Helmut-Schmidt-Universität
Universität der Bundeswehr Hamburg
Fakultät für Maschinenbau

Prof. Dr. Thomas Carraro
Dr. Frank Gimbel

ISA: Ing. Studienkompetenzen — Blatt 1

WT 2022

Aufgabe 1.1: Mittelwertsatz

Sei $s(t)$ die Gesamtzahl der Kilometer, die Sie auf Ihrer Reise auf einer Autobahn mit einer Geschwindigkeitsbegrenzung von 120 km/h nach der Zeit t Stunden zurückgelegt haben. Nehmen Sie außerdem an, dass $s(1/4) = 10$ Kilometer und $s(5/4) = 160$ Kilometer beträgt. An einer Kontrollstelle entlang der Autobahn gestehen Sie diese Tatsachen einem Beamten der Autobahnpolizei, der mit dem Mittelwertsatz vertraut ist. Der Beamte führt ein paar schnelle Berechnungen durch, lächelt und bereitet sich dann höflich darauf vor, Ihnen einen Strafzettel auszustellen. Erklären Sie, warum.

Lösung 1.1:

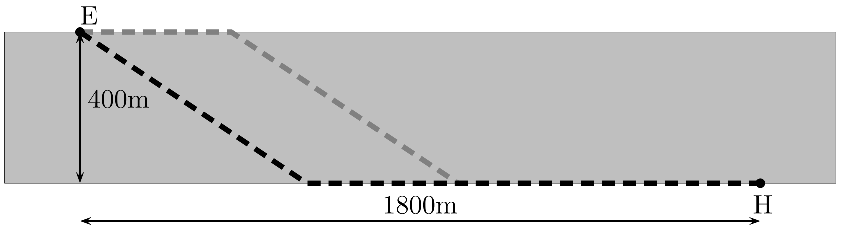
Wir wissen, dass $s(t)$ die Entfernung (Kilometer) zum Zeitpunkt t (Stunden) ist. Wir nehmen an, dass $s(t)$ differenzierbar ist, wobei $s'(t)$ die Geschwindigkeit (km/h) zum Zeitpunkt t (Std.) ist. Wenden wir den Mittelwertsatz auf die Funktion s auf dem geschlossenen Intervall $[1/4, 5/4]$ an. Dann

$$s'(\xi) = \frac{160 - 10}{5/4 - 1/4} = 150 \text{ km/h}.$$

Der Mittelwertsatz beweist, dass Ihre Geschwindigkeit zum unbekannten Zeitpunkt xi mit Sicherheit größer war als die zulässige Höchstgeschwindigkeit.

Aufgabe 1.2: Optimierungsaufgabe

Ein Elektrizitätswerk (E) liegt an einem 400 Meter breiten geradlinig verlaufenden Fluss. Es soll eine Leitung zu einem 1800 Meter flussabwärts auf der anderen Flussseite gelegenen Haus (H) verlegt werden.
Ein Meter Leitung zu Wasser kosten das dreifache eines Meters Leitung zu Land. Welche Leitungsführung verursacht die geringsten Kosten?



Lösung 1.2:

Der günstigse Weg der Leitung wird aus zwei geradlinigen Leiungsabschnitten bestehen, von denen einer längs des Flusses verläuft und einer den Fluss überquert. (Tatsächlich wird in diesem Modell auch eine Leitung aus drei Abschnitten, die nach einem geradlinigen Leitungsstück auf der Flussseite des E-Werkes den Fluss überquert und danach ein weiteres Stück auf der Uferseite des Hauses verläuft, dieselben Kosten verursachen.)
Die Kosten der zweigeteilten Leitungstrasse mit x Metern Strecke zu Land betragen:

$$K(x) = x + 3 \cdot \sqrt{400^2 + (1800 - x)^2}.$$

Diese Funktion muss minimiert werden, es soll also gelten:

$$\begin{aligned} & 0 = K'(x) = 1 + \frac{-3(1800 - x)}{\sqrt{400^2 + (1800 - x)^2}} \\ \Leftrightarrow \quad & 9(1800 - x)^2 = 400^2 + (1800 - x)^2 \\ \Leftrightarrow \quad & x = 1800 - \frac{400}{\sqrt{8}} = 200(9 - \frac{1}{\sqrt{2}}) \approx 1660 \end{aligned}$$

Der günstigste Weg verläuft also zu etwa 1660 Metern an Land und zu 420 Metern zu Wasser.

Aufgabe 1.3: Optimierungsaufgabe

Die Abmessungen einer Konservendose (Höhe H Dezimeter und Durchmesser D Dezimeter) mit einem Liter Inhalt sollen so bestimmt werden, dass der Blechverbrauch minimal wird.

a) Stellen Sie eine Formel für die benötigte Fläche an Blech (in Quadratdezimetern) auf, nehmen Sie dabei als benötigte Fläche ...

i) ... die tatsächlich verarbeitete Blechfläche $A_t(D,H)$ an (ohne Verschnitt).

ii) ... die insgesamt verbrauchte Fläche $A_v(D,H)$ an (inklusive einem jeweils quadratischen Blech für Deckel und Boden).

b) Eliminieren Sie in den Funktionen $A_*(D,H)$ unter Ausnutzung der Volumenformel eine der beiden Größen.

c) Bestimmen Sie für beide Funktionen die Werte, die zu minimalem Blechverbrauch führen.

Lösung 1.3:

a) **i)** $A_t(D,H)$ besteht aus der rechteckigen Fläche des Zylindermantels $\pi D \cdot H$ und zwei Kreisen für Boden und Deckel der Dose $\pi D^2/4$, insgesamt ergibt sich also

$$A_t(D,H) = \pi DH + 2\pi\frac{D^2}{4} = \pi D\left(H + \frac{D}{2}\right).$$

ii) Statt der Kreise werden nun Quadrate der Fläche D^2 benötigt und man erhält

$$A_v(D,H) = \pi DH + 2D^2 = D(\pi H + 2D).$$

b) Das Volumen der Dose ergibt sich zu

$$1 = \pi\frac{D^2}{4}\cdot H$$

und damit weiter $H_D = \frac{4}{\pi D^2}$. Eingesetzt hat man damit

$$\begin{aligned} A_t(D,H_D) =& \pi D\left(\frac{4}{\pi D^2} + \frac{D}{2}\right) = \frac{4}{D} + \frac{\pi D^2}{2} \\ A_v(D,H_D) =& D\left(\frac{4}{D^2} + 2D\right) = \frac{4}{D} + 2D^2. \end{aligned}$$

c) Die Minima der beiden Funktionen befinden sich an den Nullstellen der ersten Ableitung:

$$\begin{aligned} 0 =& A_t'(D) = -\frac{4}{D^2} + \pi D \\ \Rightarrow \qquad D =& \left(\frac{4}{\pi}\right)^{1/3}, \quad H_D = \frac{4}{\pi D^2} = \frac{4^{1/3}}{\pi^{1/3}} = D \\ 0 =& A_v'(D) = -\frac{4}{D} + 4D \\ \Rightarrow \qquad D =& 1, \quad H_D = \frac{4}{\pi D^2} = \frac{4}{\pi} \end{aligned}$$

Aufgabe 1.4: Optimierungsproblem

Ein Poster muss mit einer Gesamtfläche von $\bar{A} = 64000$ mm^2 gedruckt werden. Es muss 10 mm Seitenränder und 25 mm obere und untere Ränder haben. Welche Höhe und Breite ergeben die maximale Druckfläche?

Lösung 1.4:

Seien x und y die beiden Dimensionen des Plakats und s die Seitenränder und t die oberen und unteren Ränder. Die Gesamtfläche ist $\bar{A} = 64000$ mm^2 $= xy$ mm^2. Die gedruckte Fläche beträgt

$$
\begin{aligned}
A(x) &= (x-2s)(y-2t) \\
&= (x-2s)\left(\frac{\bar{A}}{x} - 2t\right) \quad \text{(unter Verwendung der Nebenbedingung der Gesamtfläche)} \\
&= \bar{A} - \frac{2s}{x}\bar{A} - 2tx + 4st \text{ mm}^2.
\end{aligned}
$$

Um die Fläche zu maximieren, suchen wir die stationären Punkte:

$$A'(x) = 2s\bar{A}\frac{1}{x^2} - 2t.$$

Die stationären Punkte sind:

$$x_c = \pm\sqrt{\frac{s\bar{A}}{t}}.$$

Nur der positive Wert ist sinnvoll, da wir nach physikalischen Größen suchen. Die zweite Ableitung ist

$$A''(x) = -\frac{4s\bar{A}}{x^3}$$

die in x_c negativ ist. Daher ist x_c ein lokales Maximum. Wir haben also

$$x_c = 160 \text{ mm}$$

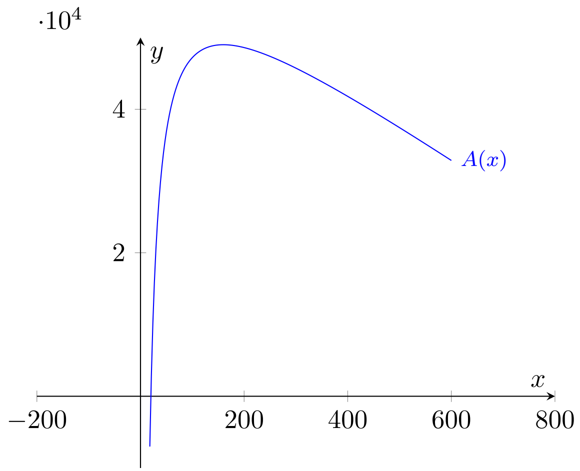
und

$$y_c = \frac{\bar{A}}{x_c} = 400 \text{ mm}.$$

Die maximale Druckfläche beträgt

$$A_{\max} = x_c\, y_c = 32000 \text{ mm}^2.$$

Der Graph der Fläche $A(x)$ ist



Aufgabe 1.5: Lineare Gleichungssysteme

Infolge eines Lecks wurde der Pumpenraum eines Schiffes vollständig geflutet. Bewerten Sie die resultierende Veränderung der Schwimmlage, in dem Sie die Änderung in Tiefgang T, Krängungswinkel ϕ und Trimmwinkel ψ berechnen.
Die Flutung des Pumpenraums bedeutet für das Schiff dabei eine zusätzliche Gewichtslast ΔF_g, sowie ein zusätzliches äußeres Krängungsmoment ΔM_ϕ und ein zusätzliches äußeres Trimmmoment ΔM_ψ. Der Zusammenhang zwischen Änderung im Tiefgang ΔT, Änderung im Krängungswinkel $\Delta\phi$ und Änderung im Trimmwinkel $\Delta\psi$ in Folge dieser Lasten kann über die folgenden Gleichungen beschrieben werden

$$
\begin{aligned}
\rho g\, A_w\, \Delta T \;+\; \rho g\, (A_w y_w)\, \Delta\phi \;&=\; \Delta F_g, \\
\rho g\, (A_w y_w)\, \Delta T \;+\; D\, (\frac{I_{w,xx}\, \rho g}{D} + z_B - z_G)\, \Delta\phi, \;&=\; \Delta M_\phi \\
D\, (\frac{I_{w,yy}\, \rho g}{D} + z_B - z_G)\, \Delta\psi \;&=\; \Delta M_\psi.
\end{aligned}
$$

Bitte wenden!

Gehen Sie wie folgt vor:

a) Ersetzen Sie in den oben stehenden Gleichungen die Tiefgangsänderung ΔT durch die Variable x_1, die Änderung im Krängungswinkel $\Delta\phi$ durch die Variable x_2 und die Änderung im Trimmwinkel $\Delta\psi$ durch die Variable x_3.

b) Stellen Sie das dadurch definerte Lineare Gleichungssystem für die Variablen x_1, x_2 und x_3 in Matrix-Vektor-Schreibweise der Form

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \qquad \text{mit } \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ und } \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \Delta F_g \\ \Delta M_\phi \\ \Delta M_\psi \end{pmatrix}$$

dar.

c) Bringen Sie das Lineare Gleichungssystem vor dem Einsetzen der Werte in Zeilen-Stufenform.

d) Rechnen Sie alle Werte der Tab. 1 in das internationale Einheitensystem (m, N, s, kg usw.) um.

e) Setzen Sie, nach der Umrechnung in das internationale Einheitensystem, in die Zeilen-Stufenform die in Tab. 1 gegebenen Größen ein.

f) Lösen Sie das resultierende Lineare Gleichungssystem und bestimmen Sie die resultierende Änderung von Tiefgang ΔT, Krängungswinkel $\Delta\phi$ und Trimmwwinkel $\Delta\psi$.

ρ	Dichte von Seewasser	1025 $\left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right]$
g	Erdbeschleunigung	9.81 $\left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right]$
A_w	Wasserlinienfläche	4208 [m^2]
y_w	Schwerpunkt der Wasserlinienfläche in seitlicher Richtung y	-0.125 [m]
$I_{w,xx}$	Flächenträgheitsmoment der Wasserlinienfläche um Längenachse	680 000 [m^4]
$I_{w,yy}$	Flächenträgheitsmoment der Wasserlinienfläche um Seitenachse	10 500 000 [m^4]
z_B	Höhe des Verdrängungsschwerpunkt über Kiel	4.87 [m]
z_G	Höhe des Gewichtsschwerpunkt über Kiel	85.12 [m]
D	Verdrängung (= Gewicht) des Schiffes	21898.9 [t]
ΔF_g	Zusätzliche Gewichtslast durch Leck	1250 [kN]
ΔM_ϕ	Zusätzliches Krängungsmoment durch Leck	10000 [kNm]
ΔM_ψ	Zusätzliches Trimmmoment durch Leck	32000 [kNm]

Table 1: Charakteristische Schiffsgrößen

Lösung 1.5:

a) Ersetzen Sie in den oben stehenden Gleichungen die Tiefgangsänderung ΔT durch die Variable x_1, die Änderung im Krängungswinkel $\Delta\phi$ durch die Variable x_2 und die Änderung im Trimmwinkel $\Delta\psi$ durch die Variable x_3.

$$\begin{aligned} \rho g\, A_w\, x_1 \;+\; \rho g\,(A_w y_w)\, x_2 \;&=\; \Delta F_g \\ \rho g\,(A_w y_w)\, x_1 \;+\; D\,\Big(\frac{I_{w,xx}\,\rho g}{D} + z_B - z_G\Big)\, x_2 \;&=\; \Delta M_\phi \\ D\,\Big(\frac{I_{w,yy}\,\rho g}{D} + z_B - z_G\Big)\, x_3 \;&=\; \Delta M_\psi \end{aligned}$$

b) Darstellung in Matrix-Vektor Schreibweise:

$$\begin{pmatrix} \rho g\, A_w & \rho g\,(A_w y_w) & 0 \\ \rho g\,(A_w y_w) & D\,(\frac{I_{w,xx}\,\rho g}{D} + z_B - z_G) & 0 \\ 0 & 0 & D\,(\frac{I_{w,yy}\,\rho g}{D} + z_B - z_G) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta F_g \\ \Delta M_\phi \\ \Delta M_\psi \end{pmatrix}$$

c) Zeilen-Stufenform:

$$\begin{pmatrix} \rho g\, A_w & \rho g\,(A_w y_w) & 0 \\ 0 & D\,(\frac{I_{w,xx}\,\rho g}{D} + z_B - z_G) - \frac{\rho g\,(A_w y_w)}{\rho g\, A_w}\,\rho g\,(A_w y_w) & 0 \\ 0 & 0 & D\,(\frac{I_{w,yy}\,\rho g}{D} + z_B - z_G) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \Delta F_g \\ \Delta M_\phi - \frac{\rho g\,(A_w y_w)}{\rho g\, A_w}\,\Delta F_g \\ \Delta M_\psi \end{pmatrix}$$

Dies lässt sich vereinfachen zu

$$\begin{pmatrix} \rho g\, A_w & \rho g\,(A_w y_w) & 0 \\ 0 & D\,(\frac{I_{w,xx}\,\rho g}{D} + z_B - z_G) - \rho g\,(A_w y_w^2) & 0 \\ 0 & 0 & D\,(\frac{I_{w,yy}\,\rho g}{D} + z_B - z_G) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \Delta F_g \\ \Delta M_\phi - y_w\,\Delta F_g \\ \Delta M_\psi \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} \rho g\, A_w & \rho g\,(A_w y_w) & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta F_g \\ \frac{\Delta M_\phi - y_w\, \Delta F_g}{D\,(\frac{I_{w,xx}\,\rho g}{D} + z_B - z_G) - \rho g\,(A_w y_w^2)} \\ \frac{\Delta M_\psi}{D\,(\frac{I_{w,yy}\,\rho g}{D} + z_B - z_G)} \end{pmatrix}$$

d) Umrechnung in das internationale Einheitensystem

ρ	Dichte von Seewasser	1025 $\left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right]$
g	Erdbeschleunigung	9.81 $\left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right]$
A_w	Wasserlinienfläche	4208 [m^2]
y_w	Schwerpunkt der Wasserlinienfläche in seitlicher Richtung y	-0.125 [m]
$I_{w,xx}$	Flächenträgheitsmoment der Wasserlinienfläche um Längenachse	680 000 [m^4]
$I_{w,yy}$	Flächenträgheitsmoment der Wasserlinienfläche um Seitenachse	10 500 000 [m^4]
z_B	Höhe des Verdrängungsschwerpunkt über Kiel	4.87 [m]
z_G	Höhe des Gewichtsschwerpunkt über Kiel	85.12 [m]
D	Verdrängung (= Gewicht) des Schiffes	21 898 900 [kg]
ΔF_g	Zusätzliche Gewichtslast durch Leck	1 250 000 [N]
ΔM_ϕ	Zusätzliches Krängungsmoment durch Leck	10 000 000 [Nm]
ΔM_ψ	Zusätzliches Trimmmoment durch Leck	32 000 000 [Nm]

e) Nach Einsetzen der Werte aus Tab. 1:

$$\begin{pmatrix} 42312492[\text{N/m}] & -5289061.5[\text{N}] & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1250\,1000[\text{N}] \\ 0.002[\text{rad}] \\ 0.00031[\text{rad}] \end{pmatrix}$$

Als Lösung erhält man schließlich

$$\begin{pmatrix} \Delta T \\ \Delta\phi \\ \Delta\psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.03\text{m} \\ 0.11° \\ 0.035° \end{pmatrix}$$

Ergebnisse zu Aufgabe 1.2:

Die Gesamtlänge der Stromleitung beträgt ca. 2080 Meter.

Ergebnisse zu Aufgabe 1.3:

b) $A_t(D) = 4/D + \pi D^2/2$, $A_v(D) = 4/D + 2D^2$

Ergebnisse zu Aufgabe 1.4:

Die maximale Druckfläche beträgt: $A_{\text{max}} = 32000 \text{ mm}^2$.

Ergebnisse zu Aufgabe 1.5:

$$\begin{pmatrix} \Delta T \\ \Delta\phi \\ \Delta\psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.03 \\ 0.11 \\ 0.035 \end{pmatrix} \quad \begin{bmatrix} \text{m} \\ \text{radians} \\ \text{radians} \end{bmatrix}$$