Helmut-Schmidt-Universität
Universität der Bundeswehr Hamburg
Fakultät für Maschinenbau

Prof. Dr. Thomas Carraro
Dr. Frank Gimbel
Janna Puderbach

Mathematik II — Blatt 7

WT 2022 — Differentialrechnung in $\mathbb{R}^n$

Einführende Bemerkungen

- Vermeiden Sie die Verwendung von Taschenrechnern oder Online-Ressourcen.
- Die mit einem Stern *) markierten (Teil-)Aufgaben entfallen in diesem Trimester. Stattdessen werden einzelne Online-Aufgaben im ILIAS-Kurs kenntlich gemacht, zu denen Sie dort Ihre Lösungswege zur Korrektur hochladen können.
- Die mit zwei Sternen **) markierten (Teil-)Aufgaben richten sich an Studierende, die die übrigen Aufgaben bereits gelöst haben und die Inhalte weiter vertiefen möchten.

Aufgabe 7.1: Wegableitungen

Gegeben sind die Funktionen

$$f(x,y) = \mathrm{e}^x \cdot \sin y \text{ und } \boldsymbol{g}(t) = (t^3,\, 1+t^2)^\top$$

aus denen sich die Funktion $h(t) = f(\boldsymbol{g}(t))$ ergibt.

a) Berechnen Sie $h'(t)$ durch explizites Einsetzen und anschließendes (eindimensionales) Ableiten nach t.

b) Berechnen Sie $h'(t)$ mit Hilfe der Kettenregel.

Lösung 7.1:

a)

$$\begin{aligned} h'(t) =& \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(f(t^3, 1+t^2)\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{e}^{t^3}\cdot \sin(1+t^2)\right) \\ =& 3t^2\mathrm{e}^{t^3}\cdot\sin(1+t^2) + \mathrm{e}^{t^3}\cdot 2t\cos(1+t^2) \\ =& \left(3t\sin(1+t^2) + 2\cos(1+t^2)\right) t\mathrm{e}^{t^3} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} h'(t) =& \left(\nabla f(\boldsymbol{g}(t))\right)^\top \boldsymbol{g}'(t) = \left(\mathrm{e}^{g_1(t)}\sin(g_2(t)),\, \mathrm{e}^{g_1(t)}\cos(g_2(t))\right)\begin{pmatrix}3t^2\\ 2t\end{pmatrix} \\ =& \mathrm{e}^{t^3}\sin(1+t^2)\cdot 3t^2 + \mathrm{e}^{t^3}\cos(1+t^2)\cdot 2t \\ =& (3t\sin(1+t^2) + 2\cos(1+t^2))t\mathrm{e}^{t^3} \end{aligned}$$

Aufgabe 7.2: Partielle Ableitungen

Bestimmen Sie zu jeder der folgenden Funktionen $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die ersten und zweiten Ableitungen

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_n} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_n\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_n\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} f(x,y) =& \mathrm{e}^{2xy^2} & g(x,y) =& x^2\sin(2x+y) \\ h(x,y) =& \sin(2x)\cos(3y) & k(x,y,z) =& xy^2z^3 \\ l(x,y) =& \frac{xy}{xy-1} \end{aligned}$$

Lösung 7.2:

$$\nabla f(x,y) = (2y^2 e^{2xy^2},\, 4xye^{2xy^2})^\top$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right) = \begin{pmatrix} 4y^4 e^{2xy^2} & (4y+8xy^3)e^{2xy^2} \\ (4y+8xy^3)e^{2xy^2} & (4x+16x^2y^2)e^{2xy^2} \end{pmatrix}$$

$$\nabla g(x,y) = (2x\sin(2x+y) + 2x^2\cos(2x+y),\, x^2\cos(2x+y))^\top$$

$$\left(\frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}\right) = \begin{pmatrix} 2\sin(2x+y) + 8x\cos(2x+y) - 4x^2\sin(2x+y) & \dots \\ 2x\cos(2x+y) - 2x^2\sin(2x+y) & \dots \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} \dots & 2x\cos(2x+y) - 2x^2\sin(2x+y) \\ \dots & -x^2\sin(2x+y) \end{matrix}\Bigg)$$

$$\nabla h(x,y) = (2\cos(2x)\cos(3y),\, -3\sin(2x)\sin(3y))^\top$$

$$\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j}\right) = \begin{pmatrix} -4\sin(2x)\cos(3y) & -6\cos(2x)\sin(3y) \\ -6\cos(2x)\sin(3y) & -9\sin(2x)\cos(3y) \end{pmatrix}$$

$$\nabla k(x,y,z) = (y^2z^3,\, 2xyz^3,\, 3xy^2z^2)^\top$$

$$\left(\frac{\partial^2 k}{\partial x_i \partial x_j}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 2yz^3 & 3y^2z^2 \\ 2yz^3 & 2xz^3 & 6xyz^2 \\ 3y^2z^2 & 6xyz^2 & 6xy^2z \end{pmatrix}$$

$$\nabla l(x,y) = \left(\frac{y(xy-1) - y\cdot xy}{(xy-1)^2},\, \frac{x(xy-1) - x\cdot xy}{(xy-1)^2}\right)^\top = \left(\frac{-y}{(xy-1)^2},\, \frac{-x}{(xy-1)^2}\right)^\top$$

$$\left(\frac{\partial^2 l}{\partial x_i \partial x_j}\right) = \begin{pmatrix} \frac{2y^2}{(xy-1)^3} & \frac{-(xy-1)^2 - (-y)\cdot 2(xy-1)\cdot x}{(xy-1)^4} \\ \frac{1+xy}{(xy-1)^3} & \frac{2x^2}{(xy-1)^3} \end{pmatrix} = \frac{1}{(xy-1)^3}\begin{pmatrix} 2y^2 & 1+xy \\ 1+xy & 2x^2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7.3: Äquipotentialfläche und Tangentialebene

Gegeben seien die Funktion $f(x,y,z) = y^2 - xz$ und der Punkt $\boldsymbol{p}_0 = (1,\, -2,\, 3)^\top$.

a) Bestimmen Sie die Äquipotentialfläche der Funktion f durch den Punkt $\boldsymbol{p}_0$:

$$\boldsymbol{F} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 | \quad f(x,y,z) = f(\boldsymbol{p}_0)\}.$$

Skizzieren Sie die Schnitte der Fläche $\boldsymbol{F}$ mit zur xy-Ebene parallelen Ebenen, d. h. für konstante z-Werte. (z. B. $z = 0\pm,\, 1\pm,\, 2\pm,\, 3\pm$ und $z \to \infty$)

b) Bestimmen Sie $\nabla f(\boldsymbol{p}_0)$.

c) Bestimmen Sie die Hessesche Normalform der Tangentialebene $\boldsymbol{E}$ an $\boldsymbol{F}$ im Punkt $\boldsymbol{p}_0$.

d) Bestimmen Sie den Abstand der Tangentialebene $\boldsymbol{E}$ zum kritischen Punkt der Funktion f.

Lösung 7.3:

a) Mit $f(\boldsymbol{p}_0) = 1$ ergibt sich die Äquipotentialfläche zu

$$\boldsymbol{F} = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \quad y^2 - xz = 1\right\}.$$

Für konstante z-Werte ergeben sich für die Schnittkurven Parabeln ($z \neq 0$):

$$x = \frac{y^2 - 1}{z},$$

während sich für $z = 0$ die Geraden $y = \pm 1$ ergeben:

b) Es ist

$$\nabla f(x,y,z) = (-z, 2y, -x)^\top \text{ und damit } \nabla f(\boldsymbol{p}_0) = (-3,\, -4,\, -1)^\top.$$

c) Die Ebene $\boldsymbol{E}$ hat den Normalenvektor $\nabla f(\boldsymbol{p}_0)$, dessen Normierung

$$\boldsymbol{n}_0 = \frac{1}{\sqrt{26}}\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ergibt und enthält den Punkt $\boldsymbol{p}_0$. Ihre Hessesche Normalform ist also

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E} &= \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 | \ \langle \boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}_0,\, \boldsymbol{n}_0 \rangle = 0\} \\ &= \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \left\langle \begin{pmatrix} x-1 \\ y+2 \\ z-3 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{26}}\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \right\}. \end{aligned}$$

d) Ein kritischer Punkt erfüllt die Bedingung $\nabla f(\boldsymbol{x}) = 0$. Damit ist $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ der einzige kritische Punkt. Der Abstand ergibt sich aus dem Skalarprodukt der Hesseschen Normalform:

$$d = |\langle \boldsymbol{0} - \boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{n}_0 \rangle| = \frac{1}{\sqrt{26}}|-2| = \sqrt{\frac{2}{13}}.$$

Aufgabe 7.4: alte Klausuraufgabe

Gegeben sei die Funktion

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad \text{mit } g(x,y) = (y - x^2)(y - 2x^2).$$

a) Zeigen Sie, dass die Funktion $g(x,y)$ auf allen Geraden durch den Ursprung $(0,0)$ lokale Minima hat.

b) Hat die Funktion $g(x,y)$ im Ursprung ein lokales Minimum?
Hinweis: Untersuchen Sie die Funktion längs der Kurve $\boldsymbol{q}(t) = (t, 3t^2/2)^\top$.

c) Berechnen Sie das Taylor-Polynom zweiten Grades der Funktion $g(x,y)$ im Punkt $(1,1)$.

Lösung 7.4:

a) Eine Gerade durch den Ursprung kann durch $\boldsymbol{k}(t) = (at, bt)^\top, \quad t \in \mathbb{R}$ parametrisiert werden. Der Funktionsverlauf längs dieser Geraden ist dann

$$\varphi(t) = g(\boldsymbol{k}(t)) = (bt - a^2t^2)(bt - 2a^2x^2) = 2a^4t^4 - 3a^2bt^3 + b^2t^2$$

mit $\varphi'(t) = 8a^4t^3 - 9a^2bt^2 + 2b^2t$ und $\varphi''(t) = 24a^4t^2 - 18a^2b^2t + 2b^2$.
Wegen $\varphi'(0) = 0$ und $\varphi''(0) = 2b^2 > 0$ liegt für $b \neq 0$ ein Minimum der Funktion im Ursprung vor.
Falls $b = 0$ und $a \neq 0$ ist, hat man $\varphi(t) = 2a^4x^4$. Auch diese Funktion hat im Ursprung ihr Minimum.

b) Nähert man sich dem Ursprung auf der Kurve $\boldsymbol{q}(t) = (t, 3t^2/2)^\top, \qquad t \in \mathbb{R}$, hat man

$$\psi(t) = g(\boldsymbol{q}(t)) = \left(\frac{3t^2}{2} - t^2\right)\left(\frac{3t^2}{2} - 2t^2\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) t^4 = -\frac{t^4}{4} < 0 \text{ für } t > 0.$$

In jeder Umgebung von $(0,0)^\top$ hat man also auch Funktionswerte $g(x,y) < 0$. Im Ursprung kann also kein Minimum vorliegen.

c) Wir benötigen die ersten beiden Ableitungen von $g(x,y)$:

$$\begin{aligned}
g(x,y) &= (y - x^2)(y - 2x^2) &&\Rightarrow & g(1,1) &= 0\\
\nabla g(x,y) &= \begin{pmatrix} -2x(y-2x^2) - 4x(y-x^2) \\ (y-2x^2) + (y-x^2) \end{pmatrix} &&\Rightarrow & \nabla g(1,1) &= \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\\
\boldsymbol{H}_g(x,y) &= \begin{pmatrix} -2y + 12x^2 - 4y + 12x^2 & -6x \\ -6x & 2 \end{pmatrix} &&\Rightarrow & \boldsymbol{H}_g(1,1) &= \begin{pmatrix} 18 & -6 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Das Taylorpolynom ist damit

$$\begin{aligned}
T_2(x,y) =& g(1,1) + \nabla g(1,1) \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(x-1, y-1)\boldsymbol{H}_g(1,1)\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix}\\
=& 2(x-1) - (y-1) + 9(x-1)^2 + (y-1)^2 - 6(x-1)(y-1).
\end{aligned}$$

Aufgabe 7.5: Partielle Ableitungen

Gegeben sei die Funktion

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Berechnen Sie $f_{xy}(x,y)$ für alle $(x,y)^\top \in \mathbb{R}^2$ und untersuchen Sie, wo

$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y)$$

gilt.
Sind die zweiten Ableitungen von f stetig in $(0,0)^\top$?
Hinweis: Berechnen Sie die Ableitungen im Ursprung $(0,0)^\top$ über die Grenzwert-Definition.

Lösung 7.5:

Für $(x,y)^\top \neq (0,0)^\top$ gilt

$$\begin{aligned}
f_x(x,y) =& \frac{(3x^2y - y^3)(x^2+y^2) - 2x(x^3y - y^3x)}{(x^2+y^2)^2}\\
=& \frac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2+y^2)^2}.
\end{aligned}$$

Wegen $f(x,y) = -f(y,x)$ gilt

$$f_y(x,y) = -\partial_1 f(y,x) = \frac{x^5 - 4y^2x^3 - y^4x}{(x^2+y^2)^2}.$$

Weiterhin gilt

$$\begin{aligned}
f_{xy}(x,y) =& \frac{(x^4 + 12x^2y^2 - 5y^4) \cdot (x^2+y^2)^2 - 2(x^2+y^2) \cdot 2y \cdot (x^4y + 4x^2y^3 - y^5)}{(x^2+y^2)^4}\\
=& \frac{x^6 + 9x^4y^2 - 9x^2y^4 - y^6}{(x^2+y^2)^3}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} f_{yx}(x,y) =& \frac{\partial}{\partial x}\Big(f_y(x,y)\Big) = \frac{\partial}{\partial x}\Big(-\partial_1 f(y,x)\Big) \\ =& -\partial_2\partial_1 f(y,x) = \partial_2\partial_1 f(x,y) = f_{xy}(x,y). \end{aligned}$$

Die zweiten Ableitungen sind für $(x,y)^\top \neq (0,0)^\top$ stetig, deswegen gilt auch

$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y).$$

Im Ursprung hat man zunächst

$$\begin{aligned} f_x(0,0) =& \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h(h^2+0)} = 0 \\ f_y(0,0) =& \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h(0+h^2)} = 0. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für die zweite Ableitung

$$\begin{aligned} f_{xy}(0,0) =& \lim_{h\to 0} \frac{f_x(0,h)-f_x(0,0)}{h} \\ =& \lim_{h\to 0} \left(\frac{1}{h}\left(\frac{-h^5}{h^4} - 0\right)\right) = \lim_{h\to 0} \frac{-h^5}{h^5} = -1. \end{aligned}$$

Vertauscht man die Reihenfolge der Ableitungen, ergibt sich

$$\begin{aligned} f_{yx}(0,0) =& \lim_{h\to 0} \frac{f_y(h,0)-f_y(0,0)}{h} \\ =& \lim_{h\to 0} \left(\frac{1}{h}\left(\frac{h^5}{h^4} - 0\right)\right) = \lim_{h\to 0} \frac{h^5}{h^5} = 1. \end{aligned}$$

Also gilt im Ursprung

$$f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0).$$

Die Ableitungen können also nicht stetig sein, da die Reihenfolge gemäß Satz von Schwarz sonst egal wäre.

Aufgabe 7.6: Positive Definitheit

a) Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrizen

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 4/3 & \sqrt{5}/3 \\ \sqrt{5}/3 & 7/6 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Welche der Matrizen sind positiv oder negativ definit, welche sind indefinit?

Lösung 7.6:

a) **i)** Das charakteristische Polynom der Matrix $\boldsymbol{A}$ ist:

$$\begin{aligned} \det(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E}) =& \det\begin{pmatrix} -3-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -3-\lambda \end{pmatrix} \\ =& (-3-\lambda)^2(-1-\lambda) - (-1-\lambda) \end{aligned}$$

und seine Nullstellen

$$\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = -2,\ \lambda_3 = -4$$

sind die Eigenwerte der Matrix $\boldsymbol{A}$.

ii) Das charakteristische Polynom der Matrix $\boldsymbol{B}$ ist

$$\det(\boldsymbol{B} - \lambda\boldsymbol{E}) = \left(\frac{4}{3} - \lambda\right)\left(\frac{7}{6} - \lambda\right) - \frac{5}{9}$$

und seine Nullstellen

$$\lambda_{1,2} = \frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{25}{16} + \frac{5}{9} - \frac{14}{9}} = \frac{5 \pm 3}{4} \in \{2,\ 1/2\}$$

sind die Eigenwerte von $\boldsymbol{B}$.

iii) Es gilt $\boldsymbol{C}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{C}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$.

Also hat $\boldsymbol{C}$ die Eigenwerte 1 und -1.

b) Alle drei Matrizen sind symmetrisch.
Zudem sind die Eigenwerte von $\boldsymbol{A}$ negativ, also ist $\boldsymbol{A}$ negativ definit.
Die Eigenwerte von $\boldsymbol{B}$ sind alle positiv, also ist $\boldsymbol{B}$ positiv definit.
$\boldsymbol{C}$ besitzt einen positiven und einen negativen Eigenwert, ist also indefinit.

Aufgabe 7.7:

Bestimmen und klassifizieren Sie alle stationären Punkte der Funktion

$$g(x,y) = 3x^2 - 2xy - \frac{y^3}{6}.$$

Lösung 7.7:

Die ersten beiden Ableitungen von g sind gegeben durch

$$\nabla g(x,y) = \begin{pmatrix} 6x - 2y \\ -2x - y^2/2 \end{pmatrix} \text{ und } H_g(x,y) = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & -y \end{pmatrix}.$$

An den stationären Punkten gilt

$$\begin{aligned} & \mathbf{0} = \nabla g(x,y) = \begin{pmatrix} 6x - 2y \\ -2x - y^2/2 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \quad & y = 3x,\ 9x^2 + 4x = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & (x,y) = (0,0) \text{ oder } (x,y) = \left(-\frac{4}{3}, -4\right) \end{aligned}$$

Um die Punkte zu charakterisieren wird dort die Hessematrix berechnet. Im ersten Punkt ist

$$H_g(0,0) = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix ist indefinit, denn es ist beispielsweise

$$(1,0) H_g(0,0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 6 > 0$$

und andererseits

$$(1,2) H_g(0,0) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -2 < 0.$$

Im Ursprung liegt also ein Sattelpunkt.
Im zweiten Punkt ist

$$H_g(-4/3, -4) = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix ist diagonaldominant mit positiven Diagonalelementen, also positiv definit, somit liegt im Punkt $(-4/3, -4)$ ein Minimum.

Aufgabe 7.8: Online Aufgabe

Bearbeiten Sie die aktuelle Online-Aufgabe im ILIAS-Kurs.
Beachten Sie, dass Sie dort auch die Lösungswege zu einzelnen Aufgaben zur Korrekutur hochladen können.

Ergebnisse zu Aufgabe 7.1:

$h'(t) = t\mathrm{e}^{(t^3)}\big(3t\sin(t+t^2) + 2\cos(1+t^2)\big)$

Ergebnisse zu Aufgabe 7.2:

$$\begin{aligned}
\nabla f(x,y) =& (2y^2\mathrm{e}^{2xy^2},\, 4xy\mathrm{e}^{2xy^2})^\top \\
\nabla g(x,y) =& (2x\sin(2x+y) + 2x^2\cos(2x+y),\, x^2\cos(2x+y))^\top \\
\nabla h(x,y) =& (2\cos(2x)\cos(3y),\, -3\sin(2x)\sin(3y))^\top \\
\nabla k(x,y,z) =& (y^2z^3,\, 2xyz^3,\, 3xy^2z^2)^\top \\
\nabla l(x,y) = =& \left(\frac{-y}{(xy-1)^2}, \frac{-x}{(xy-1)^2}\right)^\top
\end{aligned}$$

Ergebnisse zu Aufgabe 7.3:

a) $\boldsymbol{F} = \{(x,y,z)^\top \in \mathbb{R}^3 |\, y^2 - xz = 1\}$, b) $(-3,\, -4,\, -1)^\top$

Ergebnisse zu Aufgabe 7.6:

a) $\boldsymbol{A}$: $-1,\, -2,\, -4$, $\boldsymbol{B}$: $1/2,\, 2$, $\boldsymbol{C}$: $-1,\, 1$

Ergebnisse zu Aufgabe 7.7:

$\boldsymbol{x}_1 = (0,0)^\top$, $\boldsymbol{x}_2 = (-4/3, -4)^\top$