Helmut-Schmidt-Universität
Universität der Bundeswehr Hamburg
Fakultät für Maschinenbau

Prof. Dr. Thomas Carraro
Dr. Frank Gimbel
Janna Puderbach

HELMUT SCHMIDT UNIVERSITÄT
Universität der Bundeswehr Hamburg

Mathematik III — Blatt 2

FT 2022 — Integration

Einführende Bemerkungen

- Vermeiden Sie die Verwendung von Taschenrechnern oder Online-Ressourcen.
- Die mit einem Stern *) markierten (Teil-)Aufgaben entfallen in diesem Trimester. Stattdessen werden einzelne Online-Aufgaben im ILIAS-Kurs kenntlich gemacht, zu denen Sie dort Ihre Lösungswege zur Korrektur hochladen können.
- Die mit zwei Sternen **) markierten (Teil-)Aufgaben richten sich an Studierende, die die übrigen Aufgaben bereits gelöst haben und die Inhalte weiter vertiefen möchten.

Aufgabe 2.1: Uneigentliche Integrale

Welche der folgenden uneigentlichen Integrale besitzen einen endlichen Wert? Bestimmen Sie den Wert dieser Integrale.

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^{1/4}}\,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_0^{1/\pi} \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ d) $\displaystyle\int_0^{\infty} 2x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$

Lösung 2.1:

a) Dieses Integral existiert:

$$\int_0^1 x^{-\frac14}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to 0}\int_a^1 x^{-\frac14}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to 0}\left(\frac43\, x^{\frac34}\Big|_a^1\right) = \frac43\lim_{a\to 0}(1-a^{3/4}) = \frac43.$$

b) Dieses Integral existiert nicht:

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to 0}\int_a^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to 0}\left(\ln|x|\Big|_a^1\right) = \lim_{a\to 0}(\ln 1 - \ln a) = +\infty.$$

c) Hier ist

$$\int_0^{1/\pi} \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to 0}\int_a^{1/\pi} \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to 0}\cos\frac{1}{x}\Big|_a^{1/\pi} = \lim_{a\to 0}\left(\cos(\pi)-\cos\frac{1}{a}\right).$$

Der Grenzwert existiert nicht, da $\cos(1/a)$ für $a\to 0$ immer wieder alle Werte zwischen -1 und $+1$ annimmt. Also existiert auch kein Wert für das Integral.

d) Dieses Integral existiert:

$$\int_0^{\infty} 2x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to\infty}\int_0^a 2x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to\infty}\left(-\mathrm{e}^{-x^2}\Big|_0^a\right)$$
$$= \lim_{a\to\infty}\left(-\mathrm{e}^{-a^2}+\mathrm{e}^0\right) = 0+1 = 1.$$

Aufgabe 2.2: Volumenintegrale

Berechnen Sie

$$\int_V \frac{\mathrm{e}^{-x^2-y^2}}{1+z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

mit

$$V = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ z\ge 0\}.$$

Hinweise:

- Es empfiehlt sich die Rechnung in Zylinderkoordinaten.
- Der Integrationsbereich ist unendlich groß. Dadurch treten uneigentliche Integrale auf.

Lösung 2.2:

Es werden Zylinderkoordinaten (r,φ,z) verwandt: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z$. Dann gilt

$$\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,z)}\right| = r\,.$$

Es folgt

$$V' = \{(r,\varphi,z): \quad r\in[0,\infty), \quad \varphi\in[0,2\pi], \quad z\in[0,\infty)\}$$

$$\begin{aligned}
\int_V \frac{\mathrm{e}^{-x^2-y^2}}{1+z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \int_{V'} \frac{\mathrm{e}^{-r^2}}{1+z^2} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z \\
&= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^\infty\left(\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-r^2} r}{1+z^2}\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^\infty \left[\frac{-\mathrm{e}^{-r^2}}{2(1+z^2)}\right]_0^\infty \mathrm{d}z\right)\mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^\infty \frac{1}{2(1+z^2)}\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2}\arctan z\right]_0^\infty \mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^{2\pi}\frac{\pi}{4}\mathrm{d}\varphi = \frac{\pi^2}{2}\,.
\end{aligned}$$

Aufgabe 2.3: Masse einer Halbkugel

Berechnen Sie die Masse einer Halbkugel mit Mittelpunkt $(0,0,0)^\top$, Radius $a>0$ sowie $z\ge 0$ und der Massendichte

$$\rho(x,y,z) = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Hinweis: Die Masse M eines Körpers K mit Massendichte $\rho(\boldsymbol{x})$ ergibt sich aus

$$M = \int\limits_K \rho(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

Lösung 2.3:

Es bietet sich die Rechnung in Kugelkoordinaten an. Wegen der Bedingung $z\ge 0$ wird θ auf das Intervall $[0,\,\pi/2]$ eingeschränkt.

$$\begin{aligned}
M &= \int\limits_{\theta=0}^{\pi/2}\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi}\int\limits_{r=0}^{a} \rho\cdot r^2\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta = \int\limits_{\theta=0}^{\pi/2}\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi}\int\limits_{r=0}^{a} \frac{r\cos\theta}{r\sin\theta} r^2\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{a^3}{3}\cdot 2\pi \int\limits_{\theta=0}^{\pi/2}\cos\theta\mathrm{d}\theta = \frac{2\pi a^3}{3}.
\end{aligned}$$

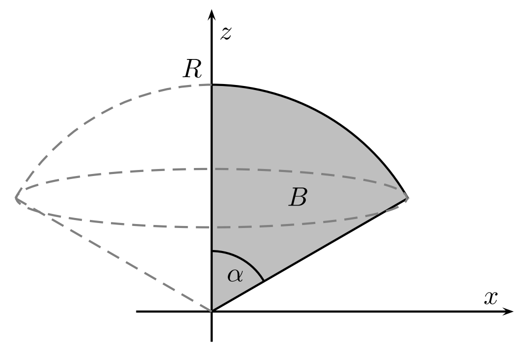
Aufgabe 2.4: Wiederholung: Schwerpunkt und Trägheitsmoment

Gegeben sei der Kreissektor B in der x–z–Ebene in Abhängigkeit von den Parametern

$$R>0 \text{ und } 0<\alpha\le\pi\ .$$

Durch die Rotation der Fläche B um die z–Achse wird ein Kugelsegment K gebildet.

Bestimmen Sie den Schwerpunkt und das Trägheitsmoment bezüglich der z-Achse des homogenen Rotationskörpers.



Lösung 2.4:

Zunächst benötigen wir das Volumen des Rotationskörpers. Wir führen die Berechnung in Kugelkoordinaten durch:

$$\begin{aligned} V = \int_K \mathrm{d}V &= \int_0^{2\pi}\int_0^R\int_0^\alpha r^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi \\ &=2\pi\frac{R^3}{3}\int_0^\alpha \sin\theta\mathrm{d}\theta = \frac{2\pi R^3}{3}\left(-\cos(\alpha)+\cos(0)\right) = \frac{2\pi R^3}{3}(1-\cos(\alpha)). \end{aligned}$$

Wegen der Symmetrie des Rotationskörpers liegt der Schwerpunkt auf der z–Achse des Koordinatensystems. Es ist also nur die z–Komponente z_S zu berechnen:

$$\begin{aligned} z_\mathrm{S} =&\frac{1}{V}\int_K z\mathrm{d}V = \frac{1}{V}\int_0^{2\pi}\int_0^R\int_0^\alpha r\cos\theta r^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi \\ =&\frac{2\pi}{V}\cdot\frac{R^4}{4}\int_0^\alpha \sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta = \frac{3R}{4(1-\cos\alpha)}\cdot\left.\frac{\sin^2\theta}{2}\right|_0^\alpha \\ =&\frac{3R\sin^2\alpha}{8(1-\cos\alpha)} = \frac{3R}{8}\cdot\frac{1-\cos^2\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{3R}{8}(1+\cos\alpha). \end{aligned}$$

Das Trägheitsmoment bezüglich der z-Achse ergibt sich zu:

$$\begin{aligned} \Theta_z =& \int_K r_\perp^2\mathrm{d}V = \int_0^{2\pi}\int_0^R\int_0^\alpha (r\sin\theta)^2 r^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi \\ =&\frac{2\pi R^5}{5}\int_0^\alpha \sin^2\theta\cdot\sin\theta\mathrm{d}\theta = \frac{2\pi R^5}{5}\int_0^\alpha (1-\cos^2\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta \\ =&\frac{2\pi R^5}{5}\left[-\cos\theta+\frac{\cos^3\theta}{3}\right]_0^\alpha = \frac{2\pi R^5}{5}\left(1-\cos\alpha+\frac{\cos^3\alpha-1}{3}\right) \\ =&\frac{2\pi R^5}{15}(\cos^3\alpha-3\cos\alpha+2). \end{aligned}$$

Aufgabe 2.5: Parametrisierung von Integrationsbereichen

Gegeben seien die folgenden drei Körper im $\mathbb{R}^3$:

- ein Quader $Q = \{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3 |\, 0\le x_1\le 1,\, 0\le x_2\le 1,\, -3\le x_3\le 3\}$
- eine Kugel $K = \{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3 |\, \|\boldsymbol{x}\|\le 1\}$
- ein Zylinder $Z = \{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3 |\, x_1^2+x_2^2\le 1,\ 0\le x_3\le 3\}$

Skizzieren und parametrisieren Sie die Schnittmenge eines jeden einzelnen dieser Körper mit den beiden folgenden Mengen:

$$M_1 = \{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3 |\, 0\le \boldsymbol{x}_3\},\ M_2 = \{\boldsymbol{x} |\, 3x_1\le x_3\}.$$

D. h. geben Sie die Integrationsgrenzen der zugehörigen Volumenintegrale über die Bereiche $Q\cap M_1$, $Q\cap M_2$, $K\cap M_1$, ... an.

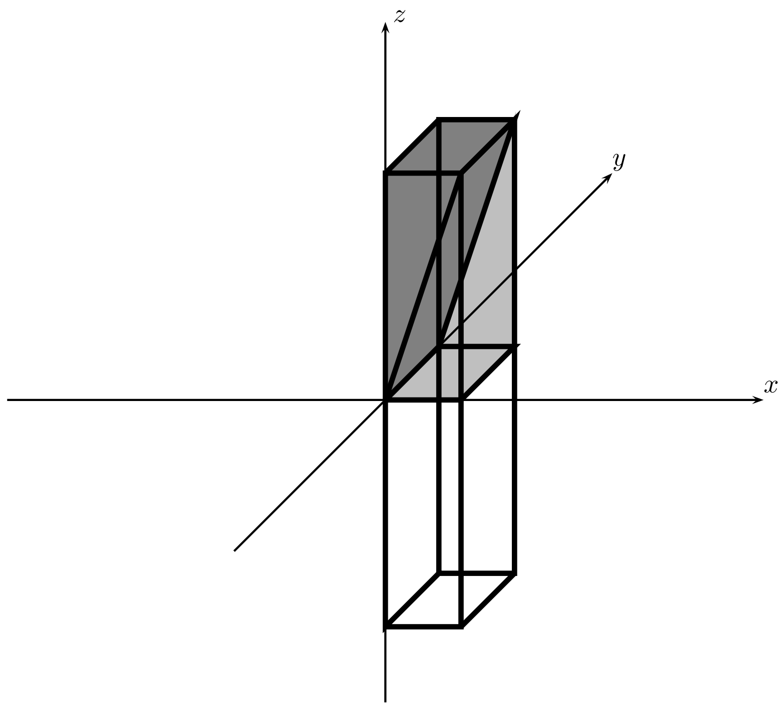
Lösung 2.5:

M_1 beschreibt den oberen Halbraum $z\ge 0$. M_2 beschreibt die Menge der Punkte oberhalb der Ebene $z=3x$. Für die Schnittmengen mit den drei Körpern hat man jeweils:

- Für den Quader:

$$\begin{aligned} Q\cap M_1 =& \{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3 |\, 0\le x_1\le 1,\, 0\le x_2\le 1,\, 0\le x_3\le 3\} \\ Q\cap M_2 =& \{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3 |\, 0\le x_1\le 1,\, 0\le x_2\le 1,\, 3x_1\le x_3\le 3\} \end{aligned}$$

  Für $Q\cap M_2$ muss man keine Fallunterscheidung der x_3-Grenzen vornehmen, da die Obergrenze des Quaders ($z=3$) die Ebene $3y=z$ nur an der Kante des Quaders schneidet.



- Für die Kugel:

$$K \cap M_1 = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \middle| -1 \leq x_1 \leq +1,\, -\sqrt{1-x_1^2} \leq x_2 \leq +\sqrt{1-x_1^2},\, 0 \leq x_3 \leq \sqrt{1-x_2^2-x_3^2} \right\}$$

Die zweite Schnittmenge $K \cap M_2$ besteht aus zwei Bereichen: B_1 der Bereich, der von oben durch die Kugeloberfläche und von unten durch die Ebene $3x = z$ begrenzt wird.
B_2, der von oben und von unten durch die Kugeloberfläche begrenzt wird, da die Ebenbe dort außerhalb der Kugel liegt.
Für die Schnittkurve der Kugeloberfläche $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ mit der Ebene $3x = z$ gilt

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 9x^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow \qquad x &= \pm\sqrt{\frac{1-y^2}{10}} \end{aligned}$$

Damit darf y nur Werte zwischen -1 und $+1$ annehmen.

B_1 lässt sich somit parametrisieren als

$$\begin{aligned} B_1 = \Big\{ &\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \Big| -1 \leq x_2 \leq 1,\, -\sqrt{\frac{1-x_2^2}{10}} \leq x_1 \leq \sqrt{\frac{1-x_2^2}{10}}, \\ &3x_1 \leq x_3 \leq \sqrt{1-x_1^2-x_2^2} \Big\} \end{aligned}$$

Für den zweiten Teil von $K \cap M_2$ ergibt sich

$$\begin{aligned} B_2 = \Big\{ &\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \Big| -1 \leq x_2 \leq 1,\, -\sqrt{1-x_2^2} \leq x_1 \leq -\sqrt{\frac{1-x_2^2}{10}}, \\ &-\sqrt{1-x_1^2-x_2^2} \leq x_3 \leq \sqrt{1-x_1^2-x_2^2} \Big\} \end{aligned}$$

Eine Parametrisierung in Kugelkoordinaten, deren z-Achse ($\tilde{z}$ in der Skizze) senkrecht auf der Ebene $3x = z$ steht, wäre für diesen Körper deutlich einfacher. Die entsprechende Rotation um die y-Achse wird durch die (orthogonale) Matrix

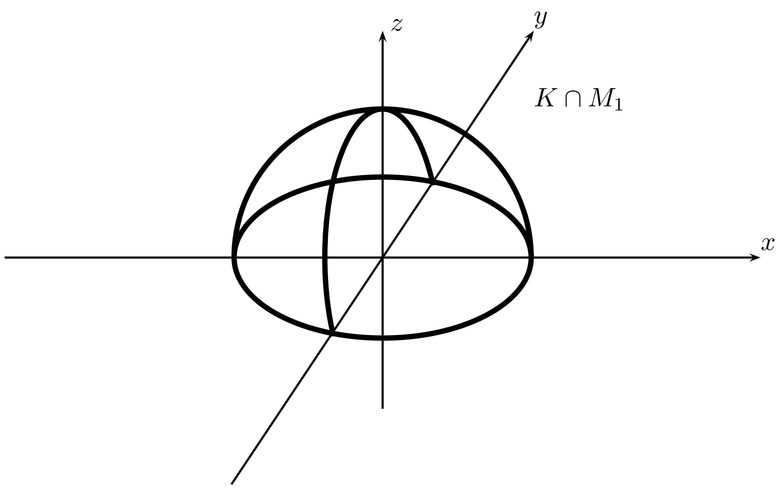
$$\boldsymbol{R} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

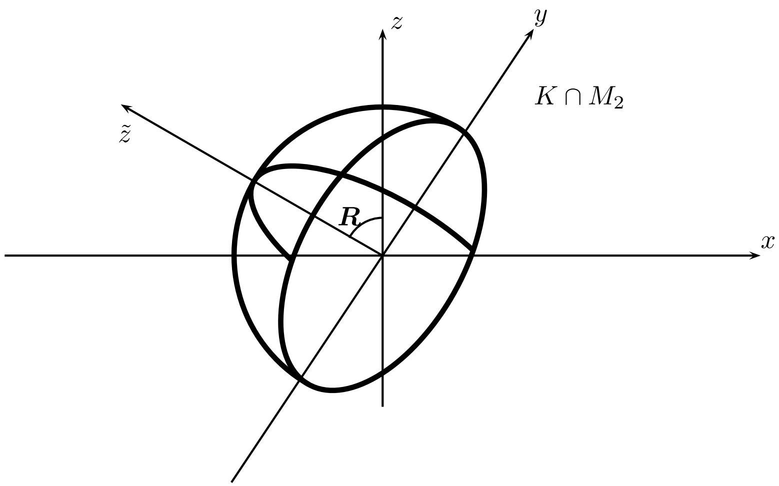
beschrieben. Damit ergibt sich dann

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}(r,\theta,\varphi) &= \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix} \\ &= \frac{r}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi - 3\cos\theta \\ \sin\theta\sin\varphi \\ 3\sin\theta\cos\varphi + \cos\theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und weiter

$$K \cap M_2 = \{ \boldsymbol{x}(r,\theta,\varphi) | \, 0 \leq r \leq 1,\, 0 \leq \theta \leq \pi/2,\, 0 \leq \varphi \leq 2\pi \}\,.$$





- Für den Zylinder nutzen wir die Parametrisierung in Zylinderkoordinaten

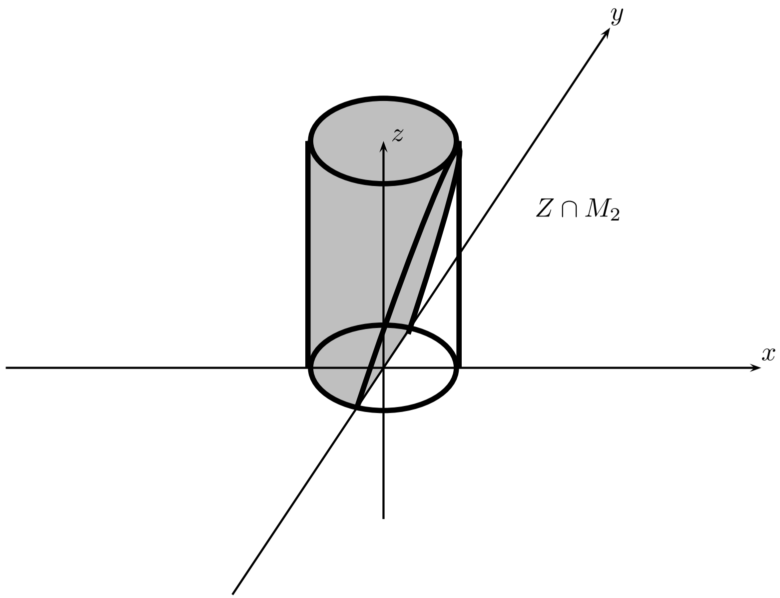
$$\boldsymbol{x}(r, \varphi, z) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$$

Die erste Menge $Z \cap M_1$ stimmt mit dem Zylinder überein.

$$\begin{aligned} Z = Z \cap M_1 &= \{\boldsymbol{x}(r, \varphi, z) | 0 \leq r \leq 1,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi,\ 0 \leq z \leq 3\} \\ Z \cap M_2 &= \{\boldsymbol{x}(r, \varphi, z) | 0 \leq r \leq 1,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi,\ z_0(r, \varphi) \leq z \leq 3\} \end{aligned}$$

Dabei berücksichtigt $z_0(r, \varphi)$, dass die Ebene $3x = z$ den Zylinderboden in der Mitte schneidet. Dies führt dazu, dass für positive x die Untergrenze des Integrationsbereichs von der Ebene beschrieben wird und für negative x durch den Zylinderboden $z = 0$:

$$z_0(r, \varphi) = \begin{cases} 0, & \text{für } \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2} \\ 3r\cos(\varphi), & \text{sonst} \end{cases} .$$



Aufgabe 2.6: Online Aufgabe

Bearbeiten Sie die aktuelle Online-Aufgabe im ILIAS-Kurs.
Beachten Sie, dass Sie dort auch die Lösungswege zu einzelnen Aufgaben zur Korrektur hochladen können.