Helmut-Schmidt-Universität
Universität der Bundeswehr Hamburg
Fakultät für Maschinenbau

Prof. Dr. Thomas Carraro
Dr. Frank Gimbel
Janna Puderbach

HELMUT SCHMIDT UNIVERSITÄT
Universität der Bundeswehr Hamburg

Mathematik III — Blatt 3

FT 2022 — Integration, Differentialgleichungen

Einführende Bemerkungen

- Vermeiden Sie die Verwendung von Taschenrechnern oder Online-Ressourcen.
- Die mit einem Stern *) markierten (Teil-)Aufgaben entfallen in diesem Trimester. Stattdessen werden einzelne Online-Aufgaben im ILIAS-Kurs kenntlich gemacht, zu denen Sie dort Ihre Lösungswege zur Korrektur hochladen können.
- Die mit zwei Sternen **) markierten (Teil-)Aufgaben richten sich an Studierende, die die übrigen Aufgaben bereits gelöst haben und die Inhalte weiter vertiefen möchten.

Aufgabe 3.1: Flächeninhalt, Rotationskörper

a) Skizzieren Sie den Bereich $B \subset \mathbb{C}$ mit

$$B = \{|z+\bar{z}| + |z-\bar{z}| \le 4\} \cap \{0 \le \mathrm{Re}(z) \le 1\}$$

in der Gauß'schen Ebene.

b) Interpretieren Sie B als Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ und berechnen Sie den Flächeninhalt.

c) Berechnen Sie ebenso den Schwerpunkt $\boldsymbol{x}_s$ des Bereichs B.

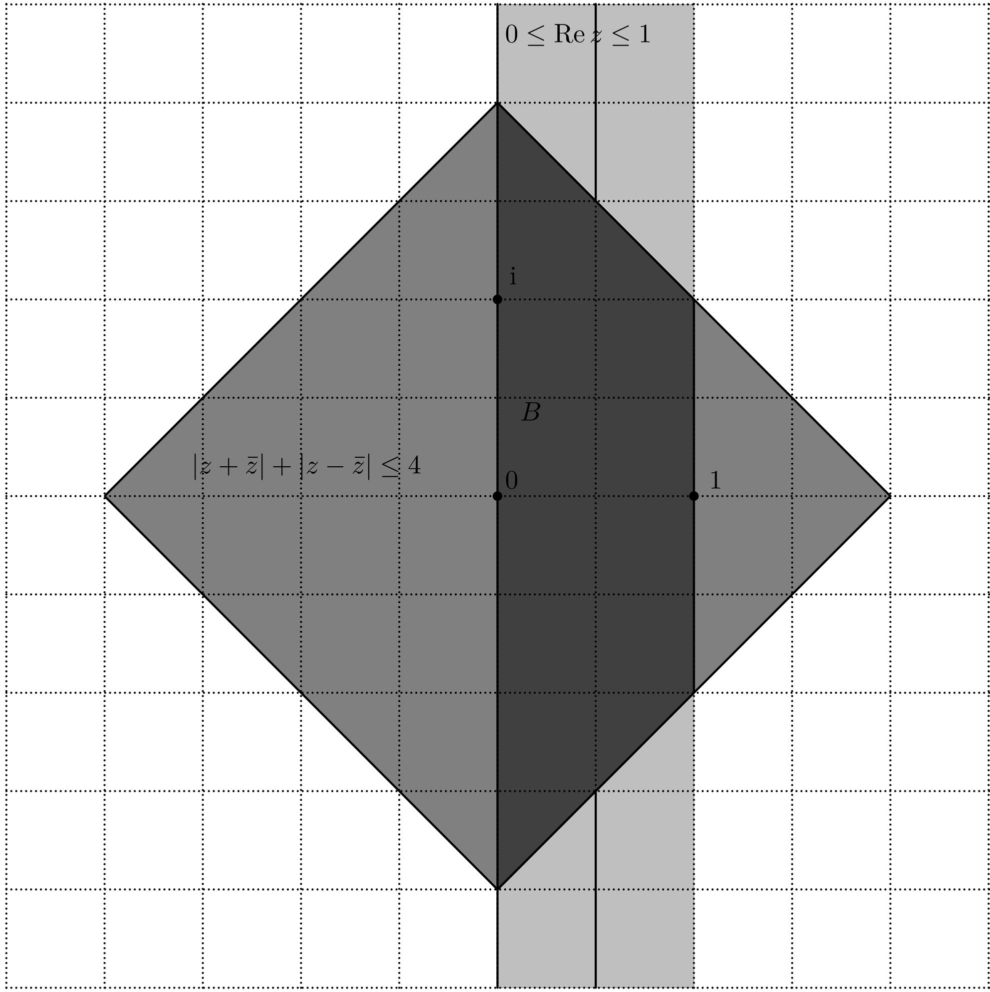
d) Berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers, der durch Rotation von B um die y-Achse entsteht.

Lösung 3.1:

a) Eine Zahl $z = x + \mathrm{i}y \in B$ muss zum einen in dem Streifen $0 \le x \le 1$ enthalten sein, zum anderen muss die folgende Ungleichung erfüllt sein:

$$4 \ge |z+\bar{z}| + |z-\bar{z}| = 2|x| + 2|y|.$$

Beide Bereiche sowie deren Schnittmenge B sind im folgenden skizziert:



b) Die Integrationsgrenzen für $B \subset \mathbb{R}^2$ sind

$$B = \{(x,y)^\top \in \mathbb{R}^2 \,|\, x-2 \le y \le 2-x \text{ und } 0 \le x \le 1\}.$$

Damit ist der Flächeninhalt

$$A = \int_B \mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^1 \int_{x-2}^{2-x} \mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^1 (4-2x)\mathrm{d}x = 4-1 = 3.$$

c) Der Schwerpunkt $(x_s,\, y_s)^\top$ ergibt sich zu

$$\begin{aligned}
x_s =& \frac{1}{A} \cdot \int_B x \mathrm{d}y\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int_0^1 x \int_{x-2}^{2-x} \mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
=& \frac{1}{3}\int_0^1 (4x - 2x^2)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\left[2x^2 - \frac{2}{3}x^3\right]_0^1 \\
=& \frac{4}{9} \\
y_s =& \frac{1}{A} \cdot \int_B y \mathrm{d}y\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int_0^1 \int_{x-2}^{2-x} y\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
=& \frac{1}{3}\int_0^1 \left[\frac{y^2}{2}\right]_{x-2}^{2-x} \mathrm{d}x = \frac{1}{6}\int_0^1 0\mathrm{d}x = 0
\end{aligned}$$

Der Schwerpunkt liegt also bei $\boldsymbol{x} = (4/9,\, 0)^\top$.

d) Das Volumen des Rotationskörpers um die y-Achse ergibt sich (siehe auch Aufgabe 9.1) zu:

$$\begin{aligned}
V =& \int_{y=-2}^{2} \pi (x(y))^2 \mathrm{d}y \quad \text{mit } x(y) = \begin{cases} 2+y & \text{für } -2 \le y < -1 \\ 1 & \text{für } -1 \le y \le 1 \\ 2-y & \text{für } 1 < y \le 2 \end{cases} \\
=& \int_{y=-2}^{-1} \pi(2+y)^2\mathrm{d}y + \int_{-1}^{1} \pi \cdot 1^2 \mathrm{d}y + \int_{1}^{2} \pi(2-y)^2\mathrm{d}y \\
=& \frac{\pi}{3}\left[(2+y)^3\right]_{-2}^{-1} + 2\pi + \frac{-\pi}{3}\left[(2-y)^3\right]_1^2 \\
=& \frac{\pi}{3} + 2\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{8\pi}{3}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 3.2: Kreiszylinder

Berechnen Sie das Volumen der Schnittmenge

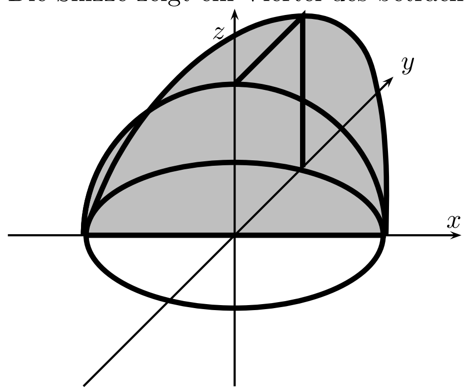
i) zweier Kreiszylinder um die $z-$ und die y-Achse.

ii****)** dreier Kreiszylinder um die $x-$, die $y-$ und die $z-$Achse.

Die Zylinder haben jeweils den Radius 1.

Lösung 3.2:

i) B_2 beschreibe die Schnittmenge der beiden Zylinder um die $z-$ und die $y-$Achse. Die Skizze zeigt ein Viertel des betrachteten Volumens.



Der Integrationsbereich für die $r-$ und die $\varphi-$Variable (in Zylinderkoordinaten) beschreibt den Einheitskreis in zwei Dimensionen (in der Skizze zur Hälfte grau markiert). Dadurch ist der Integrationsbereich auf jeden Fall im ersten Zylinder (um die $z-$Achse) enthalten.
Der Integrationsbereich in $z-$Richtung hängt von x und y ab. Er wird durch den zweiten Zylinder (um die y-Achse) eingeschränkt:

$$z^2 + x^2 \le 1 \Rightarrow |z| \le \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1 - r^2\cos^2\varphi}.$$

Insgesamt hat man so für das Volumen von B_2:

$$\begin{aligned}
V_2 =& \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi}\int\limits_{r=0}^{1}\int\limits_{z=-\sqrt{1-r^2\cos^2\varphi}}^{+\sqrt{1-r^2\cos^2\varphi}} 1\cdot r\mathrm{d}z\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi}\int\limits_{r=0}^{1} 2r\sqrt{1-r^2\cos^2\varphi}\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi \\
=& \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi}\left[\frac{-2}{3\cos^2\varphi}\left(1-r^2\cos^2\varphi\right)^{3/2}\right]_{r=0}^{1}\mathrm{d}\varphi \qquad \text{(Beachte die Kettenregel)} \\
=& \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi}\frac{-2}{3\cos^2\varphi}\left((1-\cos^2\varphi)^{3/2}-1\right)\mathrm{d}\varphi = \frac{2}{3}\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi}\frac{1-|\sin\varphi|^3}{\cos^2\varphi}\mathrm{d}\varphi \\
=& \frac{4}{3}\int\limits_{0}^{\pi}\frac{1-\sin^3\varphi}{\cos^2\varphi}\mathrm{d}\varphi \qquad \text{(Der Integrand ist } \pi\text{-periodisch)} \\
=& \frac{4}{3}\left(\left[(1-\sin^3\varphi)\tan\varphi\right]_0^\pi - \int\limits_0^\pi(-3\sin^2\varphi\cos\varphi)\tan\varphi\mathrm{d}\varphi\right) \\
=& \frac{4}{3}\int\limits_0^\pi 3\sin^3\varphi\mathrm{d}\varphi = 4\int\limits_0^\pi(\sin\varphi-\cos^2\varphi\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi \\
=& 4\left[-\cos\varphi+\frac{1}{3}\cos^3\varphi\right]_0^\pi = \frac{16}{3}
\end{aligned}$$

ii) Nun wird aus dem oben beschriebenen Volumen noch der Bereich ausgeschnitten, der nicht in dem Zylinder um die $x-$Achse

$$y^2+z^2=0$$

liegt. Der Integrationsbereich für r und φ bleibt wie vorher. Der $z-$Integrationsbereich wird jedoch weiter eingeschränkt auf

$$|z|\leq\min\left\{\sqrt{1-x^2},\ \sqrt{1-y^2}\right\} = \begin{cases}\sqrt{1-x^2}=:z_x & \text{für } x^2>y^2\\ \sqrt{1-y^2}=:z_y & \text{für } x^2\leq y^2\end{cases}.$$

Diese Fallunterscheidung führt zu einer Unterteilung des Integrals:

$$V_3=\int\limits_{B_3}\mathrm{d}(x,y,z) = 4\cdot\int\limits_{r=0}^{1}\left(\int\limits_{\varphi=0}^{\pi/4}\int\limits_{z=-z_x}^{+z_x}\mathrm{d}z\mathrm{d}\varphi + \int\limits_{\varphi=\frac{\pi}{4}}^{\pi/2}\int\limits_{z=-z_y}^{+z_y}\mathrm{d}z\mathrm{d}\varphi\right)r\mathrm{d}r$$

Beide Teilintegrale treten jeweils viermal auf, da der Integrationsbereich in allen vier Quadranten gleich aussieht.

Weiter ergibt sich, unter Nutzung der obigen Integration bezüglich z und r:

$$\begin{aligned}
V_3 =& 4\left(\frac{2}{3}\int\limits_{\varphi=0}^{\pi/4}\frac{1-|\sin\varphi|^3}{\cos^2\varphi}\mathrm{d}\varphi+\frac{2}{3}\int\limits_{\varphi=\frac{\pi}{4}}^{\pi/2}\frac{1-|\cos\varphi|^3}{\sin^2\varphi}\mathrm{d}\varphi\right) \\
=& \frac{8}{3}\Big(\left[\tan\varphi(1-\sin^3\varphi)\right]_0^{\pi/4}+\int\limits_0^{\pi/4}\tan\varphi\cdot 3\sin^2\varphi\cos\varphi\mathrm{d}\varphi+ \\
&+\left[-\cot\varphi(1-\cos^3\varphi)\right]_{\pi/4}^{\pi/2}+\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2}\cot\varphi\cdot 3\cos^2\varphi\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\Big) \\
=& \frac{8}{3}\Big(\left(1-\frac{1}{2^{3/2}}\right)+3\left[-\cos\varphi+\frac{1}{3}\cos^3\varphi\right]_0^{\pi/4}+ \\
&+\left(1-\frac{1}{2^{3/2}}\right)+3\left[\sin\varphi-\frac{1}{3}\sin^3\varphi\right]_{\pi/4}^{\pi/2}\Big) \\
=& \frac{8}{3}\left(\frac{2\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}+3\left[\frac{-1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}^3}+\frac{2}{3}\right]+3\left[\frac{2}{3}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}^3}\right]\right) \\
=& \frac{8}{3}\left(\frac{2\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}+4-3\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=8(2-\sqrt{2}).
\end{aligned}$$

Aufgabe 3.3: Integration in Kugelkoordinaten

Gegeben sei das Rotationsellipsoid

$$E=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^n\,\middle|\,x^2+4y^2+z^2\leq 9\right\}.$$

Man berechne das Integral $\int\limits_B(x^2+y+z^2)\mathrm{d}(x,y,z)$ unter Verwendung von

a) Zylinderkoordinaten

b) an das Ellipsoid angepasste Kugelkoordinaten:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r\cos\varphi\cos\psi\\ \frac{r}{2}\sin\varphi\cos\psi\\ r\sin\psi\end{pmatrix}.$$

Hinweis(zu **b)**): Verwenden Sie um die $y-$Achse rotationssymmetrische Zylinderkoordinaten

$$\boldsymbol{x}(r,\varphi,y) = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ y \\ r\sin(\varphi) \end{pmatrix}.$$

Lösung 3.3:

a) Wir nutzen Zylinderkoordinaten der Form

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ y \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}, \; \mathrm{d}(x,y,z) = r\mathrm{d}(r,\varphi,y).$$

Damit hat man mit den Integrationsgrenzen für y

$$y_\pm = \pm\frac{1}{2}\sqrt{9-r^2}$$

das Integral

$$I := \int_B (x^2+y+z^2)\mathrm{d}(x,y,z) = \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{3}\int_{y=y_-}^{y_+} (r^2\cos^2\varphi + y + r^2\sin^2\varphi) r\mathrm{d}y\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi$$

$$= \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{3}\left(r^3(y_+-y_-) + r\frac{y_+^2-y_-^2}{2}\right)\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi$$

$$= \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{3} r^3\sqrt{9-r^2}\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi$$

$$=2\pi\left(-r^2\frac{(9-r^2)^{3/2}}{3}\Bigg|_{r=0}^{3} + \int_0^3 2r\frac{(9-r^2)^{3/2}}{3}\mathrm{d}r\right)$$

$$=2\pi\cdot\frac{2}{3}\cdot\int_0^3 r(9-r^2)^{3/2}\mathrm{d}r = 2\pi\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{-(9-r^2)^{5/2}}{5}\Bigg|_0^3 = \frac{4\cdot 3^4\pi}{5} = \frac{324\pi}{5}.$$

b) In den angepassten Kugelkoordinaten hat man

$$\mathrm{d}(x,y,z) = \left|\det\begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\psi & -r\sin\varphi\cos\psi & -r\cos\varphi\sin\psi \\ \frac{1}{2}\sin\varphi\cos\psi & \frac{r}{2}\cos\varphi\cos\psi & -\frac{r}{2}\sin\varphi\sin\psi \\ \sin\psi & 0 & r\cos\psi \end{pmatrix}\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|\sin\psi r^2(\sin\psi\cos\psi) + r^2\cos\psi\cdot\cos^2\psi\right|$$

$$=\frac{r^2}{2}\cos\psi > 0 \text{ (wegen } -\pi/2\le\psi\le\pi/2).$$

Damit ergibt sich

$$I = \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\psi=-\pi/2}^{\pi/2}\int_{r=0}^{3}\left(r^2\cos^2\varphi\cos^2\psi + \frac{r}{2}\sin\varphi\cos\psi + r^2\sin^2\psi\right)\frac{r^2}{2}\cos\psi\mathrm{d}r\mathrm{d}\psi\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\psi=-\pi/2}^{\pi/2}\left(\frac{3^5}{5}\cos^2\varphi\cos^2\psi + \frac{3^4}{8}\sin\varphi\cos\psi + \frac{3^5}{5}\sin^2\psi\right)\cos\psi\mathrm{d}\psi\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\psi=-\pi/2}^{\pi/2}\left(\frac{3^5}{5}\cdot\pi\cos^2\psi + 0 + \frac{3^5}{5}\sin^2\psi\cdot 2\pi\right)\cos\psi\mathrm{d}\psi$$

$$=\frac{3^5\pi}{10}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1+\sin^2\psi)\cos\psi\mathrm{d}\psi = \frac{3^5\pi}{10}\left[\sin\psi + \frac{1}{3}\sin^3\psi\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{4\cdot 3^4\pi}{5}\frac{324\pi}{5}.$$

Aufgabe 3.4: Definitionsbereich der Lösung einer Dgl.

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'(x) = 2\,x\,y^2$$

und die spezielle Lösung für den Anfangswert $y(0) = 4$.
Wie groß ist der maximale Definitionsbereich dieser Lösung?

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$\cos(x)\cdot y'(x) = \sin(x)\cdot y(x).$$

Lösung 3.4:

a) Die Dgl. ist vom trennbaren Typ

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y^2} = \int 2x\ \mathrm{d}x \Rightarrow \frac{y^{-1}}{-1} = x^2 + C \quad \vee \quad y = 0$$

und hat die allgemeine Lösung

$$\underline{y(x) = \frac{-1}{x^2+C}\ , \quad C \in \mathbb{R} \quad \text{bzw. } y = 0}$$

Der Anfangswert $y(0) = 4$ ergibt mit $C = -\frac{1}{4}$ die Lösung

$$\underline{y_{\mathrm{AWP}}(x) = \frac{-1}{x^2 - \frac{1}{4}}}\ .$$

Die Lösung ist nur im Bereich $\frac{-1}{2} < x < \frac{1}{2}$ definiert und hat an den Rändern bei $x = \pm\frac{1}{2}$ Polstellen.

b) Lösen der hom. lin. DGl.

$$\cos(x) \cdot y'(x) = \sin(x) \cdot y(x)$$

durch Trennung der Veränderlichen:

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\ \mathrm{d}x \Rightarrow \ln(|y|) = -\ln\big(|\cos(x)|\big) + \tilde{C} \quad \vee \quad y = 0$$

also

$$y(x) = \frac{C}{\cos(x)}, C \in \mathbb{R}\ .$$

Aufgabe 3.5: Differentialgleichungen 1. Ordnung

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung folgender Differentialgleichungen:

i) $$y'(x) = (2\,x + 3\,y + 4)^{-4} - \frac{2}{3}$$

ii) $$u'(t) = \sqrt{\frac{t}{u}} + \frac{u}{t}\ , \quad t > 0\ .$$

iii) $$w'(s) = \frac{2}{s}\,w + 15\,s^4 \ .$$

Lösung 3.5:

i) Mit der Substitution $z(x) = 2\,x + 3\,y(x) + 4$ erhält man

$$y(x) = \frac{z(x) - 2\,x - 4}{3} \Rightarrow y'(x) = \frac{1}{3}(z'(x) - 2)$$

Eingesetzt in die Dgl, ergibt sich

$$z'(x) - 2 = 3\left(z^{-4} - \frac{2}{3}\right)\ .$$

Daraus folgt

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 3z^{-4}\ .$$

Trennung der Variablen:

$$\int z^4\ \mathrm{d}z = \int 3\ \mathrm{d}x \Rightarrow \frac{z^5}{5} = 3\,x + c \Rightarrow z(x) = (15\,x + C)^{1/5} \text{ mit } C = 5c \in \mathbb{R}\ .$$

Rücksubstitution:

$$y(x) = \frac{(15\,x + C)^{1/5} - 2x - 4}{3}\ .$$

ii) Mit der Substitution $z(x) = \frac{u(t)}{t}$ erhält man

$$u(t) = tz(t) \Rightarrow u'(t) = z(t) + tz'(t)$$

Einsetzen in die Dgl liefert dann

$$z + tz' = \frac{1}{\sqrt{z}} + z \quad \Rightarrow \quad z' = \frac{1}{t\,\sqrt{z}}$$

Trennung der Variablen:

$$\int \sqrt{z}\,\mathrm{d}z = \int \frac{1}{t}\ \mathrm{d}t \Rightarrow \frac{2}{3}\,z^{3/2} = \ln|t| + c \Rightarrow z(t) = \left(\frac{3\ \ln|t|}{2} + C\right)^{2/3} \text{ mit } C = \frac{3\,c}{2} \in \mathbb{R}\ .$$

Rücksubstitution:

$$\frac{u(t)}{t} = \left(\frac{3\ \ln|t|}{2} + C\right)^{2/3} \Rightarrow u(t) = t \cdot \left(\frac{3\ \ln(t)}{2} + C\right)^{2/3} \text{ mit } C \in \mathbb{R},\ t > 0.$$

iii) Zunächst löst man die homogene lin. Dgl.:

$$w'(s) = \frac{2}{s}\,w$$

$$w_{\rm h}(s) = C \cdot e^{\left(\int \frac{2}{s}\, ds\right)} = C \cdot e^{2\,\ln(s)} = C\, s^2 \ .$$

Damit erhält man den Produktansatz für die inhomogen lin. Dgl. $w(s) = z(s)\, s^2$ Mit $w'(s) = z'\, s^2 + z \cdot 2\, s$ wird die inhomogene Gleichung wie folgt umgeformt:

$$z'\, s^2 + z\, 2\, s = \frac{2}{s}\, z\, s^2 + 15\, s^4 \Rightarrow z' = 15\, s^2 \Rightarrow z = 5\, s^3 + C \ .$$

Damit erhält man die Lösung

$$w(s) = C\, s^2 + 5\, s^5 \ .$$

Aufgabe 3.6: Differentialgleichungen erster Ordnung

a) Klassifizieren Sie die Differentialgleichung 1. Ordnung

$$u'(t) = \frac{-2\, u(t)}{t} + 5\, t^2 \ , \quad t > 0 \ ,$$

und bestimmen Sie dann alle Lösungen der Differentialgleichung.

b) Lösen Sie das Anfangswertproblem für $t > 0$

$$u'(t) = \left(\frac{2\, u(t)}{t}\right)^2 + \frac{u(t)}{t} \ , \quad u(1) = -2 \ .$$

Lösung 3.6:

a) Klassifikation: explizit, linear, variable Koeffizienten, inhomogen.

(Hinweis: Mindestens die 3 letzten Eigenschaften müssen benannt sein!)

Die homogene lineare Dgl. $u'(t) = -2\, u(t)/t$ ist eine trennbare Dgl.

$$\int \frac{1}{u}\, du = \int \frac{-2}{t}\, dt \Rightarrow u_h(t) = \frac{c}{t^2} \ .$$

Die Lösung der inhomogen linearen Dgl. erhält man mit dem Produktansatz

$$u_{allg}(t) = c(t)/t^2 \ .$$

Das Einsetzen in die inhomogene Gleichung ergibt

$$\frac{-2}{t^3} \cdot c(t) + c'(t) \cdot \frac{1}{t^2} = \frac{-2\, \frac{c(t)}{t^2}}{t} + 5\, t^2 \Rightarrow c'(t) = 5\, t^4 \ .$$

Die Integration ergibt die Funktion $c(t)$ und dann die allgemeine Lösung

$$c(t) = t^5 + C \Rightarrow \underline{\underline{u_{allg}(t) = t^3 + \frac{C}{t^2}}} \ .$$

b) Die Substitution $z(t) = u(t)/t$ ergibt $u(t) = tz(t)$, $u'(t) = z(t) + tz'(t)$. Eingesetzt in die Dgl. erhält man

$$z + tz' = \left(2\, z\right)^2 + z \Rightarrow z' = \frac{4\, z^2}{t} \ .$$

Die trennbare Dgl. für $z(t)$ hat die Lösung $z(t) = -1/(4\, \ln(t) + C)$. Rücksubstitution ergibt die allgemeine Lösung

$$u(t) = z(t) \cdot t = \frac{-t}{4\, \ln(t) + C} \ .$$

Einsetzen der Anfangswerte ergibt $C = 1/2$ und damit die Lösung des AWPs zu

$$\underline{\underline{u_{\rm AWP}(t) = \frac{-2\, t}{8\, \ln(t) + 1}}} \ .$$

Aufgabe 3.7: Online Aufgabe

Bearbeiten Sie die aktuelle Online-Aufgabe im ILIAS-Kurs.
Beachten Sie, dass Sie dort auch die Lösungswege zu einzelnen Aufgaben zur Korrektur hochladen können.