Helmut-Schmidt-Universität
Universität der Bundeswehr Hamburg
Fakultät für Maschinenbau und Bauingenieurwesen

Prof. Dr. Thomas Carraro
M.Sc Janna Puderbach

Mathematik II/B (WI/ET) — Blatt 4

WT 2024 — Regel von L'Hospital, Differenzieren, Kurven

Einführende Bemerkungen

- Vermeiden Sie die Verwendung von Taschenrechnern oder Online-Ressourcen.

Aufgabe 4.1: Differenzieren

a) Bestimmen Sie jeweils die erste Ableitung. (Eventuell notwendige Beschränkungen des Definitionsgebietes sind nicht angegeben.)

$$f_9(t) = \sinh(t) - \cosh(2t), \qquad f_{10}(t) = (t-3)^4 \sinh(t),$$
$$f_{11}(t) = t^2\, e^{-2t} \sin(3t), \qquad f_{12}(t) = \sqrt{t}\, e^{2t},$$
$$f_{13}(t) = \sin^3\left(e^{2t^2} + t^5\right), \qquad f_{14}(t) = \sqrt{2t^2+1},$$
$$f_{15}(t) = \ln(t) - \ln(5t), \qquad f_{16}(t) = \ln(t^2) - \ln(t^5).$$

b) Bestimmen Sie die n–te Ableitung folgender Funktionen.

$$f_{21}(t) = \sin(3t), \qquad f_{22}(t) = t\, e^{2t}$$
$$f_{23}(t) = t \cdot \cos(t), \qquad f_{24}(t) = t\, \ln(2t)$$

Lösung 4.1:

a)

$$\begin{aligned}
f_9'(t) &= \cosh(t) - 2\sinh(2t)\\
f_{10}'(t) &= 4(t-3)^3\sinh(t) + (t-3)^4\cosh(t)\\
f_{11}'(t) &= 2te^{-2t}\sin(3t) + t^2(-2e^{-2t})\sin(3t) + t^2e^{-2t}\cdot 3\cos(3t)\\
&= te^{-2t}\big(2(1-t)\sin(3t) + 3t\cos(3t)\big)\\
f_{12}'(t) &= \frac{1}{2\sqrt{t}}e^{2t} + \sqrt{t}\cdot 2e^{2t} = \frac{1+4t}{2\sqrt{t}}e^{2t}\\
f_{13}'(t) &= 3\sin^2\left(e^{2t^2}+t^5\right)\cdot\cos\left(e^{2t^2}+t^5\right)\cdot\left(4te^{2t^2}+5t^4\right)\\
f_{14}'(t) &= \frac{4t}{2\sqrt{2t^2+1}}\\
f_{15}'(t) &= \frac{1}{t} - \frac{5}{5t} = 0\\
f_{16}'(t) &= \frac{d}{dt}(\ln(t^2) - \ln(t^5)) = \frac{d}{dt}(2\ln t - 5\ln t) = \frac{-3}{t}
\end{aligned}$$

b) **i)** Jedes Ableiten der Funktion f_{21} führt wegen der inneren Ableitung aus der Kettenregel zu einem Faktor 3. Außerdem ergibt jedes zweite Ableiten der äußeren Funktion (immer die Ableitung einer cos-Funktion) einen weiteren Faktor (-1). Die äußere Funktion wird nach gradzahligem Ableiten zu einem Sinus, bei ungradzahligen Ableitungen zu einem Kosinus. Insgesamt ergibt sich also:

$$f_{21}^{(n)}(t) = \begin{cases} 3^n\sin(3t) & \text{für } n = 4k+0\ (k\in\mathbb{N}_0)\\ 3^n\cos(3t) & \text{für } n = 4k+1\ (k\in\mathbb{N}_0)\\ -3^n\sin(3t) & \text{für } n = 4k+2\ (k\in\mathbb{N}_0)\\ -3^n\cos(3t) & \text{für } n = 4k+3\ (k\in\mathbb{N}_0)\end{cases}$$

ii) Die erste Ableitung von f_{22} ist

$$f_{22}'(t) = e^{2t} + 2te^{2t} = e^{2t} + 2f_{22}(t).$$

Setzt man dies sukzessive fort, ergibt sich

$$\begin{aligned}
f_{22}^{(n)}(t) &= n\cdot 2^{n-1}e^{2t} + 2^n f_{22}(t)\\
&= \left(n\cdot 2^{n-1} + 2^n\cdot t\right)e^{2t} = (n+2t)2^{n-1}e^{2t}
\end{aligned}$$

iii) Die ersten vier Ableitungen von f_{23} sind:

$$\begin{aligned}
f_{23}(t) &= t\cdot\cos(t), & f_{23}'(t) &= \cos(t) - t\sin(t)\\
f_{23}''(t) &= -2\sin(t) - t\cos(t), & f_{23}'''(t) &= -3\cos(t) + t\sin(t),\\
f_{23}^{(4)}(t) &= 4\sin(t) + t\cos(t), & f_{23}^{(5)} &= 5\cos(t) - t\sin(t)
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich für $n \geq 1$:

$$f_{23}^{(n)} = \begin{cases} +n\cos(t) - t\sin(t) & \text{für } n = 4k+1\,(k \in \mathbb{N}_0) \\ -n\sin(t) - t\cos(t) & \text{für } n = 4k+2\,(k \in \mathbb{N}_0) \\ -n\cos(t) + t\sin(t) & \text{für } n = 4k+3\,(k \in \mathbb{N}_0) \\ +n\sin(t) + t\cos(t) & \text{für } n = 4k+4\,(k \in \mathbb{N}_0) \end{cases} .$$

iv) Die ersten beiden Ableitungen von f_{24} sind

$$\begin{aligned} f_{24}'(t) &= \ln(2t) + t \cdot \frac{2}{2t} = \ln(2t) + 1 \\ f_{24}''(t) &= \frac{1}{t}. \end{aligned}$$

Alle weiteren Ableitungen ($n = 2, 3, \ldots$) ergeben sich zu

$$f_{24}^{(n)}(t) = (-1) \cdot (-2) \cdot \ldots \cdot (-(n-2))t^{-(n-1)} = (-1)^n (n-2)! t^{-(n-1)}.$$

Aufgabe 4.2: Vektor- und Matrixwertige Funktionen

Gegeben seien

$$\boldsymbol{A}(t)=\begin{pmatrix} t & t^2 \\ \sqrt{t} & t^5 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{B}(t)=\begin{pmatrix} \sin t & \cos t \\ \mathrm{e}^t & \cosh t \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{c}(t)=\left(t^3,\ \sqrt{t^5},\ \frac{1}{t}\right)^\top, \qquad \boldsymbol{d}(t)=\left(\mathrm{e}^{-t^2},\ \sin(\sqrt{t}),\ \tanh(t/2)\right)^\top.$$

Berechnen Sie

a) $\frac{d}{dt}\Big(\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{B}(t)\Big)$ und

b) $\frac{d}{dt}\Big(\boldsymbol{c}(t)\times\boldsymbol{d}(t)\Big)$

auf die folgenden beiden Arten:

- Indem sie vor der Differentiation die Produkte $\boldsymbol{AB}$ bzw. $\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}$ bilden und die Ergebnisfunktionen ableiten.
- Indem Sie zunächst die Ableitungen der einzelnen Funktionen bilden und diese dann gemäß einer Produktregel verrechnen.

Lösung 4.2:

a) Zunächst ist

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix} t\sin t+t^2\mathrm{e}^t & t\cos t+t^2\cosh t \\ \sqrt{t}\sin t+t^5\mathrm{e}^t & \sqrt{t}\cos t+t^5\cosh t \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{B}(t)\right) = \begin{pmatrix} \sin t+t\cos t+(2t+t^2)\mathrm{e}^t & \cos t-t\sin t+2t\cosh t+t^2\sinh t \\ \frac{\sin t}{2\sqrt{t}}+\sqrt{t}\cos t+(5t^4+t^5)\mathrm{e}^t & \frac{\cos t}{2\sqrt{t}}-\sqrt{t}\sin t+5t^4\cosh t+t^5\sinh t \end{pmatrix}.$$

Ebenso ist

$$\boldsymbol{A}'(t)=\begin{pmatrix} 1 & 2t \\ \frac{1}{2\sqrt{t}} & 5t^4 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}'(t)=\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \mathrm{e}^t & \sinh t \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{B}(t)\right) &= \boldsymbol{A}'(t)\boldsymbol{B}(t)+\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{B}'(t)\\
&= \begin{pmatrix} \sin t+2t\mathrm{e}^t & \cos t+2t\cosh t \\ \frac{\sin t}{2\sqrt{t}}+5t^4\mathrm{e}^t & \frac{\cos t}{2\sqrt{t}}+5t^4\cosh t \end{pmatrix}\\
&+ \begin{pmatrix} t\cos t+t^2\mathrm{e}^t & -t\sin t+t^2\sinh t \\ \sqrt{t}\cos t+t^5\mathrm{e}^t & -\sqrt{t}\sin t+t^5\sinh t \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} \sin t+t\cos t+(2t+t^2)\mathrm{e}^t & \cos t-t\sin t+2t\cosh t+t^2\sinh t \\ \frac{\sin t}{2\sqrt{t}}+\sqrt{t}\cos t+(5t^4+t^5)\mathrm{e}^t & \frac{\cos t}{2\sqrt{t}}-\sqrt{t}\sin t+5t^4\cosh t+t^5\sinh t \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

b) Das Vektorprodukt von $\boldsymbol{c}$ und $\boldsymbol{d}$ ist

$$\boldsymbol{c}(t)\times\boldsymbol{d}(t)=\begin{pmatrix} t^{5/2}\tanh(t/2)-\frac{\sin(\sqrt{t})}{t} \\ \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{t}-t^3\tanh\frac{t}{2} \\ t^3\sin(\sqrt{t})-t^{5/2}\mathrm{e}^{-t^2} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}(\boldsymbol{c}(t)\times\boldsymbol{d}(t))=\begin{pmatrix} \frac{1}{2}t^{3/2}\left(5\tanh\frac{t}{2}+\frac{t}{\cosh^2(t/2)}\right)+\frac{\sin(\sqrt{t})}{t^2}-\frac{\cos(\sqrt{t})}{2\sqrt{t}\,t} \\ \mathrm{e}^{-t^2}\left(-2-\frac{1}{t^2}\right)-3t^2\tanh\frac{t}{2}-\frac{t^3}{2\cosh^2\frac{t}{2}} \\ 3t^2\sin(\sqrt{t})+\frac{t^{5/2}}{2}\cos(\sqrt{t})-\mathrm{e}^{-t^2}\left(\frac{5}{2}t^{3/2}-2t^{7/2}\right) \end{pmatrix}.$$

Durch separates Differenzieren ergibt sich

$$\boldsymbol{c}'(t)=\begin{pmatrix} 3t^2 \\ \frac{5}{2}t^{3/2} \\ -\frac{1}{t^2} \end{pmatrix},\ \boldsymbol{d}'(t)=\begin{pmatrix} -2t\mathrm{e}^{-t^2} \\ \frac{\cos(\sqrt{t})}{2\sqrt{t}} \\ \frac{1}{2\cosh^2\frac{t}{2}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad & \boldsymbol{c}'(t)\times\boldsymbol{d}(t)+\boldsymbol{c}(t)\times\boldsymbol{d}'(t)\\
&= \begin{pmatrix} \frac{5t^{3/2}\tanh\frac{t}{2}}{2}+\frac{\sin(\sqrt{t})}{t^2} \\ \frac{-\mathrm{e}^{-t^2}}{t^2}-3t^2\tanh\frac{t}{2} \\ 3t^2\sin(\sqrt{t})-\frac{5}{2}t^{3/2}\mathrm{e}^{-t^2} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \frac{t^{5/2}}{2\cosh^2\frac{t}{2}}-\frac{\cos(\sqrt{t})}{2t^{3/2}} \\ -2\mathrm{e}^{-t^2}-\frac{t^3}{2\cosh^2\frac{t}{2}} \\ \frac{t^{5/2}\cos\sqrt{t}}{2}+2t^{7/2}\mathrm{e}^{-t^2} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 4.3: Minimaler Abstand

Gegeben seien die folgenden Funktionen

i) $f_1(x) = x^2 + 1,$ **ii)** $f_2(x) = \ln(x).$

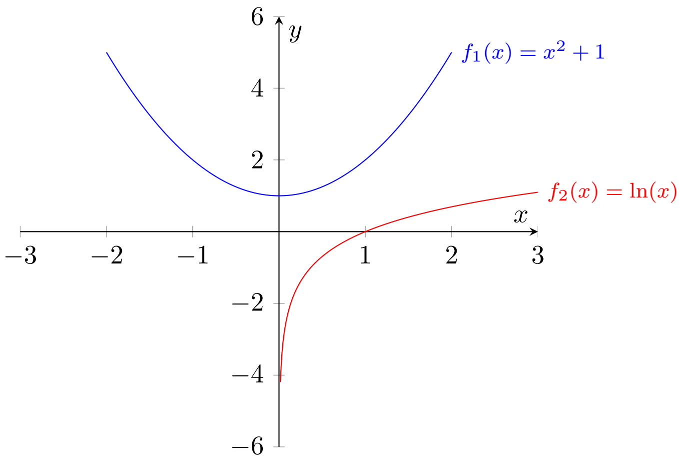
a) Skizzieren Sie die Funktionen f_1 und f_2.

b) Bestimmen Sie den minimalen vertikalen Abstand beider Funktionsgraphen

$$d = \min \left\{ |f_1(x) - f_2(x)|;\ x \in \mathbb{R}^+ \right\}.$$

Lösung 4.3:

a)



b) Der gesuchte Abstand ist das Minimum der Funktion $g(x) = |h(x)|$ mit $h(x) = f_1(x) - f_2(x)$.
Es gilt $f_1(x) > f_2(x)$ für alle $x \in D$. Daher ist die Differenz immer positiv.
Dieses Minimum liegt in einem lokalen Extremum von $h(x)$, da an den Grenzen des Definitionsbereiches D gilt:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} h(x) &= \lim_{x\to\infty} \left(x^2 + 1 - \ln(x)\right) \\
&= \ln\left(\lim_{x\to\infty} \mathrm{e}^{x^2+1-\ln(x)}\right) \\
&= \ln\left(\lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{e}^{x^2+1}}{\mathrm{e}^{\ln x}}\right) \qquad \text{L'Hospital wg.} \mathrm{e}^{x^2+1} \to \infty,\ \mathrm{e}^{\ln x} = x \to \infty. \\
&= \ln\left(\lim_{x\to\infty} \frac{2x\mathrm{e}^{x^2+1}}{1}\right) = \infty \\
\lim_{x\to 0} h(x) &= \lim_{x\to 0} \left(x^2 + 1 - \ln x\right) = \infty
\end{aligned}$$

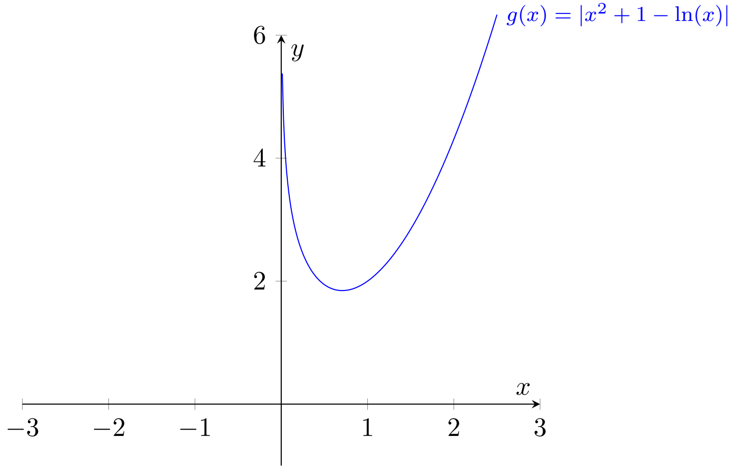
Das heißt innerhalb des Definitionsbereiches wird ein Minimum angenommen.
Die lokalen Extrema von $h(x)$ liegen in den Nullstellen der ersten Ableitung:

$$\begin{aligned}
h'(x) = 2x - \frac{1}{x} &= 0 \\
\Leftrightarrow \qquad 2x^2 &= 1 \\
\Leftrightarrow \qquad x_{1/2} &= \pm\frac{1}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

von diesen beiden Werten liegt nur $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ im Definitionsbereich D. Dort ist

$$d = g(x_1) = h(x_1) = \frac{1}{2} + 1 - \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Der Graph von $h(x) = g(x)$ ist



Aufgabe 4.4: Monotonieverhalten

Untersuchen Sie das Monotonieverhalten der folgenden Funktionen. Geben Sie dazu alle Intervalle an, in denen die Funktion monoton steigend bzw. monoton fallend ist.

a) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$

b) $g(x) = -\cos(x) - 2\sin(x/2)$

Lösung 4.4:

a) Die erste Ableitung ist

$$f'(x) = 6x^2 - 6x = x(6x - 6)$$

Damit sind die stationären Punkte bei

$$x_1 = 0 \quad \text{und} \quad x_2 = 1.$$

Mit der zweiten Ableitung erhalten wir für $x_1 = 0$

$$f''(0) = -6$$

und für $x_2 = 1$

$$f''(1) = 6.$$

Damit ist bei $x_1 = 0$ ein Maximum und bei $x_2 = 1$ Minimum. In den Intervallen $(-\infty, 0)$ und $(1, \infty)$ ist $f(x)$ monoton steigend und in dem Intervall $(0, 1)$ ist $f(x)$ monoton fallend.

b) Um alle stationären Punkte zu bestimmen, berechnen wir die Nullstellen der ersten Ableitung

$$g'(x) = \sin(x) - \cos(x/2) \overset{!}{=} 0.$$

Mit der Substitution $y = x/2$ erhalten wir

$$0 = \sin(2y) - \cos(y).$$

Wir wenden das Additionstheorem $\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$ an.

$$0 = 2\sin(y)\cos(y) - \cos(y) = (2\sin(y) - 1)\cos(y).$$

Es muss also gelten

$$\sin(y) = 1/2 \quad \text{oder} \quad \cos(y) = 0.$$

Damit erhalten wir die Nullstellen

$$y_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi n \ \text{ für } n \in \mathbb{Z}$$
$$y_2 = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \ \text{ für } n \in \mathbb{Z}$$
$$y_3 = \frac{\pi}{2} + \pi n \ \text{ für } n \in \mathbb{Z}$$

Durch Rücksubstitution erhalten wir die stationären Punkte:

$$x_1 = \frac{\pi}{3} + 4\pi n \ \text{ für } n \in \mathbb{Z}$$
$$x_2 = \frac{5\pi}{3} + 4\pi n \ \text{ für } n \in \mathbb{Z}$$

Da für y_3 die Perioden π ist, erhalten wir nach der Rücksubstitution im Intervall $[0, 4\pi)$ die zwei stationären Punkte x_3 und x_4.

$$x_3 = \pi + 4\pi n \ \text{ für } n \in \mathbb{Z}$$
$$x_4 = 3\pi + 4\pi n \ \text{ für } n \in \mathbb{Z}$$

Wir sehen, dass $g(x)$ eine Periodenlänge von 4π besitzt. Die Funktion $g(x)$ ist zwischen den stationären Punkten monoton.

In den Intervallen

$$I_1 = (\frac{\pi}{3} + 4\pi n, \pi + 4\pi n) \text{ für } n \in \mathbb{Z}$$

ist $g(x)$ monoton steigend.

In den Intervallen

$$I_2 = (\pi + 4\pi n, \frac{5\pi}{3} + 4\pi n) \text{ für } n \in \mathbb{Z}$$

ist $g(x)$ monoton fallend.

In den Intervallen

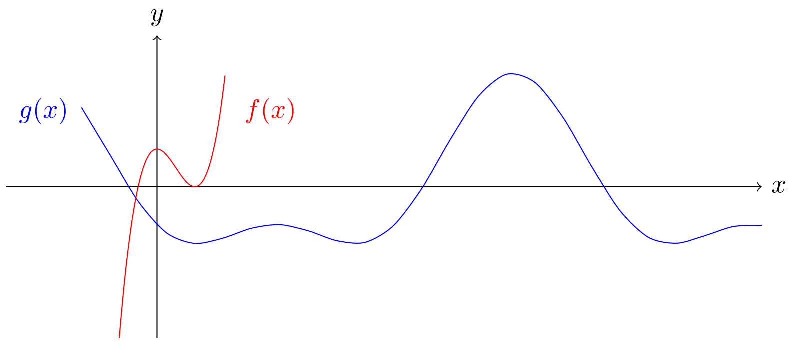
$$I_3 = (\frac{5\pi}{3} + 4\pi n, 3\pi + 4\pi n) \text{ für } n \in \mathbb{Z}$$

ist $g(x)$ monoton steigend.

In den Intervallen

$$I_4 = (3\pi + 4\pi n, \frac{\pi}{3} + 4\pi n) \text{ für } n \in \mathbb{Z}$$

ist $g(x)$ monoton fallend



y
$g(x)$
$f(x)$
x

Aufgabe 4.5: Optimierungsproblem

Ein Poster muss mit einer Gesamtfläche von $\bar{A} = 64000\ \text{mm}^2$ gedruckt werden. Es muss 10 mm Seitenränder und 25 mm obere und untere Ränder haben. Welche Höhe und Breite ergeben die maximale Druckfläche?

Lösung 4.5:

Seien x und y die beiden Dimensionen des Plakats und s die Seitenränder und t die oberen und unteren Ränder. Die Gesamtfläche ist $\bar{A} = 64000\ \text{mm}^2 = xy\ \text{mm}^2$. Die gedruckte Fläche beträgt

$$\begin{aligned} A(x) &= (x-2s)(y-2t) \\ &= (x-2s)\left(\frac{\bar{A}}{x} - 2t\right) \quad \text{(unter Verwendung der Nebenbedingung der Gesamtfläche)} \\ &= \bar{A} - \frac{2s}{x}\bar{A} - 2tx + 4st\ \text{mm}^2. \end{aligned}$$

Um die Fläche zu maximieren, suchen wir die stationären Punkte:

$$A'(x) = 2s\bar{A}\frac{1}{x^2} - 2t.$$

Die stationären Punkte sind:

$$x_c = \pm\sqrt{\frac{s\bar{A}}{t}}.$$

Nur der positive Wert ist sinnvoll, da wir nach physikalischen Größen suchen. Die zweite Ableitung ist

$$A''(x) = -\frac{4s\bar{A}}{x^3}$$

die in x_c negativ ist. Daher ist x_c ein lokales Maximum. Wir haben also

$$x_c = 160\ \text{mm}$$

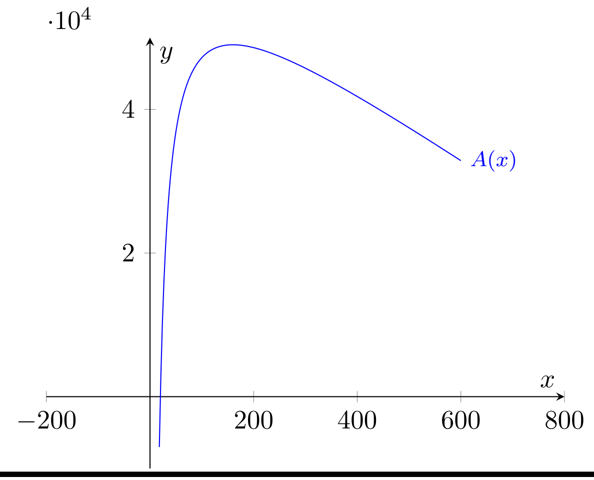
und

$$y_c = \frac{\bar{A}}{x_c} = 400\ \text{mm}.$$

Die maximale Druckfläche beträgt

$$A_{\max} = x_c\, y_c = 32000\ \text{mm}^2.$$

Der Graph der Fläche $A(x)$ ist



Aufgabe 4.6: Tangenten

a) Bestimmen Sie die Geradengleichungen (in der Form $ax + by = c$) der Tangenten an den Nullstellen der Funktionen

$$\varphi_1(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6, \qquad \varphi_2(x) = x^2 \text{ und } \varphi_3(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{für } x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & \text{für } x < 0 \end{cases}.$$

b) Geben Sie alle Punkte ($x-$Werte) an, in denen die Tangenten von $f(x) = x^2$ und $g(x) = x^3$ parallel sind.

c) Stellen Sie den Verlauf der beiden vektorwertigen Funktionen

$$\boldsymbol{v}(t) = \begin{pmatrix} t \\ \varphi_3(t) \end{pmatrix} \qquad \text{mit } \varphi_3(t) \text{ aus Aufgabenteil } \mathbf{a)}$$

und

$$\boldsymbol{w}(s) = \begin{pmatrix} s \cdot |s| \\ s \end{pmatrix}.$$

im selben Graphen dar.
Berechnen Sie – wo möglich – die Ableitungen beider Funktionen $\boldsymbol{v}(t)$ und $\boldsymbol{w}(s)$.

Hinweis: Die Funktion $\boldsymbol{w}(s)$ lässt sich analog zu $\varphi_3(t)$ mit Hilfe einer Fallunterscheidung auch ohne die Betragsfunktion darstellen.

Lösung 4.6:

a) **i)** Eine Nullstelle der Funktion $\varphi_1(x)$ ist $x_1 = 1$. Mittels Horner-Schema erhält man das Restpolynom:

	1	−2	−5	6
1	\	1	−1	−6
	1	−1	−6	0

Für weitere Nullstellen muss also gelten

$$1x^2 - 1x - 6 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x_{2/3} = \begin{cases} -2 \\ 3 \end{cases}.$$

Die Ableitung der Funktion liefert die Steigung der Tangenten. An den Nullstellen x_1, x_2 und x_3 hat man

$$\varphi_1'(x) = 3x^2 - 4x - 5 \Rightarrow \varphi_1'(1) = -6,\ \varphi_1'(-2) = 15,\ \varphi_1'(3) = 10.$$

Damit sind die Tangentengeraden gegeben durch:

$$\begin{array}{rlcl} x_1 = 1: & y = -6x + 6 & \Rightarrow & 6x + y = 6 \\ x_2 = -2: & y = 15x + 30 & \Rightarrow & 15x - y = -30 \\ x_3 = 3: & y = 10x - 30 & \Rightarrow & 10x - y = 30 \end{array}$$

ii) $\varphi_2(x)$ hat nur die Nullstelle $x_0 = 0$. Die Ableitung $\varphi_2'(x) = 2x$ hat dort den Wert Null, so dass die Tangente durch

$$y = 0$$

gegeben ist.

iii) Die Funktion $\varphi_3(x)$ hat nur die Nullstelle $\varphi_0 = 0$. Dort ist φ_3 nicht differenzierbar:

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_3(x) - \varphi(0)}{x - 0} &= \begin{cases} \frac{\sqrt{x}-0}{x}, & x > 0 \\ \frac{-\sqrt{-x}-0}{x}, & x < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}, & x > 0 \\ \frac{-\sqrt{-x}-0}{-(\sqrt{-x})^2}, & x < 0 \end{cases} \\ &= \frac{1}{\sqrt{|x|}} \xrightarrow[x \to 0]{} \infty. \end{aligned}$$

Die Steigung der Funktion ist dort also unendlich und sie hat die senkrechte Tangente:

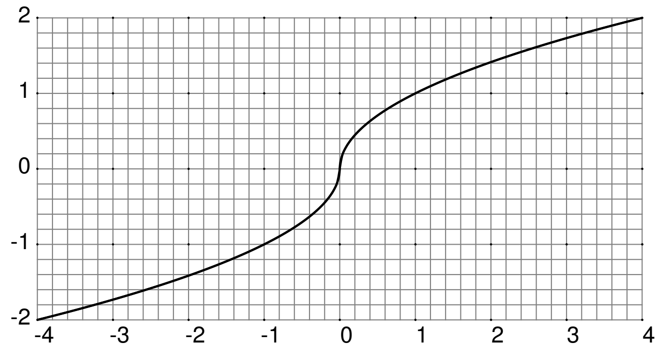
$$x = 0.$$

b) Die beiden Funktionen haben im Punkt x parallele Tangenten, wenn ihre Ableitungen dort denselben Wert annehmen:

$$f'(x) = g'(x) \Leftrightarrow 2x = 3x^2$$

Dies ist für $x = 0$ oder für $x = \frac{2}{3}$ der Fall.

c) Die Funktionsgraphen beider Funktionen stimmen überein.



In Aufgabenteil **a)** wurde bereits gezeigt, dass $\varphi_3(t)$ und damit auch $\boldsymbol{v}(t)$ an der Stelle $t = 0$ nicht differenzierbar ist. In allen anderen Punkten hat man:

$$\boldsymbol{v}'(t) = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t} \\ \varphi_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2\sqrt{|t|}} \end{pmatrix}.$$

Durch die Umparametrisierung der Kurve hat man eine differenzierbare Funktion $\boldsymbol{w}(s)$ mit

$$\begin{aligned} \boldsymbol{w}'(s) &= \begin{pmatrix} 2s \\ 1 \end{pmatrix} && \text{für } s > 0 \\ \boldsymbol{w}'(s) &= \begin{pmatrix} -2s \\ 1 \end{pmatrix} && \text{für } s < 0 \end{aligned}$$

Für $s = 0$ ergibt sich für die erste Komponente $w_1(s)$:

$$\begin{aligned} \frac{w_1(s) - w_1(0)}{s - 0} &= \begin{cases} \frac{s^2 - 0}{s} & \text{für } s > 0 \\ \frac{-s^2 - 0}{s} & \text{für } s < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} s & \text{für } s > 0 \\ -s & \text{für } s < 0 \end{cases} \\ &\xrightarrow[s \to 0]{} 0 \end{aligned}$$

Damit hat man

$$\boldsymbol{w}'(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und insgesamt

$$\boldsymbol{w}'(s) = \begin{pmatrix} 2|s| \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4.7: Regel von L'Hospital

Berechnen Sie mit Hilfe der Regel von L'Hospital die Grenzwerte

$$A = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right), \qquad B = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cosh x}{x^3}\right), \qquad C = \lim_{x\to 1}\left(\frac{\ln x}{\sin(\pi x)}\right)$$

Lösung 4.7:

Es gilt $\lim\limits_{x\to 0}\tan x = \lim\limits_{x\to 0} x = 0$, also darf der Satz von L'Hospital angewendet werden:

$$A = \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{1} = 1.$$

Für B gehen Zähler und Nenner gegen Null ($\lim\limits_{x\to 0}\cosh x = 1$), also kann auch hier der Satz von L'Hospital angewendet werden:

$$\begin{aligned} B &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cosh x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{-\sinh x}{3x^2} \text{ (erneut ist } \lim_{x\to 0}\sinh x = \lim_{x\to 0} x^2 = 0) \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{-\cosh x}{6x} = \begin{cases} -\infty & \text{, für } x > 0 \text{ (rechtsseitiger Grenzwert)} \\ \infty & \text{, für } x < 0 \text{ (linksseitiger Grenzwert)} \end{cases}. \end{aligned}$$

Für C gilt wiederum $\lim\limits_{x\to 1}\ln x = \lim\limits_{x\to 1}\sin(\pi x) = 0$, also kann auch hier der Satz von L'Hospital angewendet werden:

$$\begin{aligned} C &= \lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{\sin(\pi x)} = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{\pi\cos(\pi x)} \\ &= \lim_{x\to 1}\frac{1}{\pi x\cos(\pi x)} = -\frac{1}{\pi}. \end{aligned}$$