Helmut-Schmidt-Universität
Universität der Bundeswehr Hamburg
Fakultät für Maschinenbau und Bauingenieurwesen

Prof. Dr. Thomas Carraro
M.Sc Janna Puderbach

Mathematik II **Blatt 1**

WT 2024 Definitheit, Ähnlichkeit, Umkehrfunktionen

Einführende Bemerkungen

- Vermeiden Sie die Verwendung von Taschenrechnern oder Online-Ressourcen.

Aufgabe 1.1: Lineare Abbildung im Komplexen

Gegeben ist die lineare Abbildung $\boldsymbol{L}: \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^3$ mit der Matrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1+\mathrm{i} & 1 & \mathrm{i} \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2\,\mathrm{i} & \mathrm{i} & 2\,\mathrm{i}-1 \end{pmatrix}$$

sowie der Vektor $\boldsymbol{b}_\lambda = (\lambda - \mathrm{i},\, 0,\, -2\,\mathrm{i})^\top$.

a) Geben Sie $\operatorname{Rang}(\boldsymbol{A})$ und Orthonormalbasen von $\operatorname{Bild}\boldsymbol{A}$ sowie $\operatorname{Kern}\boldsymbol{A}$ und $(\operatorname{Bild}\boldsymbol{A})^\perp$ an.

Hinweise:

- Der Orthogonalraum $\boldsymbol{U}^\perp$ eines Unterraumes $\boldsymbol{U} \subset \mathbb{C}^n$ enthält alle Vektoren, die senkrecht zu allen Vektoren aus $\boldsymbol{U}$ sind:

$$\boldsymbol{U}^\perp = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n |\ \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}\rangle = 0 \text{ für alle } \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{U}\}$$

- Im Komplexen gilt $(\operatorname{Bild}\boldsymbol{A})^\perp = \operatorname{Kern}(\boldsymbol{A}^*)$.

b) Für welche $\lambda \in \mathbb{C}$ ist $\boldsymbol{b}_\lambda \in \operatorname{Bild}\boldsymbol{A}$ enthalten?

c) Geben Sie für beliebige $\lambda \in \mathbb{C}$ eine Zerlegung von $\boldsymbol{b}_\lambda$ in Komponenten aus $\operatorname{Bild}\boldsymbol{A}$ und $(\operatorname{Bild}\boldsymbol{A})^\perp$ an.

d) Bestimmen Sie alle $\boldsymbol{x}_\lambda \in \mathbb{C}^4$, so dass $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_\lambda$ die orthogonale Projektion von $\boldsymbol{b}_\lambda$ auf $\operatorname{Bild}\boldsymbol{A}$ ist.

Aufgabe 1.2: Positive Definitheit

Welche der folgenden Matrizen ist positiv definit?

a) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, b) $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

c) $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ d) $\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1+\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$

Aufgabe 1.3: Determinanten

Bestimmen Sie die Determinante der folgenden Matrix mit Hilfe des Gauß'schen Algorithmus:

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 & 0 \\ -3 & -6 & -4 & 7 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & -5 & 2 \\ -3 & -8 & -2 & 7 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 1.4: Determinanten

Bestimmen Sie die Determinanten folgender Matrizen:

a) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 3 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, b) $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -7 & 8 & 3 \\ 3 & -4 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

c) $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & -1 \\ -5 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ d) $\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 7 & 7 \\ 4 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 1.5: Ähnlichkeitstransformation

Gegeben sind

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 6 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \; \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ -1 \end{pmatrix} \text{ und } \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \beta \\ -\beta \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie – wenn möglich – α und β so, dass $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ Eigenvektoren der Matrix $\boldsymbol{A}$ sind.

b) Berechnen Sie einen weiteren (linear unabhängigen) Eigenvektor nebst zugehörigem Eigenwert.

c) Bestimmen Sie orthogonale Matrizen $\boldsymbol{Q}_i$, sowie Diagonalmatrizen $\boldsymbol{D}_i$ $(i = 1, 2, 3)$, so dass gilt

$$\boldsymbol{D}_i = \boldsymbol{Q}_i^\top \boldsymbol{B}_i \boldsymbol{Q}_i, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Dabei sind $\boldsymbol{B}_1 = \boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}_2 = \boldsymbol{A}^{-1}$ und $\boldsymbol{B}_3 = \boldsymbol{A}^3$.

Aufgabe 1.6: Umkehrfunktion

Gegeben seien die folgenden Funktionen

i) $f_1(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$,

ii) $f_2(x) = \frac{1}{x^2-1}$,

iii) $f_3(x) = \sin(x)$,

iv) $f_4(x) = \tan(x)$.

a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich und den Wertebereich.

b) Bestimmen Sie die Einschränkung des Definitionsbereichs und Wertebereichs, so dass die Funktionen bijektiv sind. (Betrachten Sie, falls nötig, den Hauptzweig.)

c) Bestimmen Sie die inverse Funktion.

d) Skizzieren Sie die Funktion sowie deren inverse Funktion.

Aufgabe 1.7: Umkehrfunktion

Gegeben seien die folgenden Funktionen. Geben Sie den Definitionsbereich an (betrachten Sie dabei den Hauptwert der Funktion) und überprüfen Sie, ob die Funktionen invertierbar sind. Bestimmen Sie jeweils die inverse Funktion.

i) $f(x) = 2x - 1$.

ii) $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$.

iii) $f(x) = (x-1)^{\frac{1}{3}}$.

iv) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$.

v) $f(x) = \log_2(x+3)$.

vi) $f(x) = 2 + \mathrm{e}^{x-1}$.

vii) $f(x) = \arccos(x^{-2})$.

Ergebnisse zu Aufgabe 1.1:

a) $\mathrm{Rang}(\boldsymbol{A}) = 2$, $\mathrm{Bild}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{span}\{(1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})^\top,\ 1/\sqrt{8}(1-\mathrm{i},\ 2,\ \mathrm{i}-1)^\top\}$, $\mathrm{Kern}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{span}\{1/\sqrt{3}(\mathrm{i}, -1, 1, 0)^\top,\ 1/\sqrt{21}(2-\mathrm{i}, -2-\mathrm{i}, \mathrm{i}-1, 3)^\top\}$
b) $\boldsymbol{b}_{-i} \in \mathrm{Bild}(\boldsymbol{A})$

Ergebnisse zu Aufgabe 1.2:

$\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ sind nicht positiv definit, $\boldsymbol{C}$ ist positiv definit.

Ergebnisse zu Aufgabe 1.3:

a) $\det \boldsymbol{B} = -48$

Ergebnisse zu Aufgabe 1.4:

$\det \boldsymbol{A} = -160$, $\det \boldsymbol{B} = -6$, $\det \boldsymbol{C} = 40$, $\det \boldsymbol{D} = -2$

Ergebnisse zu Aufgabe 1.5:

b) $\lambda \in \{-2, 6\}$, $\boldsymbol{v}_1 = (1, 0, -1)^\top$, $\boldsymbol{v}_2 = (1, 0, 1)^\top$, $\boldsymbol{v}_3 = (0, 1, 0)^\top$

Ergebnisse zu Aufgabe 1.7:

i) $f^{-1}(x) = \dfrac{x+1}{2}$. **ii)** $f^{-1}(x) = x^3$. **iii)** $f^{-1}(x) = x^3 + 1$. **iv)** $f^{-1}(x) = \dfrac{x}{1-x}$. **v)** $f^{-1}(x) = 2^x - 3$. **vi)** $f^{-1}(x) = \ln(x-2) + 1$. **vii)** $f^{-1}(x) = \pm\dfrac{1}{\sqrt{\cos x}}$.