x(t) - 2y(t) & , \quad y(0) = 1 \end{cases}$$
- ii)
$$\begin{cases} x'(t) = 3x(t) - 5y(t) & , \quad x(0) = -20, \\ y'(t) = 5x(t) - 3y(t) & , \quad y(0) = -24 \end{cases}$$
- iii)
$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 5y(t), \\ y'(t) = x(t) + 4y(t). \end{cases}$$

Lösung 47:

- i) Das Differentialgleichungssystem: $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ hat die charakteristische Gleichung

$$\det \begin{pmatrix} 4 - \lambda & 5 \\ -1 & -2 - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 3.$$

Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = -1$:

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_1 = -v_2 \quad \text{also z. B.} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_2 = 3$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow w_1 = -5w_2 \quad \text{also z. B.} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Damit lautet die allgemeine Lösung

$$\underline{\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + b \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}, \quad a, b \in \mathbb{R} .}$$

Einsetzen der Anfangswerte $x(0) = 3$ und $y(0) = 1$:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow a = 2, \quad b = -1.$$

Lösung des Anfangswertproblems:

$$\underline{\underline{\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}_{\text{AWP}}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} e^{3t} .}$$

- ii) Das Dgl.-System: $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ hat die charakteristische Gleichung

$$\det \begin{pmatrix} 3 - \lambda & -5 \\ 5 & -3 - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 16 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 4i .$$

Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = 4i$:

$$\begin{pmatrix} 3 - 4i & -5 \\ 5 & -3 - 4i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{z. B. } \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} i .$$

Der Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$ ist $\mathbf{w} = \bar{\mathbf{v}}$, somit ist die Menge aller komplexen Lösungen wie folgt beschrieben:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{4it} \mathbf{v} + c_2 e^{-4it} \mathbf{w}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}$$

Eine komplexe Lösung ist

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} &= \left[\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} i \right] \cdot e^{i4t} \\ &= \left[\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} i \right] \cdot [\cos(4t) + i \sin(4t)] \\ &= \left[\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \cos(4t) - \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} \sin(4t) \right] + i \left[\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \sin(4t) + \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} \cos(4t) \right] . \end{aligned}$$

Da der Real- und Imaginärteil unabhängige Lösungen des Dgl.-Systems sind, lautet die allgemeine (reelle) Lösung

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} &= a \cdot \left[\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \cos(4t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \sin(4t) \right] + b \cdot \left[\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \sin(4t) + \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} \cos(4t) \right] \\ &= \begin{pmatrix} 5a \\ 3a - 4b \end{pmatrix} \cos(4t) + \begin{pmatrix} 5b \\ 4a + 3b \end{pmatrix} \sin(4t), \quad a, b \in \mathbb{R} . \end{aligned}$$

Aus den Anfangswerten $x(0) = -20$, $y(0) = -24$ folgt $a = -4$ und $b = 3$.

Lösung des Anfangswertproblems:

$$\underline{\underline{\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}_{\text{AWP}}} = \begin{pmatrix} -20 \\ -24 \end{pmatrix} \cos(4t) + \begin{pmatrix} 15 \\ -7 \end{pmatrix} \sin(4t) .}$$

- iii) Das Dgl.-System: $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ hat die Eigenwerte und Vektoren

$$\lambda_{1,2} = 3 \pm 2i, \quad \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} i, \quad \mathbf{v}_2 = \overline{\mathbf{v}_1} .$$

Analog zu ii) ergibt sich damit

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} &= \left[\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} i \right] e^{(3+2i)t} \\ &= \left[\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} i \right] e^{3t} (\cos(2t) + i \sin(2t)) \\ &= \begin{pmatrix} -5 \cos(2t) \\ \cos(2t) - 2 \sin(2t) \end{pmatrix} e^{3t} + \begin{pmatrix} -5 \sin(2t) \\ \sin(2t) + 2 \cos(2t) \end{pmatrix} e^{3t} i \end{aligned}$$

und daraus als Linearkombination von Real- und Imaginärteil die allgemeine Lösung:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{3t} \cdot \left[\begin{pmatrix} -5a \\ a + 2b \end{pmatrix} \cos(2t) + \begin{pmatrix} -5b \\ -2a + b \end{pmatrix} \sin(2t) \right], \quad a, b \in \mathbb{R} .$$

Alternativ kann man die Eigenvektoren als

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 + 2i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \overline{\mathbf{v}_1} .$$

wählen. Die allgemeine komplexe Lösung lautet dann

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} &= c_1 \begin{pmatrix} -1 + 2i \\ 1 \end{pmatrix} e^{(3+2i)t} + c_2 \begin{pmatrix} -1 - 2i \\ 1 \end{pmatrix} e^{(3-2i)t} \\
&= \begin{pmatrix} -c_1 + 2ic_1 \\ c_1 \end{pmatrix} e^{3t}(\cos(2t) + i\sin(2t)) + \begin{pmatrix} -c_2 - 2ic_2 \\ c_2 \end{pmatrix} e^{3t}(\cos(2t) - i\sin(2t)) \\
&= e^{3t} \left(\cos(2t) \begin{pmatrix} -(c_1 + c_2) + 2i(c_1 - c_2) \\ c_1 + c_2 \end{pmatrix} + \sin(2t) \begin{pmatrix} -i(c_1 - c_2) - 2(c_1 + c_2) \\ i(c_1 - c_2) \end{pmatrix} \right)
\end{aligned}$$

Mit $a = c_1 + c_2$ und $b = i(c_1 - c_2)$ folgt für $c_1 = \overline{c_2}$ $a, b \in \mathbb{R}$. Somit erhält man eine andere Form für die allgemeine Lösung des DGL Systems:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{3t} \left(\cos(2t) \begin{pmatrix} -a + 2b \\ a \end{pmatrix} + \sin(2t) \begin{pmatrix} -b - 2a \\ b \end{pmatrix} \right)$$

Aufgabe 48: Lineare DGI-Systeme 1. Ordnung

Die symmetrische Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3,3}$ erfülle $\mathbf{A}\mathbf{v}_1 = 3\mathbf{v}_1$, $\mathbf{A}\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2$, $\det \mathbf{A} = 6$ mit $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 1)^\top$, $\mathbf{v}_2 = (-1, 0, 1)^\top$.

- a) Zeigen Sie, dass $\lambda = 2$ ein Eigenwert von \mathbf{A} und $\mathbf{v}_3 = (0, 1, 0)^\top$ ein zugehöriger Eigenvektor ist. Geben Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren von \mathbf{A} an.

Hinweis: Für eine symmetrische Matrix sind die Eigenvektoren orthogonal zueinander.

- b) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(0) = (1, 1, 1)^\top.$$

Lösung 48:

- a) Aus $\mathbf{A}\mathbf{v}_1 = 3\mathbf{v}_1$ folgt dass \mathbf{v}_1 ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = 3$ und aus $\mathbf{A}\mathbf{v}_2 = 1\mathbf{v}_2$, dass \mathbf{v}_2 ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_2 = 1$ ist. Der dritte Eigenwert λ_3 ergibt sich aus

$$\det \mathbf{A} = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = 6,$$

zu $\lambda_3 = 2$.

Da \mathbf{A} symmetrisch ist, ist der Eigenraum zu λ_3 orthogonal zu \mathbf{v}_1 und \mathbf{v}_2 , dies ist etwa für $\mathbf{v}_3 = (0, 1, 0)^\top$ erfüllt.

- b) Die allgemeine Lösung ist

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t}.$$

mit $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

Einsetzen in die Anfangsbedingung liefert

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Mit dem Gauss-Algorithmus folgt

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

und damit $c_3 = 1$, $c_2 = 0$ und $c_1 = 1$.

Damit folgt

$$\boldsymbol{x}_{\text{AWP}}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t} .$$

Aufgabe 49: Systeme linearer Differentialgleichungen

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Systems von Differentialgleichungen

$$\mathbf{y}'(x) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -3 & 5 & 1 \\ -10 & -2 & 10 \end{pmatrix} \mathbf{y}(x).$$

Lösung 49:

Das charakteristische Polynom der Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -3 & 5 & 1 \\ -10 & -2 & 10 \end{pmatrix}$ ist

$$\begin{aligned} p_{\mathbf{A}}(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} -1 - \lambda & -1 & 3 \\ -3 & 5 - \lambda & 1 \\ -10 & -2 & 10 - \lambda \end{pmatrix} \\ &= (-1 - \lambda)((5 - \lambda)(10 - \lambda) + 2) - (-1)(-3(10 - \lambda) - 1 \cdot (-10)) \\ &\quad + 3(-3 \cdot (-2) - (5 - \lambda) \cdot (-10)) \\ &= (-1 - \lambda)(\lambda^2 - 15\lambda + 52) + (3\lambda - 20) + 3(-10\lambda + 56) \\ &= -\lambda^3 + 14\lambda^2 - 64\lambda + 96 \end{aligned}$$

Eine Nullstelle dieses Polynoms ist $\lambda_1 = 4$:

	-1	14	-64	96
$x = 4$	\	-4	40	-96
	-1	10	-24	0

und das Restpolynom ist $q(\lambda) = -\lambda^2 + 10\lambda - 24$. Dessen Nullstellen sind

$$\lambda_{2/3} = 5 \pm \sqrt{25 - 24} = \begin{Bmatrix} 4 \\ 6 \end{Bmatrix}.$$

Damit hat die Matrix den doppelten Eigenwert $\lambda_1 = \lambda_2 = 4$ und den einfachen Eigenwert $\lambda_3 = 6$. Eigenvektoren zu $\lambda_1 = 4$ ergeben sich aus dem charakteristischen

Gleichungssystem (rechte Seite Null)

$$\begin{array}{ccc|c|c|c}
 -1 & -4 & -1 & 3 & 0 & 1 & \text{II} \\
 -3 & 5 & -4 & 1 & 0 & 1 & \text{I} - 3 \times \text{II} \\
 -10 & -2 & 10 & -4 & 0 & 2 & \text{III} - 6 \times \text{II} \\
 \hline
 -3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & \text{I} + \frac{1}{4} \times \text{II} \\
 4 & -4 & 0 & 0 & 0 & -2 & \times 1/4 \\
 8 & -8 & 0 & 0 & 0 & -4 & \text{III} - 2 \times \text{II} \\
 \hline
 -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & \\
 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 &
 \end{array}$$

Der einzige linear unabhängige Eigenvektor ist

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ein Hauptvektor ergibt sich aus dem obigen Gleichungssystem mit rechter Seite \mathbf{v}_1 . Es müssen nur die Gauß-Schritte für die neue rechte Seite nachgeholt werden und ein möglicher Hauptvektor ist

$$\mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

Ein Eigenvektor zu $\lambda_3 = 6$ ergibt sich aus dem charakteristischen Gleichungssystem $(\mathbf{A} - 6\mathbf{E}_3)\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$

$$\begin{array}{ccc|c|c}
 -7 & -1 & 3 & 0 & \text{II} \\
 -3 & -1 & 1 & 0 & \text{I} - 3 \times \text{II} \\
 -10 & -2 & 4 & 0 & \text{III} - 4 \times \text{II} \\
 \hline
 -3 & -1 & 1 & 0 & \\
 2 & 2 & 0 & 0 & \\
 2 & 2 & 0 & 0 & \text{III} - \text{II} \\
 \hline
 -3 & -1 & 1 & 0 & \\
 2 & 2 & 0 & 0 & \\
 0 & 0 & 0 & 0 &
 \end{array}$$

$$\text{zu } \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Die allgemeine Lösung des DGL.-Systems ist schließlich

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(x) &= e^{\lambda_1 x} \left\{ c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 [\mathbf{w}_2 + x \mathbf{v}_1] \right\} + c_3 e^{\lambda_3 x} \mathbf{v}_3 \\ &= e^{4x} \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right] \right\} + c_3 e^{6x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{4x} & x e^{4x} & e^{6x} \\ e^{4x} & \frac{1+2x}{2} e^{4x} & -e^{6x} \\ 2e^{4x} & \frac{1+4x}{2} e^{4x} & 2e^{6x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

mit Parametern $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ und der Fundamentalmatrix

$$\mathbf{Y}(x) = \begin{pmatrix} e^{4x} & x e^{4x} & e^{6x} \\ e^{4x} & \frac{1+2x}{2} e^{4x} & -e^{6x} \\ 2e^{4x} & \frac{1+4x}{2} e^{4x} & 2e^{6x} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 50: Differentialgleichungssysteme erster Ordnung

Berechnen Sie die allgemeine Lösungen der folgenden Differentialgleichungssysteme:

a)

$$\begin{aligned}y_1' &= 2y_1 - 3y_2, \\y_2' &= -y_1 + 4y_2.\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}y_1' &= -y_1, \\y_2' &= -y_2.\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}y_1' &= 2y_1 - y_2, \\y_2' &= y_1 + 4y_2.\end{aligned}$$

Lösung 50:

a) Wir können das Differentialgleichungssystem schreiben als:

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom der Systemmatrix ist:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 5.$$

Die Nullstellen des Polynoms sind $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 5$. Der Eigenvektor \mathbf{v}_1 zu dem Eigenwert $\lambda_1 = 1$ wird bestimmt durch das Lösen des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Das führt zu

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Der Eigenvektor \mathbf{v}_2 zu dem Eigenwert $\lambda_2 = 5$ wird bestimmt durch das Lösen des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{bmatrix} -3 & -3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Das führt zu

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Die allgemeine Lösung ist:

$$\mathbf{y} = C_1 e^t \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 e^{5t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

b) Wir können das Differentialgleichungssystem schreiben als:

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom der Systemmatrix ist:

$$p(\lambda) = (\lambda + 1)^2.$$

Die Nullstellen des Polynoms sind $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$. Die Eigenvektoren $\mathbf{v}_1, 2$ können bestimmt werden durch Lösen des Gleichungssystems:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Daher ist jeder Vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ ein Eigenvektor. Wir wählen $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ und $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Die allgemeine Lösung ist

$$\mathbf{y} = C_1 e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

c) Wir können das Differentialgleichungssystem schreiben als:

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom der Systemmatrix ist:

$$p(\lambda) = (\lambda - 3)^2.$$

Da die Systemmatrix nicht diagonalisierbar ist, müssen wir den Eigenvektor \mathbf{v}_1 und den Hauptvektor \mathbf{v}_2 bestimmen. Wir lösen dafür das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

und

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1$$

Das führt zu:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Daher ist die allgemeine Lösung:

$$\mathbf{y} = C_1 e^{3t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 e^{3t} \begin{bmatrix} 1-t \\ t \end{bmatrix}.$$

Aufgabe 51: System linearer Differentialgleichungen 1. Ordnung

Gegeben seien die Differentialgleichungen zweiter Ordnung:

i) $y'' - 2y' - 3y = 0$.

ii) $y'' + y' - 6y = 0$.

- a) Lösen Sie die Gleichungen als Differentialgleichungen zweiter Ordnung.
b) Lösen Sie die Gleichungen, indem Sie sie in ein System erster Ordnung überführen.

Lösung 51:

- a) Lösen Sie die Gleichungen als Differentialgleichungen zweiter Ordnung. i) Das charakteristische Polynom ist

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3$$

mit den Nullstellen $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 3$. Daher ist die Lösung

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}.$$

- ii) Das charakteristische Polynom ist

$$\lambda^2 + \lambda - 6$$

mit den Nullstellen $\lambda_1 = -3$ und $\lambda_2 = 2$. Damit ist die Lösung

$$y(x) = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{2x}.$$

- b) Lösen Sie die Gleichungen, indem Sie sie in ein System erster Ordnung überführen.

i) $y'' - 2y' - 3y = 0$.

Wir definieren die neuen Funktionen

$$x_1 = y,$$

$$x_2 = y'$$

und differenzieren beide Seiten

$$\begin{aligned}x_1' &= y' = x_2, \\x_2' &= y'' = 2y' + 3y = 2x_2 + 3x_1.\end{aligned}$$

Die Systemmatrix ist dann

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

mit den Eigenwerten $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 3$ und den zugehörigen Eigenvektoren

$$v_1 = (-1, 1)^T \quad v_2 = (1, 3)^T.$$

Die Lösung des Systems ist

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \tilde{C}_1 e^{-x} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \tilde{C}_2 e^{3x} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Die erste Komponente des Systems entspricht der Lösung der Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x},$$

wobei $C_1 = -\tilde{C}_1$.

ii) $y'' + y' - 6y = 0$.

Wir definieren die neuen Funktionen

$$\begin{aligned}x_1 &= y, \\x_2 &= y',\end{aligned}$$

und differenzieren beide Seiten

$$\begin{aligned}x_1' &= y' = x_2, \\x_2' &= y'' = -y' + 6y = -x_2 + 6x_1.\end{aligned}$$

Die Systemmatrix ist dann

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$$

mit den Eigenwerten $\lambda_1 = -3$ und $\lambda_2 = 2$ und den zugehörigen Eigenvektoren

$$v_1 = (-1, 3)^T \quad v_2 = (1, 2)^T.$$

Die Lösung des Systems ist

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \tilde{C}_1 e^{-3x} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \tilde{C}_2 e^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Die erste Komponente des Systems entspricht der Lösung der Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$y(x) = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{2x},$$

wobei $C_1 = -\tilde{C}_1$.

Aufgabe 52: Inhomogene lineare Differentialgleichungssystem

Gegeben sei das folgende Differentialgleichungssystem

$$\mathbf{y}'(t) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{y}(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} e^{-3t}$$

mit dem Anfangswert $\mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- a) Ermitteln Sie die Fundamentalmatrix $\mathbf{Y}(t)$ des homogenen Systems und geben Sie die Lösung des homogenen Systems.
- b) Berechnen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems und lösen Sie das Anfangswertproblem.

Lösung 52:

- a) Das charakteristische Polynom ist

$$p(\lambda) = (2 - \lambda)(1 - \lambda)^2$$

Die Eigenwerte sind also $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_{2/3} = 1$. Die Eigenvektor \mathbf{v}_1 zu dem Eigenwert $\lambda_1 = 2$ ist

0	1	1	0	tausche 1. Zeile und 3. Zeile
-1	-2	-1	0	
1	1	0	0	
<hr style="border: 0.5px solid black;"/>				
1	1	0	0	
-1	-2	-1	0	+1. Zeile
0	1	1	0	
<hr style="border: 0.5px solid black;"/>				
1	1	0	0	
0	-1	-1	0	
0	1	1	0	+2. Zeile
<hr style="border: 0.5px solid black;"/>				
1	1	0	0	
0	-1	-1	0	
0	0	0	0	

Damit erhalten den Eigenvektor $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Die Eigenvektoren \mathbf{v}_2 und \mathbf{v}_3 zu dem Eigenwert $\lambda = 1$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \quad +1. \text{ Zeile} \\ 1 & 1 & 1 & 0 \quad -1. \text{ Zeile} \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Daraus erhalten wir die Eigenvektoren $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Die Fundamentalmatrix ist dann gegeben durch

$$\mathbf{Y}(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & -e^t & -e^t \\ -e^{2t} & e^t & 0 \\ e^{2t} & 0 & e^t \end{pmatrix}$$

Damit ist die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung

$$\mathbf{y}_h(t) = \mathbf{Y}(t)\mathbf{c} \quad \text{mit } \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3.$$

b) Durch Variation der Konstanten erhalten wir die partikuläre Lösung $\mathbf{y}_p(t) =$

$\mathbf{Y}(t)\mathbf{c}(t)$ Wir lösen das Gleichungssystem $\mathbf{Y}(t)\mathbf{c}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} e^{-3t}$.

$$\begin{array}{ccc|c} e^{2t} & -e^t & -e^t & e^{-3t} \\ -e^{2t} & e^t & 0 & 3e^{-3t} \quad + 1. \text{ Zeile} \\ e^{2t} & 0 & e^t & 9e^{-3t} \quad - 1. \text{ Zeile} \\ \hline e^{2t} & -e^t & -e^t & e^{-3t} \\ 0 & 0 & -e^t & 4e^{-3t} \\ 0 & e^t & 2e^t & 8e^{-3t} \end{array}$$

Wir erhalten

$$\mathbf{c}'(t) = \begin{pmatrix} 13e^{-5t} \\ 16e^{-4t} \\ -4e^{-4t} \end{pmatrix}$$

und damit

$$\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} -\frac{13}{5}e^{-5t} \\ -4e^{-4t} \\ e^{-4t} \end{pmatrix}$$

Die allgemeine Lösung ist nun

$$\mathbf{y}_{allg}(t) = \mathbf{y}_p(t) + \mathbf{y}_h(t) = \mathbf{Y}(t)(\mathbf{c}(t) + \mathbf{c})$$

Der konstante Vektor wird durch den Anfangswert festgelegt:

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{Y}(0)(\mathbf{c}(0) + \mathbf{c})$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{13}{5} + c_1 \\ -4 + c_2 \\ 1 + c_3 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ \frac{13}{5} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Lösung für das Anfangswertproblem lautet

$$\mathbf{y}_{AWP}(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & -e^t & -e^t \\ -e^{2t} & e^t & 0 \\ e^{2t} & 0 & e^t \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} -\frac{13}{5} e^{-5t} \\ -4 e^{-4t} \\ e^{-4t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ \frac{13}{5} \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

Aufgabe 53: Fundamentalmatrix

Gegeben sei die Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Lösen Sie das homogene Differentialgleichungssystem

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t).$$

Geben Sie auch die Fundamentalmatrix an.

Lösung 53:

Die Matrix \mathbf{A} hat den doppelten Eigenwert $\lambda = 1$ mit dem Eigenvektor $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Um den Hauptvektor zu bestimmen, wir die Lösung des Gleichungssystems

$$(\mathbf{A} - 1 \cdot \mathbf{E})\mathbf{w} = \mathbf{v}$$

Eine mögliche Wahl für den Hauptvektor ist $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Damit ist die allgemeine Lösung des Systems

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= e^{\lambda t}(c_1\mathbf{v} + c_2(\mathbf{w} + t\mathbf{v})) \\ &= e^t \left(c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right) \\ &= e^t \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die Fundamentalmatrix ist dann

$$\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} e^t & t e^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix}.$$

Ergebnisse

Ergebnisse zu Aufgabe 1:

Es gilt $(1 - n)u'(x) = u(x)^n \cdot z'(x)$. Damit ist die Lösung $y(x) = \frac{1}{C \cdot x^2 - x^3}$.

Ergebnisse zu Aufgabe 2:

a) $y_{\text{AWP}}(x) = \frac{-1}{x^2 - 4}$, b) $y(x) = \frac{C}{\cos(x)}$

Ergebnisse zu Aufgabe 3:

a) $y(x) = \frac{(15x + C)^{1/5} - 2x - 4}{3}$

b) $u(t) = t \cdot \left(\frac{3 \ln(t)}{2} + C \right)^{2/3}$

c) $w(s) = C s^2 + 5 s^5$

Ergebnisse zu Aufgabe 4:

$$y(x) = -\frac{3}{2} e^{-x} + \frac{3}{2} e^{3x}$$

Ergebnisse zu Aufgabe 5:

i) $u(t) = a e^{2t} + b e^{5t}$

ii) $u(t) = e^{-2t} (a \cos(3t) + b \sin(3t))$

iii) $u(t) = a + b t + c e^{3t}$

iv) $u(t) = (a + b t) \cdot \cos(2t) + (c + d t) \cdot \sin(2t)$

Ergebnisse zu Aufgabe 6:

Lösungen der homogenen Gleichungen: a) $a e^{2x} + b e^{3x}$, b) $a \cos(5x) + b \sin(5x) + c$, c) $a + b e^{2x}$.

Ergebnisse zu Aufgabe 7:

a) $u(t) = t^3 + \frac{C}{t^2}$, b) $u(t) = \frac{-t}{4 \ln(t) + C}$

Ergebnisse zu Aufgabe 8:

Allgemeine Lösungen: a) $y(x) = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-x} + c_4 x e^{-x} - 12x^2 + 2x^3$, b) $y(t) = e^{-2t} (c_1 \cos t + c_2 \sin t) + \sin t - \cos t$, c) $y(x) = \left(c_1 + c_2 x + \frac{1}{2} x^2 \right) e^{2x}$

Ergebnisse zu Aufgabe 9:

a) $y(x) = c_1 e^x \cos x + c_2 e^x \sin x + c_3 e^{-x} \cos x + c_4 e^{-x} \sin x$

b) $y(x) = (c_1 + c_2 x) e^{-3x} + (c_3 + c_4 x) e^{3x}$

Ergebnisse zu Aufgabe 10:

$$y(x) = e^{-2t} (c_1 \cos t + c_2 \sin t)$$

Ergebnisse zu Aufgabe 11:

a) $y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-4x}$

b) $y(x) = \sin(2x) - 4 \cos(2x) + c_1 e^{-x} \cos(2x) + c_2 e^{-x} \sin(2x)$

c) $y_{AWP}(x) = -e^x - e^{-x} + 2e^{3x}$

d) $y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-3x} + \frac{1}{10} e^{3x}$

e) $y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} - (2x + 1) e^x$

f) $y(x) = -e^{-2x} + c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 x e^{-x}$

Ergebnisse zu Aufgabe 12:

$$I(t) = \begin{cases} 6.25 (1 - e^{-0.2t}) & \text{für } 0 < t < 5 \\ 6.25 (1 - e^{-1}) e^{-0.2(t-5)} & \text{für } t > 5 \end{cases}$$

Ergebnisse zu Aufgabe 13:

die spezielle Lösung lautet: $y = \frac{y_0 k}{y_0 + (k - y_0) e^{-\lambda k t}}$.

Ergebnisse zu Aufgabe 14:

i) $y = C e^{-2x} + \frac{3}{2} x - \frac{3}{4}$

ii) $y = \pm \sqrt{C - x^2}$

iii) $y = \pm x \sqrt{2 \ln |x| + C}$

iv) $y = \tan(x + C) - x - 1$

Ergebnisse zu Aufgabe 15:

- i) $y(x) = Ce^{\frac{-2}{x}} - \frac{1}{2}$
- ii) $y(x) = Ce^{\sin(x)}$
- iii) $y(x) = \frac{x}{\ln(x)+C}$
- iv) $y(x) = 2 \arctan(Ce^x) - 1$
- v) $y(x) = 4x + \frac{3+Ce^{4x}}{1-Ce^{4x}}$
- vi) $y(x) = Ce^{-3x} + \frac{1}{5}e^{2x} - \frac{2}{3}$

Ergebnisse zu Aufgabe 16:

- i) $yx e^{\frac{y}{x}} = C$
- ii) $u' = -\frac{1}{x} \left(\frac{u^4}{1+u^3} \right)$
- iii) $u' = \frac{1+u}{u}$
- iv) $u' = \cos^2(u)$
- v) $u' = \frac{u^2-1}{x}$
- vi) $u' = \frac{1}{x^2} e^{-u}$

Ergebnisse zu Aufgabe 17:

- a) $y(x) = \frac{1}{9-3x^2}$ mit $-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$
- b) $y(x) = 2 \pm \sqrt{x^3 + 2x^2 - 4x + 2}$ mit $x \geq \bar{x} \approx -3.36$
- c) $y(x) = \ln(x^2 - 4x - 4)$ mit $2 + 2\sqrt{2} < x < \infty$
- d) $y(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x_0}$ mit $0 < x < \infty$ falls $x_0 > 0$ und $-\infty < x < 0$ falls $x_0 < 0$
- e) $y(x) = \frac{x^3}{3} + y_0$ mit $x \in \mathbb{R}$

Ergebnisse zu Aufgabe 18:

- a) $y(x) = \frac{1}{4}x^2$
- b) Das Problem hat unendlich viele Lösungen.

Ergebnisse zu Aufgabe 19:

a) $y(x) = \pm \frac{1}{x} \sqrt{32 - 2x^4}$

b) $y(x) = x e^{\frac{\ln(4)+1}{x}-1}$

Ergebnisse zu Aufgabe 20:

Fall 1: $y(t) = A e^{(-\rho + \sqrt{\rho^2 - \omega^2})t} + B e^{(-\rho - \sqrt{\rho^2 - \omega^2})t},$

Fall 2: $y(t) = (A + Bt) e^{-\omega t},$

Fall 3: $y(t) = e^{-\rho t} (A \cos(\sqrt{\omega^2 - \rho^2} t) + B \sin(\sqrt{\omega^2 - \rho^2} t)).$

Ergebnisse zu Aufgabe 21:

Fall 1: $y(t) = A e^{(-\rho + \sqrt{\rho^2 - \omega^2})t} + B e^{(-\rho - \sqrt{\rho^2 - \omega^2})t} + \frac{1}{2\sqrt{\rho^2 - \omega^2}} t e^{(-\rho + \sqrt{\rho^2 - \omega^2})t},$

Fall 2: $y(t) = (A + Bt) e^{-\omega t} + \frac{1}{2} t^2 e^{-\omega t},$

Fall 3: $y(t) = e^{-\rho t} (A \cos(\sqrt{\omega^2 - \rho^2} t) + B \sin(\sqrt{\omega^2 - \rho^2} t)) + \frac{1}{2} t e^{-\rho t} \sin((\sqrt{\omega^2 - \rho^2})t).$

Ergebnisse zu Aufgabe 22:

a) $y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} - 1$

b) $y(x) = (c_1 + c_2 x) + c_3 e^{-x} + \frac{x^2}{2}$

c) $y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^x + \frac{x e^x}{3}$

d) $y(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x) + x \frac{1}{2} \sin(x)$

Ergebnisse zu Aufgabe 23:

a) /

b) $u(t) = -\frac{1}{2} [(t - \pi) e^{t-\pi} + \sin(t)] h(t - \pi)$

Ergebnisse zu Aufgabe 24:

a) $y(t) = -e^t - e^{-t} + 2e^{3t}$

b) $y(t) = (2t^2 + 2t + 1) e^{-2t}$

Ergebnisse zu Aufgabe 25:

$$w_P(x) = -\frac{F}{6EJ} (x - l)^3 \cdot h(x - l), \quad x_{\min} = \sqrt{\frac{8}{27}} L$$

Ergebnisse zu Aufgabe 26:

i) $I_1 = \frac{-1}{1 + \pi^2}, \quad \text{ii) } I_2 = 0.$

Ergebnisse zu Aufgabe 27:

a) $u_{\text{AWP}}(t) = 2 e^{-t} \cdot \cos(2t)$, **b)** $t_0 = \pi/4$, **c)** $\alpha = 4 e^{-\pi/4}$.

Ergebnisse zu Aufgabe 28:

$$y(t) = t^2 + t^4/12.$$

Ergebnisse zu Aufgabe 29:

a) $u(t) = 4 + 2 e^{-3t} - 6 e^{-t} - h(t-2) \cdot \left(4 + 2 e^{-3(t-2)} - 6 e^{-(t-2)}\right)$

b)
$$u(t) = \begin{cases} 4 + 2 e^{-3t} - 6 e^{-t} & \text{für } 0 \leq t < 2 \\ (2 - 2 e^6) \cdot e^{-3t} + (-6 + 6 e^2) \cdot e^{-t} & \text{für } 2 \leq t \end{cases}$$

Ergebnisse zu Aufgabe 30:

$$F(s) = \sqrt{\frac{\pi}{4s^3}}.$$

Ergebnisse zu Aufgabe 31:

a) $F(s) = \frac{\pi}{2} - \arctan s$, **b)** $F(s) = \frac{\pi/2 - \arctan s}{s}$, **c)** $F(s) = \frac{\pi}{2}$, **d)** $F(s) = \frac{\pi}{2} - \arctan(s+1)$,

Ergebnisse zu Aufgabe 32:

a) $F_1(s) = \frac{A}{s} - \frac{2Ae^{-st_0}}{s^2+2s}$, **b)** $F_2(s) = \frac{A(e^{-as} - e^{-bs})}{s}$, **c)** $F_3(s) = \frac{1 - e^{-3s}}{s^2}$,
d) $F_4(s) = \frac{1 + e^{-s\pi}}{1 + s^2}$

Ergebnisse zu Aufgabe 33:

a)

i) $\frac{1}{s},$	iv) $\frac{3!}{t^4},$	vii) $sG(s) - g(0),$
ii) $\frac{1}{s^2},$	v) $\frac{1}{s+a},$	
iii) $\frac{2}{s^3},$	vi) $\frac{1}{(s+a)^2},$	viii) $s^2G(s) - sg(0) - g'(0).$

b) $F(s) = \sqrt{\frac{\pi}{4s^3}}.$

Ergebnisse zu Aufgabe 34:

$$F(s) = \left(\frac{2}{s^3} + \frac{4}{s^2} + \frac{4}{s}\right) \cdot e^{-2s}$$

Ergebnisse zu Aufgabe 35:

- a) $y(t) = \frac{1}{4}t + \cos 2t + \frac{7}{8} \sin 2t$
 b) $y(t) = \frac{1}{4}t + \cos 2t + \frac{7}{8} \sin 2t$

Ergebnisse zu Aufgabe 36:

$$u_{\text{AW}}(t) = \frac{-1}{4} e^{-2t} + \frac{1}{8} e^{2t} + \frac{1}{8} e^{-6t}$$

Ergebnisse zu Aufgabe 37:

- a) $\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$
 b) e^{-st} nur beschränkt ist für $t \rightarrow \infty$, wenn $s > 0$.
 c) h_{t_0} : Stufenfunktion, die 0 für $t < t_0$ und 1 für $t \geq t_0$ ist.
 d) /
 e) Ja
 f) Nein
 g) /
 h) $\int_{-\infty}^\infty \delta(t) dt = 1$, $\int_{-\infty}^\infty \delta(t-a) dt = 1$, $\int_{-\infty}^\infty \delta(t-t_0) f(t) dt = f(t_0)$

Ergebnisse zu Aufgabe 38:

- a)
- $$\mathcal{L}\{h(t-3)e^{t-3}\} = \frac{e^{-3s}}{s-1}$$
- b)
- $$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)^2}\right\} = te^{2t}$$
- c)
- $$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2}e^{-3s}\right\} = (t-3)e^{(t-3)}h(t-3)$$

Ergebnisse zu Aufgabe 39:

$$I(t) = \frac{25}{4} \cdot \begin{cases} (1 - e^{-t/5}), & 0 \leq t \leq 5 \\ (e-1)e^{-t/5}, & t > 5 \end{cases}$$

Ergebnisse zu Aufgabe 40:

- a) $5e^{-2t}$ b) $4\cos(2t) - \frac{3}{2}\sin(2t)$ c) $2-5t$ d) $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2t}$ e) $3e^{-t} + 2e^{2t} - te^{2t}$ f) $\frac{8\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}} - \frac{5}{\sqrt{\pi t}}$

Ergebnisse zu Aufgabe 41:

$$\text{b) } \mathbf{x}_{\text{hom}}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot e^{2t} + c_3 \begin{pmatrix} t \\ 1+2t \\ 4+4t \end{pmatrix} \cdot e^{2t}$$

$$\text{c) } \mathbf{x}_{\text{hom}}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot e^{2t} + c_3 \begin{pmatrix} t \\ 1+2t \\ 4+4t \end{pmatrix} \cdot e^{2t} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot e^{-t}$$

Ergebnisse zu Aufgabe 42:

$$\text{a) i) } \mathbf{y}'(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 16 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{y}(x) + \begin{pmatrix} 0 \\ 16x \end{pmatrix} \text{ mit } \mathbf{y}(0) = (1, 4)^\top$$

$$\text{ii) } y(x) = \begin{pmatrix} -x \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{9e^{4x}}{8} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{e^{-4x}}{8} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

iii)

$$\text{b) i) } \mathcal{F} = \{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3\} = \left\{ e^x \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, e^x \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin(2x) \\ \cos(2x) \end{pmatrix}, e^x \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(2x) \\ \sin(2x) \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{ii) } y(x) = c_1 \mathbf{y}_1(x) + c_2 \mathbf{y}_2(x) + c_3 \mathbf{y}_3(x) - 2\mathbf{v}_1 \text{ mit } \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} = 2\mathbf{v}_1$$

Ergebnisse zu Aufgabe 43:

$$\text{a) } \text{Fundamentalsystemmatrix: } \mathbf{Y}(x) = (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3) = \begin{pmatrix} e^{-x} & xe^{-x} & -e^{2x} \\ 0 & e^{-x} & 3e^{2x} \\ e^{-x} & (1+x)e^{-x} & e^{2x} \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } y_{\text{AWP}}(x) = e^{-x} \begin{pmatrix} x^2 + x \\ x + 1 \\ x^2 + 2x + 1 \end{pmatrix} + e^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ergebnisse zu Aufgabe 44:

$$\text{a) i) } \lambda_1 = 4, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 4$$

$$\text{ii) } \text{Sp}(\mathbf{A}) = 10$$

$$\text{b) } a = 0, \mathbf{z} \text{ EW zu } \lambda = 2, \mathbf{w} \text{ Hauptvektor 2. Stufe zu } \lambda = 4$$

$$\text{c) } \mathbf{y}(t) = e^{2t} C_1 \mathbf{z} + e^{4t} (C_2 \mathbf{v} + C_3 (\mathbf{w} + t\mathbf{v}))$$

Ergebnisse zu Aufgabe 45:

a) $\lambda_{1,2,3,4} = 4$ mit EV \mathbf{u}_1 und Hauptvektoren $\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4$. $\lambda_5 = 2$ mit EV \mathbf{u}_5 .

$$\text{b) } \mathbf{y}(x) = e^{4x} \left(\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} x \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} x^2/2 \\ -2+x \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} x^3/6 \\ 4-2x+x^2/2 \\ -1 \\ -3+x \\ 1 \end{pmatrix} \right) + \varepsilon e^{2x} \begin{pmatrix} 9 \\ -10 \\ 8 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } \mathbf{y}(x) = e^{4x} \begin{pmatrix} 9+x+x^2/2 \\ -1+x \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - e^{2x} \begin{pmatrix} 9 \\ -10 \\ 8 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Ergebnisse zu Aufgabe 46:

$$\text{a) } \mathbf{Y}(t) = \begin{pmatrix} e^t & e^t t & 0 \\ e^t & e^t t & e^{2t} \\ 0 & -e^t & e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \mathbf{y}_{AWP}(t) = \frac{e^{5t}}{8} \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{e^t}{8} \begin{pmatrix} 1-12t \\ 1-12t \\ 12 \end{pmatrix}$$

Ergebnisse zu Aufgabe 47:

$$\text{i) } \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + b \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}, \text{ ii) } \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a \\ 3a-4b \end{pmatrix} \cos(4t) + \begin{pmatrix} 5b \\ 4a+3b \end{pmatrix} \sin(4t),$$

$$\text{iii) } \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{3t} \cdot \left[\begin{pmatrix} -5a \\ a+2b \end{pmatrix} \cos(2t) + \begin{pmatrix} -5b \\ -2a+b \end{pmatrix} \sin(2t) \right]$$

Ergebnisse zu Aufgabe 48:

$$\text{b) } \mathbf{x} = (e^{3t}, e^{2t}, e^{3t})^\top$$

Ergebnisse zu Aufgabe 49:

$$\mathbf{y}(x) = e^{4x} \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right] \right\} + c_3 e^{6x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ergebnisse zu Aufgabe 50:

$$\text{a) } \mathbf{y}(t) = C_1 e^t \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 e^{5t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{b) } \mathbf{y}(t) = C_1 e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{c) } \mathbf{y}(t) = C_1 e^{3t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 e^{3t} \begin{bmatrix} 1-t \\ t \end{bmatrix}$$

Ergebnisse zu Aufgabe 51:

$$\text{i) } y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}$$

$$\text{ii) } y(x) = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{2x}$$

Ergebnisse zu Aufgabe 52:

$$\text{a) } \mathbf{y}_h(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & -e^t & -e^t \\ -e^{2t} & e^t & 0 \\ e^{2t} & 0 & e^t \end{pmatrix} \mathbf{c}$$

$$\text{b) } \mathbf{y}_{AWP}(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & -e^t & -e^t \\ -e^{2t} & e^t & 0 \\ e^{2t} & 0 & e^t \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} -\frac{13}{5} e^{-5t} \\ -4 e^{-4t} \\ e^{-4t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ \frac{13}{5} \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

Ergebnisse zu Aufgabe 53:

$$\mathbf{Y}(t) = \begin{pmatrix} e^t & t e^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix}$$