

Mathematik II/B (WI/ET)

Blatt 11

WT 2024 Stationäre Punkte, Newton-Verfahren, Richtungsableitung

Einführende Bemerkungen

- Vermeiden Sie die Verwendung von Taschenrechnern oder Online-Ressourcen.

Aufgabe 11.1: alte Klausuraufgabe

Gegeben sei die Funktion

$$g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \text{mit } g(x, y) = (y - x^2)(y - 2x^2).$$

- Zeigen Sie, dass die Funktion $g(x, y)$ auf allen Geraden durch den Ursprung $(0, 0)$ lokale Minima hat.
- Hat die Funktion $g(x, y)$ im Ursprung ein lokales Minimum?
Hinweis: Untersuchen Sie die Funktion längs der Kurve $\mathbf{q}(t) = (t, 3t^2/2)^\top$.
- Berechnen Sie das Taylor-Polynom zweiten Grades der Funktion $g(x, y)$ im Punkt $(1, 1)$.

Aufgabe 11.2: Taylor-Polynom & Extrema in 2 Dimensionen

- Berechnen Sie das Taylor-Polynom 2. Grades der Funktion $f(x, y) = (2x - 3y) \cdot \sin(3x - 2y)$ zum Entwicklungspunkt $\mathbf{x}_0 = (0, 0)^\top$.
- Ermitteln Sie die Extrema der Funktion $f(x, y) = 2x^3 - 3xy + 2y^3 - 3$.

Aufgabe 11.3: Bereichsintegrale

Berechnen Sie

a) $I := \int_D x^2 y + x \, dx$ mit $D := [-2, 2] \times [1, 3]$.

b) $J := \int_G x d(x, y)$ mit dem durch die Kurven

$$x = 0, y = 2x \text{ und } y = \frac{1}{a}x^2 + a, \quad a > 0$$

berandeten Flächenstück G .

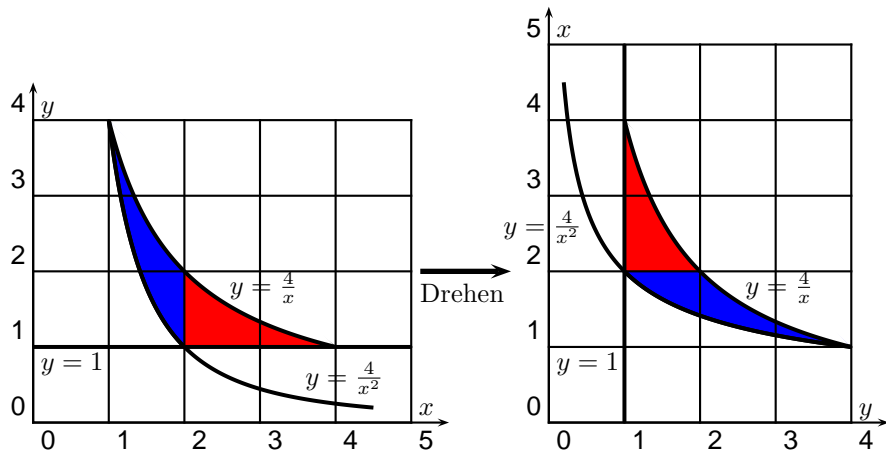
c) Betrachten Sie das zweifache Integral

$$I := \int_{x=1}^2 \int_{y=4/x^2}^{4/x} xy^2 e^{x^2 y^2/4} dy dx + \int_{x=2}^4 \int_{y=1}^{4/x} xy^2 e^{x^2 y^2/4} dy dx.$$

- Skizzieren Sie den Integrationsbereich und vertauschen Sie die Integrationsreihenfolge.
- Berechnen Sie das Integral.

Hinweis: zu c) Die Integrationsbereiche B_1 und B_2 beider Einzelintegrale sind in folgender Skizze blau und rot markiert. Die y -Grenzen hängen von x ab und speziell die untere y -Grenze wird für beide Bereiche durch unterschiedliche Funktion beschrieben. ($y = \frac{4}{x^2}$ und $y = 1$)

Das Ändern der Integrationsreihenfolge entspricht dem Drehen der Skizze (rechts). Nun werden die Ober und Untergrenzen für x in beiden Integrationsbereichen von der jeweils selben Funktion (y -abhängig) beschrieben. Daher kann man nun beide Integrale zusammenfassen.



Aufgabe 11.4: Newton-Verfahren

Zur Berechnung eines kritischen Punktes der Funktion

$$f(x, y) = \int_0^x \left(\frac{\sin(\pi t)}{\pi t} - \frac{1}{3} \right) dt + \frac{1}{\pi^2} \sin\left(\pi \frac{x}{y}\right)$$

soll das Newton-Verfahren angewandt werden. Bestimmen Sie mit Hilfe eines Schrittes des Newton-Verfahrens eine Näherung für einen kritischen Punkt von f in der Nähe von $(1, 2)$.

Hinweis: Es gibt keine geschlossene Darstellung des Integrals.

Aufgabe 11.5: Taylor-Entwicklung in 2 Dim.

Gegeben seien $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = e^{xy} + x + y$ und $\mathbf{a} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

- Bestimmen Sie das Taylorpolynom 2. Grades von f für den Entwicklungspunkt $(0, 0)$.
- Bestimmen Sie die Richtungsableitung $\partial_{\mathbf{a}} f$ von f in Richtung \mathbf{a} im Punkt $(0, 0)$.

Aufgabe 11.6: Schwerpunkt und Trägheitsmoment einer Kreisscheibe

Gegeben sei die Kreisscheibe

$$K = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \|\mathbf{x} - (0, 2)^\top\|_2 \leq 2\}$$

mit der Massendichte $\rho(x, y) = x^2 + 4$.

- Berechnen Sie die Masse $M = \int_K \rho(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ der Kreisscheibe. Führen Sie die Rechnung in kartesischen Koordinaten durch.
- Berechnen Sie ebenso den Schwerpunkt

$$\mathbf{s} = \frac{1}{M} \int_K \rho(\mathbf{x}) \mathbf{x} d\mathbf{x}.$$

Führen Sie die Rechnung in den verschobenen Polarkoordinaten $\mathbf{x}(r, \varphi) = (r \cos \varphi, 2 + r \sin \varphi)^\top$ aus.

- Berechnen Sie das Trägheitsmoment bezüglich der x -Achse

$$\Theta_y = \int_K \rho(x, y) y^2 d(x, y).$$

Aufgabe 11.7: Bereichsintegrale

Gegeben sei das Doppelintegral

$$I := \int_{-1}^1 \int_{y-1}^{1-y} \frac{y+x^3}{4} dx dy.$$

- Skizzieren Sie den von den Grenzen beschriebenen Teilbereich der x - y -Ebene.
- Berechnen Sie das Integral.

Aufgabe 11.8: Kegelvolumen

Gegeben sei ein Kegel als

$$K = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : z = +\sqrt{x^2 + y^2} \right\}$$

der durch

$$z = +\sqrt{x^2 + y^2}$$

eingeschlossen ist.

- Bestimmen Sie das Volumen des Kegels für $z = 2$ mittels Integration in Zylinderkoordinaten.
- Gegeben sei die Dichtefunktion

$$\rho(x, y, z) = x + 2y + z^2$$

Bestimmen Sie die Masse des Kegels.

Aufgabe 11.9:

Gegeben sei ein Kreisring

$$R = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq \|\mathbf{x}\| \leq 2\}$$

Weiterhin sei die Funktion

$$f(x, y) = e^{x^2+y^2} y^2$$

gegeben. Bestimmen Sie das Integral $I = \int_R f(x, y) d(x, y)$.

Ergebnisse zu Aufgabe 11.2:

$$T_2(x, y) = 6x^2 - 13xy + 6y^2.$$

Kritische Punkte: $P_1 = (0, 0)$ und $P_2 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Ergebnisse zu Aufgabe 11.3:

Zu a) $\frac{64}{3}$, **Zu b)** $\frac{1}{12}a^3$, **Zu c)** $4e^4 + 2e$

Ergebnisse zu Aufgabe 11.4:

$$f_x = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} - \frac{1}{3} + \frac{1}{\pi y} \cos\left(\pi \frac{x}{y}\right), f_y = \frac{-x}{\pi y^2} \cos\left(\pi \frac{x}{y}\right).$$

Ergebnisse zu Aufgabe 11.7:

$$I = -1/3.$$