Helmut-Schmidt-Universität
Universität der Bundeswehr Hamburg
Fakultät für Maschinenbau und Bauingenieurwesen

Prof. Dr. Thomas Carraro
Dr. Ulrike Kochan-Eilers

Mathematik II/B (WI/ET) — Blatt 3

WT 2025 — Grenzwerte, Stetigkeit, Ableitungen

Einführende Bemerkungen

- Vermeiden Sie die Verwendung von Taschenrechnern oder Online-Ressourcen.

Aufgabe 3.1: Funktionenlimes

a) Gegeben sei die Funktion

$$f(x) := \frac{x^3 + |x+1| + \operatorname{sign}(x+1)}{\operatorname{sign} x}, \; x \in D(f) := \mathbb{R}\,.$$

Bestimmen Sie $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to(-1)+} f(x)$ und $\lim\limits_{x\to(-1)-} f(x)$.

b) Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \frac{\sinh x}{\cosh(ax)}\,, \quad a \in \mathbb{R}\,.$$

Bestimmen Sie $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$.
Hinweise:
- Mit der zunächst als bekannt vorausgesetzten Exponentialfunktion e^x gilt

$$\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \text{und} \qquad \cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

- Die Signum-Funktion liefert das Vorzeichen des Argumentes:

$$\operatorname{sign}(z) = \begin{cases} +1 & , z \geq 0 \\ -1 & , z < 0 \end{cases}$$

Aufgabe 3.2: Differentiation

a) Geben Sie die Konstanten b, c, $d \in \mathbb{R}$ an, damit die Funktion

$$g(x) = \begin{cases} bx^3 + cx^2 + d & \text{für } x \leq 1 \\ \ln x & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

auf $\mathbb{R}$ zweimal differenzierbar ist.
Ist $g(x)$ für diese Wahl auch dreimal differenzierbar?

b) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x\sin(1/x) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

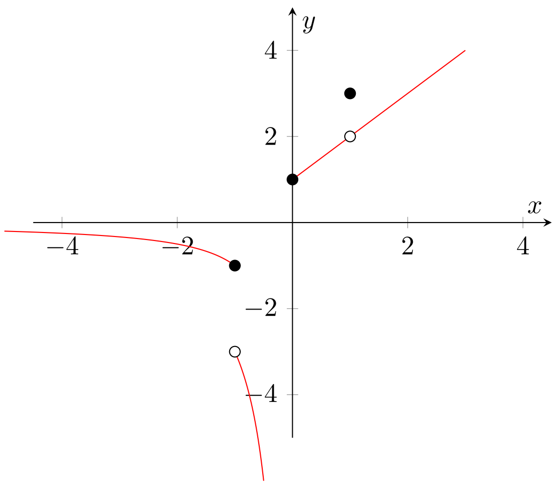
in $x = 0$ stetig ist, aber *nicht* differenzierbar.
Hinweis: Betrachten Sie zur Untersuchung der Differenzierbarkeit die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n = \frac{1}{n\pi + \pi/2}$.

Aufgabe 3.3: Stetigkeit

Betrachten Sie die Funktion $y = f(x)$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{für } x \in (-\infty, -1], \\ \frac{3}{x} & \text{für } x \in (-1, 0), \\ \frac{x^2-1}{x-1} & \text{für } x \in [0,1) \cup (1, \infty), \\ 3 & \text{für } x = 1. \end{cases}$$

und deren Graphen



a) Finden Sie alle Werte an denen die Funktion unstetig ist.

b) Begründen Sie für jeden dieser Werte, weshalb die formale Definition der Stetigkeit verletzt ist.

c) Klassifizieren Sie jede der Untetigkeitsstellen als **Sprungstelle**, **hebbare Unstetigkeit** oder **Polstelle**.

Aufgabe 3.4: Stetige Fortsetzung

a) Untersuchen Sie, ob die folgenden reellen Funktionen im Punkt $x = 0$ stetig sind oder stetig fortgesetzt werden können.

$$f_1(x) = |x|, \qquad f_2(x) = \frac{x}{|x|}, \qquad f_3(x) = \frac{x^3}{|x|}, \qquad f_4(x) = \frac{x^2}{|x|^2}$$

b) Bestimmen Sie die Definitionslücken der Funktion

$$g(x) = \frac{2x^3 - 12x^2 + 18x}{x^3 - 9x}$$

In welchen dieser Lücken ist die Funktion stetig fortsetzbar?

Aufgabe 3.5: Grenzwerte monotoner Folgen

Es seien $a_1 = \sqrt{2}$ und $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$. Zeigen Sie,

a) dass (a_n) beschränkt ist,

b) dass (a_n) monoton wächst und

c) gegen die größte Lösung der Gleichung $x^2 - x - 2 = 0$ konvergiert.

Aufgabe 3.6: Kurven im $\mathbb{R}^n$

Ein Satellit bewege sich auf der Bahn

$$\boldsymbol{r}(t) = \left(\sqrt{1 + t^2},\, 3t\right)^\top$$

.

a) Berechnen Sie die Geschwindigkeit $\dot{\boldsymbol{r}}(t)$ des Satelliten.

b) Geben Sie die Grenzwerte (für $t \to +\infty$ und für $t \to -\infty$) der Bahnrichtung r_2/r_1 und Geschwindigkeit $\dot{\boldsymbol{r}}$ des Satelliten an.

Ergebnisse zu Aufgabe 3.1:

a) $\lim\limits_{x \to 0\pm} f(x) = \pm 2$, $\lim\limits_{x \to -1\pm} f(x) = 1 \pm (-1)$

b) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \begin{cases} 0, & |a| > 1 \\ 1, & |a| = 1 \\ \infty, & |a| < 1 \end{cases}$

Ergebnisse zu Aufgabe 3.2:

a) $b = -\frac{2}{3}$, $c = \frac{3}{2}$, $d = -\frac{5}{6}$

Ergebnisse zu Aufgabe 3.4:

a) stetig, nicht stetig fortsetzbar, stetig fortsetzbar, stetig fortsetzbar
b) g ist stetig forstetzbar in 0 und +3 und nicht stetig fortsetzbar in -3.

Ergebnisse zu Aufgabe 3.5:

a)/b) Es ist z. B. $0 < a_n \leq 2$.

Ergebnisse zu Aufgabe 3.6:

$\lim\limits_{t \to \infty} \frac{r_2(t)}{r_1(t)} = 3$, $\lim\limits_{t \to \pm\infty} \dot{\boldsymbol{r}}(t) = (\pm 1, 3)^\top$