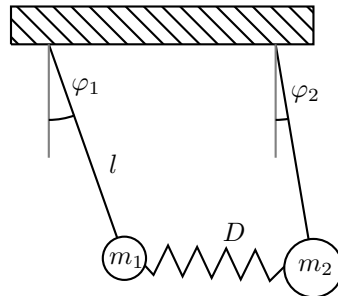


Aufgabe 3.1: Gekoppelte Schwingung

Zu untersuchen ist das unten skizzierte mechanische System aus zwei durch eine Feder (Federkonstante D) verbundene Massen m_1 und m_2 . Die beiden Massen sind im Schwerfeld der Erde (g) an Fäden der Länge l so aufgehängt, dass die Feder entspannt ist, wenn beide Fäden senkrecht sind ($\varphi_1 = \varphi_2 = 0$). Für kleine Auslenkungen der Massen um die Winkel φ_1 bzw. φ_2 ergibt der Impulserhaltungssatz:

$$\begin{aligned} m_1 l \ddot{\varphi}_1 &= -m_1 \varphi_1 g + D l (\varphi_2 - \varphi_1) \\ m_2 l \ddot{\varphi}_2 &= -m_2 \varphi_2 g + D l (\varphi_1 - \varphi_2). \end{aligned}$$



Durch den Übergang von den Auslenkungen φ_1, φ_2 und deren Geschwindigkeiten $\dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2$ zu $\mathbf{y} = (\varphi_1, \dot{\varphi}_1, \varphi_2, \dot{\varphi}_2)^\top$ lässt sich das obige (Differential-)Gleichungssystem schreiben als

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A} \mathbf{y} \text{ mit } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\left(\frac{g}{l} + \frac{D}{m_1}\right) & 0 & \frac{D}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{D}{m_2} & 0 & -\left(\frac{g}{l} + \frac{D}{m_2}\right) & 0 \end{pmatrix}.$$

- Bestimmen Sie die Eigenfrequenzen des Systems. Die Eigenfrequenzen sind die Imaginärteile der komplexen Eigenwerte der Systemmatrix \mathbf{A} .
- Bestimmen Sie auch die Eigenvektoren zu den ermittelten Eigenwerten.
- Nehmen Sie nun an, dass der Realteil eines Eigenvektors die jeweilige *Eigenschwingung* des Systems beschreibt: Die erste und dritte Komponente (Beachte $\mathbf{y} = (\varphi_1, \dot{\varphi}_1, \varphi_2, \dot{\varphi}_2)^\top$) geben jeweils den Maximalausschlag des jeweiligen Pendels an. Beschreiben Sie anhand der Eigenvektoren die beiden Eigenschwingungen.

Lösung 3.1:

- Mit $\alpha = \frac{g}{l}$ und $\delta_j = \frac{D}{m_j}$ für $j = 1, 2$ haben wir das charakteristische Polynom:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ -\alpha - \delta_1 & -\lambda & \delta_1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ \delta_2 & 0 & -\alpha - \delta_2 & -\lambda \end{pmatrix} \\ &= -\lambda \det \begin{pmatrix} -\lambda & \delta_1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & -\alpha - \delta_2 & -\lambda \end{pmatrix} - 1 \cdot \det \begin{pmatrix} -\alpha - \delta_1 & \delta_1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ \delta_2 & -\alpha - \delta_2 & -\lambda \end{pmatrix} \\ &= \lambda^2 \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -\alpha - \delta_2 & -\lambda \end{pmatrix} + \\ &\quad + \lambda \det \begin{pmatrix} -\alpha - \delta_1 & 0 \\ \delta_2 & -\lambda \end{pmatrix} + 1 \cdot \det \begin{pmatrix} -\alpha - \delta_1 & \delta_1 \\ \delta_2 & -\alpha - \delta_2 \end{pmatrix} \\ &= \lambda^2 (\lambda^2 + \alpha + \delta_2) + \lambda^2 (\alpha + \delta_1) + (\alpha + \delta_1)(\alpha + \delta_2) - \delta_1 \delta_2 \\ &= (\lambda^2)^2 + 2 \frac{\alpha + \delta_1 + \alpha + \delta_2}{2} \lambda^2 + \alpha^2 + \alpha(\delta_1 + \delta_2). \end{aligned}$$

Für seine Nullstellen (mit $p(\lambda) = 0$) gilt:

$$\begin{aligned} \lambda^2 &= -\frac{2\alpha + \delta_1 + \delta_2}{2} \pm \sqrt{\frac{(2\alpha + \delta_1 + \delta_2)^2}{4} - \alpha^2 - \alpha(\delta_1 + \delta_2)} \\ &= \frac{-2\alpha - \delta_1 - \delta_2 \pm \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2 + 2\delta_1 \delta_2}}{2} = \frac{-2\alpha - (\delta_1 + \delta_2) \pm (\delta_1 + \delta_2)}{2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\alpha}, \lambda_{3,4} = \pm i\sqrt{\alpha + \delta_1 + \delta_2}.$$

Die Eigenfrequenzen des Systems sind damit

$$\omega_1 = \sqrt{\alpha} = \sqrt{\frac{g}{l}} \text{ und } \omega_2 = \sqrt{\alpha + \delta_1 + \delta_2} = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{D}{m_1} + \frac{D}{m_2}}.$$

b) Ein Eigenvektor \mathbf{v}_1 zu λ_1 ist gegeben durch das Gleichungssystem

$$(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{E})\mathbf{v}_1 = 0,$$

also durch

$-i\sqrt{\alpha}$	1	0	0	0	2. Zeile + $i\sqrt{\alpha}$ · 1. Zeile
$-\alpha - \delta_1$	$-i\sqrt{\alpha}$	δ_1	0	0	1. Zeile
0	0	$-i\sqrt{\alpha}$	1	0	4. Zeile + $i\sqrt{\alpha}$ · 3. Zeile
δ_2	0	$-\alpha - \delta_2$	$-i\sqrt{\alpha}$	0	3. Zeile
$-\delta_1$	0	δ_1	0	0	+ δ_1/δ_2 · 3. Zeile
$-i\sqrt{\alpha}$	1	0	0	0	
δ_2	0	$-\delta_2$	0	0	
0	0	$-i\sqrt{\alpha}$	1	0	
0	0	0	0	0	
$-i\sqrt{\alpha}$	1	0	0	0	
δ_2	0	$-\delta_2$	0	0	
0	0	$-i\sqrt{\alpha}$	1	0	

Daraus ergibt sich $\mathbf{v}_1 = (1, i\omega_1, 1, i\omega_1)^\top$.

Wegen $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$ und weil die Matrix \mathbf{A} reell ist, ist

$$\mathbf{v}_2 = \overline{\mathbf{v}_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i\omega_1 \\ 1 \\ -i\omega_1 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor zu λ_2 .

Für die zweite Eigenfrequenz ω_2 ergibt sich

$-i\omega_2$	1	0	0	0	2. Zeile + $i\omega_2$ · 1. Zeile
$-\alpha - \delta_1$	$-i\omega_2$	δ_1	0	0	1. Zeile
0	0	$-i\omega_2$	1	0	4. Zeile + $i\omega_2$ · 3. Zeile
δ_2	0	$-\alpha - \delta_2$	$-i\omega_2$	0	3. Zeile
$\omega_2^2 - \alpha - \delta_1$	0	δ_1	0	0	
$-i\omega_2$	1	0	0	0	
δ_2	0	$-\alpha - \delta_2 + \omega_2^2$	0	0	
0	0	$-i\omega_2$	1	0	
δ_2	0	δ_1	0	0	
$-i\omega_2$	1	0	0	0	
δ_2	0	δ_1	0	0	
0	0	$-i\omega_2$	1	0	

Daraus erhält man den Eigenvektor $\mathbf{v}_3 = (1, i\omega_2, -\delta_2/\delta_1, -i\omega_2\delta_2/\delta_1)^\top$ zu $\lambda_3 =$

ω_2 und den Eigenvektor

$$\mathbf{v}_4 = \overline{\mathbf{v}_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i\omega_2 \\ -\delta_2/\delta_1 \\ i\omega_2\delta_2/\delta_1 \end{pmatrix}$$

zu $\lambda_4 = \overline{\lambda_3}$.

c) Wir gehen wieder zu den ursprünglichen Unbekannten $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2)^\top$ über und erhalten die folgenden Eigenschwingungen:

i) $\boldsymbol{\varphi}_1(t) = (\alpha \cos(\omega_1 t) + \beta \sin(\omega_1 t)) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dies beschreibt eine gleichphasige Schwingung beider Pendel.
Da beide Amplituden (Komponenten des Vektors) positiv sind, schlagen beide Pendel gleichzeitig in dieselbe Richtung aus.
Die Feder bleibt immer entspannt.

ii) $\boldsymbol{\varphi}_2(t) = (\gamma \cos(\omega_2 t) + \delta \sin(\omega_2 t)) \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{\delta_2}{\delta_1} \end{pmatrix}$. Dies beschreibt eine gegenphasige Schwingung beider Pendel.
Beide Amplituden haben ein unterschiedliches Vorzeichen, also schlagen die Pendel jeweils in unterschiedliche Richtungen aus.
Das Verhältnis beider Amplituden ist so groß, dass der Schwerpunkt beider Massen stets im selben Punkt liegt.

Aufgabe 3.2: Approximation der Flugbahn eines Projektils

Ein kugelförmiges Projektil mit einem Radius von 5 cm aus Stahl wird mit einer bestimmten Anfangsgeschwindigkeit $\mathbf{v}_0 = (v_{x,0}, v_{y,0})^T$ geworfen. Die Flugbahn wird unter Berücksichtigung des Luftwiderstands approximiert. Die Formel für die Luftwiderstandskraft lautet

$$F = \frac{1}{2} c \rho A |\mathbf{v}|^2,$$

wobei die Parameter in der Formel sind

- $c = 0.47$ $[-]$: Luftwiderstandsbeiwert für ein kugelförmiges Projektil,
- A $[m^2]$: Querschnittsfläche des kugelförmigen Projektils,
- $\rho = 1.225$ $[Kg/m^3]$: Dichte der Luft.

Die Flugbahn liegt in der xy-Ebene. Die Position des Projektils $\mathbf{P}(t)$ in der Zeit wird von beiden Komponenten des Positionsvektors bestimmt

$$\mathbf{P}(t) = (x_p(t), y_p(t))^T.$$

Wir sind nur an der x-Komponente interessiert, welche mit der folgenden Formel beschrieben werden kann

$$x_p(t) = \frac{1}{\mu} \ln(1 + \mu v_{x,0} t),$$

wobei die Parameter in der Formel sind

- $\mu = \frac{1}{2m} c \rho A$ $[1/m]$,
- $v_{x,0} = 60$ $[m/s]$: x-Komponente der Anfangsgeschwindigkeit,
- m $[kg]$: Masse des Projektils, die unter Berücksichtigung der Dichte des Stahls, $\rho_s = 7.85 [gr/cm^3]$, bestimmt werden muss.
- Bestimmen Sie das Taylor-Polynom zweiter Ordnung $T_2(t)$, das die x-Komponente $x_p(t)$ der Flugbahn um den Zeitpunkt $t = 0$ approximiert.
- Berechnen Sie die Differenz zwischen der Position $x_p(t)$ des Projektils und seiner Taylor-Approximation $T_2(t)$ zum Zeitpunkt $t = 10$: $d(t) = |T_2(t) - x_p(t)|$.
- Bestimmen Sie das Restglied und geben Sie eine obere Schranke für seinen Betrag im Zeitintervall $t = [0, 10]$ an. Vergleichen Sie dies mit der oben berechneten Differenz $d(10)$.

Hinweis: Man achtet auf die Einheiten!

Lösung 3.2:

- Durchmesser der kreisförmigen Querschnittsfläche: $D = 10 \text{ cm} = 0.1 \text{ m}$,
- Querschnittsfläche $A = \pi D^2/4 \approx 0.0079 \text{ m}^2$,
- Volumen der Kugel: $V = \pi D^3/6 \approx 5.236 \cdot 10^{-4}$,
- Dichte des Stahls $\rho_s = 7.85 \text{ gr/cm}^3 = 7850 \text{ kg/m}^3$,
- Masse der Kugel: $m = \rho_s V \approx 4.1103$,
- $\mu \approx 5.5 \cdot 10^{-4}$.

Das Taylor-Polynom um den Zeitpunkt $t = 0$ ist

$$T_2(t) = x_p(0) + x'_p(0) t + \frac{1}{2} x''_p(0) t^2$$

und das Restglied ist

$$R_2(t, \xi) = \frac{1}{6} x'''_p(\xi) t^3.$$

Die Ableitungen der Funktion x_p sind

$$\begin{aligned} x'_p(t) &= \frac{v_{x,0}}{\mu v_{x,0} t + 1}, \\ x''_p(t) &= \frac{-\mu v_{x,0}^2}{(\mu v_{x,0} t + 1)^2}, \\ x'''_p(t) &= \frac{2\mu^2 v_{x,0}^3}{(\mu v_{x,0} t + 1)^3}, \end{aligned}$$

und zum Zeitpunkt $t = 0$ sind

$$\begin{aligned} x'_p(0) &= 60, \\ x''_p(0) &\approx -1.9803, \\ x'''_p(0) &\approx 0.1307. \end{aligned}$$

- Das Taylor-Polynom ist

$$T_2(t) = 60 t - 1.9803 t^2.$$

- Die Differenz in $t = 10$ ist

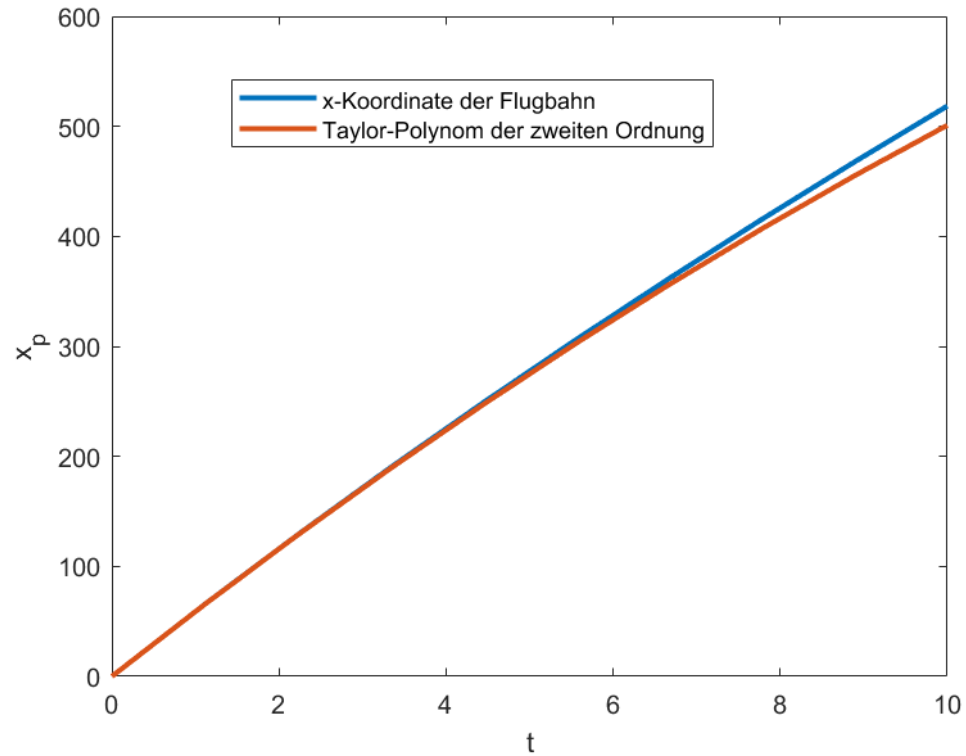
$$d(10) = |T_2(10) - x_p(10)| \approx 17.5117.$$

- Das Restglied ist

$$R_2(t; \xi) = \frac{1}{6} \frac{0.1307}{(0.0330 \xi + 1)^3} x^3.$$

Eine Abschätzung der Schranke bekommt man für $t = 10$ und $\xi = 0$

$$R_2(t; \xi) \leq \frac{1}{6} x_p'''(0) 10^3 \approx 21.7863$$



Ergebnisse zu Aufgabe 3.1:

Eigenwerte: $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\alpha}$, $\lambda_{3,4} = \pm i\sqrt{\alpha + \delta_1 + \delta_2}$ mit $\alpha = g/l$, $\delta_j = D/m_j$

Eigenfrequenzen: $\omega_1 = \sqrt{\alpha}$, $\omega_2 = \sqrt{\alpha + \delta_1 + \delta_2}$

Ergebnisse zu Aufgabe 3.2:

Die Ableitungen der Funktion x_p zum Zeitpunkt $t = 0$ sind

$$x_p'(0) = 60,$$

$$x_p''(0) \approx -1.9803,$$

$$x_p'''(0) \approx 0.1307.$$

Die Differenz zwischen der Funktion x_p und dem Taylor-Polynom zum Zeitpunkt $t = 10$ ist

$$d(10) = |T_2(10) - x_p(10)| \approx 17.5117.$$

Graph der x-Koordinate der Flugbahn und des Taylor-Polynoms

