Helmut-Schmidt-Universität
Universität der Bundeswehr Hamburg
Fakultät für Maschinenbau und Bauingenieurwesen

Prof. Dr. Thomas Carraro
M.Sc Janna Puderbach

HELMUT SCHMIDT UNIVERSITÄT
Universität der Bundeswehr Hamburg

Mathematik II/B (WI/ET) — Blatt 6

WT 2024 — Kurvendiskussion, Taylorpolynom, Newton-Verfahren

Einführende Bemerkungen

- Vermeiden Sie die Verwendung von Taschenrechnern oder Online-Ressourcen.

Aufgabe 6.1: Taylor-Entwicklung in einer Variablen

Bestimmen Sie die Taylor-Entwicklung zweiter Ordnung der Exponentialfunktion e^x um den Punkt $x_0 = 0$ in dem Intervall $0 \leq x \leq 1$ einschließlich des Restgliedtermes. Zeigen Sie damit die Abschätzung:

$$\mathrm{e} \leq 3.$$

Aufgabe 6.2: Kurvendiskussion, Taylorentwicklung

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x^2/2}(2x-3).$$

a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich von f.

b) Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion f.

c) Bestimmen Sie die Asymptoten von f.

d) Bestimmen Sie die kritischen Punkte der Funktion f und charakterisieren Sie diese **ohne** Berechnung der zweiten Ableitung.

e) Geben Sie die Taylorentwicklung in den Extrempunkten bis zum Grad 2 an.

f) Skizzieren Sie die Funktion, die Asymptote, sowie die Taylorapproximationen.

Aufgabe 6.3: Kurvendiskussion

Führen Sie eine Kurvendiskussion für die Funktion

$$f(x) = \ln(3x^2 + 2x + 1)$$

durch. Bestimmen Sie dazu:

a) den maximalen Definitionsbereich von f,

b) die Symmetrieachsen von f, d. h. Werte $\alpha \in \mathbb{R}$, so dass $f(\alpha + x) = f(\alpha - x)$,

c) das Verhalten von f im Unendlichen,

d) die Nullstellen von f,

e) die Extrema und das Monotonieverhalten von f,

f) sowie die Wendepunkte und das Krümmungsverhalten von f.

g) Skizzieren Sie den Graphen von f.

Aufgabe 6.4: Newton-Verfahren

a) Gegeben seien die Funktionen

$$f(x) = \frac{x}{3} \text{ und } g(x) = \sin(x^2).$$

i) Skizzieren Sie die Funktionen und bestimmen Sie Näherungen für die Schnittstelle der beiden Funktionsgraphen.

ii) Bestimmen Sie die kleinste positive Schnittstelle mit dem Newton-Verfahren auf fünf Nachkommastellen genau.

b) Führen Sie das Verfahren ebenso für die Funktionen

$$f(x) = x^3 \text{ und } g(x) = \cos(2\pi x)$$

und die betragskleinste Schnittstelle durch.

Aufgabe 6.5: Ableitung der Umkehrfunktion

a) Leiten Sie die Formel für die Ableitung der Umkehrfunktion her.

b) Leiten Sie eine Formel für die zweiten Ableitung der Umkehrfunktion her.

c) Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \mathrm{e}^x + 2x.$$

- **i)** Zeigen Sie, dass $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ umkehrbar ist.
- **ii)** Bestimmen Sie die Ableitungen $g'(1)$ und $g''(1)$ der Umkehrfunktion

$$g = f^{-1}.$$

Ergebnisse zu Aufgabe 6.2:

zu **e)**: $T_{2;2}(x) = \mathrm{e}^{-2}\left(1 - \frac{5}{2}(x-2)^2\right)$
$T_{2;-1/2}(x) = \mathrm{e}^{-1/8}\left(-4 + \frac{5}{2}\left(x + \frac{1}{2}\right)^2\right)$

Ergebnisse zu Aufgabe 6.3:

b) $\alpha = -1/3$, **d)** $0, -2/3$, **e)** Minimum bei $-1/3$, **f)** Wendepunkte bei $-1/3 \pm \sqrt{2}/3$

Ergebnisse zu Aufgabe 6.4:

Die gesuchten Schnittpunkte liegen bei a) $z \approx 0.33403$ und b) $z \approx 0.24759$