Helmut-Schmidt-Universität
Universität der Bundeswehr Hamburg
Fakultät für Maschinenbau und Bauingenieurwesen

Prof. Dr. Thomas Carraro
M.Sc Janna Puderbach

Mathematik III/B (WI/ET) — Blatt 12

FT 2024 — Integration

Einführende Bemerkungen

- Vermeiden Sie die Verwendung von Taschenrechnern oder Online-Ressourcen.

Aufgabe 12.1: Frühere Klausuraufgabe

a) Berechnen Sie die Integrale

$$I = \int_0^{\pi} (\sin x) \cdot \mathrm{e}^{2\cos x} \mathrm{d}x \qquad \text{und} \qquad J = \int_1^2 (t^3 - 2t)\mathrm{e}^{3t^2} \mathrm{d}t.$$

b) Berechnen Sie das Integral $\int_B \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, wobei B der Kreisring in der $(x,y)-$Ebene mit Mittelpunkt $(0,0)^\top$, Innenradius a und Außenradius b (mit $0<a<b$) ist.

c) Berechnen Sie das Integral

$$\iiint_D \mathrm{e}^{5z+3y+2x} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

über dem Gebiet $D = \left\{ (x,y,z)^\top \middle| x,y,z \geq 0 \text{ und } 5z+3y+2x \leq 2 \right\}$.

Aufgabe 12.2: Integration in Kugelkoordinaten

Gegeben sei das Rotationsellipsoid

$$E = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, x^2+4y^2+z^2 \leq 9 \right\}.$$

Man berechne das Integral $\int_B (x^2+y+z^2)\mathrm{d}(x,y,z)$ unter Verwendung von

a) Zylinderkoordinaten

b) an das Ellipsoid angepasste Kugelkoordinaten:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi\cos\psi \\ \frac{r}{2}\sin\varphi\cos\psi \\ r\sin\psi \end{pmatrix}.$$

Hinweis(zu **a)**): Verwenden Sie um die $y-$Achse rotationssymmetrische Zylinderkoordinaten

$$\boldsymbol{x}(r,\varphi,y) = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ y \\ r\sin(\varphi) \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 12.3: Integration in Kugelkoordinaten

Berechnen Sie

$$I = \iiint_B \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \mathrm{d}(x,y,z),$$

wobei B das Innere der Kugel $x^2+y^2+z^2+2Ry=0$ ist.

Hinweis: Verwenden Sie die Kugelkoordinaten

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sin\varphi\sin\theta \\ r\cos\theta \\ r\cos\varphi\sin\theta \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 12.4: Masse einer Halbkugel

Berechnen Sie die Masse einer Halbkugel mit Mittelpunkt $(0,0,0)^\top$, Radius $a>0$ sowie $z \geq 0$ und der Massendichte

$$\rho(x,y,z) = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Hinweis: Die Masse M eines Körpers K mit Massendichte $\rho(\boldsymbol{x})$ ergibt sich aus

$$M = \int_K \rho(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

Aufgabe 12.5: Volumenintegrale

Berechnen Sie
$$\int_V \frac{\mathrm{e}^{-x^2-y^2}}{1+z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
mit
$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ z \geq 0\}.$$

Hinweise:

- Es empfiehlt sich die Rechnung in Zylinderkoordinaten.
- Der Integrationsbereich ist unendlich groß. Dadurch treten uneigentliche Integrale auf.

Aufgabe 12.6: Schnittflächenberechnung

a) Gegeben sei ein Kreis $K \subset \mathbb{R}^2$ mit Radius $R = 1$ und Flächeninhalt $A = \pi$.

i) Welche Kantenlänge $2L$ hat ein Quadrat Q mit demselben Flächeninhalt $A = \pi$?

ii) Die Mittelpunkte beider Flächen (Kreis und Quadrat) befinden sich im Koordinatenursprung. Stellen Sie das Integral (inklusive Grenzen) zur Berechnung des Flächeninhaltes $A_{K\cap Q}$ der Schnittmenge $K \cap Q$ auf.

iii**) Berechnen Sie das Integral $A_{K\cap Q}$.

b) Gegeben sei nun eine Kugel $B \subset \mathbb{R}^3$ mit Radius $R = 1$ und Volumen $V = \dfrac{4\pi}{3}$.
Welche Kantenlänge $2L_3$ hat ein Würfel W mit demselben Volumen $V = \dfrac{4\pi}{3}$?
Berechnen Sie das Volumen der Schnittmenge $W \cap B$.

Aufgabe 12.7: Alte Klausuraufgabe

a) Berechnen Sie das Integral $\iint_D \frac{x^2}{y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, wobei D den von den Geraden $x = 2$, $y = x$ und der Hyperbel $xy = 1$ begrenzten Bereich des $\mathbb{R}^2$ bezeichne.

b) Gegeben sei der Körper
$$K = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 - z^2 \leq 1, \ -1 \leq z \leq 2\right\}.$$
Skizzieren Sie den Körper und berechnen Sie dessen Volumen.

Aufgabe 12.8: Parametrisierung von Integrationsbereichen

Gegeben seien die folgenden drei Körper im $\mathbb{R}^3$:

- ein Quader $Q = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 |\, 0 \leq x_1 \leq 1, \, 0 \leq x_2 \leq 1, \, -3 \leq x_3 \leq 3\}$
- eine Kugel $K = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 |\, \|\boldsymbol{x}\| \leq 1\}$
- ein Zylinder $Z = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 |\, x_1^2 + x_2^2 \leq 1, \ 0 \leq x_3 \leq 3\}$

Skizzieren und parametrisieren Sie die Schnittmenge eines jeden einzelnen dieser Körper mit den beiden folgenden Mengen:
$$M_1 = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 |\, 0 \leq \boldsymbol{x}_3\}, \; M_2 = \{\boldsymbol{x} |\, 3x_1 \leq x_3\}.$$
D. h. geben Sie die Integrationsgrenzen der zugehörigen Volumenintegrale über die Bereiche $Q \cap M_1$, $Q \cap M_2$, $K \cap M_1$, ... an.

Aufgabe 12.9: Zylinderkoordinaten

Skizzieren Sie den Körper K, der in Zylinderkoordinaten durch folgende Bedingungen charakterisiert wird:
$$\tilde{K} = \left\{(r,\varphi,z) |\, \varphi \leq 2\pi r \leq \sqrt{\varphi}, \, 0 \leq z \leq \frac{r\varphi}{2\pi}\right\}$$
Berechnen Sie das Volumen des Körpers K.

Aufgabe 12.10: Transformationsformel für Volumenintegrale

Berechnen Sie
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(x^2+y^2+z^2+1)^2}.$$
Hinweis: Integrieren Sie über eine Kugel K mit Radius R und lassen Sie dann R gegen unendlich wachsen.

Ergebnisse zu Aufgabe 12.1:

a) $I = \sinh(2)$, $J = \frac{\mathrm{e}^3}{18}(5\mathrm{e}^9 + 4)$, **b)** $\frac{2\pi(b^3-a^3)}{3}$, **c)** $\mathrm{e}\sinh(1)/6$

Ergebnisse zu Aufgabe 12.2:

$\frac{324\pi}{5}$

Ergebnisse zu Aufgabe 12.3:

$I = \frac{4\pi R^2}{3}$

Ergebnisse zu Aufgabe 12.4:

$M = 2\pi a^3/3$

Ergebnisse zu Aufgabe 12.5:

$V = \frac{\pi^2}{2}$.

Ergebnisse zu Aufgabe 12.6:

a) $L = \sqrt{\pi}/2$, $A_{K\cap Q} = 2\arcsin(L) - 2\arccos(L) + 4L\sqrt{1-L^2}$
b) $L_3 = \sqrt[3]{\pi/6}$, $V_{B\cap W} = \frac{\pi}{3}\left(3\sqrt[3]{36\pi} - 8 - \pi\right)$.

Ergebnisse zu Aufgabe 12.7:

a) $9/4$, b) 6π

Ergebnisse zu Aufgabe 12.9:

$\frac{1}{560\pi^4}$

Temporary page!

LaTeX was unable to guess the total number of pages correctly. As there was some unprocessed data that should have been added to the final page this extra page has been added to receive it.

If you rerun the document (without altering it) this surplus page will go away, because LaTeX now knows how many pages to expect for this document.