Helmut-Schmidt-Universität
Universität der Bundeswehr Hamburg
Fakultät für Maschinenbau und Bauingenieurwesen

Prof. Dr. Thomas Carraro
M.Sc Janna Puderbach

Mathematik II/B (WI/ET) — Blatt 9

WT 2024 — Taylor-Polynom, Extrempunkte, Äquipotentialfläche

Einführende Bemerkungen

- Vermeiden Sie die Verwendung von Taschenrechnern oder Online-Ressourcen.

Aufgabe 9.1: Frühere Klausuraufgabe

Berechnen Sie die Integrale

i) $I_1 = \int_0^1 (2x-1)\cosh(x)\mathrm{d}x,$

ii) $I_2 = \int \frac{\sin(x)\mathrm{e}^{\tan x}}{\cos^3(x)}\mathrm{d}x$

Aufgabe 9.2: Tangentialebene und Richtungsableitung

Gegeben sei die multivariate Funktion

$$f(x,y,z) = 3x^3y - 2xy^2 - z.$$

a) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene zu der Äquipotentialfläche

$$f(x,y,z) = 0$$

in dem Punkt auf der Oberfläche mit den Koordinaten $x = 2$ und $y = 1$.

b) Berechnen Sie die Richtungsableitung von f in die Richtung des Vektors $\boldsymbol{v} = (1,2,1)^T$ in dem Punkt $\boldsymbol{P} = (1,1,1)^T$.

Aufgabe 9.3: Lokale Extrema in 2 Dim.

Gegeben sei die Funktion $f \in \mathrm{Abb}\,(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ mit

$$f(x,y) = (x+y)^2 - 4\,(x+y-2) + y^3 - 3y.$$

Bestimmen Sie alle stationären (kritischen) Punkte dieser Funktion und geben Sie an, ob es sich dabei um lokale Minima, Maxima oder Sattelpunkte handelt, oder ob der Charakter des stationären Punktes nicht durch die Hesse–Matrix entschieden werden kann.

Aufgabe 9.4: Extremwerte

a) Ermitteln Sie die kritischen Punkte der Funktion

$$f(x,y) = (1+2x-y)^2 + (2-x+y)^2 + (1+x-y)^2$$

und bestimmen Sie, ob es sich um Maxima, Minima oder Sattelpunkte handelt.

b) Ermitteln Sie ebenso die kritischen Punkte der Funktionen

$$g(x,y,z) = x^2 + xz + y^2$$
$$h(x,y) = (y^2 - x^2)\mathrm{e}^{\frac{x^2+y^2}{2}}$$

und bestimmen Sie, ob es sich um Maxima, Minima oder Sattelpunkte handelt.

Aufgabe 9.5: Taylor-Entwicklung

a) Geben Sie zu der Funktion

$$f(x,y) = x\sin(xy)$$

die Taylor-Entwicklung ersten Grades $T_1(\boldsymbol{x})$ um den Punkt $\boldsymbol{x}_0 = (1,0)^\top$ an.

b) Berechnen Sie $f(\boldsymbol{x})$ und $T_1(\boldsymbol{x})$ an der Stelle $\boldsymbol{x}_1 = (0,1)^\top$. Berechnen Sie außerdem den Fehler der Taylor-Approximation $T_1(\boldsymbol{x}_1) - f(\boldsymbol{x}_1)$.

c) Geben Sie das Lagrange-Restglied an.

Aufgabe 9.6: Taylor-Entwicklung

Gegeben seien die beiden Funktionen $\mathbb{R} \xrightarrow{\boldsymbol{r}} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = -\,\mathrm{e}^{y+1-x^2} \qquad \text{und} \qquad \boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos(\pi \cdot t) \\ \ln t - \sin^2(\pi \cdot t) \end{pmatrix}.$$

a) Geben Sie die Taylorentwicklung zweiter Ordnung $T_{2,f}$ der Funktion f um den Punkt $\boldsymbol{x}_0 = (1,\,0)^\top$ an.

b) Geben Sie die Taylorentwicklung zweiter Ordnung $\boldsymbol{T}_{2,r}$ der Funktion $\boldsymbol{r}$ um den Punkt $t_0 = 1$ an. (Entwickeln Sie dazu die Komponenten r_1 und r_2 der Funktion $\boldsymbol{r} = (r_1, r_2)^\top$ separat.)

c) Bilden Sie durch Verkettung beider Funktionen die Funktion

$$g(t) := f \circ \boldsymbol{r}(t).$$

d) Verketten Sie ebenso die beiden Taylor-Polynome

$$\tilde{g}(t) := T_{2,f} \circ \boldsymbol{T}_{2,r}(t).$$

e) Vergleichen Sie g und $\tilde{g}$ und die Taylorpolynome erster Ordung dieser beiden Funktionen.

Ergebnisse zu Aufgabe 9.3:

Die stationären Punkte lauten $P_1 = (3,-1)$ und $P_2 = (1,1)$.

Ergebnisse zu Aufgabe 9.4:

a) f: $(-3/2,-2)^\top$, g: $(0,0,0)^\top$, h: $(0,0)^\top$

Ergebnisse zu Aufgabe 9.5:

$T_1(x,y) = y$

Ergebnisse zu Aufgabe 9.6:

$$T_{2,f}(x,y) = -1 + 2(x-1) - y - (x-1)^2 + 2(x-1)y - \frac{y^2}{2}$$
$$T_{2,\boldsymbol{r}} = \begin{pmatrix} -1 - \frac{1}{2}\pi^2(t-1)^2 \\ (t-1) - \frac{1}{2}(1+2\pi^2)(t-1)^2 \end{pmatrix}$$