

Mathematik II/B (WI/ET)

Blatt 4

WT 2024

Regel von L'Hospital, Differenzieren, Kurven

Einführende Bemerkungen

- Vermeiden Sie die Verwendung von Taschenrechnern oder Online-Ressourcen.

Aufgabe 4.1: Differenzieren

- a) Bestimmen Sie jeweils die erste Ableitung. (Eventuell notwendige Beschränkungen des Definitionsbereiches sind nicht angegeben.)

$$f_9(t) = \sinh(t) - \cosh(2t),$$

$$f_{10}(t) = (t-3)^4 \sinh(t),$$

$$f_{11}(t) = t^2 e^{-2t} \sin(3t),$$

$$f_{12}(t) = \sqrt{t} e^{2t},$$

$$f_{13}(t) = \sin^3(e^{2t^2} + t^5),$$

$$f_{14}(t) = \sqrt{2t^2 + 1},$$

$$f_{15}(t) = \ln(t) - \ln(5t),$$

$$f_{16}(t) = \ln(t^2) - \ln(t^5).$$

- b) Bestimmen Sie die n -te Ableitung folgender Funktionen.

$$f_{21}(t) = \sin(3t),$$

$$f_{22}(t) = t e^{2t}$$

$$f_{23}(t) = t \cdot \cos(t),$$

$$f_{24}(t) = t \ln(2t)$$

Aufgabe 4.2: Vektor- und Matrixwertige Funktionen

Gegeben seien

$$\mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} t & t^2 \\ \sqrt{t} & t^5 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}(t) = \begin{pmatrix} \sin t & \cos t \\ e^t & \cosh t \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{c}(t) = \left(t^3, \sqrt{t^5}, \frac{1}{t} \right)^\top,$$

$$\mathbf{d}(t) = \left(e^{-t^2}, \sin(\sqrt{t}), \tanh(t/2) \right)^\top.$$

Berechnen Sie

a) $\frac{d}{dt}(\mathbf{A}(t)\mathbf{B}(t))$ und

b) $\frac{d}{dt}(\mathbf{c}(t) \times \mathbf{d}(t))$

auf die folgenden beiden Arten:

- Indem sie vor der Differentiation die Produkte \mathbf{AB} bzw. $\mathbf{c} \times \mathbf{d}$ bilden und die Ergebnisfunktionen ableiten.
- Indem Sie zunächst die Ableitungen der einzelnen Funktionen bilden und diese dann gemäß einer Produktregel verrechnen.

Aufgabe 4.3: Minimaler Abstand

Gegeben seien die folgenden Funktionen

i) $f_1(x) = x^2 + 1,$

ii) $f_2(x) = \ln(x).$

- a) Skizzieren Sie die Funktionen f_1 und f_2 .

- b) Bestimmen Sie den minimalen vertikalen Abstand beider Funktionsgraphen

$$d = \min \{ |f_1(x) - f_2(x)|; x \in \mathbb{R}^+ \}.$$

Aufgabe 4.4: Monotonieverhalten

Untersuchen Sie das Monotonieverhalten der folgenden Funktionen. Geben Sie dazu alle Intervalle an, in denen die Funktion monoton steigend bzw. monoton fallend ist.

a) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$

b) $g(x) = -\cos(x) - 2\sin(x/2)$

Aufgabe 4.5: Optimierungsproblem

Ein Poster muss mit einer Gesamtfläche von $\bar{A} = 64000 \text{ mm}^2$ gedruckt werden. Es muss 10 mm Seitenränder und 25 mm obere und untere Ränder haben. Welche Höhe und Breite ergeben die maximale Druckfläche?

Aufgabe 4.6: Tangenten

- a) Bestimmen Sie die Geradengleichungen (in der Form $ax + by = c$) der Tangenten an den Nullstellen der Funktionen

$$\varphi_1(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6, \quad \varphi_2(x) = x^2 \text{ und } \varphi_3(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{für } x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & \text{für } x < 0 \end{cases}.$$

- b) Geben Sie alle Punkte (x -Werte) an, in denen die Tangenten von $f(x) = x^2$ und $g(x) = x^3$ parallel sind.

- c) Stellen Sie den Verlauf der beiden vektorwertigen Funktionen

$$\mathbf{v}(t) = \begin{pmatrix} t \\ \varphi_3(t) \end{pmatrix} \quad \text{mit } \varphi_3(t) \text{ aus Aufgabenteil a)}$$

und

$$\mathbf{w}(s) = \begin{pmatrix} s \cdot |s| \\ s \end{pmatrix}.$$

im selben Graphen dar.

Berechnen Sie – wo möglich – die Ableitungen beider Funktionen $\mathbf{v}(t)$ und $\mathbf{w}(s)$.

Hinweis: Die Funktion $\mathbf{w}(s)$ lässt sich analog zu $\varphi_3(t)$ mit Hilfe einer Fallunterscheidung auch ohne die Betragsfunktion darstellen.

Aufgabe 4.7: Regel von L'Hospital

Berechnen Sie mit Hilfe der Regel von L'Hospital die Grenzwerte

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x}{x} \right), \quad B = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cosh x}{x^3} \right), \quad C = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\ln x}{\sin(\pi x)} \right)$$

Ergebnisse zu Aufgabe 4.1:

- a) $f'_9(2) \approx -50.818$, $f'_{10}(2) \approx -10.745$, $f'_{11}(2) \approx 0.2315$, $f'_{12}(2) \approx 173.73$, $f'_{13}(2) \approx -2039.7$,
 $f'_{14}(2) = 4/3$, $f'_{15}(2) = 0$, $f'_{16}(2) = -3/2$
b) $f^{(n)}_{22}(t) = (n + 2t)2^{n-1}e^{2t}$, $f^{(n)}_{24}(t) = (-1)^n(n - 2)!t^{-(n-1)}$.

Ergebnisse zu Aufgabe 4.2:

$$\begin{aligned} \text{a) } & \begin{pmatrix} t \cos t + t^2 e^t + \sin t + 2te^t & -t \sin t + t^2 \sinh t + \cos t + 2t \cosh t \\ \sqrt{t} \cos t + t^5 e^t + \frac{\sin t}{2\sqrt{t}} + 5t^4 e^t & -\sqrt{t} \sin t + t^5 \sinh t + \frac{\cos t}{2\sqrt{t}} + 5t^4 \cosh t \end{pmatrix} \\ \text{b) } & \begin{pmatrix} \frac{5}{2}t^{3/2} \tanh \frac{t}{2} + \frac{t^{5/2}}{2 \cosh^2 \frac{t}{2}} - \frac{\cos \sqrt{t}}{2t^{3/2}} + \frac{\sin \sqrt{t}}{t^2} \\ -2e^{-t^2} - \frac{e^{-t^2}}{t^2} - 3t^2 \tanh \frac{t}{2} - \frac{t^3}{2 \cosh^2 \frac{t}{2}} \\ 3t^2 \sin \sqrt{t} + \frac{t^{5/2} \cos \sqrt{t}}{2} - \frac{5}{2}t^{3/2}e^{-t^2} + 2t^{7/2}e^{-t^2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ergebnisse zu Aufgabe 4.5:

Die maximale Druckfläche beträgt: $A_{\max} = 49000 \text{ mm}^2$.

Ergebnisse zu Aufgabe 4.6:

- a) Nullstellen: $\varphi_1(1) = \varphi_1(-2) = \varphi(3) = 0$, $\varphi_2(0) = 0$, $\varphi_3(0) = 0$

Ergebnisse zu Aufgabe 4.7:

$$A = 1, \quad B = \pm\infty, \quad C = -1/\pi$$