

Mathematik II/B (WI/ET)

Blatt 5

WT 2024

Kurvendiskussion, Taylorpolynom

---

Einführende Bemerkungen

- Vermeiden Sie die Verwendung von Taschenrechnern oder Online-Ressourcen.
- 

**Aufgabe 5.1: Taylor-Entwicklung**

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \ln(x).$$

- a) Bestimmen Sie das Taylor-Polynom der Ordnung zwei,  $T_2(x)$ , von  $f(x)$  an der Stelle  $x = 1$ .
- b) Bestimmen Sie das Restglied  $R_2(x; 1)$  und schätzen Sie

$$\max_{x \in [1, 2]} |R_2(x; 1)|.$$

**Aufgabe 5.2: Taylor-Entwicklung**

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \sin(x) \ln(x).$$

- a) Bestimmen Sie das Taylor-Polynom zweiter Ordnung  $T_2(x)$  von  $f(x)$  um den Punkt  $x = 1$ .
- b) Bestimmen Sie die Differenz zwischen dem Taylor-Polynom  $T_2(x)$  und der Funktion  $f(x)$  im Punkt  $x = 0$ , d.h. bestimmen Sie  $d(0)$ , wobei

$$d(x) := |T_2(x) - f(x)|.$$

Man beachte, dass die Funktion  $f(x)$  an der Stelle  $x = 0$  stetig fortgesetzt werden muss.

**Aufgabe 5.3: Taylor-Polynom**

- a) Geben Sie das Taylorpolynom  $n$ -ter Ordnung der folgenden Funktionen um den angegebenen Entwicklungspunkt  $x_0$  an:
- i)  $f(x) = \sin(x) \cdot \cos(x)$  um  $x_0 = 0, n = 4$
- ii)  $g(x) = \cos(x)$  um  $x_0 = \pi/2, n = 4$
- iii)  $h(x) = e^{1-x}(x^2 - 2x)$  um  $x_0 = 1, n = 2$
- b) Geben Sie die Nullstellen der Funktionen sowie der Taylor-Polynome im Intervall  $[0, 5]$  an.
- c) Skizzieren Sie die Funktionen und deren Taylor-Polynome.

**Aufgabe 5.4: Asymptoten**

Man bestimme die (waagerechten bzw. senkrechten bzw. schrägen) Asymptoten der folgenden Funktionen:

- a)  $f(x) = \frac{x}{4-x^2}$
- b)  $g(x) = e^{-x^2}$
- c)  $h(x) = \frac{x^2-3x}{2x-2}$
- d)  $l(x) = x^2 e^{-x}$

**Aufgabe 5.5: Kurvendiskussion**

Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich, die Symmetrie, alle Nullstellen, sowie Art und Lage der kritischen Punkte und Wendepunkte der reellen Funktion

$$f(x) = x\sqrt{16-x^2}.$$

### Aufgabe 5.6: Kurvendiskussion

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x}{1 - x}.$$

- i) Geben Sie den maximalen Definitionsbereich der Funktion  $f$  an.
  - ii) Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion.
  - iii) Bestimmen Sie die kritischen Punkte der Funktion und deren Funktionswerte. Klassifizieren Sie alle kritischen Punkte als Minimum, Maximum oder Wendepunkt.
  - iv) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten der Funktion.
  - v) Bestimmen Sie alle Asymptoten der Funktion.
  - vi) Bestimmen Sie den Wertebereich der Funktion.
  - vii) Skizzieren Sie die Funktion.
- 

### Ergebnisse zu Aufgabe 5.1:

Eine Abschätzung des Restglieds ist

$$R(x; 1) \leq \frac{1}{3}.$$

### Ergebnisse zu Aufgabe 5.2:

Die Differenz ist

$$d(0) = \frac{3 \sin(1)}{2} - \cos(1).$$

### Ergebnisse zu Aufgabe 5.3:

- i)  $T_4(x) = x - 2x^3/3$ , ii)  $T_4(x) = -(x - \pi/2) + 1/6 \cdot (x - \pi/2)^3$
- iii)  $T_2(x) = -1 + (x - 1) + 1/2 \cdot (x - 1)^2$

### Ergebnisse zu Aufgabe 5.4:

### Ergebnisse zu Aufgabe 5.5:

$D(f) = [-4, 4]$ ,  $f$  ist ungerade, Nullstellen:  $x = 0, \pm 4$ , Extrema bei  $x = \pm 2\sqrt{2}$ , Wendepunkt bei  $x = 0$

### Ergebnisse zu Aufgabe 5.6:

- a) ii)  $0, -3$ , iii)  $-1, 3$ , iv)  $g(x) = -x - 4$