Helmut-Schmidt-Universität
Universität der Bundeswehr Hamburg
Fakultät für Maschinenbau und Bauingenieurwesen

Prof. Dr. Thomas Carraro
M.Sc Janna Puderbach

Mathematik III/B (WI/ET) — Blatt 12

FT 2024 — Integration

Einführende Bemerkungen

- Vermeiden Sie die Verwendung von Taschenrechnern oder Online-Ressourcen.

Aufgabe 12.1: Frühere Klausuraufgabe

a) Berechnen Sie die Integrale

$$I = \int_0^\pi (\sin x) \cdot e^{2\cos x} dx \qquad \text{und} \qquad J = \int_1^2 (t^3 - 2t) e^{3t^2} dt.$$

b) Berechnen Sie das Integral $\int_B \sqrt{x^2+y^2} dx dy$, wobei B der Kreisring in der $(x,y)-$Ebene mit Mittelpunkt $(0,0)^\top$, Innenradius a und Außenradius b (mit $0 < a < b$) ist.

c) Berechnen Sie das Integral

$$\iiint_D e^{5z+3y+2x} dx dy dz$$

über dem Gebiet $D = \left\{ (x,y,z)^\top \middle| x,y,z \geq 0 \text{ und } 5z+3y+2x \leq 2 \right\}$.

Lösung 12.1:

a) Im ersten Integral substituieren wir

$$u(x) = 2\cos x, \qquad du = -2\sin x dx.$$

Eingesetzt ergibt das

$$I = \int_0^\pi \sin x e^{2\cos x} dx$$
$$= -\frac{1}{2} \int_{u(0)}^{u(\pi)} e^u du = -\frac{1}{2} \left[e^u\right]_{u=2}^{-2} = \frac{e^2 - e^{-2}}{2} = \sinh(2).$$

Zur Berechnung des zweiten Integrals integrieren wir partiell:

$$J = \int_1^2 \underbrace{(t^2-2)}_{u} \underbrace{te^{3t^2}}_{v'} = \left[\underbrace{(t^2-2)}_{u} \underbrace{\left(\frac{1}{6} e^{3t^2}\right)}_{v} \right]_1^2 - \int_1^2 \underbrace{2t}_{u'} \underbrace{\frac{1}{6} e^{3t^2}}_{v} dt$$
$$= \frac{1}{3} e^{12} + \frac{1}{6} e^3 - \frac{2}{36} e^{3t^2} \Big|_1^2 = \frac{e^3}{6} \left(2e^9 + 1\right) + \frac{1}{18} \left(e^3 - e^{12}\right)$$
$$= \frac{e^3}{18} \left(5e^9 + 4\right).$$

b) Es bietet sich eine Berechnung in Polarkoordinaten an:

$$\int_B \sqrt{x^2+y^2} dx dy = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=a}^{b} r r dr d\varphi = 2\pi \frac{b^3 - a^3}{3}.$$

c) Wir integrieren in kartesischen Koordinaten, wobei zu beachten ist, dass die Integrationsgrenzen für z von x und y abhängen und die für y von x. Deswegen ist die Integrationsreihenfolge – nachdem sie einmal gewählt wurde – festgelegt. Die oberen Integrationsgrenzen resultieren aus der Ebenengleichung $2x+3y+5z=2$:

$$\begin{aligned}
\int\limits_D \mathrm{e}^{5z+3y+2x}\mathrm{d}(x,y,z) &= \int\limits_{x=0}^{1} \mathrm{e}^{2x} \int\limits_{y=0}^{\frac{2-2x}{3}} \mathrm{e}^{3y} \int\limits_{z=0}^{\frac{2-2x-3y}{5}} \mathrm{e}^{5z}\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&= \int\limits_{x=0}^{1} \mathrm{e}^{2x} \int\limits_{y=0}^{\frac{2-2x}{3}} \mathrm{e}^{3y} \left[\frac{\mathrm{e}^{5z}}{5}\right]_{z=0}^{\frac{2-2x-3y}{5}} \mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{5}\int\limits_{x=0}^{1} \mathrm{e}^{2x} \int\limits_{y=0}^{\frac{2-2x}{3}} \mathrm{e}^{3y} \left(\mathrm{e}^{2-2x-3y}-1\right) \mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{5}\int\limits_{x=0}^{1} \mathrm{e}^{2x} \left[\mathrm{e}^{2-2x}y - \frac{\mathrm{e}^{3y}}{3}\right]_{y=0}^{\frac{2-2x}{3}} \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{15}\int\limits_{x=0}^{1} \left(\mathrm{e}^{2}(2-2x) - \mathrm{e}^{2} + \mathrm{e}^{2x}\right) \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{15}\left[\mathrm{e}^{2}(x-x^2) + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\right]_{x=0}^{1} = \frac{\mathrm{e}^{2}-1}{30}
\end{aligned}$$

Aufgabe 12.2: Parametrisierung von Integrationsbereichen

Gegeben seien die folgenden drei Körper im $\mathbb{R}^3$:

- ein Quader $Q = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 | \, 0 \le x_1 \le 1, \, 0 \le x_2 \le 1, \, -3 \le x_3 \le 3\}$
- eine Kugel $K = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 | \, \|\boldsymbol{x}\| \le 1\}$
- ein Zylinder $Z = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 | \, x_1^2 + x_2^2 \le 1, \; 0 \le x_3 \le 3\}$

Skizzieren und parametrisieren Sie die Schnittmenge eines jeden einzelnen dieser Körper mit den beiden folgenden Mengen:

$$M_1 = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 | \, 0 \le \boldsymbol{x}_3\}, \, M_2 = \{\boldsymbol{x} | \, 3x_1 \le x_3\}.$$

D. h. geben Sie die Integrationsgrenzen der zugehörigen Volumenintegrale über die Bereiche $Q \cap M_1$, $Q \cap M_2$, $K \cap M_1$, ... an.

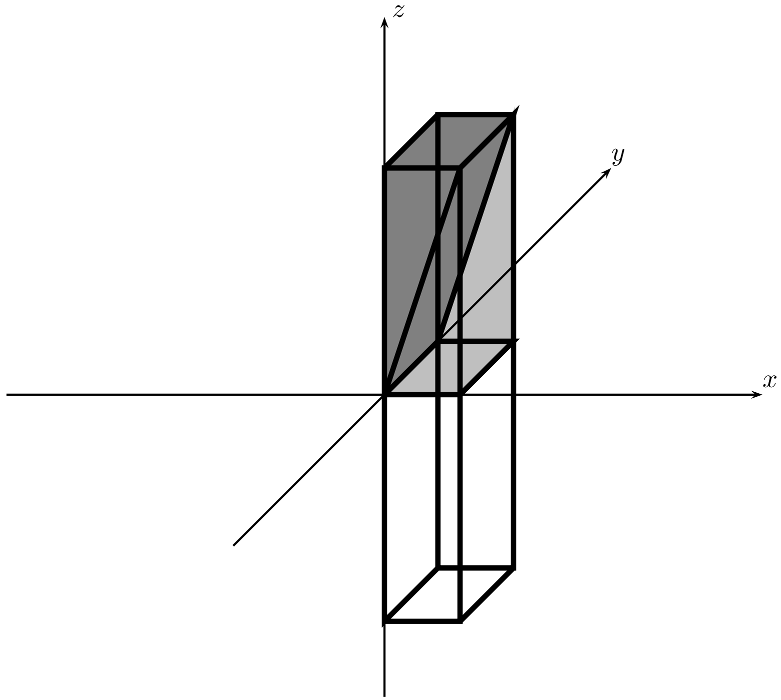
Lösung 12.2:

M_1 beschreibt den oberen Halbraum $z \ge 0$. M_2 beschreibt die Menge der Punkte oberhalb der Ebene $z = 3x$. Für die Schnittmengen mit den drei Körpern hat man jeweils:

- Für den Quader:

$$\begin{aligned} Q \cap M_1 =& \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 | \, 0 \le x_1 \le 1, \, 0 \le x_2 \le 1, \, 0 \le x_3 \le 3\} \\ Q \cap M_2 =& \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 | \, 0 \le x_1 \le 1, \, 0 \le x_2 \le 1, \, 3x_1 \le x_3 \le 3\} \end{aligned}$$

  Für $Q \cap M_2$ muss man keine Fallunterscheidung der x_3-Grenzen vornehmen, da die Obergrenze des Quaders ($z = 3$) die Ebene $3y = z$ nur an der Kante des Quaders schneidet.



- Für die Kugel:

  $$K \cap M_1 = \Big\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 | \, -1 \le x_1 \le +1, \, -\sqrt{1 - x_1^2} \le x_2 \le +\sqrt{1 - x_1^2}, \, 0 \le x_3 \le \sqrt{1 - x_2^2}$$

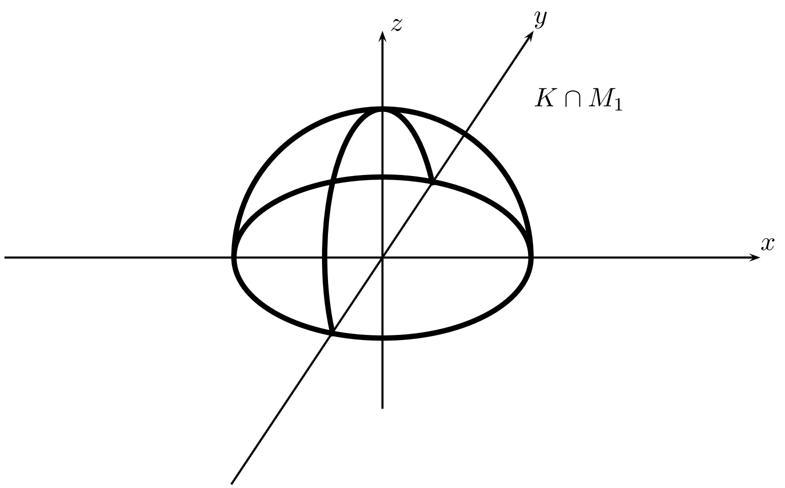
  Die zweite Schnittmenge $K \cap M_2$ besteht aus zwei Bereichen: B_1 der Bereich, der von oben durch die Kugeloberfläche und von unten durch die Ebene $3x = z$ begrenzt wird.
  B_2, der von oben und von unten durch die Kugeloberfläche begrenzt wird, da die Ebenbe dort außerhalb der Kugel liegt.
  Für die Schnittkurve der Kugeloberfläche $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ mit der Ebene $3x = z$ gilt

  $$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 9x^2 =& 1 \\ \Leftrightarrow \qquad x =& \pm \sqrt{\frac{1 - y^2}{10}} \end{aligned}$$

  Damit darf y nur Werte zwischen -1 und $+1$ annehmen.

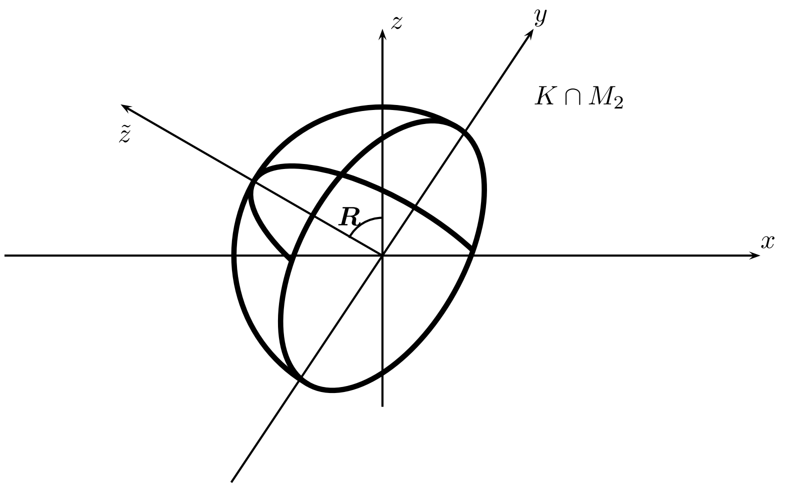
B_1 lässt sich somit parametrisieren als

$$B_1 = \Big\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \,|\, -1 \le x_2 \le 1,\, -\sqrt{\frac{1-x_2^2}{10}} \le x_1 \le \sqrt{\frac{1-x_2^2}{10}},\\ 3x_1 \le x_3 \le \sqrt{1-x_1^2-x_2^2} \Big\}$$



Für den zweiten Teil von $K \cap M_2$ ergibt sich

$$B_2 = \Big\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \,|\, -1 \le x_2 \le 1,\, -\sqrt{1-x_2^2} \le x_1 \le -\sqrt{\frac{1-x_2^2}{10}},\\ -\sqrt{1-x_1^2-x_2^2} \le x_3 \le \sqrt{1-x_1^2-x_2^2} \Big\}$$



Eine Parametrisierung in Kugelkoordinaten, deren z-Achse ($\tilde{z}$ in der Skizze) senkrecht auf der Ebene $3x = z$ steht, wäre für diesen Körper deutlich einfacher. Die entsprechende Rotation um die y-Achse wird durch die (orthogonale) Matrix

$$\boldsymbol{R} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & \sqrt{10} & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

beschrieben. Damit ergibt sich dann

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}(r,\theta,\varphi) &= \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix} \\ &= \frac{r}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi - 3\cos\theta \\ \sin\theta\sin\varphi \\ 3\sin\theta\cos\varphi + \cos\theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und weiter

$$K \cap M_2 = \{ \boldsymbol{x}(r,\theta,\varphi) \,|\, 0 \le r \le 1,\, 0 \le \theta \le \pi/2,\, 0 \le \varphi \le 2\pi \}.$$

- Für den Zylinder nutzen wir die Parametrisierung in Zylinderkoordinaten

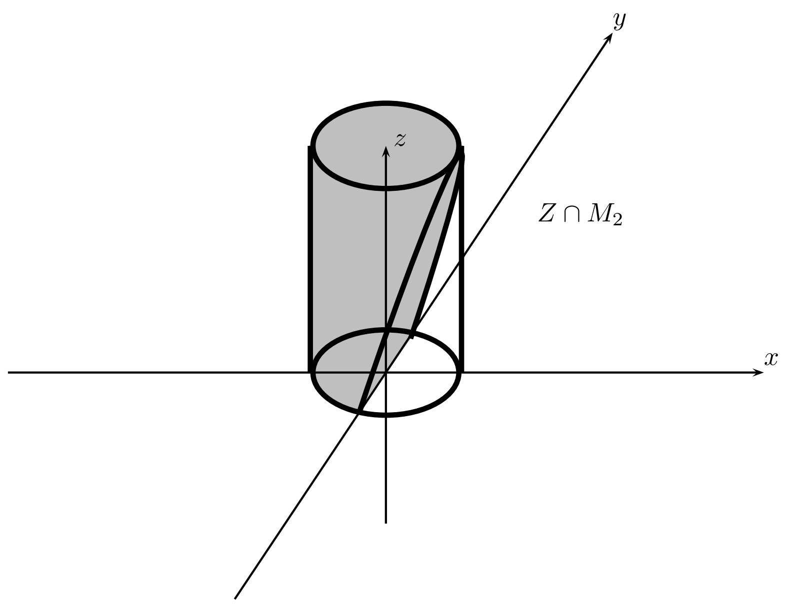
$$\boldsymbol{x}(r,\varphi,z) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$$

Die erste Menge $Z \cap M_1$ stimmt mit dem Zylinder überein.

$$\begin{aligned} Z = Z \cap M_1 &= \{ \boldsymbol{x}(r,\varphi,z) | 0 \le r \le 1,\, 0 \le \varphi \le 2\pi,\, 0 \le z \le 3 \} \\ Z \cap M_2 &= \{ \boldsymbol{x}(r,\varphi,z) | 0 \le r \le 1,\, 0 \le \varphi \le 2\pi,\, z_0(r,\varphi) \le z \le 3 \} \end{aligned}$$

Dabei berücksichtigt $z_0(r, \varphi)$, dass die Ebene $3x = z$ den Zylinderboden in der Mitte schneidet. Dies führt dazu, dass für positive x die Untergrenze des Integrationsbereichs von der Ebene beschrieben wird und für negative x durch den Zylinderboden $z = 0$:

$$z_0(r, \varphi) = \begin{cases} 0, & \text{für } \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2} \\ 3r\cos(\varphi), & \text{sonst} \end{cases} .$$



Aufgabe 12.3: Integration in Kugelkoordinaten

Gegeben sei das Rotationsellipsoid

$$E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, x^2 + 4y^2 + z^2 \le 9\right\}.$$

Man berechne das Integral $\int\limits_B (x^2 + y + z^2)\mathrm{d}(x,y,z)$ unter Verwendung von

a) Zylinderkoordinaten

b) an das Ellipsoid angepasste Kugelkoordinaten:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi\cos\psi \\ \frac{r}{2}\sin\varphi\cos\psi \\ r\sin\psi \end{pmatrix}.$$

Hinweis(zu **a**)): Verwenden Sie um die $y-$Achse rotationssymmetrische Zylinderkoordinaten

$$\boldsymbol{x}(r,\varphi,y) = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ y \\ r\sin(\varphi) \end{pmatrix}.$$

Lösung 12.3:

a) Wir nutzen Zylinderkoordinaten der Form

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ y \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}, \ \mathrm{d}(x,y,z) = r\mathrm{d}(r,\varphi,y).$$

Damit hat man mit den Integrationsgrenzen für y

$$y_\pm = \pm\frac{1}{2}\sqrt{9-r^2}$$

das Integral

$$\begin{aligned}
I := \int\limits_B (x^2+y+z^2)\mathrm{d}(x,y,z) &= \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi}\int\limits_{r=0}^{3}\int\limits_{y=y_-}^{y_+} (r^2\cos^2\varphi + y + r^2\sin^2\varphi) r\mathrm{d}y\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi \\
&= \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi}\int\limits_{r=0}^{3} \left(r^3(y_+ - y_-) + r\frac{y_+^2 - y_-^2}{2}\right)\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi \\
&= \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi}\int\limits_{r=0}^{3} r^3\sqrt{9-r^2}\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi \\
&=2\pi\left(-r^2\frac{(9-r^2)^{3/2}}{3}\Bigg|_{r=0}^{3} + \int\limits_0^3 2r\frac{(9-r^2)^{3/2}}{3}\mathrm{d}r\right) \\
&=2\pi\cdot\frac{2}{3}\cdot\int\limits_0^3 r(9-r^2)^{3/2}\mathrm{d}r = 2\pi\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{-(9-r^2)^{5/2}}{5}\Bigg|_0^3 = \frac{4\cdot 3^4\pi}{5} = \frac{324\pi}{5}.
\end{aligned}$$

b) In den angepassten Kugelkoordinaten hat man

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(x,y,z) &= \left|\det\begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\psi & -r\sin\varphi\cos\psi & -r\cos\varphi\sin\psi \\ \frac{1}{2}\sin\varphi\cos\psi & \frac{r}{2}\cos\varphi\cos\psi & -\frac{r}{2}\sin\varphi\sin\psi \\ \sin\psi & 0 & r\cos\psi \end{pmatrix}\right| \\
&=\frac{1}{2}\left|\sin\psi r^2(\sin\psi\cos\psi) + r^2\cos\psi\cdot\cos^2\psi\right| \\
&=\frac{r^2}{2}\cos\psi > 0 \ (\text{wegen } -\pi/2 \le \psi \le \pi/2).
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$
\begin{aligned}
I = &\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{\psi=-\pi/2}^{\pi/2} \int\limits_{r=0}^{3} \left(r^2 \cos^2 \varphi \cos^2 \psi + \frac{r}{2} \sin\varphi \cos\psi + r^2 \sin^2 \psi\right) \frac{r^2}{2} \cos\psi \mathrm{d}r \mathrm{d}\psi \mathrm{d}\varphi \\
= &\frac{1}{2} \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{\psi=-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{3^5}{5} \cos^2 \varphi \cos^2 \psi + \frac{3^4}{8} \sin\varphi \cos\psi + \frac{3^5}{5} \sin^2 \psi\right) \cos\psi \mathrm{d}\psi \mathrm{d}\varphi \\
= &\frac{1}{2} \int\limits_{\psi=-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{3^5}{5} \cdot \pi \cos^2 \psi + 0 + \frac{3^5}{5} \sin^2 \psi \cdot 2\pi\right) \cos\psi \mathrm{d}\psi \\
= &\frac{3^5\pi}{10} \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + \sin^2 \psi) \cos\psi \mathrm{d}\psi = \frac{3^5\pi}{10} \left[\sin\psi + \frac{1}{3} \sin^3 \psi\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{4 \cdot 3^4 \pi}{5} \frac{324\pi}{5}.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 12.4: Integration in Kugelkoordinaten

Berechnen Sie

$$I = \iiint\limits_{B} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \mathrm{d}(x,y,z),$$

wobei B das Innere der Kugel $x^2+y^2+z^2+2Ry=0$ ist.

Hinweis: Verwenden Sie die Kugelkoordinaten

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sin\varphi\sin\theta \\ r\cos\theta \\ r\cos\varphi\sin\theta \end{pmatrix}.$$

Lösung 12.4:

Zunächst wird der Rand des Bereiches B untersucht:

$$0 = x^2+y^2+z^2+2Ry = x^2+(y+R)^2+z^2-R^2.$$

B ist also eine Kugel mit Radius R um den Mittelpunkt $(0,-R,0)$. In den gegebenden Kugelkoordinaten hat man dann folgende Integrationsbereiche:

- $\varphi \in [0, 2\pi]$, da die Kugel B rotationssymmetrisch bezüglich der y-Achse ist und φ einen Winkel um eben diese Achse beschreibt.
- $\theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$, da die Kugel B im negativen y-Bereich liegt.
- An den Grenzen für r soll gelten

$$\begin{aligned} 0 =& x^2+y^2+z^2+2Ry \\ =& r^2\sin^2\varphi\sin^2\theta + r^2\cos^2\theta + r^2\cos^2\varphi\sin^2\theta + 2Rr\cos\theta \\ =& r^2\sin^2\theta + r^2\cos^2\theta + 2Rr\cos\theta = r^2 + 2Rr\cos\theta \\ \Rightarrow \qquad r =& 0 \text{ oder } r = -2R\cos\theta (>0, \text{ da } \cos\theta < 0) \end{aligned}$$

  Der Integrationsbereich ist also $r \in [0, -2R\cos\theta]$.

Das Integral berechnet sich damit zu

$$\begin{aligned} I =& \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{\theta=\pi/2}^{\pi} \int\limits_{r=0}^{-2R\cos\theta} \frac{1}{r} r^2 \sin\theta \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi \\ =& 2\pi \int\limits_{\theta=\pi/2}^{\pi} \frac{(-2R\cos\theta)^2}{2} \sin\theta\mathrm{d}\theta = 4\pi R^2 \left. \frac{-\cos^3\theta}{3} \right|_{\pi/2}^{\pi} = \frac{4\pi R^2}{3}. \end{aligned}$$

Aufgabe 12.5: Masse einer Halbkugel

Berechnen Sie die Masse einer Halbkugel mit Mittelpunkt $(0,0,0)^\top$, Radius $a > 0$ sowie $z \geq 0$ und der Massendichte

a) mithilfe von Kugelkoordinaten,

b) mithilfe von Zylinderkoordinaten.

$$\rho(x,y,z) = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Hinweis: Die Masse M eines Körpers K mit Massendichte $\rho(\boldsymbol{x})$ ergibt sich aus

$$M = \int_K \rho(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

Lösung 12.5:

a) Es bietet sich die Rechnung in Kugelkoordinaten an. Wegen der Bedingung $z \geq 0$ wird θ auf das Intervall $[0,\, \pi/2]$ eingeschränkt.

$$M = \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{a} \rho \cdot r^2 \sin\theta \mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta = \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{a} \frac{r\cos\theta}{r\sin\theta} r^2 \sin\theta \mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{a^3}{3} \cdot 2\pi \int_{\theta=0}^{\pi/2} \cos\theta \mathrm{d}\theta = \frac{2\pi a^3}{3}.$$

b) Aus der Beziehung $a^2 = r^2 + z^2$ erhalten wir $0 < r < \sqrt{a^- z^2}$. In Zylinderkoordinaten erhalten wir das Integral

$$\begin{aligned} M &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{z=0}^{a} \int_{r=0}^{\sqrt{a^2-z^2}} \frac{z}{r} r \mathrm{d}r\mathrm{d}z\mathrm{d}\varphi \\ &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{z=0}^{a} \int_{r=0}^{\sqrt{a^2-z^2}} z \mathrm{d}r\mathrm{d}z\mathrm{d}\varphi \\ &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{z=0}^{a} z\sqrt{a^2-z^2} \mathrm{d}z\mathrm{d}\varphi \end{aligned}$$

Mit der Substitution $u = a^2 - z^2$ erhalten wir

$$\begin{aligned} M &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{u=a^2}^{0} -\frac{1}{2}\sqrt{u} \mathrm{d}u\mathrm{d}\varphi \\ &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{1}{3} a^3 \mathrm{d}\varphi \\ &= \frac{2\pi a^3}{3}. \end{aligned}$$

Aufgabe 12.6: Volumenintegrale

Berechnen Sie

$$\int_V \frac{\mathrm{e}^{-x^2-y^2}}{1+z^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

mit

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; z \geq 0\}.$$

Hinweise:

- Es empfiehlt sich die Rechnung in Zylinderkoordinaten.
- Der Integrationsbereich ist unendlich groß. Dadurch treten uneigentliche Integrale auf.

Lösung 12.6:

Es werden Zylinderkoordinaten (r, φ, z) verwandt: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z$. Dann gilt

$$\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,z)}\right| = r\,.$$

Es folgt

$$V' = \{(r,\varphi,z) : \quad r \in [0,\infty), \quad \varphi \in [0,2\pi], \quad z \in [0,\infty)\}$$

$$\begin{aligned}
\int_V \frac{\mathrm{e}^{-x^2-y^2}}{1+z^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \int_{V'} \frac{\mathrm{e}^{-r^2}}{1+z^2} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^\infty \left(\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-r^2} r}{1+z^2} \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^\infty \left[\frac{-\,\mathrm{e}^{-r^2}}{2(1+z^2)} \right]_0^\infty \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^\infty \frac{1}{2(1+z^2)} \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} \arctan z \right]_0^\infty \mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{\pi}{4} \mathrm{d}\varphi = \frac{\pi^2}{2}\,.
\end{aligned}$$

Aufgabe 12.7: Alte Klausuraufgabe

a) Berechnen Sie das Integral $\iint_D \frac{x^2}{y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, wobei D den von den Geraden $x = 2$, $y = x$ und der Hyperbel $xy = 1$ begrenzten Bereich des $\mathbb{R}^2$ bezeichne.

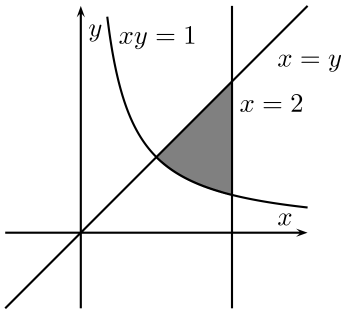
b) Gegeben sei der Körper

$$K = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 - z^2 \leq 1,\ -1 \leq z \leq 2\right\}.$$

Skizzieren Sie den Körper und berechnen Sie dessen Volumen.

Lösung 12.7:

a) Der Integrationsbereich hat die folgende Gestalt:



D ist Normalbereich bezüglich x,

$$D = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{x} \leq y \leq x, \quad 1 \leq x \leq 2\right\}.$$

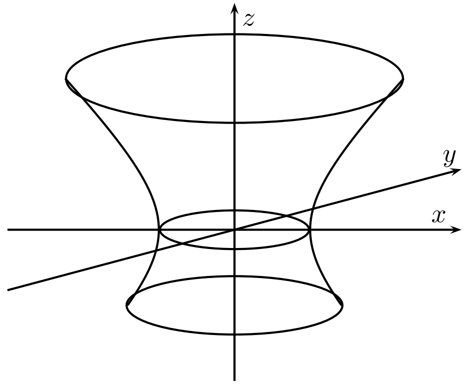
Es gilt

$$\iint_D \frac{x^2}{y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_1^2 \left(\int_{1/x}^x \frac{x^2}{y^2}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$
$$= \int_1^2 x^2 \cdot \left[\frac{-1}{y}\right]_{y=1/x}^{y=x} \mathrm{d}x$$
$$= \int_1^2 \left(-x + x^3\right)\mathrm{d}x = \frac{9}{4}.$$

b) Die Ungleichung in der Definition des Integrationsgebietes lässt sich schreiben als

$$x^2 + y^2 \leq 1 + z^2.$$

Skizze:



Das Volumen berechnet man in Zylinderkoordinaten,

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = z.$$

Die zugehörige Funktionaldeterminante ist $\left|\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \varphi, z)}\right| = r$. Das Volumen ist:

$$\int_{z=-1}^2 \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{\sqrt{1+z^2}} r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z = \int_{z=-1}^2 2\pi\frac{1+z^2}{2}\mathrm{d}z$$
$$= \pi\left(3 + \left[\frac{z^3}{3}\right]_{z=-1}^2\right)$$
$$= \pi\left(3 + \frac{8}{3} + \frac{1}{3}\right) = 6\pi.$$