Helmut-Schmidt-Universität
Universität der Bundeswehr Hamburg
Fakultät für Maschinenbau und Bauingenieurwesen

Prof. Dr. Thomas Carraro
M.Sc Janna Puderbach

Mathematik II/B (WI/ET) — Blatt 9

WT 2024 — Taylor-Polynom, Extrempunkte, Äquipotentialfläche

Einführende Bemerkungen

- Vermeiden Sie die Verwendung von Taschenrechnern oder Online-Ressourcen.

Aufgabe 9.1: Frühere Klausuraufgabe

Berechnen Sie die Integrale

i) $I_1 = \int_0^1 (2x-1)\cosh(x)\mathrm{d}x,$

ii) $I_2 = \int \frac{\sin(x)\mathrm{e}^{\tan x}}{\cos^3(x)}\mathrm{d}x$

Lösung 9.1:

i) Partielles Integrieren ergibt

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^1 (2x-1)\cosh(x)\mathrm{d}x \\
&= [(2x-1)\sinh(x)]_0^1 - \int_0^1 2\sinh(x)\mathrm{d}x \\
&= \sinh(1) - 2\cosh(1) + 2 = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e} - \mathrm{e}^{-1} - 2\mathrm{e} - 2\mathrm{e}^{-1} + 4\right) \\
&= \frac{4 - \mathrm{e} - 3\mathrm{e}^{-1}}{2}.
\end{aligned}
$$

ii) Wir substituieren zunächst $u = \tan x$, $\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}$ und integrieren dann partiell:

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int u\mathrm{e}^u\mathrm{d}u = u\mathrm{e}^u - \int \mathrm{e}^u\mathrm{d}u \\
&= (u-1)\mathrm{e}^u + C = (\tan(x)-1)\mathrm{e}^{\tan(x)} + C.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 9.2: Tangentialebene und Richtungsableitung

Gegeben sei die multivariate Funktion

$$f(x, y, z) = 3x^3y - 2xy^2 - z.$$

a) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene zu der Äquipotentialfläche

$$f(x, y, z) = 0$$

in dem Punkt auf der Oberfläche mit den Koordinaten $x = 2$ und $y = 1$.

b) Berechnen Sie die Richtungsableitung von f in die Richtung des Vektors $\boldsymbol{v} = (1, 2, 1)^T$ in dem Punkt $\boldsymbol{P} = (1, 1, 1)^T$.

Lösung 9.2:

a) Wir schreiben

$$z = F(x, y) = 3x^3y - 2xy^2.$$

Der Ausdruck der Tangentialebene ist

$$\begin{aligned} z &= z_0 + F_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0)(y - y_0), \\ z &= F(x_0, y_0) + F_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0)(y - y_0), \end{aligned}$$

wobei $F_x(x, y) = 9x^2y - 2y^2$ und $F_y(x, y) = 3x^3 - 4xy$.

Die Gleichung der Ebene ist dann:

$$\begin{aligned} z &= 20 + 34(x - 2) + 16(y - 1), \\ z &= 34x + 16y - 64. \end{aligned}$$

b) Für die Richtungsableitung benötigen wir den Gradienten von f:

$$\nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 9x^2y - 2y^2 \\ 3x^3 - 4xy \\ -1 \end{pmatrix},$$

Wir werten den Gradienten in dem Punkt $(1, 1, 1)$ aus

$$\nabla f(1, 1, 1) = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

Damit ist die Richtungsableitung

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}} &= \langle \nabla f, \frac{\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|} \rangle, \\ &= (7, -1, -1)^T \cdot \frac{(1, 2, 1)^T}{\|\sqrt{6}\|} = \frac{4}{\sqrt{6}}. \end{aligned}$$

Aufgabe 9.3: Lokale Extrema in 2 Dim.

Gegeben sei die Funktion $f \in \mathrm{Abb}\,(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ mit

$$f(x, y) = (x + y)^2 - 4\,(x + y - 2) + y^3 - 3y.$$

Bestimmen Sie alle stationären (kritischen) Punkte dieser Funktion und geben Sie an, ob es sich dabei um lokale Minima, Maxima oder Sattelpunkte handelt, oder ob der Charakter des stationären Punktes nicht durch die Hesse–Matrix entschieden werden kann.

Lösung 9.3:

Die stationären Punkte erhält man aus

$$\mathbf{grad}\, f(x, y) = \begin{pmatrix} 2\,(x+y) - 4 \\ 2\,(x+y) - 4 + 3\,y^2 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

zu $P_1 = (3, -1)$ und $P_2 = (1, 1)$. Die Hesse–Matrix der Funktion f lautet:

$$\boldsymbol{H}_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 + 6\,y \end{pmatrix}.$$

Für den Punkt P_1 ergibt sich damit

$$\boldsymbol{H}_f(3, -1) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = \det(\boldsymbol{H}_f) = -12 < 0\ ,$$

Damit haben die Eigenwerte verschiedene Vorzeichen und es handelt sich um einen Sattelpunkt. Entsprechend erhält man für den Punkt P_2, dass

$$\boldsymbol{H}_f(1, 1) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = \det(\boldsymbol{H}_f) = 12 > 0,\ \mathrm{Sp}(\boldsymbol{H}_f) = 10 > 0\,.$$

Damit sind beide Eigenwerte positiv und es handelt sich um ein Minimum.

Aufgabe 9.4: Extremwerte

a) Ermitteln Sie die kritischen Punkte der Funktion

$$f(x,y) = (1+2x-y)^2 + (2-x+y)^2 + (1+x-y)^2$$

und bestimmen Sie, ob es sich um Maxima, Minima oder Sattelpunkte handelt.

b) Ermitteln Sie ebenso die kritischen Punkte der Funktionen

$$g(x,y,z) = x^2 + xz + y^2$$
$$h(x,y) = (y^2 - x^2)\mathrm{e}^{\frac{x^2+y^2}{2}}$$

und bestimmen Sie, ob es sich um Maxima, Minima oder Sattelpunkte handelt.

Lösung 9.4:

a) Die kritischen Punkte sind die Nullstellen des Gradienten der Funktion f:

$$\begin{aligned} 0 \overset{!}{=} \nabla f(x,y) &= \begin{pmatrix} 4(1+2x-y) - 2(2-x+y) + 2(1+x-y) \\ -2(1+2x-y) + 2(2-x+y) - 2(1+x-y) \end{pmatrix} \\ &= \big(2 + 12x - 8y,\ -8x + 6y\big)^\top \\ \Rightarrow \qquad & x = -\frac{3}{2},\ y = -2. \end{aligned}$$

Die Hesse-Matrix der Funktion in diesem Punkt ist

$$\boldsymbol{H}_f = \begin{pmatrix} 12 & -8 \\ -8 & 6 \end{pmatrix}.$$

Ihre Eigenwerte ergeben sich als Nullstellen des charakteristischen Polynoms:

$$0 = (12-\lambda)(6-\lambda) - 64 = \lambda^2 - 2\cdot 9\lambda + 8 \ \Rightarrow\ \lambda_\pm = 9 \pm \sqrt{73} > 0.$$

Sie sind beide positiv, also ist $\boldsymbol{H}_f$ positiv definit und im Punkt $(-3/2,\,-2)$ liegt ein lokales Minimum der Funktion f.

b) Gradient und Hesse-Matrix der Funktion g ergeben sich zu:

$$\nabla g(x,y,z) = (2x+z,\ 2y,\ x)^\top$$
$$\boldsymbol{H}_g = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die einzige Nullstelle von ∇g liegt bei $(x,y,z)^\top = \mathbf{0}$.
Die Matrix $\boldsymbol{H}_g$ ist indefinit:

$$(1,0,0)\boldsymbol{H}_g \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2,\ (1,0,-2)\boldsymbol{H}_g \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = -2,$$

also hat die Funktion g im Ursprung einen Sattelpunkt.

Gradient und Hesse-Matrix der Funktion h sind

$$\begin{aligned} \nabla h(x,y) &= \mathrm{e}^{\frac{x^2+y^2}{2}} \begin{pmatrix} -2x + x(y^2-x^2) \\ 2y + y(y^2-x^2) \end{pmatrix} \\ \boldsymbol{H}_h &= \mathrm{e}^{\frac{x^2+y^2}{2}} \begin{pmatrix} -2 + y^2 - x^2 - 2x^2 - 2x^2 + x^2(y^2-x^2) & 2xy - 2xy + xy(y^2-x^2) \\ -2xy + 2xy + xy(y^2-x^2) & 2 + 3y^2 - x^2 + 2y^2 + y^2(y^2-x^2) \end{pmatrix} \\ &= \mathrm{e}^{\frac{x^2+y^2}{2}} \begin{pmatrix} -2 - 5x^2 + y^2 + x^2(y^2-x^2) & xy(y^2-x^2) \\ xy(y^2-x^2) & 2 + 5y^2 - x^2 + y^2(y^2-x^2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die kritischen Punkte sind Nullstellen von ∇h, für diese gilt:

$$\begin{aligned} & x(-2+y^2-x^2) = 0 \text{ und } y(2+y^2-x^2) = 0 \\ \Leftrightarrow \qquad & \big(x = 0 \text{ und } y = 0\big) \\ & \text{oder } \big(x = 0 \text{ und } 2 + y^2 - x^2 = 0\big) \\ & \text{oder } \big(-2 + y^2 - x^2 = 0 \text{ und } y = 0\big) \\ & \text{oder } \big(-2 + y^2 - x^2 = 0 \text{ und } 2 + y^2 - x^2 = 0\big) \\ \Leftrightarrow & (x,y)^\top = (0,0)^\top. \end{aligned}$$

Der einzige kritische Punkt ist also $(0,0)^\top$. Dort ist die Hesse-Matrix

$$H_h(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix ist indefinit, also handelt es sich um einen Sattelpunkt.

Aufgabe 9.5: Taylor-Entwicklung

a) Geben Sie zu der Funktion

$$f(x,y) = x\sin(xy)$$

die Taylor-Entwicklung ersten Grades $T_1(\boldsymbol{x})$ um den Punkt $\boldsymbol{x}_0 = (1,0)^\top$ an.

b) Berechnen Sie $f(\boldsymbol{x})$ und $T_1(\boldsymbol{x})$ an der Stelle $\boldsymbol{x}_1 = (0,1)^\top$. Berechnen Sie außerdem den Fehler der Taylor-Approximation $T_1(\boldsymbol{x}_1) - f(\boldsymbol{x}_1)$.

c) Geben Sie das Lagrange-Restglied an.

Lösung 9.5:

a) Der Wert der Funktion selbst sowie der der ersten Ableitung im Punkt $\boldsymbol{x}_0 = (1,0)^\top$ sind:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x\sin(xy) & \Rightarrow \qquad f(1,0) &= 0 \\ \nabla f(x,y) &= (\sin(xy) + xy\cos(xy),\ x^2\cos(xy))^\top & \Rightarrow \qquad \nabla f(1,0) &= (0,\ 1)^\top. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich die Taylor-Summe (mit $\boldsymbol{x} = (x,y)^\top$):

$$T_1(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0) + \langle \nabla f(\boldsymbol{x}_0),\ (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)\rangle = 0 + \left\langle (0,\ 1)^\top,\ (x-1,\ y-0)^\top \right\rangle = y.$$

b) An der Stelle $\boldsymbol{x}_1 = (0,1)^\top$ hat man dann

$$\begin{aligned} f(0,1) &= 0 \\ T_1(0,1) &= 1 \\ f(0,1) - T_1(0,1) &= -1. \end{aligned}$$

c) Die Lagrange-Darstellung des Restgliedes ist.

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) - T_1(\boldsymbol{x}) &= \frac{1}{2!}(\langle \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0,\ \nabla\rangle)^2 f(\boldsymbol{x}_0 + \theta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)) \text{ mit } \theta \in [0,1] \\ \Rightarrow \qquad |f(\boldsymbol{x}) - T_1(\boldsymbol{x})| &= \frac{1}{2}\left|(\left\langle(-1,1)^\top,\ \nabla\right\rangle)^2 f(1-\theta,\ \theta)\right| \\ &= \frac{1}{2}\left|\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) f(1-\theta,\theta)\right| \end{aligned}$$

Wir berechnen zunächst die zweiten partiellen Ableitungen von f:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= y\cos(xy) + y\cos(xy) - xy^2\sin(xy) = 2y\cos(xy) - xy^2\sin(xy) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= -x^3\sin(xy) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) &= 2x\cos(xy) - x^2 y\sin(xy) \end{aligned}$$

Durch Einsetzen der zweiten partiellen Ableitungen erhalten wir das Restglied.

Aufgabe 9.6: Taylor-Entwicklung

Gegeben seien die beiden Funktionen $\mathbb{R} \xrightarrow{r} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = -\,\mathrm{e}^{y+1-x^2} \qquad \text{und} \qquad \boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos(\pi \cdot t) \\ \ln t - \sin^2(\pi \cdot t) \end{pmatrix}.$$

a) Geben Sie die Taylorentwicklung zweiter Ordnung $T_{2,f}$ der Funktion f um den Punkt $\boldsymbol{x}_0 = (1,\,0)^\top$ an.

b) Geben Sie die Taylorentwicklung zweiter Ordnung $\boldsymbol{T}_{2,r}$ der Funktion $\boldsymbol{r}$ um den Punkt $t_0 = 1$ an. (Entwickeln Sie dazu die Komponenten r_1 und r_2 der Funktion $\boldsymbol{r} = (r_1, r_2)^\top$ separat.)

c) Bilden Sie durch Verkettung beider Funktionen die Funktion

$$g(t) := f \circ \boldsymbol{r}(t).$$

d) Verketten Sie ebenso die beiden Taylor-Polynome

$$\tilde{g}(t) := T_{2,f} \circ \boldsymbol{T}_{2,r}(t).$$

e) Vergleichen Sie g und $\tilde{g}$ und die Taylorpolynome erster Ordung dieser beiden Funktionen.

Lösung 9.6:

a) Die ersten beiden Ableitungen von f ergeben sich zu

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= -\,\mathrm{e}^{y+1-x^2} && \Rightarrow & f(1,0) &= -\,1 \\
\boldsymbol{J}_f(x,y) &= -\,\mathrm{e}^{y+1-x^2}(-2x,\,1) && \Rightarrow & \boldsymbol{J}_f(1,0) &= (2,-1) \\
\boldsymbol{H}_f(x,y) &= -\,\mathrm{e}^{y+1-x^2}\begin{pmatrix} 4x^2-2 & -2x \\ -2x & 1 \end{pmatrix} && \Rightarrow & \boldsymbol{H}_f(1,0) &= \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

und damit ist das Taylorpolynom zweiter Ordnung um den Entwicklungspunkt $(1,0)^\top$:

$$\begin{aligned}
T_{2,f}(x,y) &= f(1,0) + \boldsymbol{J}_f(1,0)\begin{pmatrix} x-1 \\ y-0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(x-1,\,y-0)\boldsymbol{H}_f(1,0)\begin{pmatrix} x-1 \\ y-0 \end{pmatrix} \\
&= -\,1 + 2(x-1) - y + \frac{1}{2}\left(-2(x-1)^2 + 2\cdot 2(x-1)y - 1\cdot y^2\right) \\
&= -\,1 + 2(x-1) - y - (x-1)^2 + 2(x-1)y - \frac{y^2}{2}.
\end{aligned}$$

b) Für $\boldsymbol{r}$ ergeben sich die Ableitungen zu

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r}(t) &= \begin{pmatrix} \cos(\pi t) \\ \ln t - \sin^2(\pi t) \end{pmatrix} && && \Rightarrow & \boldsymbol{r}(1) &= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\boldsymbol{r}'(t) &= \begin{pmatrix} -\pi\sin(\pi t) \\ \frac{1}{t} - 2\pi\sin(\pi t)\cos(\pi t) \end{pmatrix} &&= \begin{pmatrix} -\pi\sin(\pi t) \\ \frac{1}{t} - \pi\sin(2\pi t) \end{pmatrix} && \Rightarrow & \boldsymbol{r}'(1) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
\boldsymbol{r}''(t) &= \begin{pmatrix} -\pi^2\cos(\pi t) \\ -\frac{1}{t^2} - 2\pi^2\cos(2\pi t) \end{pmatrix} && && \Rightarrow & \boldsymbol{r}''(t) &= \begin{pmatrix} \pi^2 \\ -1-2\pi^2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

und das Taylorpolynom zu:

$$\begin{aligned}
T_{2,\boldsymbol{r}} &= \boldsymbol{r}(1) + (t-1)\boldsymbol{r}'(1) + \frac{1}{2}(t-1)^2\boldsymbol{r}''(1) \\
&= \begin{pmatrix} -1 + \frac{1}{2}\pi^2(t-1)^2 \\ (t-1) - \frac{1}{2}(1+2\pi^2)(t-1)^2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

c) Es ist

$$g(t) = -\mathrm{e}^{\ln t - \sin^2(\pi t) + 1 - \cos^2(\pi t)} = -\mathrm{e}^{\ln t} = -t.$$

d) Die Verkettung der beiden Taylor-Polynome hingegen ergibt:

$$\begin{aligned}
\tilde{g}(t) = &-1 + 2\left(-2 + \frac{1}{2}\pi^2(t-1)^2\right) - (t-1)\left(1 - \frac{1}{2}(1+2\pi^2)(t-1)\right) + \\
&- \left(-2 + \frac{1}{2}\pi^2(t-1)^2\right)^2 + \\
&+ 2\left(-2 + \frac{1}{2}\pi^2(t-1)^2\right)(t-1)\left(1 - \frac{1}{2}(1+2\pi^2)(t-1)\right) + \\
&- \frac{1}{2}(t-1)^2\left(1 - \frac{1}{2}(1+2\pi^2)(t-1)\right)^2 \\
= &-9 - 5(t-1) + \left(8\pi^2 + 2\right)(t-1)^2 + \left(2\pi^2 + \frac{1}{2}\right)(t-1)^3 \\
&+ \left(-\frac{7}{4}\pi^4 - \pi^2 - \frac{1}{8}\right)(t-1)^4
\end{aligned}$$

e) Anders als man vermuten könnte, ist die exakt ermittelte Funktion $g(t)$ weit weniger kompliziert als die Näherungsfunktion $\tilde{g}(t)$. Auch die beiden linearen Taylorpolynome um den Punkt $t=1$ unterscheiden sich deutlich:

$$T_{1,g}(t) = g(t) = -t, \qquad T_{1,\tilde{g}}(t) = -9 - 5(t-1).$$