Helmut-Schmidt-Universität
Universität der Bundeswehr Hamburg
Fakultät für Maschinenbau und Bauingenieurwesen

Prof. Dr. Thomas Carraro
Dr. Ulrike Kochan-Eilers

Mathematik II/B (WI/ET) — Blatt 0

WT 2025 — Zusatzblatt zur Vorbereitung auf Bonusklausur

Einführende Bemerkungen

- Vermeiden Sie die Verwendung von Taschenrechnern oder Online-Ressourcen.

Aufgabe 0.1: Partielle Ableitungen

Berechnen Sie den Gradienten der folgenden reellen Funktionen und geben Sie diesen in Matrixschreibweise an:

i) $f(x,y) = e^{xy^3}$ **ii)** $g(x,y) = \sin(x^2 - y)$

iii) $h(x,y) = (2x-y)^2 + \ln(xy)$ **iv)** $p(x,y) = \ln(x+y^2) - e^{2xy} + 3x$

v) $q(x,y,z) = e^{x-y}\cos(5z)$

Lösung 0.1:

i)

$$\nabla f(x,y) = \left(y^3 e^{xy^3}\ ,\ 3y^2 x e^{xy^3}\right)^\top$$

ii)

$$\nabla g(x,y) = \left(2x\cos(x^2-y)\ ,\ -\cos(x^2-y)\right)^\top$$

iii)

$$\nabla h(x,y) = \left(4(2x-y) + \frac{1}{x}\ ,\ -2(2x-y) + \frac{1}{y}\right)^\top$$

iv)

$$\nabla p(x,y) = \left(\frac{1}{x+y^2} - 2ye^{2xy} + 3\ ,\ \frac{2y}{x+y^2} - 2xe^{2xy}\right)^\top$$

v)

$$\nabla q(x,y,z) = \left(e^{x-y}\cos(5z)\ ,\ -e^{x-y}\cos(5z)\ ,\ -5e^{x-y}\sin(5z)\right)^\top$$

Aufgabe 0.2: Richtungsableitungen

Gegeben seien die skalarwertige Funktion $f(x,y)$ und die vektorwertige Funktion $\boldsymbol{g}(x,y)$

$$f(x,y) = x^2y^3 \qquad \text{und} \qquad \boldsymbol{g}(x,y) = (x^2+y,\ xy)^\top.$$

Berechnen Sie die Richtungsableitung beider Funktionen im Punkt $\boldsymbol{P} = (1,\ 2)^\top$ in Richtung $\boldsymbol{h} := (3,4)^\top$.

Lösung 0.2:

Zunächst berechnen wir die die ersten Ableitungen der beiden Funktionen:

$$\nabla f(x,y) = (2xy^3,\ 3x^2y^2)^\top$$
$$\boldsymbol{J}_g(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 1 \\ y & x \end{pmatrix}.$$

Nun berechnen wir die ersten Ableitungen im Punkt $\boldsymbol{P} = (1,\ 2)^\top$:

$$\nabla f(1,2) = (16,\ 12)^\top$$
$$\boldsymbol{J}_g(1,2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Desweiteren benötigen wir den Normalenvektor in Richtung $\boldsymbol{h}$:

$$\hat{\boldsymbol{h}} = \frac{1}{5}(3,\ 4)^\top$$

Damit ergeben sich dann die Richtungsableitungen:

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{\boldsymbol{h}}}(x,y) = \left\langle \hat{\boldsymbol{h}},\, \nabla f(x,y,z) \right\rangle = \frac{96}{5}$$
$$\frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial \hat{\boldsymbol{h}}}(x,y) = \boldsymbol{J}_g(1,2)\cdot \hat{\boldsymbol{h}} = (2,\, 2)^\top$$

Aufgabe 0.3: Taylor–Entwicklung in 2 Dim.

Gegeben sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = e^x \sin(y)$. Bestimmen Sie das Taylorpolynom 2. Grades von f für den Entwicklungspunkt $(0,0)$.

Lösung 0.3:

Mit den partiellen Ableitungen

$$\begin{array}{rcll} f_x &=& e^x\sin(y) & \Rightarrow\ f_x(0,0)=0\ , \\ f_y &=& e^x\cos(y) & \Rightarrow\ f_y(0,0)=1\ , \\ f_{xx} &=& e^x\sin(y) & \Rightarrow\ f_{xx}(0,0)=0\ , \\ f_{xy} &=& e^x\cos(y) & \Rightarrow\ f_{xy}(0,0)=1\ , \\ f_{yy} &=& -e^x\sin(y) & \Rightarrow\ f_{yy}(0,0)=0 \end{array}$$

folgt

$$\begin{aligned} T_{f,2}(x,y) &= f(0,0) + f_x(0,0)(x-0) + f_y(0,0)(y-0) + \frac{1}{2}f_{xx}(0,0)(x-0)^2 \\ &+\frac{1}{2}f_{yy}(y-0)^2 + f_{xy}(0,0)(x-0)(y-0) \\ &= y + xy \end{aligned}$$

Aufgabe 0.4: Newton-Verfahren

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x,y) = x^3 - 3xy^2.$$

Gesucht sind die stationären Punkte dieser Funktion.

a) Geben Sie an, welche Bedingung ein stationärer Punkt $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ erfüllen muss.

b) Um eine Näherung für einen solchen Punkt zu berechnen, soll das zweidimensionale Newton-Verfahren angewendet werden. Auf welche Funktion wird das Newton-Verfahren angewendet?
Geben Sie die Iterationsvorschrift an.

c) Führen Sie für den Startvektor $\boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ einen Iterationsschritt durch.

d) Geben Sie ein geeignetes Abbruchkriterium des Newton-Verfahrens an. (Dieses Kriteriums ist **nicht** auszuwerten.)

Lösung 0.4:

a) In einem stationären Punkt muss der Gradient der Funktion f verschwinden:

$$\boldsymbol{0} \overset{!}{=} \nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2-3y^2 \\ -6xy \end{pmatrix}$$

b) Das Newton-Verfahren wird auf die Funktion $\boldsymbol{F}(x,y) = \nabla f(x,y)$ angewendet. Die Ableitung dieser Funktion ist

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}'(x,y)&\big(= H_f(x,y)\big) \\ &= \begin{pmatrix} 6x & -6y \\ -6y & -6x \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Zu gegebenem Startwert $\boldsymbol{x}_0$ wird die folgende Iteration durchgeführt:
Für $j = 0,1,2,\ldots$:

i) Löse das lineare Gleichungssystem $\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{x}_j)\Delta\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_j)$ nach $\Delta\boldsymbol{x}$ auf.

ii) Berechne nächste Iteration $\boldsymbol{x}_{j+1} = \boldsymbol{x}_j + \Delta\boldsymbol{x}$.

c) Für den gegebenen Startvektor $\boldsymbol{x}_0 = (1,1)^\top$ ergibt sich zunächst

$$\boldsymbol{F}(1,1) = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \end{pmatrix} \text{ und } \boldsymbol{F}'(1,1) = \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ -6 & -6 \end{pmatrix}.$$

Die Lösung des Gleichungssystems $\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{x}_0)\Delta\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0)$ ergibt

$$\Delta\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

und als nächsten Iterationsschritt

$$\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_0 + \Delta\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

d) Geeignete Abbruchkriterien sind etwa $\|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_k)\| < \varepsilon$ oder $\|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}_{k-1}\| < \varepsilon$ mit fest vorgegebenem $\varepsilon > 0$.
Desweiteren empfiehlt es sich, die Iteration nach N Schritten (z. B. $N = 1000$) abzubrechen, auch wenn das Abbruchkriterium nicht erfüllt ist.

Aufgabe 0.5: Stationäre Punkte

Gegeben sei die Funktion:

$$f(x,y) = x^3 + axy + y^3 \quad \text{mit} \quad a \in \mathbb{R}.$$

a) Bestimmen Sie alle stationären Punkte in Abhängigkeit von a.

b) Klassifizieren Sie diese für $a \neq 0$ als Minimum, Maximum oder Sattelpunkt.

Lösung 0.5:

a) Der Gradient ist gegeben durch:

$$\nabla f(x,y) = \left(3x^2 + ay, ax + 3y^2\right)$$

Um die stationären Punkte zu finden, setzen wir den Gradienten gleich 0:

1. $3x^2 + ay = 0$
2. $ax + 3y^2 = 0$

Für den Fall $a = 0$ erhalten wir $3x^2 = 0$ und $3y^2 = 0$, d.h. einen stationären Punkt bei (0,0). Für $a \neq 0$ lösen wir die erste Gleichung nach y auf:

$$3x^2 + ay = 0 \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{3x^2}{a}.$$

Einsetzen in die zweite Gleichung ergibt:

$$\begin{aligned} ax + 3y^2 &= 0 \\ ax + 3(-\frac{3x^2}{a})^2 &= 0 \\ ax + \frac{27}{a^2}x^4 &= 0 \\ x(a + \frac{27}{a^2}x^3) &= 0 \end{aligned}$$

Daraus ergeben sich die stationären Punkte $(0,0)$ und $(-\frac{a}{3}, -\frac{a}{3})$.

b) Für $a \neq 0$ ist die Hesse-Matrix gegeben als:

$$\boldsymbol{H}(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & a \\ a & 6y \end{pmatrix}$$

c) Ausgewertet in $(0,0)$ erhalten wir:

$$\boldsymbol{H}\,(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}$$

Für die Determinante ergibt sich $det(\boldsymbol{H}\,(0,0)) = -a^2 < 0$. Daher ist die Matrix indefinit und der Punkt $(0,0)$ ist ein Sattelpunkt.

d) Ausgewertet in $(-\frac{a}{3}, -\frac{a}{3})$ erhalten wir:

$$\boldsymbol{H}\left(-\frac{a}{3}, -\frac{a}{3}\right) = \begin{pmatrix} -2a & a \\ a & -2a \end{pmatrix}$$

Für die Determinante ergibt sich $det(\boldsymbol{H}\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)) = 3a^2 > 0$. Damit erhalten wir für $a < 0$ ein lokales Minimum und für $a > 0$ ein lokales Maximum.

Aufgabe 0.6: Integration

a) Berechnen Sie folgende Integrale

$$\begin{aligned} I_1 &= \int x^2 \ln(x)\mathrm{d}x, \\ I_2 &= \int \frac{x}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x, \\ I_3 &= \int \frac{3x+2}{x^2+6x+9}\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

b) Berechnen Sie das Integral

$$I = \int_G y \;\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

wobei $G \subset \mathbb{R}^2$ der Bereich ist, der zwischen den beiden Graphen der folgenden Funktionen liegt

$$y = x^2 \quad \text{und} \quad y = 2x.$$

Lösung 0.6:

a) Das erste Integral ergibt sich durch einmalige partielle Integration:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int x^2 \ln x\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{3}x^3 \ln(x) - \frac{1}{3}\int x^3 \frac{1}{x}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{3}\int x^2\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{9}x^3 + c. \end{aligned}$$

Für das zweite Integral ergibt die Substitution $u = x^2 + 1$, $\mathrm{d}u = 2x\mathrm{d}x$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \frac{1}{2}\frac{1}{u^2}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}(-1)\frac{1}{u} + c \\ &= -\frac{1}{2}\frac{1}{u} + c \\ &= -\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1} + c. \end{aligned}$$

Das dritte Integral ergibt sich durch die Partialbruchzerlegung:

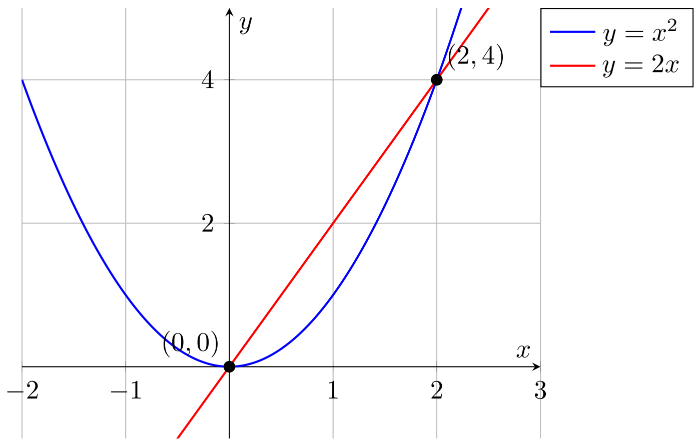
$$I_3 = \int \frac{3x+2}{(x+3)^2}\mathrm{d}x = \int \frac{3x+2}{(x+3)(x+3)}\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}
\frac{3x+2}{(x+3)(x+3)} =& \frac{A}{x+3} + \frac{B}{(x+3)^2} \quad || \cdot (x+3)(x+3) \\
\iff 3x+2 =& A(x+3) + B \\
-7 =& B \quad \implies B = -7 \\
2 =& 3A - 7 \quad \implies A = 3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_3 =& \int \left(\frac{3}{(x+3)} - \frac{7}{(x+3)^2} \right) \mathrm{d}x \\
=& 3\ln(|x+3|) + \frac{7}{x+3} + c
\end{aligned}$$

b) Die Fläche zwischen den beiden Graphen kann als Normalenbereich bezüglich x formuliert werden

$$G := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2 \;\wedge\; x^2 \leq y \leq 2x\}$$



$$\begin{aligned}
I =& \int_G y \;\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \\
=& \int_{x=0}^{2} \int_{y=x^2}^{2x} y \;\mathrm{d}y\mathrm{d}x, \\
=& \int_0^2 \frac{1}{2}[y^2]_{x^2}^{2x}\mathrm{d}y, \\
=& \frac{1}{2}\int_0^2 4x^2 - x^4\mathrm{d}y, \\
=& \frac{1}{2}\left[\frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5\right]_0^2 \\
=& \frac{1}{2}\left[\frac{4}{3}8 - \frac{1}{5}32\right] \\
=& \frac{1}{2}\frac{64}{15} \\
=& \frac{32}{15}
\end{aligned}$$