

Mathematik II/B (WI/ET)

Blatt 2

WT 2024

Grenzwerte, Folgen, Stetigkeit

---

Einführende Bemerkungen

- Vermeiden Sie die Verwendung von Taschenrechnern oder Online-Ressourcen.
- 

**Aufgabe 2.1: Grenzwertdefinition**

Bestimmen Sie zu den unten angegebenen Folgen  $(a_n)$  mit dem Grenzwert  $a$  und die angegebenen Werte für  $k$  jeweils ein  $N$  so, dass für alle  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n > N$  gilt

$$|a_n - a| < 10^{-k}.$$

- a)  $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}, a = 0, k = 2$
- b)  $a_n = \frac{3n+1}{n+1}, a = 3, k = 4$
- c)  $a_n = \frac{(-1)^n}{n!} + 1, a = 1, k = 3$

**Aufgabe 2.2:**

- a) Zeigen Sie anhand der Definition der Konvergenz, dass gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + n - 12}{n^2 - 8} = 2.$$

- b) Zeigen Sie: Konvergiert  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  gegen  $a$ , so konvergiert auch  $\{|a_n|\}_{n \in \mathbb{N}}$  gegen  $|a|$ .
- c) Gilt die Umkehrung von b)? Begründen Sie Ihre Aussage mit einem Beweis oder einem Gegenbeispiel.

**Aufgabe 2.3: Grenzwerte monotoner Folgen**

Es seien  $a_1 = \sqrt{2}$  und  $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$  für  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Überprüfen Sie,

- a) dass  $(a_n)$  beschränkt ist,
- b) dass  $(a_n)$  monoton wächst und
- c) gegen die größte Lösung der Gleichung  $x^2 - x - 2 = 0$  konvergiert.

**Aufgabe 2.4: Funktionenlimes**

- a) Gegeben sei die Funktion

$$f(x) := \frac{x^3 + |x+1| + \operatorname{sign}(x+1)}{\operatorname{sign} x}, \quad x \in D(f) := \mathbb{R}.$$

Bestimmen Sie  $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0-} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow (-1)+} f(x)$  und  $\lim_{x \rightarrow (-1)-} f(x)$ .

- b) Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \frac{\sinh x}{\cosh(ax)}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Bestimmen Sie  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$ .

**Hinweise:**

- Mit der zunächst als bekannt vorausgesetzten Exponentialfunktion  $e^x$  gilt

$$\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{und} \quad \cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

- Die Signum-Funktion liefert das Vorzeichen des Argumentes:

$$\operatorname{sign}(z) = \begin{cases} +1 & , z \geq 0 \\ -1 & , z < 0 \end{cases}$$

### Aufgabe 2.5: Grenzwert Analyse - Definition

- a) Notieren Sie die Definition des Grenzwertes und zeigen Sie, dass die Folge  $a_n = \frac{1}{n}$  gegen den Grenzwert  $a = 0$  konvergiert.  
(Dies ist gleichbedeutend mit dem Nachweis, dass  $\forall k \in \mathbb{N}$  eine Zahl  $N \in \mathbb{R}$  existiert, so dass für alle  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n > N$  gilt:  $|a_n - a| < 10^{-k}$ ).
- b) Berechnen Sie den Grenzwert  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  der untenstehenden Folgen und dokumentieren Sie die Rechenregel, die Sie zur Berechnung des Grenzwertes verwendet haben (Produktregel, Einschließungssatz, Produkt beschränkter Folgen, Produkt von Nullfolgen etc).

i)  $a_n = \frac{n^2 + 5n}{3n^2 + 1}$       ii)  $a_n = \log_{10}(10n^2 - 2n) - \log_{10}(n^2 + 1)$

iii)  $a_n = \frac{(n+1)!}{n! - (n+1)!}$       iv)  $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3n}$

v)  $a_n = \frac{\cos n}{n}$       vi)  $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

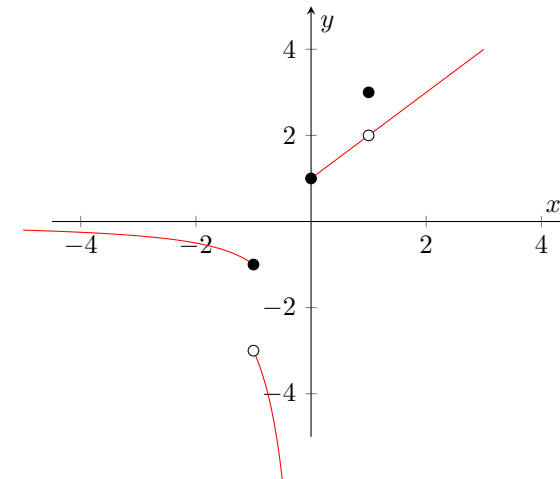
vii)  $a_n = \frac{2^n}{n!}$

### Aufgabe 2.6: Stetigkeit

Betrachten Sie die Funktion  $y = f(x)$  mit

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{für } x \in (-\infty, -1], \\ \frac{3}{x} & \text{für } x \in (-1, 0), \\ \frac{x^2-1}{x-1} & \text{für } x \in [0, 1) \cup (1, \infty), \\ 3 & \text{für } x = 1. \end{cases}$$

und deren Graphen



- a) Finden Sie alle Werte an denen die Funktion unstetig ist.
- b) Begründen Sie für jeden dieser Werte, weshalb die formale Definition der Stetigkeit verletzt ist.
- c) Klassifizieren Sie jede der Unstetigkeitsstellen als **Sprungstelle**, **hebbare Unstetigkeit** oder **Polstelle**.

### Ergebnisse zu Aufgabe 2.1:

a)  $N = 10000$ , b)  $N = 19999$ , c)  $N = 6$

### Ergebnisse zu Aufgabe 2.2:

c) Betrachten Sie  $a_n = (-1)^n$ .

### Ergebnisse zu Aufgabe 2.3:

a)/b) Es ist z. B.  $0 < a_n \leq 2$ .

### Ergebnisse zu Aufgabe 2.4:

a)  $\lim_{x \rightarrow 0 \pm} f(x) = \pm 2$ ,  $\lim_{x \rightarrow -1 \pm} f(x) = 1 \pm (-1)$

b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \begin{cases} 0, & |a| > 1 \\ 1, & |a| = 1 \\ \infty, & |a| < 1 \end{cases}$

**Ergebnisse zu Aufgabe 2.5:**

**b)**

**i)**  $a = \frac{1}{3}$

**ii)**  $a = 1$

**iii)**  $a = -1$

**iv)**  $a = e^3$

**v)**  $a = 0$

**vi)**  $a = 0$

**vii)**  $a = 0$