

Mathematik II/B (WI/ET)

Blatt 0

WT 2025

Zusatzblatt zur Vorbereitung auf Bonusklausur

---

Einführende Bemerkungen

- Vermeiden Sie die Verwendung von Taschenrechnern oder Online-Ressourcen.
- 

**Aufgabe 0.1: Partielle Ableitungen**

Bestimmen Sie die ersten partiellen Ableitungen der folgenden reellen Funktionen und geben Sie diese Ableitungen in Matrixschreibweise an:

- i)  $f(x, y) = e^{xy^3}$       ii)  $g(x, y) = \sin(x^2 - y)$
- iii)  $h(x, y) = (2x - y)^2 + \ln(xy)$       iv)  $p(x, y) = \ln(x + y^2) - e^{2xy} + 3x$
- v)  $q(x, y, z) = e^{x-y} \cos(5z)$

**Lösung 0.1:**

i)

$$\nabla f(x, y) = \left( y^3 e^{xy^3}, 3y^2 x e^{xy^3} \right)^\top$$

ii)

$$\nabla g(x, y) = \left( 2x \cos(x^2 - y), -\cos(x^2 - y) \right)^\top$$

iii)

$$\nabla h(x, y) = \left( 4(2x - y) + \frac{1}{x}, -2(2x - y) + \frac{1}{y} \right)^\top$$

iv)

$$\nabla p(x, y) = \left( \frac{1}{x + y^2} - 2ye^{2xy} + 3, \frac{2y}{x + y^2} - 2xe^{2xy} \right)^\top$$

v)

$$\nabla q(x, y, z) = \left( e^{x-y} \cos(5z), -e^{x-y} \cos(5z), -5e^{x-y} \sin(5z) \right)^\top$$

**Aufgabe 0.2: Richtungsableitungen**

Gegeben seien die skalarwertige Funktion  $f(x, y)$  und die vektorwertige Funktion  $\mathbf{g}(x, y)$

$$f(x, y) = x^2 y^3 \quad \text{und} \quad \mathbf{g}(x, y) = (x^2 + y, xy)^\top.$$

Berechnen Sie die Richtungsableitung beider Funktionen im Punkt  $\mathbf{P} = (1, 2)^\top$  in Richtung  $\mathbf{h} := (3, 4)^\top$ .

**Lösung 0.2:**

Zunächst berechnen wir die ersten Ableitungen der beiden Funktionen:

$$\nabla f(x, y) = (2xy^3, 3x^2y^2)^\top$$
$$\mathbf{J}_g(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & 1 \\ y & x \end{pmatrix}.$$

Nun berechnen wir die ersten Ableitungen im Punkt  $\mathbf{P} = (1, 2)^\top$ :

$$\nabla f(1, 2) = (16, 12)^\top$$
$$\mathbf{J}_g(1, 2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Desweiteren benötigen wir den Normalenvektor in Richtung  $\mathbf{h}$ :

$$\hat{\mathbf{h}} = \frac{1}{5}(3, 4)^\top$$

Damit ergeben sich dann die Richtungsableitungen:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \hat{\mathbf{h}}}(x, y) &= \langle \hat{\mathbf{h}}, \nabla f(x, y, z) \rangle = \frac{84}{5} \\ \frac{\partial g}{\partial \hat{\mathbf{h}}}(x, y) &= \mathbf{J}_g(1, 2) \cdot \hat{\mathbf{h}} = \frac{1}{5}(2, 2)^\top\end{aligned}$$

### Aufgabe 0.3: Taylor–Entwicklung in 2 Dim.

Gegeben sei  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x, y) = e^x \sin(y)$ . Bestimmen Sie das Taylorpolynom 2. Grades von  $f$  für den Entwicklungspunkt  $(0, 0)$ .

### Lösung 0.3:

Mit den partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned}f_x &= e^x \sin(y) \Rightarrow f_x(0, 0) = 0, \\ f_y &= e^x \cos(y) \Rightarrow f_y(0, 0) = 1, \\ f_{xx} &= e^x \sin(y) \Rightarrow f_{xx}(0, 0) = 0, \\ f_{xy} &= e^x \cos(y) \Rightarrow f_{xy}(0, 0) = 1, \\ f_{yy} &= -e^x \sin(y) \Rightarrow f_{yy}(0, 0) = 0\end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned}T_{f,2}(x, y) &= f(0, 0) + f_x(0, 0)(x - 0) + f_y(0, 0)(y - 0) + \frac{1}{2}f_{xx}(0, 0)(x - 0)^2 \\ &\quad + \frac{1}{2}f_{yy}(y - 0)^2 + f_{xy}(0, 0)(x - 0)(y - 0) \\ &= y + xy\end{aligned}$$

### Aufgabe 0.4: Newton-Verfahren

Gegeben sei die Funktion  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$f(x, y) = x^3 - 3xy^2.$$

Gesucht sind die stationären Punkte dieser Funktion.

- a) Geben Sie an, welche Bedingung ein stationärer Punkt  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  erfüllen muss.

- b) Um eine Näherung für einen solchen Punkt zu berechnen, soll das dreidimensionale Newton-Verfahren angewendet werden. Auf welche Funktion wird das Newton-Verfahren angewendet? Geben Sie die Iterationsvorschrift an.

- c) Führen Sie für den Startvektor  $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  einen Iterationsschritt durch.

- d) Geben Sie ein geeignetes Abbruchkriterium des Newton-Verfahrens an. (Dieses Kriteriums ist **nicht** auszuwerten.)

### Lösung 0.4:

- a) In einem stationären Punkt muss der Gradient der Funktion  $f$  verschwinden:

$$\mathbf{0} \stackrel{!}{=} \nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 3x^2 - 3y^2 \\ -6xy \end{pmatrix}$$

- b) Das Newton-Verfahren wird auf die Funktion  $\mathbf{F}(x, y, z) = \nabla f(x, y, z)$  angewendet. Die Ableitung dieser Funktion ist

$$\begin{aligned}\mathbf{F}'(x, y, z) &= H_f(x, y, z) \\ &= \begin{pmatrix} 6x & -6y \\ -6y & -6x \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Zu gegebenem Startwert  $\mathbf{x}_0$  wird die folgende Iteration durchgeführt:

Für  $j = 0, 1, 2, \dots$ :

- i) Löse das lineare Gleichungssystem  $\mathbf{F}'(\mathbf{x}_j)\Delta\mathbf{x} = -\mathbf{F}(\mathbf{x}_j)$  nach  $\Delta\mathbf{x}$  auf.  
ii) Berechne nächste Iteration  $\mathbf{x}_{j+1} = \mathbf{x}_j + \Delta\mathbf{x}$ .  
c) Für den gegebenen Startvektor  $\mathbf{x}_0 = (1, 1)^\top$  ergibt sich zunächst

$$\mathbf{F}(1, 1) = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{F}'(1, 1) = \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ -6 & -6 \end{pmatrix}.$$

Die Lösung des Gleichungssystems  $\mathbf{F}'(\mathbf{x}_0)\Delta\mathbf{x} = -\mathbf{F}(\mathbf{x}_0)$  ergibt

$$\Delta\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

und als nächsten Iterationsschritt

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + \Delta\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

- d) Geeignete Abbruchkriterien sind etwa  $\|\mathbf{F}(\mathbf{x}_k)\| < \varepsilon$  oder  $\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}\| < \varepsilon$  mit fest vorgegebenem  $\varepsilon > 0$ .  
Desweiteren empfiehlt es sich, die Iteration nach  $N$  Schritten (z. B.  $N = 1000$ ) abzubrechen, auch wenn das Abbruchkriterium nicht erfüllt ist.

### Aufgabe 0.5: Stationäre Punkte

Gegeben sei die Funktion:

$$f(x, y) = x^3 + axy + y^3 \quad \text{mit} \quad a \in \mathbb{R}.$$

- a) Bestimmen Sie alle stationären Punkte in Abhängigkeit von  $a$ .  
b) Klassifizieren Sie diese für  $a \neq 0$  als Minimum, Maximum oder Sattelpunkt.

### Lösung 0.5:

- a) Der Gradient ist gegeben durch:

$$\nabla f(x, y) = (3x^2 + ay, ax + 3y^2)$$

Um die stationären Punkte zu finden, setzen wir den Gradienten gleich 0:

1.  $3x^2 + ay = 0$
2.  $ax + 3y^2 = 0$

Für den Fall  $a = 0$  erhalten wir  $3x^2 = 0$  und  $3y^2 = 0$ , d.h. einen stationären Punkt bei  $(0,0)$ . Für  $a \neq 0$  lösen wir die erste Gleichung nach  $y$  auf:

$$3x^2 + ay = 0 \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{3x^2}{a}.$$

Einsetzen in die zweite Gleichung ergibt:

$$\begin{aligned} ax + 3y^2 &= 0 \\ ax + 3\left(-\frac{3x^2}{a}\right)^2 &= 0 \\ ax + \frac{27}{a^2}x^4 &= 0 \\ x\left(a + \frac{27}{a^2}x^3\right) &= 0 \end{aligned}$$

Daraus ergeben sich die stationären Punkte  $(0,0)$  und  $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$ .

- b) Für  $a \neq 0$  ist die Hesse-Matrix gegeben als:

$$\mathbf{H}(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & a \\ a & 6y \end{pmatrix}$$

- c) Ausgewertet in  $(0,0)$  erhalten wir:

$$\mathbf{H}(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}$$

Für die Determinante ergibt sich  $\det(\mathbf{H}(0,0)) = -a^2 < 0$ . Daher ist die Matrix indefinit und der Punkt  $(0,0)$  ist ein Sattelpunkt.

- d) Ausgewertet in  $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$  erhalten wir:

$$\mathbf{H}\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) = \begin{pmatrix} -2a & a \\ a & -2a \end{pmatrix}$$

Für die Determinante ergibt sich  $\det(\mathbf{H}(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})) = 3a^2 > 0$ . Damit erhalten wir für  $a < 0$  ein lokales Minimum und für  $a > 0$  ein lokales Maximum.

### Aufgabe 0.6: Integration

- a) Berechnen Sie folgende Integrale

$$I_1 = \int x^2 \ln(x) dx,$$

$$I_2 = \int \frac{x}{(x^2 + 1)^2} dx,$$

$$I_3 = \int \frac{3x + 2}{x^2 + 6x + 9} dx.$$

- b) Berechnen Sie das Integral

$$I = \int_G y \, dx dy$$

wobei  $G \subset \mathbb{R}^2$  der Bereich ist, der zwischen den beiden Graphen der folgenden Funktionen liegt

$$y = x^2 \quad \text{und} \quad y = 2x.$$

**Lösung 0.6:**

a) Das erste Integral ergibt sich durch einmalige partielle Integration:

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int x^2 \ln x \, dx \\
 &= \frac{1}{3} x^3 \ln(x) - \frac{1}{3} \int x^3 \frac{1}{x} \, dx \\
 &= \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 \, dx \\
 &= \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{9} x^3 + c.
 \end{aligned}$$

Für das zweite Integral ergibt die Substitution  $u = x^2 + 1$ ,  $du = 2x \, dx$

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \int \frac{1}{2} \frac{1}{u^2} \, dx \\
 &= \frac{1}{2} (-1) \frac{1}{u} + c \\
 &= -\frac{1}{2} \frac{1}{u} + c \\
 &= -\frac{1}{2} \frac{1}{x^2 + 1} + c.
 \end{aligned}$$

Das dritte Integral ergibt sich durch die Partialbruchzerlegung:

$$\begin{aligned}
 I_3 &= \int \frac{3x+2}{(x+3)^2} \, dx = \int \frac{3x+2}{(x+3)(x+3)} \, dx \\
 \frac{3x+2}{(x+3)(x+3)} &= \frac{A}{x+3} + \frac{B}{(x+3)^2} \quad || \cdot (x+3)(x+3) \\
 \iff 3x+2 &= A(x+3) + B \\
 -7 &= B \implies B = -7 \\
 2 &= 3A - 7 \implies A = 3 \\
 I_3 &= \int \left( \frac{3}{(x+3)} - \frac{7}{(x+3)^2} \right) \, dx \\
 &= 3 \ln(|x+3|) + \frac{7}{x+3} + c
 \end{aligned}$$

b) Die Fläche zwischen den beiden Graphen kann als Normalenbereich bezüglich  $x$  formuliert werden

$$G := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2 \wedge x^2 \leq y \leq 2x\}$$

$$\begin{aligned}
 I &= \int_G y \, dx \, dy, \\
 &= \int_{x=0}^2 \int_{y=x^2}^{2x} y \, dy \, dx, \\
 &= \int_0^2 \frac{1}{2} [y^2]_{x^2}^{2x} \, dx, \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^2 (4x^2 - x^4) \, dx, \\
 &= \frac{1}{2} \left[ \frac{4}{3} x^3 - \frac{1}{5} x^5 \right]_0^2 \\
 &= \frac{1}{2} \left[ \frac{4}{3} 8 - \frac{1}{5} 32 \right] \\
 &= \frac{1}{2} \frac{64}{15} \\
 &= \frac{32}{15}
 \end{aligned}$$

