Helmut-Schmidt-Universität
Universität der Bundeswehr Hamburg
Fakultät für Maschinenbau

Prof. Dr. Thomas Carraro
Dr. Frank Gimbel
Janna Puderbach

Mathematik II **Blatt 8**

WT 2022 Differentialrechnung in $\mathbb{R}^n$

Einführende Bemerkungen

- Vermeiden Sie die Verwendung von Taschenrechnern oder Online-Ressourcen.
- Die mit einem Stern *) markierten (Teil-)Aufgaben entfallen in diesem Trimester. Stattdessen werden einzelne Online-Aufgaben im ILIAS-Kurs kenntlich gemacht, zu denen Sie dort Ihre Lösungswege zur Korrektur hochladen können.
- Die mit zwei Sternen **) markierten (Teil-)Aufgaben richten sich an Studierende, die die übrigen Aufgaben bereits gelöst haben und die Inhalte weiter vertiefen möchten.

Aufgabe 8.1: lokale Extrema in 3 Dimensionen

Gegeben sei die Funktion

$$f\,:\,\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\,:\,(x,y,z) \to \frac{2\,y^3}{3} + x^2 - 2\,xy + xz - x - z + 1\,.$$

Bestimmen Sie die stationären (kritischen) Punkte der Funktion und bestimmen Sie deren Charakteristik.
Hinweis: Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind praktisch nur numerisch zu bestimmen. Die Vorzeichen der Eigenwerte erhält man aber sehr leicht aus einer einfachen Kurvendiskussion oder Skizze.

Lösung 8.1:

Die stationären Punkte sind die Nullstellen des Gradienten

$$\mathbf{grad}\,f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x - 2y + z - 1 \\ 2y^2 - 2x \\ x - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aus der dritten Komponente folgt $x = 1$ und damit aus der zweiten $y = \pm 1$ und aus der ersten die zugehörigen z–Werte. Die stationären Punkte sind

$$\boldsymbol{p}_1 = (1,1,1)^\top \text{ und } \boldsymbol{p}_2 = (1,-1,-3)^\top\,.$$

Die Hesse–Matrix der Funktion f ist

$$\mathbf{H}_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 4\,y & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Für den Punkt $\boldsymbol{p}_1$ erhält man das charakteristische Polynom

$$P(\lambda) = \det\big(\mathbf{H}_f(1,1,1) - \lambda \boldsymbol{E}\big) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -2 & 1 \\ -2 & 4-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + 6\,\lambda^2 - 3\,\lambda - 4\,.$$

Dies Polynom hat keine glatten Nullstellen. Eine exakte Bestimmung könnte zum Beispiel mit dem Newton–Verfahren erfolgen.
Für die Frage nach der Charakteristik des stationären Punktes benötigt man aber nur die Vorzeichen, die leicht aus einer sehr groben Kurvendiskussion zu entnehmen sind. Mit

$$P(-1) = 6\,,\quad P(0) = -4\,,\quad P(2) = 6 \text{ und } P(t) \to -\infty \text{ für } t \to \infty$$

erhält man nach dem Zwischenwertsatz einen negativen und zwei positive Nullstellen, d. h. es handelt sich um einen Sattelpunkt.
Entsprechend erhält man für den zweiten stationären Punkt $\boldsymbol{p}_2$ das charakteristische Polynom

$$P(\lambda) = -\lambda^3 - 2\,\lambda^2 + 13\,\lambda + 4$$

Seine stationären Punkte liegen bei λ mit

$$0 \overset{!}{=} P'(\lambda) = -3\lambda^2 - 4\lambda + 13 \Leftrightarrow \lambda_\pm = \frac{-2 \pm \sqrt{43}}{3}.$$

Da gilt $\lim_{\lambda\to\infty} P(\lambda) = -\infty$ liegt bei $\lambda_+ > 0$ ein Maximum vor, dessen Wert wegen $P(0) = 4 > 0$ größer Null ist: $P(\lambda_+) > 0$. Rechts davon liegt eine Nullstelle des Polynoms. Aufgrund der Monotonie von P im Intervall $[\lambda_-, \lambda_+]$ liegen die weiteren Nullstellen im Negativen. Es handelt sich bei dem stationären Punkt also auch um einen Sattelpunkt.

Aufgabe 8.2: Extremwerte

a) Ermitteln Sie die kritischen Punkte der Funktion

$$f(x,y) = (1 + 2x - y)^2 + (2 - x + y)^2 + (1 + x - y)^2$$

und bestimmen Sie, ob es sich um Maxima, Minima oder Sattelpunkte handelt.

b) Ermitteln Sie ebenso die kritischen Punkte der Funktionen

$$\begin{aligned} g(x,y,z) =& x^2 + xz + y^2 \\ h(x,y) =& (y^2 - x^2)\mathrm{e}^{\frac{x^2+y^2}{2}} \end{aligned}$$

und bestimmen Sie, ob es sich um Maxima, Minima oder Sattelpunkte handelt.

Lösung 8.2:

a) Die kritischen Punkte sind die Nullstellen des Gradienten der Funktion f:

$$\begin{aligned} 0 \overset{!}{=} \nabla f(x,y) &= \begin{pmatrix} 4(1+2x-y) - 2(2-x+y) + 2(1+x-y) \\ -2(1+2x-y) + 2(2-x+y) - 2(1+x-y) \end{pmatrix} \\ &= \left(2 + 12x - 8y,\ -8x + 6y\right)^\top \\ \Rightarrow \qquad & x = -\frac{3}{2},\ y = -2. \end{aligned}$$

Die Hesse-Matrix der Funktion in diesem Punkt ist

$$\boldsymbol{H}_f = \begin{pmatrix} 12 & -8 \\ -8 & 6 \end{pmatrix}.$$

Ihre Eigenwerte ergeben sich als Nullstellen des charakteristischen Polynoms:

$$0 = (12-\lambda)(6-\lambda) - 64 = \lambda^2 - 2 \cdot 9\lambda + 8 \Rightarrow \lambda_{\pm} = 9 \pm \sqrt{73} > 0.$$

Sie sind beide positiv, also ist $\boldsymbol{H}_f$ positiv definit und im Punkt $(-3/2, -2)$ liegt ein lokales Minimum der Funktion f.

b) Gradient und Hesse-Matrix der Funktion g ergeben sich zu:

$$\begin{aligned} \nabla g(x,y,z) =& (2x+z,\ 2y,\ x)^\top \\ \boldsymbol{H}_g =& \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die einzige Nullstelle von ∇g liegt bei $(x,y,z)^\top = \mathbf{0}$.
Die Matrix $\boldsymbol{H}_g$ ist indefinit:

$$(1,0,0)\boldsymbol{H}_g \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2,\ (1,0,-2)\boldsymbol{H}_g \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = -2,$$

also hat die Funktion g im Ursprung einen Sattelpunkt.

Gradient und Hesse-Matrix der Funktion h sind

$$\begin{aligned} \nabla h(x,y) =& \mathrm{e}^{\frac{x^2+y^2}{2}} \begin{pmatrix} -2x + x(y^2-x^2) \\ 2y + y(y^2-x^2) \end{pmatrix} \\ \boldsymbol{H}_h =& \mathrm{e}^{\frac{x^2+y^2}{2}} \begin{pmatrix} -2 + y^2 - x^2 - 2x^2 - 2x^2 + x^2(y^2-x^2) & 2xy - 2xy + xy(y^2-x^2) \\ -2xy + 2xy + xy(y^2-x^2) & 2 + 3y^2 - x^2 + 2y^2 + y^2(y^2-x^2) \end{pmatrix} \\ =& \mathrm{e}^{\frac{x^2+y^2}{2}} \begin{pmatrix} -2 - 5x^2 + y^2 + x^2(y^2-x^2) & xy(y^2-x^2) \\ xy(y^2-x^2) & 2 + 5y^2 - x^2 + y^2(y^2-x^2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die kritischen Punkte sind Nullstellen von ∇h, für diese gilt:

$$\begin{aligned} & x(-2+y^2-x^2) = 0 \text{ und } y(2+y^2-x^2) = 0 \\ \Leftrightarrow \qquad & \left(x = 0 \text{ und } y = 0\right) \\ & \text{oder } \left(x = 0 \text{ und } 2 + y^2 - x^2 = 0\right) \\ & \text{oder } \left(-2 + y^2 - x^2 = 0 \text{ und } y = 0\right) \\ & \text{oder } \left(-2 + y^2 - x^2 = 0 \text{ und } 2 + y^2 - x^2 = 0\right) \\ \Leftrightarrow & (x,y)^\top = (0,0)^\top. \end{aligned}$$

Der einzige kritische Punkt ist also $(0,0)^\top$. Dort ist die Hesse-Matrix

$$H_h(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix ist indefinit, also handelt es sich um einen Sattelpunkt.

Aufgabe 8.3: Taylor–Entwicklung in 2 Dim.

Bestimmen Sie das Taylor-Polynom 2. Ordnung der Funktion

$$f(x,y) = \mathrm{e}^x \cos(\pi(x+2y))$$

um den Entwicklungspunkt $\boldsymbol{x}_0 = (1,-1)^\top$.

Lösung 8.3:

Die partiellen Ableitungen lauten:

$$\begin{aligned} f(x,y) =& \mathrm{e}^x \cdot \cos\big(\pi(x+2y)\big) \\ &\Rightarrow\ f(1,-1) = -\mathrm{e} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_x(x,y) =& \mathrm{e}^x \cdot \Big[\cos\big(\pi(x+2y)\big) - \pi \sin\big(\pi(x+2y)\big)\Big] \\ &\Rightarrow\ f_x(1,-1) = -\mathrm{e} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_y(x,y) =& -2\pi \cdot \mathrm{e}^x \cdot \sin\big(\pi(x+2y)\big) \\ &\Rightarrow\ f_y(1,-1) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) =& \mathrm{e}^x \Big[(1-\pi^2)\cos\big(\pi(x+2y)\big) - 2\pi \sin\big(\pi(x+2y)\big)\Big] \\ &\Rightarrow\ f_{xx}(1,-1) = \mathrm{e}\,(\pi^2-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{xy}(x,y) =& -2\pi \cdot \mathrm{e}^x \Big[\sin\big(\pi(x+2y)\big) + \pi \cos\big(\pi(x+2y)\big)\Big] \\ &\Rightarrow\ f_{xy}(1,-1) = 2\,\pi^2\,\mathrm{e} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{yy}(x,y) =& -4\,\pi^2 \cdot \mathrm{e}^x \cdot \cos\big(\pi(x+2y)\big) \\ &\Rightarrow\ f_{yy}(1,-1) = 4\,\pi^2\,\mathrm{e} \end{aligned}$$

Damit lautet das Taylorpolynom 2. Grades am Entwicklungspunkt $\boldsymbol{x}_0 = (1,-1)^\top$

$$T_2(x,y) = -\mathrm{e} - \mathrm{e}\,(x-1) + (\pi^2-1)\,\mathrm{e}\,\frac{(x-1)^2}{2} + 2\pi^2\,\mathrm{e}\,(x-1)(y+1) + 4\pi^2\,\mathrm{e}\,\frac{(y+1)^2}{2}\ .$$

Aufgabe 8.4: Online Aufgabe

Bearbeiten Sie die aktuelle Online-Aufgabe im ILIAS-Kurs.
Beachten Sie, dass Sie dort auch die Lösungswege zu einzelnen Aufgaben zur Korrektur hochladen können.

Aufgabe 8.5: Taylor–Entwicklung in 2 Dim.

Gegeben seien $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = \mathrm{e}^{xy} + x + y$ und $\boldsymbol{a} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom 2. Grades von f für den Entwicklungspunkt $(0,0)$.

b) Bestimmen Sie die Richtungsableitung $\partial_{\boldsymbol{a}} f$ von f in Richtung $\boldsymbol{a}$ im Punkt $(0,0)$.

Lösung 8.5:

a) Mit den partiellen Ableitungen

$$\begin{array}{rcll} f_x &=& y\,\mathrm{e}^{xy}+1 & \Rightarrow\ f_x(0,0) = 1\ , \\ f_y &=& x\,\mathrm{e}^{xy}+1 & \Rightarrow\ f_y(0,0) = 1\ , \\ f_{xx} &=& y^2\,\mathrm{e}^{xy} & \Rightarrow\ f_{xx}(0,0) = 0\ , \\ f_{xy} &=& xy\,\mathrm{e}^{xy} + \mathrm{e}^{xy} & \Rightarrow\ f_{xy}(0,0) = 1\ , \\ f_{yy} &=& x^2\,\mathrm{e}^{xy} & \Rightarrow\ f_{yy}(0,0) = 0 \end{array}$$

folgt

$$T_{f,2}(x,y) \;=\; 1 + x + y + \frac{2}{2}xy \;=\; 1 + x + y + xy\ .$$

b) Es ist

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{a}}(0,0) \;=\; \langle \nabla f(0,0), \boldsymbol{a}\rangle \;=\; f_x(0,0)\cdot a_1 + f_y(0,0)\cdot a_2 \;=\; a_1 + a_2 \;=\; -\frac{1}{5}\ .$$

Aufgabe 8.6: Taylor–Polynom & Extrema in 2 Dimensionen

a) Berechnen Sie das Taylor–Polynom 2. Grades der Funktion $f(x,y) = (2x-3y)\cdot\sin(3x-2y)$ zum Entwicklungspunkt $\boldsymbol{x}_0 = (0,0)^{\mathrm{T}}$.

b) Ermitteln Sie die Extrema der Funktion $f(x,y) = 2x^3 - 3xy + 2y^3 - 3$.

Lösung 8.6:

a)

1.5$rclcrcr f = (2x-3y)\cdot\sin(3x-2y) f(0,0) = 0 f_x = 2\,\sin(3x-2y) + 3\,(2x-3y)\cdot\cos(3x-2y) f_x($

Damit erhält man für das gesuche Taylor–Polynom die Darstellung:

$$T_2(x,y) = 6\,x^2 - 13\,xy + 6\,y^2\ .$$

b) Die stationären Punkte erhält man aus

$$\begin{aligned} \mathbf{grad}\, f(x,y) &= c6\,x^2 - 3\,y \\ -3\,x + 6y^2 &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 2x^2 \\ -3x + 24x^4 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} y = 2x^2 \\ 3x\left(8x^3 - 1\right) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} y = 2x^2 \\ x = 0 \vee x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

zu $P_1 = (0,0)$ und $P_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.
Die Hesse–Matrix ist

$$\mathrm{Hess}_f(x,y) = cc12x - 3 - 312y.$$

Für $P_1 = (0,0)$ erhält man

$$\mathrm{Hess}_f(0,0) = rr0 - 3 - 30\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \det(\mathrm{Hess}_f(0,0)) = -9 < 0\,.$$

Damit haben die Eigenwerte verschiedene Vorzeichen und es handelt sich um einen Sattelpunkt.
Für $P_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ erhält man

$$\mathrm{Hess}_f\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right) = rr6 - 3 - 36\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \det((\mathrm{Hess}_f\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right)) = 27 > 0$$

sowie

$$f_{xx}\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right) = 6 > 0\,.$$

Damit sind beide Eigenwerte positiv und es handelt sich um ein Minimum.

Aufgabe 8.7*:

a) Entwickeln Sie die Funktion

$$f(x,y,z) = \cosh(x) + \mathrm{e}^{2\,xy} - \ln(-yz) + \frac{1}{y} + \frac{z}{2}$$

nach der Taylor'schen Formel um den Punkt $P = (0\,,\,-1\,,\,2)$ bis zu einschließlich zweiter Ordnung (ohne Restglied).

b) Bestimmen Sie die Taylor-Entwicklung 2. Grades um den Punkt $y_0 = \dfrac{4}{3}$ für die Umkehrfunktion $g^{-1}(y)$ von $g(x) = \dfrac{x^3}{3} + x$ (ohne Restglied).

Hinweis: Die Umkehrfunktion ist **nicht** explizit zu bestimmen!

c) Führen Sie zur Bestimmung einer Näherungslösung des Gleichungssystems

$$y = \mathrm{e}^{-x^2}\,, \quad y = -(x-1)^2 + 2$$

einen Iterationsschritt des **zweidimensionalen** Newton-Verfahrens mit dem Startvektor $(x_0, y_0) = (0,0)$ durch.

Lösung 8.7:

Lösung:

Zu a) Mit $\boldsymbol{x}_0 = (0\,,\,-1\,,\,2)^\top$ gilt:

$$\begin{array}{rcllrcl}
f &=& \cosh(x) + \mathrm{e}^{2\,xy} - \ln(-yz) + \dfrac{1}{y} + \dfrac{z}{2} & \Rightarrow & f(\boldsymbol{x}_0) &=& 2 - \ln(2)\,. \\
f_x &=& \sinh(x) + 2y\,\mathrm{e}^{2\,xy} & \Rightarrow & f_x(\boldsymbol{x}_0) &=& -2\,, \\
f_y &=& 2x\,\mathrm{e}^{2\,xy} - \dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{y^2} & \Rightarrow & f_y(\boldsymbol{x}_0) &=& 0\,, \\
f_z &=& -\dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{2} & \Rightarrow & f_z(\boldsymbol{x}_0) &=& 0\,, \\
f_{xx} &=& \cosh(x) + 4\,y^2\,\mathrm{e}^{2\,xy} & \Rightarrow & f_{xx}(\boldsymbol{x}_0) &=& 5\,, \\
f_{xy} &=& 4\,xy\,\mathrm{e}^{2\,xy} + 2\mathrm{e}^{2\,xy} & \Rightarrow & f_{xy}(\boldsymbol{x}_0) &=& 2\,, \\
f_{xz} &=& 0 & \Rightarrow & f_{xz}(\boldsymbol{x}_0) &=& 0\,, \\
f_{yy} &=& 4\,x^2\,\mathrm{e}^{2\,xy} + \dfrac{1}{y^2} + \dfrac{2}{y^3} & \Rightarrow & f_{yy}(\boldsymbol{x}_0) &=& -1\,, \\
f_{yz} &=& 0 & \Rightarrow & f_{yz}(\boldsymbol{x}_0) &=& 0\,, \\
f_{zz} &=& \dfrac{1}{z^2} & \Rightarrow & f_{yz}(\boldsymbol{x}_0) &=& \dfrac{1}{4}\,.
\end{array}$$

Damit lautet das Taylor–Polynom 2. Grades

$$\begin{aligned} T_2(x,y,z) =& 2 - \ln(2) - 2\,x + \frac{5}{2}\,x^2 + 2x(y+1) \\ & -\frac{1}{2}(y+1)^2 + \frac{1}{8}\,(z-2)^2\,. \end{aligned}$$

Zu b) Mit

$$g^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) = 1\,, \left(g^{-1}\right)'\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{1}{g'(1)} = \frac{1}{2}$$

und

$$(g^{-1})''\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{-g''(1)}{(g'(1))^3}=-\frac{1}{4}$$

folgt

$$T_2\left(y;\frac{4}{3}\right)=1+\frac{1}{2}\left(y-\frac{4}{3}\right)-\frac{1}{8}\left(y-\frac{4}{3}\right)^2.$$

Zu c) Für $\boldsymbol{F}(x,y)=(y-\mathrm{e}^{-x^2},y+(x-1)^2-2)^\top$ gilt

$$\boldsymbol{J_F}(x,y)=\begin{pmatrix}2x\mathrm{e}^{-x^2} & 1\\ 2(x-1) & 1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{J_F}(0,0)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -2 & 1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{F}}^{-1}(0,0)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}.$$

Das Newton-Verfahren liefert

$$\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{0}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\ -1\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}}.$$

Aufgabe 8.8*: Taylor-Entwicklung

a) Geben Sie zu der Funktion

$$f(x,y)=x\sin(xy)$$

die Taylor-Entwicklung ersten Grades $T_1(\boldsymbol{x})$ um den Punkt $\boldsymbol{x}_0=(1,0)^\top$ an.

b) Berechnen Sie $f(\boldsymbol{x})$ und $T_1(\boldsymbol{x})$ an der Stelle $\boldsymbol{x}=(0,1)^\top$. Berechnen Sie außerdem den Fehler der Taylor-Approximation $T_1(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x})$.

c) Geben Sie mit Hilfe des Lagrange-Restgliedes eine Abschätzung für den Fehler

$$|f(\boldsymbol{x})-T_1(\boldsymbol{x})|$$

an.

Hinweis: Für das Restglied erhalten Sie einen Ausdruck der Form

$$(3\theta-2)\cos(\theta^2-\theta)+\frac{1}{2}(3\theta^3-7\theta^2+5\theta-1)\cos(\theta^2-\theta)$$

mit $0\le\theta\le 1$. Diesen Ausdruck können Sie abschätzen, indem Sie die Extrema der beiden Vorfaktoren ($3\theta-2$ und $\frac{1}{2}(3\theta^3-7\theta^2+5\theta-1)$) auf dem Intervall $[0,1]$ und eine obere Schranke der Kosinus- bzw. Sinus-Funktion bestimmen.

Lösung 8.8:

a) Der Wert der Funktion selbst sowie der der ersten Ableitung im Punkt $\boldsymbol{x}_0=(1,0)^\top$ sind:

$$\begin{aligned} f(x,y)&=x\sin(xy) &\Rightarrow\quad f(1,0)&=0\\ \nabla f(x,y)&=(\sin(xy)+xy\cos(xy),\, x^2\cos(xy))^\top &\Rightarrow\quad \nabla f(1,0)&=(0,\,1)^\top. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich die Taylor-Summe (mit $\boldsymbol{x}=(x,y)^\top$):

$$T_1(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x}_0)+\langle\nabla f(\boldsymbol{x}_0),\,(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\rangle=0+\left\langle(0,\,1)^\top,\,(x-1,\,y-0)^\top\right\rangle=y.$$

b) An der Stelle $\boldsymbol{x}=(0,1)^\top$ hat man dann

$$\begin{aligned} f(0,1)&=0\\ T_1(0,1)&=1\\ f(0,1)-T_1(0,1)&=-1. \end{aligned}$$

c) Die Lagrange-Darstellung des Fehlers ist

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x})-T_1(\boldsymbol{x})&=\frac{1}{2!}(\langle\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0,\,\nabla\rangle)^2 f(\boldsymbol{x}_0+\theta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0))\text{ mit }\theta\in[0,1]\\ \Rightarrow\qquad |f(\boldsymbol{x})-T_1(\boldsymbol{x})|&=\frac{1}{2}\left|(\langle(-1,1)^\top,\,\nabla\rangle)^2 f(1-\theta,\,\theta)\right|\\ &=\frac{1}{2}\left|\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)f(1-\theta,\theta)\right| \end{aligned}$$

Wir berechnen zunächst die zweiten partiellen Ableitungen von f:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)&=y\cos(xy)+y\cos(xy)-xy^2\sin(xy)=2y\cos(xy)-xy^2\sin(xy)\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)&=-x^3\sin(xy)\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)&=2x\cos(xy)-x^2y\sin(xy) \end{aligned}$$

und setzen ein:

$$\begin{aligned}
|f(\boldsymbol{x}) - T_1(\boldsymbol{x})| =& \frac{1}{2}\Big|2\theta\cos(\theta(1-\theta)) - (1-\theta)\theta^2\sin(\theta-\theta^2)+ \\
&- 2\big(2(1-\theta)\cos(\theta-\theta^2) - (1-\theta)^2\theta\sin(\theta-\theta^2)\big)+ \\
&- (1-\theta)^3\sin(\theta-\theta^2)\Big| \\
=& \frac{1}{2}\Big|(2\theta - 4(1-\theta))\cos(\theta-\theta^2)+ \\
&+ (1-\theta)(-\theta^2-2\theta^2+2\theta-1-\theta^2+2\theta)\sin(\theta-\theta^2)\Big| \\
\le& \frac{1}{2}\Big(2\cdot|3\theta-2||\cos(\theta-\theta^2)|+ \\
&+ |1-\theta|\cdot|-4\theta^2+4\theta-1|\cdot|\sin(\theta-\theta^2)|\Big)
\end{aligned}$$

Da sowohl Kosinus und Sinus als auch $1-\theta$ betraglich stets kleiner als 1 sind, müssen nur noch die Extrema von $|3\theta-2|$ und $|(1-\theta)\cdot(-4\theta^2+4\theta-1)| = |4\theta^3-8\theta^2+5\theta-1|$ auf dem Intervall $[0,1]$ ermittelt werden:
Das Maximum von $|3\theta-2|$ ist 2.
Das Maximum des zweiten Koeffizienten $\varphi(\theta) = 4\theta^3-8\theta^2+5\theta-1$ liegt entweder an den Intervallgrenzen $\theta=0$ oder $\theta=1$ oder an einem kritischen Punkt der Funktion, also an einer Nullstelle der Ableitung:

$$\begin{aligned}
0 \stackrel{!}{=}& \frac{d}{d\theta}(4\theta^3-8\theta^2+5\theta-1) = 12\theta^2-16\theta+5 \\
\Rightarrow \qquad \theta_{1,2} =& \frac{2}{3} \pm \sqrt{\frac{4}{9}-\frac{5}{12}} = \frac{2}{3} \pm \frac{1}{4} \in \left\{\frac{5}{12}, \frac{11}{12}\right\}.
\end{aligned}$$

Insgesamt ist also

$$\begin{aligned}
|\varphi(\theta)| \le& \max\{|\varphi(0)|, |\varphi(1)|, |\varphi(5/12)|, |\varphi(11/12)|\} \\
=& \max\{1,\, 0,\, 7/432,\, 25/432\} = 1.
\end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich so die Fehlerabschätzung:

$$|f(\boldsymbol{x}) - T_1(\boldsymbol{x})| \le \frac{1}{2}(2\cdot 2+1) = \frac{5}{2}.$$

Diese Abschätzung ist mehr als doppelt so groß wie der in Aufgabenteil **b)** ermittelte tatsächliche Fehler.

Aufgabe 8.9: Stationäre Punkte

Gegeben sei die Funktion

$$f(x,y) = ax^2 + 2xy + ay^2 - ax - ay$$

Bestimmen Sie diejenigen $a \in \mathbb{R}$, für welche die Funktion f relative Maxima, relative Minima und Sattelpunkte besitzt und geben Sie diese an.

Lösung 8.9:

In stationären Punkten muss der Gradient der Funktion Null werden:

$$\mathbf{0} = \nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2ax+2y-a \\ 2x+2ay-a \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rr|r|l}
2a & 2 & a & \\
2 & 2a & a & \text{wir vertauschen die 1. und 2. Zeile} \\
\hline
2 & 2a & a & \\
2a & 2 & a & -a\cdot\ \text{1. Zeile} \\
\hline
2 & 2a & a & :2 \\
0 & 2-2a^2 & a & :(2-2a^2),\ \text{für } a^2 \neq 1 \\
\hline
1 & a & \frac{a}{2} & \\
0 & 1 & \frac{a(1-a)}{2(1-a^2)} &
\end{array}$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
y =& \frac{a(1-a)}{2(1+a)(1-a)} = \frac{a}{2(1+a)} \\
x =& \frac{a}{2} - a\cdot\frac{a}{2(1+a)} = \frac{a(1+a-a)}{2(1+a)} = \frac{a}{2(1+a)}.
\end{aligned}$$

Für $a \neq \pm 1$ liegt der einzige kritische Punkt der Funktion also bei

$$\boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} \frac{a}{2(1+a)} \\ \frac{a}{2(1+a)} \end{pmatrix}.$$

Für $a=+1$ hat das obige Gleichungssystem die Lösung $(t, \frac{1}{2}-t)$ $(t \in \mathbb{R})$.
Für $a=-1$ hat das Gleichungssystem keine Lösung und damit f keinen stationären Punkt.
Zur Charakterisierung der stationären Punkte benötigen wir die Hesse-Matrix:

$$\boldsymbol{H}_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2a & 2 \\ 2 & 2a \end{pmatrix}.$$

Ihre Determinante ist $\det(\boldsymbol{H}_f) = 4(a^2-1)$. Wir unterscheiden zunächst die drei Fälle:

i) $-1 < a < 1$: Für die Determinante gilt $\det(\boldsymbol{H}_f) < 0$. Da die Determinante aus dem Produkt der Eigenwerte berechnet wird, folgt daraus, dass die Eigenwerte verschiedene Vorzeichen haben. $\boldsymbol{H}_f$ ist indefinit und $\boldsymbol{x}_0$ ist ein Sattelpunkt.

ii) $a < -1$: Für die Determinante gilt $\det(\boldsymbol{H}_f) > 0$. Daraus folgt, dass die Eigenwerte gleiches Vorzeichen haben. Da die Spur $\mathrm{Sp}(\boldsymbol{H}_f) = 4a$ in diesem Fall negativ ist, sind die beiden Eigenwerte negativ. Also ist $\boldsymbol{H}_f$ negativ definit und die Funktion f hat ein Maximum in $\boldsymbol{x}_0$.

iii) $1 < a$: Sowohl die Determinante, als auch die Spur sind positiv. Deswegen sind beide Eigenwerte positiv und bei $\boldsymbol{x}_0$ ist ein Minimum.

Für $a = 1$ gilt $\det(\boldsymbol{H}_f) = 0$, also ist mindestens ein Eigenwert gleich Null. In diesem Fall gilt

$$f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2 - x - y = (x + y)^2 - (x + y) = \left(x + y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}.$$

In allen stationäre Punkten $(t, \frac{1}{2} - t)^\top$ ist der quadratische Term $(x + y - \frac{1}{2})^2$ gleich Null, aber in allen anderen Punkten ist er positiv. Deshalb liegt in diesen stationären Punkten ein Minimum vor. Diese Punkte befinden sich auf einer Geraden, auf der f konstant ist.
Insgesamt besitzt die Funktion f also

- für $a < -1$ ein Maximum in $\boldsymbol{x}_0 = \frac{a}{2(1+a)}(1, 1)^\top$.
- für $a = -1$ keinen stationären Punkt.
- für $-1 < a < 1$ einen Sattelpunkt in $\boldsymbol{x}_0 = \frac{a}{2(1+a)}(1, 1)^\top$.
- für $a = 1$ die Minimalstellen $(t, \frac{1}{2} - t)^\top$, $t \in \mathbb{R}$.
- für $1 < a$ ein Minimum in $\boldsymbol{x}_0 = \frac{a}{2(1+a)}(1, 1)^\top$.

Ergebnisse zu Aufgabe 8.1:

$\boldsymbol{p}_1 = (1, 1, 1)^\top$, $\boldsymbol{p}_2 = (1, -1, -3)^\top$

Ergebnisse zu Aufgabe 8.2:

a) f: $(-3/2, -2)^\top$, g: $(0, 0, 0)^\top$, h: $(0, 0)^\top$

Ergebnisse zu Aufgabe 8.6:

$$T_2(x, y) = 6\,x^2 - 13\,xy + 6\,y^2\,.$$

Kritische Punkte: $P_1 = (0, 0)$ und $P_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Ergebnisse zu Aufgabe 8.8:

$T_1(x, y) = y$

Ergebnisse zu Aufgabe 8.9:

Für $a \neq \pm 1$ ist der stationäre Punkt $\frac{a}{2(1+a)}(1, 1)^\top$. Für $a = 1$ gibt es mehrere stationäre Punkte.