Helmut-Schmidt-Universität
Universität der Bundeswehr Hamburg
Fakultät für Maschinenbau und Bauingenieurwesen
Prof. Dr. Thomas Carraro

HELMUT SCHMIDT
UNIVERSITÄT
Universität der Bundeswehr Hamburg

Mathematik II/B (WI/ET) — Zusatzblatt

WT 2025 — Taylor-Entwicklung

Aufgabe 1

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{(x+1)^2},$$

a) Bestimmen Sie das Taylor-Polynom 3. Ordnung $T_3(x)$ von $f(x)$ um den Punkt $x_0 = 0$.

b) Geben Sie das Restglied $R_3(x;0)$ an.

c) Schätzen Sie das Restglied für $|x| < \frac{1}{2}$ ab.

Hinweis: Es ist nicht notwendig das Restglied optimal abzuschätzen.

Lösung:

a) Die Taylor-Entwicklung von $f(x)$ um $x_0 = 0$ ist:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 \cdots$$

$$\begin{aligned}
f(0) &= 1 \\
f'(x) &= -\frac{2}{(x+1)^3} \\
f'(0) &= -2 \\
f''(x) &= \frac{6}{(x+1)^4} \\
f''(0) &= 6 \\
f'''(x) &= -\frac{24}{(x+1)^5} \\
f'''(0) &= -24
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich das Taylor-Polynom zu

$$T_3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 \quad = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3.$$

b) Das Restglied wird wie folgt bestimmt:

$$R_3(x;0) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}x^4,$$

wobei $-\frac{1}{2} \leq \xi \leq \frac{1}{2}$ gilt.

$$f^{(4)}(x) = \frac{120}{(x+1)^6}.$$

Das Restglied wird damit

$$R_3(x;0) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}x^4 = \frac{120}{24(\xi+1)^6}x^4.$$

c) For $|x| < \frac{1}{2}$:

$$|R_3(x;0)| = \left|\frac{120}{24(\xi+1)^6}x^4\right| = \frac{5}{(\xi+1)^6}x^4 \leq \frac{5}{(\frac{1}{2})^6}\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{5\cdot 64}{16} = 20.$$

D.h.

$$|R_3(x;0)| \leq 20.$$