HELMUT SCHMIDT UNIVERSITÄT
Universität der Bundeswehr Hamburg

Aufgabensammlung
Mathematik III/B

für WI/ET

Prof. Dr. Thomas Carraro

Frühjahrstrimester 2025

Inhaltsverzeichnis

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Eine gewöhnliche Differentialgleichung (Dgl.) ist eine Gleichung, die aus einer unbekannten Funktion $y(x)$ und ihren Ableitungen $y'(x)$, $y''(x)$,..., $y^m(x)$ besteht, wobei die Funktion y nur von einer Variablen x abhängt und nur nach dieser abgeleitet wird. Es wird zwischen einer **impliziten** Darstellung der Differentialgleichung **n-ter Ordnung**

$$F(x, y'(x), y''(x), ..., y^n(x)) = 0$$

und einer **expliziten** Darstellung der Differentialgleichung n-ter Ordnung

$$y^n(x) = f(x, y'(x), y''(x), ..., y^{n-1}(x))$$

unterschieden.
Eine Differentialgleichung heißt linear, wenn .... und nicht-linear, wenn ..... . Variable/konstante Koeffizienten....

Man spricht von einer homogene Dgl., wenn .... Eine Differentialgleichung zusammen mit einer Anfangsbedingung heißt **Anfangswertproblem** (AWP) und haben z.B. die Form

$$y'(x) = f(x, y(x)),\ y(x_0) = y_0,$$

wobei x_0 und y_0 gegebene Werte sind.

Explizite Differentialgleichung 1. Ordnung

Eine explizite Dgl. 1. Ordnung besitzt die Form

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} := y' = f(x, y),$$

wobei f im Allgemeinen eine nichtlineare Funktion ist.
Typ A: Differentialgleichungen mit getrennten Veränderlichen Liegt die Differentialgleichung in der Form

$$y' = f(x) \cdot g(y)$$

vor, wobei f und g stetige Funktionen sind, so kann das Lösungeverfahren der **Trennung der Veränderlichen** (TdV) angewendet werden. Die Lösung ist dann gegeben durch

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(x)\,\mathrm{d}x + C.$$

Lineare Differentialgleichung

Homogene lineare Differentialgleichung

Inhomogene lineare Differentialgleichung

Aufgabe 1: Anfangswertproblem

Gegeben ist die Dgl.

$$y'(x) = \frac{1}{y\sqrt{x}},\ x > 0,\ y \neq 0$$

mit der allgemeinen Lösung

$$y(x) = \pm\sqrt{4\sqrt{x} + C},\ C \geq 0.$$

a) Geben Sie, falls möglich, die Lösung der Dgl. an, die die Anfangswertbedingung $y(1) = 3$ erfüllt.

b) Geben Sie, falls möglich, die Lösung der Dgl. an, die die Anfangswertbedingung $y(1) = -4$ erfüllt.

c) Geben Sie, falls möglich, die Lösung der Dgl. an, die die Anfangswertbedingung $y(-1) = 3$ erfüllt.

Lösung 1:

a) Die Konstante C muss so bestimmt werden, dass die allgemeine Lösung $y(x) = \pm\sqrt{4\sqrt{x} + C}$ die Anfangsbedingung $y(1) = 3$ erfüllt:

$$3 = \pm\sqrt{4\sqrt{1} + C} \Rightarrow 3 = +\sqrt{4 + C} \Rightarrow C = 5.$$

Die Anfangsbedingung legt also sowohl das Vorzeichen, als auch die Konstante fest. Die spezielle Lösung des AWP ist also

$$y(x) = \sqrt{4\sqrt{x} + 5},\ x \geq 0.$$

b) Analog zu Aufgabenteil a):

$$-4 = \pm\sqrt{4\sqrt{1} + C} \Rightarrow -4 = -\sqrt{4 + C} \Rightarrow C = 12.$$

Es ergibt sich die spezielle Lösung

$$y(x) = -\sqrt{4\sqrt{x} + 12},\ x \geq 0.$$

c) Es gibt keine Lösung, da die Dgl. nicht bei $x = -1$ definiert ist

Aufgabe 2: Zum Lösungsbegriff von Dgl.

a) Gegeben seien die beiden Differentialgleichungen

i) $y'(x) = y(x)\cos(x) + \sin(x)\cos(x)$

ii) $y''(x) + y'(x) = 0$

Welcher der folgenden Funktionen ist Lösung einer der Differentialgleichungen?

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \cos(x), & y_2(x) &= 8, \\ y_3(x) &= e^x, & y_4(x) &= \sin(x) - 1, \\ y_5(x) &= e^{-\sin(x)}, & y_6(x) &= y_4 + y_5 = \sin(x) - 1 + e^{-\sin(x)}. \end{aligned}$$

b) Für welche Werte der Konstanten A, ω und φ_0 ist

$$u(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$$

Lösung der Schwingungs-Differentialgleichung

$$u''(t) + 25u(t) = 0.$$

Lösung 2:

a)

- $y_1(x) = \cos(x), y_1'(x) = -\sin(x), y_1''(x) = -\cos(x), y_1'''(x) = \sin(x)$.
  Einsetzen in die Dgl. i) ergibt:

  $$-\sin(x) \neq -\cos^2(x) + \sin(x)\cos(x),$$

  d.h. y_1 ist keine Lösung von Dgl. i).
  Einsetzen in Dgl. ii) ergibt:

  $$\sin(x) - \sin(x) = 0 \,\text{für alle}\, x \in \mathbb{R},$$

  d.h. y_1 ist auf ganz $\mathbb{R}$ Lösung von Dgl. ii).
- $y_2(x) = 8$ ist keine Lösung von i) aber Lösung von ii).
- $y_3(x) = e^x$ ist werder Lösung von i) noch von ii).
- $y_4(x) = \sin(x) - 1$ ist Lösung von i) und von ii).
- $y_5(x) = e^{-\sin(x)}$ ist werder Lösung von i) noch von ii).
- $y_6(x) = \sin(x) - 1 + e^{-\sin(x)}$ ist Lösung von i) aber nicht von ii).

b)

$$\begin{aligned} u(t) &= A\cos(\omega t + \varphi_0), \\ u'(t) &= -A\omega \sin(\omega t + \varphi_0), \\ u''(t) &= -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0). \end{aligned}$$

Einsetzen in die Dgl. ergibt:

$$A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0) = 25A\cos(\omega t + \varphi_0).$$

$$\Rightarrow \omega^2 = 25, \text{ d.h.}\, \omega = \pm 5 \,\text{und} A, \varphi_0 \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 3: Definitionsbereich der Lösung einer Dgl.

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'(x) = 2\,x\,y^2$$

und die spezielle Lösung für den Anfangswert $y(0) = 4$.

Wie groß ist der maximale Definitionsbereich dieser Lösung ?

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$\cos(x) \cdot y'(x) = \sin(x) \cdot y(x).$$

Lösung 3:

a) Die Dgl. ist vom trennbaren Typ

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y^2} = \int 2x \;\mathrm{d}x \;\Rightarrow\; \frac{y^{-1}}{-1} = x^2 + C \quad \vee \quad y = 0$$

und hat die allgemeine Lösung

$$y(x) = \frac{-1}{x^2 + C} \quad , \quad C \in \mathbb{R} \quad \text{bzw. } y = 0$$

Der Anfangswert $y(0) = 4$ ergibt mit $C = -\frac{1}{4}$ die Lösung

$$y_{\text{AWP}}(x) = \frac{-1}{x^2 - \frac{1}{4}} \ .$$

Die Lösung ist nur im Bereich $\frac{-1}{2} < x < \frac{1}{2}$ definiert und hat an den Rändern bei $x = \pm\frac{1}{2}$ Polstellen.

b) Lösen der homogenen linearen Dgl.

$$\cos(x) \cdot y'(x) = \sin(x) \cdot y(x)$$

durch Trennung der Veränderlichen:

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \;\mathrm{d}x \;\Rightarrow\; \ln(|y|) = -\ln\Big(|\cos(x)|\Big) + \tilde{C} \quad \vee \quad y = 0$$

also

$$y(x) = \frac{C}{\cos(x)}, C \in \mathbb{R} \ .$$

Aufgabe 4: Anfangswertproblem

Gegeben sei das Anfangswertproblem:

$$y' = \sqrt{y}, \quad y(0) = 0.$$

a) Bestimmen sie eine Lösung des gegebenen Anfangswertproblems.

b) Hat das Anfangswertproblem eine eindeutige Lösung?

Lösung 4:

a) Die Lösung kann mit Trennung der Variablen berechnet.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{y}}\,\mathrm{d}y &= \mathrm{d}x \\ \int \frac{1}{\sqrt{y}}\,\mathrm{d}y &= \int \mathrm{d}x \\ 2\sqrt{y} &= x + C \\ y &= \frac{1}{4}(x+C)^2 \end{aligned}$$

Mit dem Anfangswert erhalten wir $C = 0$ und die Lösung

$$y = \frac{1}{4}x^2,$$

Die Lösung ist nicht eindeutig, da offensichtlich die konstante Null-Funktion eine Lösung ist, die die Anfangswertbedingung erfüllt.

b) Das Problem hat unendlich viele Lösungen der Form

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < \bar{x}, \\ \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}\bar{x}^2, & x > \bar{x}. \end{cases}$$

Das kann man daraus herleiten, dass die Differentialgleichung autonom und daher invariant gegenüber einer Verschiebung bezüglich x ist. Also falls $\bar{y}(t)$ eine Lösung der obigen Differentialgleichung ist, dann ist auch $\hat{y}(t) = \overline{y}(t + t_0)$ eine Lösung des Problems

$$y' = \sqrt{y}, \quad y(t_0) = 0.$$

Aufgabe 5: Logistisches Wachstum

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(t) = \lambda(k - y(t))y(t) \quad , \quad y(0) = y_0$$

wobei $k, \lambda \in \mathbb{R}$.

Lösung 5:

Wir lösen diese Differentialgleichung durch Trennung der Variablen.

$$\int \frac{1}{(k - y(t))y(t)} \mathrm{d}y = \int \lambda \mathrm{d}t$$

Das Integral auf der linken Seite lösen wir mit einer Partialbruchzerlegung.

$$\frac{1}{(k - y)y} = \frac{A}{k - y} + \frac{B}{y}$$

Durch Multiplikation mit dem Nenner erhalten wir

$$Ay + B(k - y) = 1.$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} A - B &= 0 \\ B &= \frac{1}{k} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{k}\frac{1}{k - y} + \frac{1}{k}\frac{1}{y} \mathrm{d}y &= \int \lambda \mathrm{d}t \\ \frac{1}{k} \int \left(-\frac{1}{y - k} + \frac{1}{y} \right) \mathrm{d}t &= \int \lambda \mathrm{d}t \\ \frac{1}{k}(\ln|y| - \ln|y - k|) &= \lambda t + c^* \\ \frac{1}{k} \ln \left|\frac{y}{y - k}\right| &= \lambda t + c^* \end{aligned}$$

Wir stellen die Gleichung nach y um.

$$\begin{aligned}
\frac{y}{y-k} &= c\,\mathrm{e}^{\lambda k t} \\
\frac{1}{1-\frac{k}{y}} &= c\,\mathrm{e}^{\lambda k t} \\
1 &= \left(1-\frac{k}{y}\right) c\,\mathrm{e}^{\lambda k t} \\
1 - c\,\mathrm{e}^{\lambda k t} &= -\frac{ck}{y}\,\mathrm{e}^{\lambda k t} \\
y &= -\frac{ck\,\mathrm{e}^{\lambda k t}}{1-c\,\mathrm{e}^{\lambda k t}}
\end{aligned}$$

Mit dem Anfangswert erhalten wir

$$\begin{aligned}
y_0 = y(0) &= -\frac{ck}{1-c} \\
y_0 &= \frac{k}{1-\frac{1}{c}} \\
\left(1-\frac{1}{c}\right) y_0 &= k \\
\frac{1}{c} y_0 &= k - y_0 \\
c &= \frac{y_0}{y_0-k}
\end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung ist

$$y = -\frac{ck\,\mathrm{e}^{\lambda k t}}{1-c\,\mathrm{e}^{\lambda k t}}.$$

Die spezielle Lösung erhalten wir durch einsetzen der Konstanten.

$$\begin{aligned}
y &= \frac{y_0}{k-y_0}\frac{k}{\mathrm{e}^{\lambda k t}+\frac{y_0}{k-y_0}} \\
&= \frac{y_0 k}{y_0+(k-y_0)\,\mathrm{e}^{-\lambda k t}}
\end{aligned}$$

Aufgabe 6: Gewöhnliche Dgl.

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Dgl.

$$y'(x) = \frac{(y-x)e^{y/x} - x}{xe^{y/x}}, \; x \neq 0.$$

Lösung 6:

Wir dividieren den Zähler und Nenner durch x, sodass eine Funktion abhängig von y/x entsteht:

$$y'(x) = g(\frac{y}{x}).$$

Wir substituieren $u = y/x$ und damit ergibt sich

$$g(u) = \frac{(u-1)e^u - 1}{e^u} = u - 1 - \frac{1}{e^u}.$$

Mit $y(x) = xu(x)$ und der Produktregel ergibt sich

$$y'(x) = xu' + u.$$

Einsetzen in die Dgl. ergibt:

$$xu' + u = u - 1 - \frac{1}{e^u} \Rightarrow xu' = -(1 + e^{-u}).$$

Trennung der Variablen ergibt

$$\begin{aligned} \int \frac{e^u}{1+e^u}\mathrm{d}u &= -\frac{\mathrm{d}x}{x} \\ \Rightarrow \ln(1+e^u) &= -\ln(|x|) + \tilde{C} \\ &= \ln\left(\frac{C}{|x|}\right), \; C > 0. \\ \Rightarrow e^u &= \frac{C}{|x|} - 1 \\ \Rightarrow u &= \ln\left(\frac{C}{|x|} - 1\right). \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich die allgemeine Lösung

$$y(x) = x\ln\left(\frac{C}{|x|} - 1\right), \; C > |x| > 0.$$

Aufgabe 7: Differentialgleichungen erster Ordnung

a) Klassifizieren Sie die Differentialgleichung 1. Ordnung

$$u'(t) = \frac{-2\,u(t)}{t} + 5\,t^2 \ , \quad t > 0 \ ,$$

und bestimmen Sie dann alle Lösungen der Differentialgleichung.

b) Lösen Sie das Anfangswertproblem für $t > 0$

$$u'(t) = \left(\frac{2\,u(t)}{t}\right)^2 + \frac{u(t)}{t} \ , \quad u(1) = -2 \ .$$

Lösung 7:

a) Klassifikation: explizit, linear, variable Koeffizienten, inhomogen.

(Hinweis: Mindestens die 3 letzten Eigenschaften müssen benannt sein!)

Die homogene lineare Dgl. $u'(t) = -2\,u(t)/t$ ist eine trennbare Dgl.

$$\int \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \int \frac{-2}{t}\,\mathrm{d}t \Rightarrow u_h(t) = \frac{c}{t^2} \ .$$

Die Lösung der inhomogen linearen Dgl. erhält man mit dem Produktansatz

$$u_{allg}(t) = c(t)/t^2 \ .$$

Das Einsetzen in die inhomogene Gleichung ergibt

$$\frac{-2}{t^3} \cdot c(t) + c'(t) \cdot \frac{1}{t^2} = \frac{-2\,\frac{c(t)}{t^2}}{t} + 5\,t^2 \Rightarrow c'(t) = 5\,t^4 \ .$$

Die Integration ergibt die Funktion $c(t)$ und dann die allgemeine Lösung

$$c(t) = t^5 + C \Rightarrow \underline{u_{allg}(t) = t^3 + \frac{C}{t^2}} \ .$$

b) Die Substitution $z(t) = u(t)/t$ ergibt $u(t) = tz(t)$, $u'(t) = z(t) + tz'(t)$. Eingesetzt in die Dgl. erhält man

$$z + tz' = \left(2\,z\right)^2 + z \Rightarrow z' = \frac{4\,z^2}{t} \ .$$

Die trennbare Dgl. für $z(t)$ hat die Lösung $z(t) = -1/(4\,\ln(t) + C)$. Rücksubstitution ergibt die allgemeine Lösung

$$u(t) = z(t) \cdot t = \frac{-t}{4\,\ln(t) + C} \ .$$

Einsetzen der Anfangswerte ergibt $C = 1/2$ und damit die Lösung des AWPs zu

$$\underline{u_{\mathrm{AWP}}(t) = \frac{-2\,t}{8\,\ln(t) + 1}} \ .$$

Aufgabe 8: Differentialgleichungen 1. Ordnung

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung folgender Differentialgleichungen:

i) $y'(x) = (2\,x + 3\,y + 4)^{-4} - \dfrac{2}{3}$

ii) $u'(t) = \sqrt{\dfrac{t}{u}} + \dfrac{u}{t}, \quad t > 0$

iii) $w'(s) = \dfrac{2}{s}\,w + 15\,s^4$

Hinweis:
Zu a) Nutzen Sie die Substitution $z = ax + by + c$.
Zu b) Nutzen Sie die Substitution $z = \frac{u}{t}$.
Zu c) Es handelt sich hier um eine lineare Differentialgleichung. Lösen Sie zuerst die homogene Differentialgleichung. Bestimmen Sie anschließend die partikuläre Lösung.

Lösung 8:

a) Mit der Substitution $z(x) = 2\,x + 3\,y(x) + 4$ erhält man

$$y(x) = \frac{z(x) - 2\,x - 4}{3} \Rightarrow y'(x) = \frac{1}{3}(z'(x) - 2)\ .$$

Durch Eingesetzt in die Dgl. ergibt sich

$$z'(x) - 2 = 3\left(z^{-4} - \frac{2}{3}\right)\ .$$

Daraus folgt

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 3z^{-4}\ .$$

Trennung der Variablen:

$$\int z^4\ \mathrm{d}z = \int 3\ \mathrm{d}x \Rightarrow \frac{z^5}{5} = 3\,x + c \Rightarrow z(x) = (15\,x + C)^{1/5} \text{ mit } C = 5c \in \mathbb{R}\ .$$

Mit der Rücksubstitution ergibt sich:

$$y(x) = \frac{(15\,x + C)^{1/5} - 2x - 4}{3}\ .$$

b) Mit der Substitution $z(x) = \dfrac{u(t)}{t}$ erhält man

$$u(t) = tz(t) \Rightarrow u'(t) = z(t) + tz'(t)\ .$$

Einsetzen in die Dgl liefert dann

$$z + tz' = \frac{1}{\sqrt{z}} + z \quad \Rightarrow \quad z' = \frac{1}{t\sqrt{z}} \; .$$

Trennung der Variablen:

$$\int \sqrt{z}\,\mathrm{d}z = \int \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \Rightarrow \frac{2}{3}\,z^{3/2} = \ln|t| + c \Rightarrow z(t) = \left(\frac{3\,\ln|t|}{2} + C\right)^{2/3} \text{ mit } C = \frac{3\,c}{2} \in \mathbb{R} \; .$$

Mit der Rücksubstitution ergibt sich:

$$\frac{u(t)}{t} = \left(\frac{3\,\ln|t|}{2} + C\right)^{2/3} \Rightarrow u(t) = t \cdot \left(\frac{3\,\ln(t)}{2} + C\right)^{2/3} \text{ mit } C \in \mathbb{R},\; t > 0.$$

c) Zunächst löst man die homogene lin. Dgl.:

$$w'(s) = \frac{2}{s}\,w \; .$$

Die homogene Lösung lautet:

$$w_{\mathrm{h}}(s) = C \cdot \mathrm{e}^{\left(\int \frac{2}{s}\,\mathrm{d}s\right)} = C \cdot \mathrm{e}^{2\,\ln|s|} = C\mathrm{e}^{\ln(s^2)} = C\,s^2 \; .$$

Damit erhält man den Produktansatz für die inhomogen lin. Dgl. $w(s) = z(s)\,s^2$. Mit $w'(s) = z'\,s^2 + z \cdot 2\,s$ wird die inhomogene Gleichung wie folgt umgeformt:

$$z'\,s^2 + z\,2\,s = \frac{2}{s}\,z\,s^2 + 15\,s^4 \Rightarrow z' = 15\,s^2 \Rightarrow z = 5\,s^3 + C \; .$$

Damit erhält man die allgemeine Lösung

$$w(s) = C\,s^2 + 5\,s^5 \; .$$

Aufgabe 9: Bernoulli'sche Differentialgleichung

Eine Differentialgleichung der Form

$$u'(x) = f(x) \cdot u(x) + g(x) \cdot \Big(u(x)\Big)^n$$

heißt **Bernoulli'sche Differentialgleichung**. Sie läßt sich mit Hilfe der Substitution

$$z(x) = \Big(u(x)\Big)^{1-n}$$

in eine lineare Differentialgleichung für $z(x)$ überführen.
Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung für $y(x)$

$$y' = \frac{-2}{x} \cdot y + x^2 \cdot y^2 \ .$$

Lösung 9:

Die Bernoulli'sche Differentialgleichung teilt man zuerst durch $\Big(u(x)\Big)^n$:

$$\frac{u'(x)}{\Big(u(x)\Big)^n} = f(x) \cdot \frac{1}{u(x)} + g(x)$$

Nun substituiert man $z(x) = \dfrac{1}{u(x)} = \Big(u(x)\Big)^{1-n}$. Es gilt

$$z'(x) = (1-n) \cdot \Big(u(x)\Big)^{-n} \cdot u'(x) = (1-n) \cdot \frac{u'(x)}{\Big(u(x)\Big)^n} \ .$$

Somit wird die Bernoulli'sche Differentialgleichung in die folgende inhomogene lineare Dgl. überführt:

$$\frac{z'(x)}{1-n} = f(x) \cdot z(x) + g(x)$$

Für die gegebene Dgl. $\quad y'(x) = \dfrac{-2}{x} y + x^2 \cdot y^2 \quad$ gilt

$$u(x) = y(x),\ n = 2,\ f(x) = \frac{-2}{x},\ g(x) = x^2.$$

Diese Gleichung geht also durch die Substitution $z(x) = (y(x))^{-1} = \dfrac{1}{y(x)}$ in eine inhomogene lineare Dgl. für $z(x)$

$$-z'(x) = -\frac{2}{x} \cdot z + x^2$$

über. Durch Trennung der Veränderlichen und Variation der Konstanten erhält man die folgende Lösung

$$z(x) = C \cdot x^2 - x^3 \ .$$

Die Rücksubstitution ergibt die gesuchte Lösung für $y(x)$:

$$y(x) = \frac{1}{C \cdot x^2 - x^3} \ .$$

Aufgabe 10: Anfangswertproblem

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$y'(x) = x^2 y.$$

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Dgl..

b) Wie lauten die speziellen Lösungen des AWP für die Anfangswerte

- **i)** $y(0) = 1$,
- **ii)** $y(1) = -1$,
- **iii)** $y(1) = 0$.

c) Wie lautet die allgemeine Lösung für den beliebigen Anfangswert $y(x_0) = y_0$?

Lösung 10:

a) Trennung der Variablen durchführen:

$$\begin{aligned} \int \frac{\mathrm{d}y}{y} &= \int x^2 \mathrm{d}x, \ y \neq 0, \\ \ln |y| &= \frac{x^3}{3} + \tilde{C} \\ |y| &= C e^{x^3/3} \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung ist damit

$$y(x) = C e^{x^3/3}.$$

b) Einsetzen der Anfangswerte in die allgemeine Lösung führt zur Bestimmung der Konstanten C.

i)

$$y(0) = 1 = C e^0 = C$$

Damit ist die spezielle Lösung

$$y(x) = e^{x^3/3}.$$

ii)

$$y(1) = -1 = Ce^{1/3} \Rightarrow C = -e^{-1/3}.$$

Damit ist die spezielle Lösung

$$y(x) = -e^{-1/3}e^{x^3/3}.$$

iii)

$$y(1) = 0 = Ce^{1/3} \Rightarrow C = 0.$$

Damit ist die spezielle Lösung

$$y(x) = 0.$$

c)

$$y(x_0) = y_0 = Ce^{x_0^3/3} \Rightarrow C = y_0 e^{-x_0^3/3}.$$

Damit ist die spezielle Lösung

$$y(x) = y_0 e^{-x_0^3/3} e^{x^3/3}.$$

Aufgabe 11: Substitution: Homogene Differentilagleichung erster Ordnung

Berechnen Sie die Lösung des folgenden Anfangswertproblems

a) $x\,y\,y' + 4x^2 + y^2 = 0, \quad y(2) = 0, \quad x > 0.$

b) $x\,y' = y\,(\ln x - \ln y)\,, \quad y(1) = 4, \quad x > 0.$

Lösung 11:

a) $x\,y\,y' + 4x^2 + y^2 = 0, \quad y(2) = 0, \quad x > 0.$ Wir dividieren alle Terme durch x^2 und erhalten

$$\frac{y}{x}y' + 4 + \frac{y^2}{x^2} = 0.$$

Wir setzen $u = \dfrac{y}{x}$, also $y = ux$ und differenzieren beide Seiten und erhalten

$$y' = u'x + u.$$

Aus der ersten Gleichung können wir die explizite Differentialgleichung schreiben

$$y' = -\frac{x}{y}\left(4 + \frac{y^2}{x^2}\right),$$

mit der Substitution $u = \dfrac{y}{x}$ gilt

$$y' = -\frac{4 + u^2}{u}.$$

Wir nutzen $y' = u'x + u$ und erhalten

$$\begin{aligned} u'x + u &= -\frac{4 + u^2}{u}, \\ u' &= -\frac{1}{x}\frac{4 + 2u^2}{u}. \end{aligned}$$

Diese Gleichung lässt sich durch die Trennung von Variablen wie folgt lösen

$$
\begin{aligned}
\frac{u}{4+2u^2}\mathrm{d}u &= -\frac{1}{x}\mathrm{d}x,\\
\int \frac{u}{4+2u^2}\mathrm{d}u &= -\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x,\\
\int \frac{1}{4}\frac{4u}{4+2u^2}\mathrm{d}u &= -\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x,\\
\frac{1}{4}\ln(4+2u^2) &= -\ln(|x|)+\ln(C),\\
\ln(4+2u^2)^{\frac{1}{4}} &= \ln(C|x|^{-1}).
\end{aligned}
$$

Hier müssen wir $x = 0$ aus dem Gültigkeitsintervall der Lösung ausschließen. Da die Anfangsbedingung auf den positiven Wert $x = 2$ gesetzt wird, wählen wir für die nächsten Schritte das Intervall $x > 0$. Daher gilt

$$
4+2u^2 = \frac{C^4}{x^4}.
$$

mit der Rücksubstitution erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\frac{y^2}{x^2} &= \frac{1}{2}\left(\frac{C^4-4x^4}{x^4}\right),\\
y^2 &= \frac{x^2}{2}\left(\frac{C^4-4x^4}{x^4}\right).
\end{aligned}
$$

Wir wenden die Anfangsbedingung $y(2) = 0$ an. Damit erhalten wir $C^4 = 64$ und

$$
\begin{aligned}
y^2 &= \frac{64-4x^4}{2x^2},\\
y &= \pm\frac{1}{x}\sqrt{32-2x^4}.
\end{aligned}
$$

Wir müssen sicherstellen, dass bei der Quadratwurzel nur positive Zahlen berücksichtigt werden können. Es muss also gelten

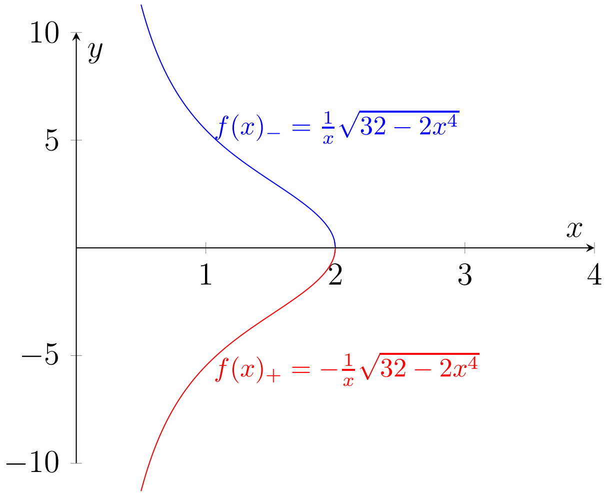
$$
32-2x^4 \geq 0,
$$

woraus sich das Gültigkeitsintervall ergibt

$$
0 < x \leq 2.
$$

Wir müssen prüfen, ob die Lösung eindeutig ist oder beide Lösungen akzeptiert werden können. Da die Anfangsbedingung in $x = 2$ liegt, wo die Lösung Null ist, kann dies eine gültige "Anfangsbedingung" für beide Zweige sein, also ist die Lösung nicht eindeutig!

Der Graph der Lösung ist



b) $x\,y' = y\,(\ln x - \ln y)\,, \quad y(1) = 4, \quad x > 0$. Mit Logarithmusgesetzen können wir die Gleichung schreiben als

$$\begin{aligned} xy' &= y\ln(\frac{x}{y}),\\ y' &= \frac{y}{x}\ln(\frac{x}{y}). \end{aligned}$$

Mit der Substitution $u = \dfrac{y}{x}$ gilt

$$y' = u\ln(u^{-1}) = -u\ln(u).$$

Durch Ableiten der Substitution erhalten wir

$$\begin{aligned} y' &= xu' + u,\\ u' &= \frac{y' - u}{x} = \frac{-u\ln(u) - u}{x}. \end{aligned}$$

Jetzt nutzen wir die Trennung der Variablen

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}u}{u\ln(u) + u} &= -\frac{\mathrm{d}x}{x},\\ \int\frac{\mathrm{d}u}{u\ln(u) + u} &= -\int\frac{\mathrm{d}x}{x}. \end{aligned}$$

Das Integral auf der linken Seite kann mit der Substitution $v = \ln(u) + 1$ und dem Differential $\mathrm{d}v = \frac{1}{u}\mathrm{d}u$ berechnet werden und ergibt

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}v}{v} &= -\int \frac{\mathrm{d}x}{x},\\ \ln|v| &= -\ln|x| + C.\end{aligned}$$

Mit der Rücksubstitution gilt

$$\ln|\ln(u)+1| = -\ln|x| + C.$$

Da wir die Bedingung $x > 0$ in der Problemstellung haben, können wir den Betrag auf der rechten Seite weglassen.

$$\ln|\ln(u)+1| = -\ln(x) + C.$$

Die Potenzierung beider Seiten ergibt

$$|\ln(u)+1| = C\frac{1}{x},$$

wobei die Konstante C anstelle von e^C durch Umbenennung verwendet wurde, d.h. wir haben $C^* = \mathrm{e}^C$ gesetzt und den Namen von C^* wieder in C geändert, um die Notation zu vereinfachen. Außerdem lassen wir den Betrag auf der linken Seite weg, da das Vorzeichen in der Konstante C aufgehen kann. Wir haben also

$$\begin{aligned}\ln(u) &= C\frac{1}{x} - 1,\\ u &= \mathrm{e}^{\frac{C}{x}-1}.\end{aligned}$$

Mit der Rücksubstitution gilt

$$\begin{aligned}\frac{y}{x} &= \mathrm{e}^{\frac{C}{x}-1},\\ y &= x\,\mathrm{e}^{\frac{C}{x}-1},\end{aligned}$$

und unter Verwendung der Anfangsbedingung $y(1) = 4$ ergibt sich

$$\begin{aligned}4 &= \mathrm{e}^{C-1},\\ \ln 4 &= C - 1,\\ C &= \ln(4) + 1.\end{aligned}$$

Die Lösung der Differentialgleichung ist dann

$$y = x\,\mathrm{e}^{\frac{\ln(4)+1}{x} - 1}.$$

Aufgabe 12: Trennung der Variablen

Lösen die folgenden Anfangswertprobleme und bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich der Lösung

a) $y'(x) = 6y^2(x)x, \quad y(1) = \frac{1}{6}.$

b) $y'(x) = \frac{3x^2 + 4x - 4}{2y(x) - 4}, \quad y(1) = 3.$

c) $y'(x) = \mathrm{e}^{-y(x)}(2x - 4), \quad y(5) = 0.$

d) $y'(x) = \frac{1}{x^2}, \quad y(x_0) = 0.$

e) $y'(x) = x^2, \quad y(0) = y_0.$

Lösung 12:

a) $y'(x) = 6y^2(x)x, \quad y(1) = \frac{1}{6}$. Mit Trennung der Variablen gilt

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{y^2} &= 6x\mathrm{d}x \\ \int \frac{\mathrm{d}y}{y^2} &= \int 6x\mathrm{d}x \\ -\frac{1}{y} &= 3x^2 + C. \end{aligned}$$

Mit der Anfangsbedingung $y(1) = \frac{1}{6}$ erhalten wir

$$\begin{aligned} -6 &= 3 + C \\ -9 &= C. \end{aligned}$$

Die Lösung ist dann

$$y = \frac{1}{9 - 3x^2}.$$

Wir bestimmen nun den Gültigkeitsbereich der Lösung. Es muss gelten

$$9 - 3x^2 \neq 0,$$

daher

$$x \neq \pm\sqrt{3}.$$

Die Werte $x = \pm\sqrt{3}$ müssen vermieden werden, damit erhalten wir die folgenden möglichen Gültigkeitsbereiche:

$$-\infty < x < -\sqrt{3}, \quad -\sqrt{3} < x < \sqrt{3}, \quad \sqrt{3} < x < \infty.$$

Da die Lösung in $x = 1 < \sqrt{3}$ positiv ist (siehe Anfangswert) ist der Gültigkeitsbereich in dem Intervall

$$-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}.$$

b) $y'(x) = \dfrac{3x^2 + 4x - 4}{2y(x) - 4}, \quad y(1) = 3$. Es gilt

$$\begin{aligned}(2y-4)\mathrm{d}y &= (3x^2 + 4x - 4)\mathrm{d}x \\ \int (2y-4)\mathrm{d}y &= \int (3x^2 + 4x - 4)\mathrm{d}x \\ y^2 - 4y &= x^3 + 2x^2 - 4x + C.\end{aligned}$$

Durch Anwenden der der Anfangsbedingung, gilt

$$\begin{aligned}9 - 12 &= 1 + 2 - 4 + C \\ -2 &= C.\end{aligned}$$

Mit $d = -x^3 - 2x^2 + 4x + 2$ gilt

$$y^2 - 4y + d = 0$$

welches eine quadratische Gleichung mit der Lösungsmenge

$$\begin{aligned}y &= 2 \pm \sqrt{4 - d} \\ &= 2 \pm \sqrt{x^3 + 2x^2 - 4x + 2}.\end{aligned}$$

Von den zwei Kandidaten für die Lösung ist nur eine eine gültige Lösung. Das kann mit Hilfe der Anfangsbedingung nachgewiesen werden $y(1) = 3$. In der Tat gilt

$$\begin{aligned}3 &= 2 + \sqrt{1 + 2 - 4 + 2}, \\ 3 &\neq 2 - \sqrt{1 + 2 - 4 + 2},\end{aligned}$$

daher ist die Lösung mit dem negativen Term $2 - \sqrt{4 - d}$ nicht gültig.

Um den Gültigkeitsbereich der Lösung zu untersuchen, nutzen wir

$$4 - d = x^3 + 2x^2 - 4x + 2 \geq 0.$$

Durch Einsetzen verschiener Werte für x, können wir überprüfen, dass für $x = -3$ die Funktion $x^3 + 2x^2 - 4x + 2$ positiv und für $x = -4$ negativ ist.

Da die Funktion stetig ist, muss die Nullstelle zwischen -4 und -3 liegen. Wir bezeichnen diesen Wert mit $\bar{x}$, der Gültigkeitsbereich ist dann

$$x \geq \bar{x} \approx -3.36.$$

c) $y'(x) = \mathrm{e}^{-y(x)}\,(2x-4)\,, \quad y(5) = 0$. Es gilt

$$\begin{aligned} \int \mathrm{e}^y \,\mathrm{d}y &= \int (2x - 4\mathrm{d}x) \\ \mathrm{e}^y &= x^2 - 4x + C. \end{aligned}$$

Durch Einsetzen des Anfangswertes, erhalten wir die Konstante $C = -4$. Die Lösung ist daher

$$y = \ln(x^2 - 4x - 4).$$

Für die Gültigkeit muss gelten

$$x^2 - 4x - 4 > 0.$$

Die Nullstellen der Funktion $x^2 - 4x - 4$ sind $x = 2 \pm 2\sqrt{2}$. Da die Funktion konvex ist, ist die Funktion positiv in dem Intervall

$$-\infty < x < 2 - 2\sqrt{2} \quad \text{and} \quad 2 + 2\sqrt{2} < x < \infty.$$

Da der Anfangswert bei $x = 5$ liegt, ist der Gültigkeitsbereich das Intervall $2 + 2\sqrt{2} < x < \infty$.

d) $y'(x) = \dfrac{1}{x^2}, \quad y(x_0) = 0$. Es gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{d}y &= \frac{\mathrm{d}x}{x^2} \\ \int \mathrm{d}y &= \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2} \\ y &= -\frac{1}{x} + C. \end{aligned}$$

Durch Anwenden der Anfangwertbedingung erhalten wir

$$C = \frac{1}{x_0},$$

woraus wir $x_0 \neq 0$ erhalten. Die Lösung ist

$$y = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x_0}.$$

Für den Gültigkeitsbereich muss gelten, dass $x \neq 0$, damit ist er gegeben als $0 < x < \infty$ falls $x_0 > 0$ und $-\infty < x < 0$ falls $x_0 < 0$.

e) $y'(x) = x^2, \quad y(0) = y_0$. Diese einfache Gleichung hat die Lösung

$$y = \frac{x^3}{3} + y_0,$$

und der Gültigkeitsbereich ist der ganze $\mathbb{R}$.

Aufgabe 13: LR-Kreis

Ein Stromkreis habe einen Widerstand von $R = 0.8$ Ohm und eine Selbstinduktion von $L = 4$ Henry. Bis zur Zeit $t_0 = 0$ fließe kein Strom. Dann wird eine Spannung von $U = 5$ Volt angelegt. Nach 5 Sekunden wird die Spannung abgeschaltet. Berechnen Sie den Stromverlauf $I(t)$ für $0 \le t \le 5$ und $t > 5$.

Hinweis: In diesem Stromkreis gilt $L\dot{I}(t) + RI(t) = U(t)$.

Lösung 13:

Es gilt gilt die Differentialgleichung

$$L\dot{I}(t) + RI(t) = U(t).$$

Für $0 \le t \le 5$ gilt $U(t) = 5$. Die Trennung der Variablen führt zu

$$\int \frac{dI}{U - RI} = \int \frac{1}{L}\, dt, \Rightarrow -\frac{1}{R} \ln |U - RI(t)| = \frac{1}{L} t + c_1\,, \quad c_1 \in \mathbb{R}\,.$$

Auflösen nach $I(t)$ liefert (mit $c_2 = \mathrm{e}^{c_1}$)

$$U - RI(t) = c_2 e^{-Rt/L}$$

und somit

$$I(t) = \frac{1}{R}\Big(U - c_2 e^{-Rt/L}\Big)\,.$$

Einsetzen der Anfangsbedingung $I(0) = 0$ ergibt $c_2 = U$ und

$$I(t) = \frac{U}{R}\Big(1 - e^{-R/Lt}\Big)\,.$$

Einsetzen der gegebenen Zahlenwerte ergibt die Lösung

$$I(t) = 6.25 \left(1 - e^{-0.2t}\right) \text{ für } 0 < t < 5\,.$$

Im Zeitraum $t > 5$ ist $U(t) = 0$ und der Anfangsstrom ist

$$I(5) = I_0 = 6.25 \left(1 - e^{-1}\right)\,.$$

Die Lösung der Differentialgleichung ist

$$\int \frac{dI}{I} = -\int \frac{R}{L} dt \Rightarrow \ln |I(t)| = -\frac{R}{L} t + c_3$$

und damit

$$I(t) = c_4 e^{-Rt/L} \ .$$

Aus $I(t_0) = I_0$ folgt

$$I(t) = I_0 e^{-R(t-t_0)/L} \ .$$

Einsetzen der Zahlenwerte ergibt die Lösung

$$I(t) = 6.25\Big(1 - e^{-1}\Big)e^{-0.2(t-5)} \text{ für } t > 5 \ .$$

Aufgabe 14: Anfangswertproblem

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$y'(x) + y(x)\sin(x) = \sin(2x).$$

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung.

b) Bestimmen Sie die Lösung für den Anfangswert $y(0) = 1$.

Lösung 14:

a) Wir lösen zunächst die hom. lin. Dgl. mit Trennung der Variablen:

$$\begin{aligned} y' + y\sin(x) = 0 \Rightarrow \int \frac{\mathrm{d}y}{y} &= \int -\sin(x)\mathrm{d}x \\ &\Rightarrow \ln|y(x)| = \cos(x) + \tilde{C} \\ &\Rightarrow |y(x)| = e^{\tilde{C}} e^{\cos(x)} \\ &\Rightarrow y(x) = \pm e^{\tilde{C}} e^{\cos(x)} \end{aligned}$$

Die allgemeine hom. Lösung lautet:

$$y_{\mathrm{h}}(x) = Ce^{\cos(x)}.$$

Zur Bestimmung der speziellen Lösung der inhom. Dgl. verwenden wir den Produktansatz:

$$y(x) = c(x)e^{\cos(x)} \Rightarrow y'(x) = c'(x)e^{\cos(x)} - c\sin(x)e^{\cos(x)}.$$

Einsetzen in die Dgl. ergibt:

$$c'(x)e^{\cos(x)} - c\sin(x)e^{\cos(x)} + ce^{\cos(x)}\sin(x) = \sin(2x)$$

$$\Rightarrow c'(x) = \sin(2x)e^{-\cos(x)}.$$

Um $c(x)$ zu bestimmen wird die Trennung der Variablen durchgeführt:

$$\int \mathrm{d}z = \int \sin(2x)e^{-\cos(x)}\mathrm{d}x = \int 2\cos(x)\sin(x)e^{-\cos(x)}\mathrm{d}x.$$

Das rechte Integral lässt sich mit Substitution lösen:

$$\Rightarrow c(x) = (2\cos(x) + 2)e^{-\cos(x)}.$$

Damit ist die partikuläre Lösung:

$$y_\mathrm{p}(x) = c(x)e^{\cos(x)} = 2\cos(x) + 2.$$

Die allgemeine Lösung der Dgl. ist damit

$$y(x) = Ce^{\cos(x)} + 2\cos(x) + 2.$$

b)

$$y(0) = 1 = Ce^{\cos(1)} + 2\cos(1) + 2$$
$$\Rightarrow C = (-1 - 2\cos(1))e^{-\cos(1)}$$

Einsetzen in die allgemeine Lösung ergibt

$$y(x) = -3e^{\cos(x)-1} + 2\cos(x) + 2.$$

Aufgabe 15: Gewöhnliche Dgl.

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Dgl.

$$\cos(x)y'(x) = \sin(x)y(x) + \cos^2(x).$$

Lösung 15:

Lösen der hom. linearen Dgl.

$$\cos(x)y'(x) = \sin(x)y(x)$$

durch Trennung der Variablen:

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\mathrm{d}x \Rightarrow \ln(|y|) = -\ln(|\cos(x)|) + \tilde{C},$$

also

$$y_\mathrm{h}(x) = \frac{C}{\cos(x)}.$$

Der Ansatz $y(x) = c(x)/\cos(x)$ für die Lösung der inhom. Dgl. liefert

$$y'(x) = \frac{c'(x)}{\cos(x)} + \frac{c(x)\sin(x)}{\cos^2(x)}$$

also

$$\begin{aligned}
&\cos(x)y'(x) - \sin(x)y(x) \\
&= c'(x) + \frac{c(x)\sin(x)}{\cos(x)} - \frac{c(x)\sin(x)}{\cos(x)} \\
&= c'(x) \\
&\overset{!}{=} \cos^2(x)
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$c(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin(2x) + C$$

und damit die allgemeine Lösung

$$y(x) = \frac{1}{\cos(x)}\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin(2x) + C\right).$$

Aufgabe 16: Nichtlineare Differentialgleichung erster Ordnung

1) Klassifizieren Sie die folgenden Differentialgleichungen erster Ordnung als

1. Homogene Differentialgleichung: $y' = g(y/x)$ mit Substitution $u = y/x$.
2. Differentialgleichung mit bilinearen Argumenten: $y' = f(ax + by + c)$ mit Substitution $u = ax + by + c$.

a) $y'(x^2 + xy) = y^2 - xy$,

b) $y' = \dfrac{x^2 y}{x^3 + y^3}$,

c) $y' = \dfrac{1}{x + y}$,

d) $y' = -\sin^2(x + y + 1)$,

e) $x^2 y' = y^2 + xy - x^2$,

f) $y' = \dfrac{y + \mathrm{e}^{-\frac{y}{x}}}{x}$

2) Verwenden Sie eine angemessene Substitution und formulieren Sie die Gleichungen in Termen von u und u' um ohne sie zu lösen.

Lösung 16:

1) **i)** $y'(x^2 + xy) = y^2 - xy$, homogen.

ii) $y' = \dfrac{x^2 y}{x^3 + y^3}$, homogen.

iii) $y' = \dfrac{1}{x + y}$, bilineare Argumente.

iv) $y' = -\sin^2(x + y + 1)$, bilineare Argumente.

v) $x^2 y' = y^2 + xy - x^2$, homogen.

vi) $y' = \dfrac{y + \mathrm{e}^{-\frac{y}{x}}}{x}$, homogen.

2) **i)** Mit der Substitution $u = y/x$ erhalten wir

$$
\begin{aligned}
y'(x^2 + xy) &= y^2 - xy \\
y' &= \frac{y^2 - xy}{x^2 + xy} \\
y' &= \frac{y^2/x^2 - y/x}{1 + y/x} \\
y' &= \frac{u^2 - u}{1 + u} \\
y' &= u'x + u = \frac{u^2 - u}{1 + u} \\
u' &= \frac{1}{x}\left(\frac{u^2 - u}{1 + u} - u\right) \\
u' &= -\frac{1}{x}\frac{2u}{1 + u}.
\end{aligned}
$$

Diese Gleichung kann durch Variablentrennung gelöst werden. Die Lösung wird in der Übung nicht verlangt, aber wir zeigen sie hier um einen Fall einer nicht expliziten Lösung zu zeigen.

$$\begin{aligned}
u' &= -\frac{1}{x}\frac{2u}{1+u} \\
\frac{1+u}{u}\mathrm{d}u &= -\frac{2}{x} \\
\int \frac{1+u}{u}\mathrm{d}u &= -\int \frac{2}{x} \\
\ln|u| + u &= \ln x^{-2} + C \\
\mathrm{e}^{\ln|u|} \cdot \mathrm{e}^{u} &= C\,\mathrm{e}^{\ln x^{-2}} \\
u\,\mathrm{e}^{u} &= \frac{C}{x^2} \\
\frac{y}{x}\,\mathrm{e}^{\frac{y}{x}} &= \frac{C}{x^2} \\
yx\,\mathrm{e}^{\frac{y}{x}} &= C.
\end{aligned}$$

Die letzte Gleichung liefert die Lösung y in impliziter Form. Die Lösung kann z.B. mit Matlab geplottet werden:

ii) $y' = \dfrac{x^2 y}{x^3 + y^3}$.

Mit der Substitution $u = y/x$ erhalten wir:

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{x^2 y}{x^3 + y^3}, \\
y' &= \frac{y/x}{1 + y^3/x^3}, \\
y' &= \frac{u}{1 + u^3}, \\
y' &= u'x + u = \frac{u}{1 + u^3}, \\
u' &= \frac{1}{x}\left(\frac{u}{1+u^3} - u\right), \\
u' &= -\frac{1}{x}\left(\frac{u^4}{1+u^3}\right).
\end{aligned}$$

Die letzte Gleichung kann durch Variablentrennung gelöst werden und führt nach Rücksubstitution zu einer impliziten Gleichung für y.

iii) $y' = \dfrac{1}{x + y}$.

Mit der Substitution $u = y + x$ erhalten wir:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{u} \\ y' &= u' - 1 = \frac{1}{u} \\ u' &= \frac{1+u}{u}. \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung kann durch Variablentrennung gelöst werden und führt nach Rücksubstitution zu einer impliziten Gleichung für y.

iv) $y' = -\sin^2(x + y + 1)$.
Mit der Substitution $u = x + y + 1$ erhalten wir:

$$\begin{aligned} y' &= -\sin^2(u) \\ y' &= u' - 1 = -\sin^2(u) \\ u' &= \cos^2(u). \end{aligned}$$

Diese Gleichung kann mit Trennung der Variablen glöst werden (Die Lösung ist hier nicht gefordert):

$$\begin{aligned} u' &= \cos^2(u), \\ \frac{\mathrm{d}u}{\cos^2(u)} &= \mathrm{d}x, \\ \int \frac{\mathrm{d}u}{\cos^2(u)} &= \int \mathrm{d}x, \\ \tan(u) &= x + C, \\ u &= \arctan(x + C), \\ y + x + 1 &= \arctan(x + C), \\ y &= \arctan(x + C) - x - 1. \end{aligned}$$

v) $x^2 y' = y^2 + xy - x^2$.
Mit der Substitution $u = y/x$ erhalten wir

$$\begin{aligned} y' &= \frac{y^2}{x^2} + \frac{y}{x} - 1, \\ y' &= u'x + u = u^2 + u - 1, \\ u' &= \frac{u^2 - 1}{x}. \end{aligned}$$

Diese Gleichung kann z. B. durch Trennung der Variablen und partielle Bruchzerlegung gelöst werden.

vi) $y' = \dfrac{y + \mathrm{e}^{-\frac{y}{x}}}{x}$.
Mit der Substitution $u = y/x$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{y}{x} + \frac{1}{x}\,\mathrm{e}^{-\frac{y}{x}},\\
y' &= u + \frac{1}{x}\,\mathrm{e}^{-u},\\
y' &= u'x + u = u + \frac{1}{x}\,\mathrm{e}^{-u},\\
u' &= \frac{1}{x^2}\,\mathrm{e}^{-u}\,.
\end{aligned}$$

Das kann mit Trennung der Variablen gelöst werden.

Aufgabe 17: Differentialgleichungen erster Ordnung

1) Klassifizieren Sie die follgenden gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung als

a) Linear oder nicht-linear.

b) In dem Fall einer linearen Differentialgleichung klassifizieren Sie die Gleichung zusätzlich als

- homogen oder inhomogen.
- Differentialgleichung mit konstanten oder nicht-konstanten Koeffizienten.

c) Nutzen Sie die Vorlesungsunterlagen, um die Differentialgleichung als einen der folgenden Typen zu klassifizieren:

(a) $y' = f(x) \cdot g(y)$, zu lösen mittels Trennung der Variablen,

(b) $y' = g(y/x)$, homogen, zu lösen mittels Substitution mit $u = y/x$,

(c) $y' = f(ax + by + c)$, rechte Seite mit bilinearen Argumenten, zu lösen mit der Substitution $u = ax + by + c$,

(d) $y' + p(x) \cdot y = q(x)$, lineare Differentialgleichung.

i) $y' + 2y = 3x$.

ii) $y'y + x = 0$.

iii) $y' = \frac{x^2+y^2}{xy}$.

iv) $y' = (x + y + 1)^2$.

v) $x^2y' = xy + 2y^2$.

vi) $y' = \frac{y(x-y)}{x^2}$.

vii) $y' = \frac{x-y}{x+y}$.

viii) $y' = \ln(y + 2x + 1)^2$.

2) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Gleichungen **i)** bis **iv)**.

Lösung 17:

1) **i)** $y' + 2y = 3x$. Linear, inhomogen, mit konstanten Koeffizients, Typ: rechte Seite mit bilinearen Koeffizienten.

ii) $y'y + x = 0$. Nicht-linear, Typ: Trennung der Variablen.

iii) $y' = \frac{x^2+y^2}{xy}$. Nicht-linear, Typ: homogen mit Substitution $u = y/x$.

iv) $y' = (x + y + 1)^2$. Nicht-linear, Typ: rechte Seite mit bilinearen Argumenten.

v) $x^2y' = xy + 2y^2$. Nicht-linear, Typ: homogen mit Substitution $u = y/x$.

vi) $y' = \frac{y(x-y)}{x^2}$. Nicht-linear, Typ: homogen mit Substitution $u = y/x$.

vii) $y' = \frac{x-y}{x+y}$. Nicht-linear, Typ: homogen mit Substitution $u = y/x$.

viii) $y' = \ln(y + 2x + 1)^2$. Nicht-linear, Typ: rechte Seite mit bilineren Argumenten.

2) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Gleichungen **i)** und **ii)**.

Zu **i)**

Die Gleichung kann als lineare Gleichung gelöst werden: Die Gleichung ist linear, erster Ordnung, mit konstanten Koeffizienten und inhomogen. Die Lösung kann als Summe aus der Lösung der homogenen Gleichung und einer partikulären Lösung bestimmt werden:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x).$$

Die Lösung der homogenen Gleichung mit dem allgemeinen Lösungsverfahren für den Fall mit nicht-konstanten Koeffizienten, den wir hier zeigen. Man kann die Lösung auch durch Berechnung der Nullstellen des charakteristischen Polynoms bestimmen. Dieser Methode wird später gezeigt.

Die Gleichung kann interpretiert werden vom Typ rechte Seite mit bilinearen Argumenten.

$$y' = f(ax + by + c) = 3x - 2y$$

und wird mit der Substitution, wie unten gezeigt, gelöst.

Wir beginnen mit der allgemeinen Methode. Die Lösung des homogenen Problems ist

$$y_h(x) = C\,\mathrm{e}^{-P(x)},$$

wobei

$$P(x) = \int^x p(t)\mathrm{d}t$$

und $p(x)$ in diesem Fall 2 ist, sodass $P(x) = 2x$ gilt und

$$y_h(x) = C\,\mathrm{e}^{-2x}.$$

Für die partikuläre Lösung nutzen wir die Methode der Variation der Konstanten

$$y_p(x) = C(x)\,\mathrm{e}^{P(x)} = C(x)\,\mathrm{e}^{-2x}.$$

Wir nutzen dieselbe Ansatzfunktion wie im homogenen Teil aber multipliziert mit der Funktion $C(x)$ statt der Konstanten C. Um den Ausdruck für $C(x)$ zu bestimmen, leiten wir $y_p(x)$ ab

$$y_p'(x) = C'(x)\,\mathrm{e}^{-2x} - 2C(x)\,\mathrm{e}^{-2x}$$

und setzen y und y' in die Differentialgleichung ein

$$\begin{aligned}C'(x)\,\mathrm{e}^{-2x} - 2C(x)\,\mathrm{e}^{-2x} + 2C(x)\,\mathrm{e}^{-2x} &= 3x\\ C'(x)\,\mathrm{e}^{-2x} &= 3x\\ C'(x) &= 3x\,\mathrm{e}^{2x}\\ \int \mathrm{d}C &= 3\int x\,\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Das Integral auf der rechten Seite wird mit partieller Integration berechnet

$$\begin{aligned}u &= x, \quad u' = 1,\\ v' &= \mathrm{e}^{2x}, \quad v = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2x}.\end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned}\int x\,\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2x} - \int \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2x} - \frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{2x} + \tilde{C}\\ &= \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2x}(x - \frac{1}{2}) + \tilde{C}.\end{aligned}$$

Zurück zu dem Integral

$$\int \mathrm{d}C = 3\int x\,\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x,$$

erhalten wir

$$C(x) = \frac{3}{2}\,\mathrm{e}^{2x}(x - \frac{1}{2}) + \tilde{C}.$$

Die Konstante $\tilde{C}$ kann null gesetzt werden, weil sie bereits in der Lösung der homogenen Gleichung berücksichtigt wurde.

Die partikuläre Lösung ist

$$\begin{aligned}y_p(x) = C(x)\,\mathrm{e}^{-2x} &= \left(\frac{3}{2}\,\mathrm{e}^{2x}(x - \frac{1}{2})\right)\mathrm{e}^{-2x}\\ &= \frac{3}{2}(x - \frac{1}{2}).\end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung ist

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C\,\mathrm{e}^{-2x} + \frac{3}{2}(x - \frac{1}{2}).$$

<u>Wir lösen die Gleichung nun als Typ: rechte Seite mit bilinearen Argumenten.</u>

$$y' = f(ax + by + c) = 3x - 2y.$$

Mit der Substitution $u = 3x - 2y$, erhalten wir

$$u' = 3 - 2y'.$$

Da $y' = 3x - 2y = u$ gilt

$$u' = 3 - 2u.$$

Diese lösen wir mit Trennung der Variablen

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= 3 - 2u \\
\int \frac{\mathrm{d}u}{3 - 2u} &= \int \mathrm{d}x \\
-\frac{1}{2} \ln |3 - 2u| &= x + C \\
\frac{1}{3 - 2u} &= C\,\mathrm{e}^{2x},
\end{aligned}$$

mit der Rücksubstitution erhalten wir

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3 - 6x + 4y} &= C\,\mathrm{e}^{2x} \\
3 - 6x + 4y &= C\,\mathrm{e}^{-2x} \\
y &= C\,\mathrm{e}^{-2x} + \frac{3}{2}x - \frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

Die Differentialgleichung gelöst werden als lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten:

Wir bestimmen das charakteristische Polynom

$$p(\lambda) = \lambda + 2$$

mit den Nullstellen $\lambda = -2$. Damit ist die Lösung der homogenen Gleichung

$$y_h(x) = C\,\mathrm{e}^{\lambda x} = C\,\mathrm{e}^{-2x}\,.$$

Der Ansatz für die partikuläre Lösung ist

$$y_p(x) = A_1 x + A_0.$$

Durch Ableiten erhalten wir

$$y_p'(x) = A_1.$$

Wir setzen y_p und y_p' in die Differentialgleichung ein und erhalten

$$A_1 + 2A_1 x + 2A_0 = 3x.$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert

$$\begin{aligned} 2A_1 &= 3 \\ A_1 + 2A_0 &= 0 \end{aligned}$$

wodurch wir die Werte $A_0 = -\frac{3}{4}$ und $A_1 = \frac{3}{2}$ erhalten und die partikuläre Lösung

$$y_p(x) = \frac{3}{2}x - \frac{3}{4}.$$

Die allgemeine Lösung ist wieder

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C\,\mathrm{e}^{-2x} + \frac{3}{2}x - \frac{3}{4}.$$

Zu **ii)**

Die Gleichung

$$y'y = -x,$$

ist vom <u>Typ: Trennung der Variablen</u>

$$\begin{aligned}\int y\mathrm{d}y &= -\int x\mathrm{d}x\\ \frac{y^2}{2} &= -\frac{x^2}{2} + \widetilde{C}\\ y^2 &= C - x^2, \quad C = 2\widetilde{C},\\ y &= \pm\sqrt{C - x^2}.\end{aligned}$$

Die Gleichung $y'y - x = 0$ kann auch interpretiert werden als
<u>Typ: nicht-linear, homogen mit der Substitution $u = y/x$</u>

$$y' = -\frac{x}{y}$$

und kann mit der Substitution $u = \frac{y}{x}$ gelöst werden.
Aus der Beziehung $ux = y$, erhalten wir durch differenzieren beider Seiten

$$u'x + u = y',$$

wobei wir die Produktregel benutzen. Mit der Substitution $y' = -\frac{1}{u}$ erhalten wir

$$\begin{aligned}u'x + u &= -\frac{1}{u}\\ u' &= -\frac{1}{x}(u + \frac{1}{u})\\ \int \frac{u}{u^2+1}\mathrm{d}u &= \int -\frac{1}{x}\mathrm{d}x\\ \frac{1}{2}\ln(u^2+1) &= -\ln x + \ln\widetilde{C}\\ u^2 + 1 &= \frac{C}{x^2}, \quad C = \widetilde{C}^2\\ u^2 &= \frac{C}{x^2} - 1,\end{aligned}$$

durch die Rücksubstitution erhalten wir

$$\begin{aligned}u^2 &= \frac{C}{x^2} - 1,\\ \frac{y^2}{x^2} &= \frac{C}{x^2} - 1,\\ y^2 &= C - x^2\\ y &= \pm\sqrt{C - x^2}.\end{aligned}$$

Zu **iii)** Wir schreiben die Differentialgleichung als

$$y' = \frac{x^2 + y^2}{xy} = \frac{x^2}{xy} + \frac{y^2}{xy} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}.$$

Wir nutzen nun die Substitution $u = \frac{y}{x}$. Wir berechnen die Ableitung von $y = u(x)x$.

$$y' = u'x + u.$$

Durch Einsetzen erhalten wir:

$$u'x + u = \frac{1}{u} + u.$$

Dies vereinfacht sich zu

$$u'x = \frac{1}{u}.$$

Diese Gleichung können wir mit Trennung der Variablen lösen

$$\begin{aligned} u\mathrm{d}u &= \frac{1}{x}\mathrm{d}x \\ \int u\mathrm{d}u &= \int \frac{1}{x}\mathrm{d}x \\ \frac{1}{2}u^2 &= \ln|x| + C \\ u &= \pm\sqrt{2\ln|x| + C}. \end{aligned}$$

Mit Rücksubstitution erhalten wir die Lösung

$$y = \pm x\sqrt{2\ln|x| + C}.$$

Zu **iv)**

$$y' = (x + y + 1)^2$$

Wir lösen die Gleichung mittels der Substitution $u = x + y + 1$. Es gilt

$$y' = u' - 1$$

Damit erhalten wir

$$u' - 1 = u^2$$

Mit der Trennung der Variablen erhalten wir

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}u}{u^2+1} &= 1\mathrm{d}x \\
\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2+1} &= \int 1\mathrm{d}x \\
\arctan(u) &= x + C \\
u &= \tan(x + C)
\end{aligned}$$

Wir erhalten die Lösung durch Rücksubstitution

$$y = \tan(x + C) - x - 1$$

Aufgabe 18: Differentialgleichungen erster Ordnung

Klassifizieren Sie die folgenden Differentialgleichungen erster Ordnung:

1. $x^2 y' = 2y + 1$.
2. $y' = \cos(x)y$.
3. $x^2 y' + y^2 = xy$.
4. $y' = \sin(y + 1)$.
5. $y' = (4x - y + 1)^2$.
6. $y' + 3y + 2 = \mathrm{e}^{2x}$.

a) Klassifizieren Sie diese als linear oder nicht linear. In dem Fall einer linearen Differentialgleichung klassifizieren Sie die zusätzlich als

- **i)** homogen oder inhomogen.
- **ii)** mit konstanten oder nicht-konstanten Koeffizienten.

b) Klassifizieren Sie die Differentialgleichung als einen der folgenden Typen:

- **i)** $y' = f(x) \cdot g(y)$ zu Lösen mit Trennung der Variablen.
- **ii)** $y' = g(y/x)$ zu Lösen mit der Substitution $u = y/x$.
- **iii)** $y' = f(ax + by + c)$ zu Lösen mit der Substitution $u = ax + by + c$.
- **iv)** $y' + p(x) \cdot y = q(x)$.

c) Berechnen Sie die allgemeine Lösung aller Differentialgleichungen.

Lösung 18:

1) i) $x^2 y' = 2y + 1$. Linear, inhomogen, nicht-konstant Koeffizienten: Typ A (separabel) oder Typ D.

ii) $y' = \cos(x)y$. Linear, homogen, nicht-konstant Koeffizienten, separabel (Typ A).

iii) $x^2 y' + y^2 = xy(x)$. Nicht-linear, homogen, lösbar mit der Substitution von Typ B.

iv) $y' = \sin(y + 1)$. Nicht-linear, separabel von Typ A.

v) $y' = (4x - y + 1)^2$. Nicht-linear, Typ C.

vi) $y' + 3y + 2 = \mathrm{e}^{2x}$. Linear, inhomogen, Typ D mit konstanten Koeffizienten.

2) i) $x^2 y' = 2y + 1$. Linear, inhomogen, nicht-konstant Koeffizienten: Typ A (separabel)

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{2y+1} &= \frac{\mathrm{d}x}{x^2},\\
\frac{1}{2}\ln(2y+1) &= -\frac{1}{x},\\
2y+1 &= \widetilde{C}\,\mathrm{e}^{-\frac{2}{x}},\\
y &= Ce^{-\frac{2}{x}} - \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

Diese Gleichung kann auch mit einem längeren Verfahren gelöst werden, wenn man sie als vom Typ D betrachtet: Zuerst wird die Lösung des homogenen Teils (H) bestimmt und dann die besondere Lösung (P) mit der Methode der unbestimmten Koeffizienten. Wir beginnen mit (H): Die Gleichung

$$x^2y' = 2y$$

ist separabel und sie hat die Lösung

$$y_h(x) = Ce^{\frac{-2}{x}}.$$

Für den Teil (P) machen wir den Ansatz

$$y_p(x) = C(x)e^{\frac{-2}{x}}.$$

Dann leiten wir ab:

$$y_p'(x) = C'(x)e^{\frac{-2}{x}} + C(x)\frac{2}{x^2}e^{\frac{-2}{x}}.$$

Einsetzen in die Gleichung ergibt

$$
\begin{aligned}
C'(x)x^2e^{\frac{-2}{x}} + 2C(x)e^{\frac{-2}{x}} &= 2C(x)e^{\frac{-2}{x}} + 1\\
C'(x)x^2e^{\frac{-2}{x}} &= 1\\
C'(x) &= \frac{e^{\frac{2}{x}}}{x^2}\\
\int \mathrm{d}C &= \int \frac{e^{\frac{2}{x}}}{x^2}\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

Wir integrieren das Integral auf der rechten Seite mit der Substitution $u = 2/x$, woraus wir das Differential $\mathrm{d}u = -\frac{2}{x^2}\mathrm{d}x$ berechnen. Wir haben also

$$\frac{\mathrm{d}x}{x^2} = -\frac{\mathrm{d}u}{2}$$

und

$$\begin{aligned}
\int \mathrm{d}C &= -\frac{1}{2}\int e^u \mathrm{d}u,\\
C &= -\frac{1}{2}e^u + \widetilde{C}, \qquad (\text{z.B. } \widetilde{C} = 0)\\
C &= -\frac{1}{2}e^{\frac{2}{x}}. \qquad (\text{nach Rücksubstitution})
\end{aligned}$$

Daher ist die partikuläre Gleichung

$$y_p(x) = -\frac{1}{2}e^{\frac{2}{x}}e^{\frac{-2}{x}} = -\frac{1}{2}$$

und die allgemeine Lösung ist

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Ce^{\frac{-2}{x}} - \frac{1}{2}.$$

ii) $y' = \cos(x)y$. Linear, homogen, nicht-konstant Koeffizienten, separabel (Typ A).

Lösung:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{y}\mathrm{d}y &= \int \cos(x)\mathrm{d}x,\\
\ln(y) &= \sin(x) + \ln(C),\\
y &= Ce^{\sin(x)}.
\end{aligned}$$

iii) $x^2y' + y^2 = xy(x)$. Nicht-linear, homogen, lösbar mit der Substitution von Typ B.

Die Gleichung kann umgeformt werden zu

$$y' = \frac{y}{x} - \frac{y^2}{x^2}.$$

Mit der Substitution $u = y/x$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
y &= ux\\
y' &= u'x + u.
\end{aligned}$$

Wir substituieren y' und y/x in die Differentialgleichung und erhalten

$$u'x + u = u - u^2.$$

Diese kann mit Seperation der Variablen gelöst werden.

$$\begin{aligned}
u' &= -\frac{u^2}{x}, \\
\int \frac{1}{u^2}\mathrm{d}u &= -\frac{1}{x}\mathrm{d}x, \\
-\frac{1}{u} &= \ln(x) + C, \\
u &= \frac{1}{\ln(x) + C}, \\
y &= \frac{x}{\ln(x) + C}. \quad \text{(nach Rücksubstitution } u = y/x)
\end{aligned}$$

iv) $y' = \sin(y + 1)$. Nicht-linear, separabel von Typ A.

Wir lösen die Differentialgleichung mit Trennung der Variablen:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}y}{\sin(y+1)} &= \int \mathrm{d}x, \\
\ln|\tan\left(\frac{y+1}{2}\right)| &= x + \ln(C), \\
\tan\left(\frac{y+1}{2}\right) &= Ce^x, \\
\frac{y+1}{2} &= \arctan(Ce^x), \\
y &= 2\arctan(Ce^x) - 1.
\end{aligned}$$

v) $y' = (4x - y + 1)^2$. Nicht-linear, Typ C.

Diese nichtlinesre Differentialgleichung kann mit Substitution gelöst werden. Wir setzen

$$u = 4x - y + 1$$

und erhalten

$$u' = 4 - y' \quad \to \quad y' = 4 - u'.$$

Substituieren $u = 4x - y + 1$ und $y' = 4 - u'$ in die Gleichung, führt zu der seperablen Gleichung

$$
\begin{aligned}
4-u' &= u^2,\\
u' &= 4-u^2,\\
\frac{\mathrm{d}u}{4-u^2} &= \mathrm{d}x,\\
\int\frac{\mathrm{d}u}{4-u^2} &= \int\mathrm{d}x,\\
\frac{1}{4}\ln|u+2|-\ln|u-2| &= x+\ln(\widetilde{C}), \qquad \text{(mit Partialbruchzerlegung, siehe unten)}\\
\ln\frac{u+2}{u-2} &= 4x+\ln(\widetilde{C}^4),\\
u+2 &= Ce^{4x}(u-2), \quad (\text{mit } C=\widetilde{C}^4)\\
u &= -2Ce^{4x}+uCe^{4x}-2,\\
u(1-Ce^{4x}) &= -2\left(Ce^{4x}+1\right)\\
u &= -2\frac{Ce^{4x}+1}{1-Ce^{4x}},\\
4x-y+1 &= -2\frac{Ce^{4x}+1}{1-Ce^{4x}}, \quad \text{(Rücksubstitution)}\\
y &= 4x+\frac{3+Ce^{4x}}{1-Ce^{4x}}.
\end{aligned}
$$

Für die Partialbruchzerlegung im 5. Schritt oben ergibt sich

$$
\frac{-1}{u^2-4} = -\frac{1}{4}\frac{1}{x-2}+\frac{1}{4}\frac{1}{x+2}.
$$

vi) $y'+3y+2=\mathrm{e}^{2x}$. Linear, inhomogen, Typ D mit konstanten Koeffizienten.

Diese Gleichung kann als Typ D mit der Methode der unbestimmten Koeffizienten oder als lineare inhomogene ODE mit konstanten Koeffizienten gelöst werden, wobei spezielle Ansätze für die Inhomogenitäten und das Superpositionsprinzip verwendet werden.

Beginnen wir mit der ersten Methode. Hier müssen wir das homogene Problem (H) lösen und dann eine partikuläre Lösung (P) finden.

Für das homogene Problem können wir die Variablentrennung verwenden oder im Falle konstanter Koeffizienten (nur in diesem Fall!) das charakteristische Polynom benutzen:

$$
\lambda+3=0 \quad\to\quad \lambda=-3
$$

um den Lösungsteil zu bestimmen

$$y_h(x) = Ce^{-3x}.$$

Um das Problem (P) zu lösen, machen wir den Ansatz

$$y_p(x) = C(x)e^{-3x}$$

und differentieren ihn

$$y_p'(x) = C'(x)e^{-3x} - C(x)3e^{-3x}.$$

Wir setzen y_p und y_p' in die gleichung ein und erhalten

$$\begin{aligned} C'(x)e^{-3x} - 3C(x)e^{-3x} + 3Ce^{-3x} + 2 = e^{2x} \\ C'(x) = e^{5x} - 2e^{3x} \\ C(x) = \frac{1}{5}e^{5x} - \frac{2}{3}e^{3x}. \end{aligned}$$

Die partikuläre Lösung ist

$$y_p(x) = \left(\frac{1}{5}e^{5x} - \frac{2}{3}e^{3x}\right)e^{-3x} = \frac{1}{5}e^{2x} - \frac{2}{3}$$

un die allgemeine Lösung ist

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Ce^{-3x} + \frac{1}{5}e^{2x} - \frac{2}{3}.$$

Wie bereits erwähnt, können wir das Problem mit Hilfe spezieller Ansätze für die Inhomogenitäten und dem Superpositionsprinzip lösen.

Die rechte Seite der Gleichung ist $e^{2x} - 2$, also finden wir zwei Lösungen für die beiden Terme getrennt. Zunächst für e^{2x}. Der Ansatz im exponentiellen Fall ist wieder exponentiell $y_{p1} = Ae^{\alpha x}$, wobei α der Exponent des rechten Terms ist:

$$y_{p1} = Ae^{2x}.$$

Die Konstante A wird durch Koeffizientenvergleich gefunden:

$$\begin{aligned} y_{p1}' + 3y_{p1} &= e^{2x}, \quad \text{(Bemerkung: der Term -2 wird nicht betrachtet)} \\ 2Ae^{2x} + 3Ae^{2x} &= e^{2x}, \\ A &= \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

Der erste Teil der partikulären Lösung ist

$$y_{p1} = \frac{1}{5}e^{2x}.$$

Der zweite Teil wird mit dem Polynom-Ansatz nullter Ordnung $y_{p2} = B$ berechnet, da der Term -2 eine Konstante ist. Setzt man die Ansatzfunktion in die Differentialgleichung ein, so erhält man

$$3B = -2 \quad B = -\frac{2}{3}.$$

Wir haben also die partikuläre Lösung durch Superposition

$$y_p(x) = y_{p1}(x) + y_{p2}(x) = \frac{1}{5}e^{2x} - \frac{2}{3}$$

un die allgemeine Lösung

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Ce^{-3x} + \frac{1}{5}e^{2x} - \frac{2}{3}.$$

Aufgabe 19: Trennung der Veränderlichen und Anfangswertproblem

Klassifizieren die folgende Differentialgleichung und bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems mit $y(0) = 0$ und $y'(0) = 6$:

$$y''(x) - 2y'(x) - 3y(x) = 0.$$

Lösung 19:

Klassifizierung: lineare Dgl. 2. Ordnung, konstante Koeffizienten, homogen.
Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 3$ sind $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 3$. Die allgemeine Lösung ist

$$y(x) = c_1 \, \mathrm{e}^{-x} + c_2 \, \mathrm{e}^{3x} \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R} \, .$$

Mit den Anfangswertbedingungen $y(0) = c_1 + c_2 \stackrel{!}{=} 0$ und $y'(0) = -c_1 + 3c_2 \stackrel{!}{=} 6$ erhalten wir das lineare System

$$\begin{aligned} c_1 \quad + \quad c_2 \quad &= 0, \\ -c_1 \quad + \quad 3c_2 \quad &= 6 \end{aligned}$$

mit Lösung $c_2 = 3/2$ und $c_1 = -3/2$. Damit ist

$$y(x) = -\frac{3}{2} \, \mathrm{e}^{-x} + \frac{3}{2} \, \mathrm{e}^{3x} \, .$$

Aufgabe 20: Homogene lineare Differentialgleichungen

Bestimmen Sie die allgemeinen reellen Lösungen folgender homogener linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten mit Hilfe geeigneter Ansätze für $u(t)$:

i) $u'' - 7\,u' + 10\,u = 0 \ .$ **ii)** $7\,u'' + 28\,u' + 91\,u = 0 \ .$

iii) $u''' - 3\,u'' = 0 \ .$ **iv)** $u'''' + 8\,u'' + 16\,u = 0 \ .$

Lösung 20:

Der Ansatz ist jedesmal $u(t) = \alpha\, \mathrm{e}^{\lambda t}\ , \quad \alpha, \lambda = \text{const} \in \mathbb{C}\ .$

i) Die charkt. Gl. ist: $\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2\ , \quad \lambda_2 = 5\ .$

$$\Rightarrow \underline{u(t) = a\,\mathrm{e}^{2t} + b\,\mathrm{e}^{5t}\ , \quad a, b \in \mathbb{R}}\ .$$

ii) Die charkt. Gl. ist: $\lambda^2 + 4\lambda + 13 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -2 \pm 3\,\mathrm{i}\ .$

$$\Rightarrow \underline{u(t) = \mathrm{e}^{-2t}\Big(a\,\cos(3t) + b\,\sin(3t)\Big)\ , \quad a, b \in \mathbb{R}}\ .$$

iii) Die charkt. Gl. ist: $\lambda^3 - 3\lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 0\ , \quad \lambda_3 = 3\ .$

$$\Rightarrow \underline{u(t) = a + b\,t + c\,\mathrm{e}^{3t}\ , \quad a, b, c \in \mathbb{R}}\ .$$

iv) Die charkt. Gl. ist: $\lambda^4 + 8\lambda^2 + 16 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 2\,\mathrm{i}\ , \quad \lambda_{3,4} = -2\,\mathrm{i}\ .$

$$\Rightarrow \underline{u(t) = (a + b\,t)\cdot\cos(2t) + (c + d\,t)\cdot\sin(2t)\ , \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}}\ .$$

Aufgabe 21: Komplexe Nullstellen des charakteristischen Problems

Bestimmen Sie die Lösung der folgenden Differentialgleichung:

$$y'' + 4y' + 5y = 0$$

Lösung 21:

Das charakteristische Polynom $p(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda + 5$ hat die Nullstellen

$$\lambda_1 = -2 + i, \lambda_2 = -2 - i$$

die Lösung ist dann

$$\begin{aligned} y &= C_1 \mathrm{e}^{-2t+\,\mathrm{i}t} + C_2 \mathrm{e}^{-2t-\,\mathrm{i}t} \\ &= \mathrm{e}^{-2t}(C_1(\cos t + \,\mathrm{i}\sin t) + C_2(\cos t - \,\mathrm{i}\sin t)) \\ &= \mathrm{e}^{-2t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t), \end{aligned}$$

wobei $c_1 = C_1 + C_2$ und $c_2 = i(C_1 - C_2)$ die reellen Konstanten sind.
Die komplexen Konstanten können durch die reellen Konstanten wie folgt ausgedrückt werden: $C_1 = \overline{C_2} = \dfrac{c_1 - \,\mathrm{i}c_2}{2}$.

Aufgabe 22: Lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung

Bestimmen Sie die allgemeinen Lösungen der folgenden Differentialgleichungen:

a) $y^{(4)} + 4y = 0$,

b) $y^{(4)} - 18y'' + 81y = 0$.

Lösung 22:

a) Das charakteristische Polynom ist $p(\lambda) = \lambda^4 + 4$, mit den Nullstellen $\lambda_\ell = \sqrt{2}\mathrm{e}^{i(\pi/2+k\pi)/2}$ for $k = 0, 1, 2, 3$,

$$\lambda_0 = 1 + i, \lambda_1 = -1 + i, \lambda_2 = -1 - i, \lambda_3 = 1 - i.$$

Das Fundamentalsystem ist dann

$$\{e^x \cos x, e^x \sin x, \mathrm{e}^{-x} \cos x, \mathrm{e}^{-x} \sin x\}$$

Die allgemeine Lösung ist also gegeben als

$$y(x) = c_1 e^x \cos x + c_2 e^x \sin x + c_3 \mathrm{e}^{-x} \cos x + c_4 \mathrm{e}^{-x} \sin x \text{ with } c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}.$$

b) Von der gegebenen Gleichung

$$y^{(4)} - 18y'' + 81y = 0,$$

ist das charakteristische Polynom

$$\lambda^4 - 18\lambda^2 + 81 = 0$$

und kann geschrieben werden als

$$(x^2 - 9)^2 = (x - 3)^2 \cdot (x + 3)^2 = 0$$

mit den zwei doppelten Nullstellen: $\lambda_1 = -3$ und $\lambda_2 = 3$. Die allgemeine Lösung der hommogenen Differentialgleichung ist

$$y(x) = (c_1 + c_2 x)e^{-3x} + (c_3 + c_4 x)e^{3x}.$$

Die Koeffizienten vor der Exponentialfunktion sind lineare Funktionen, weil es sich um doppelte Nulstellen handelt.

Aufgabe 23: homogene lineare Dgl. höherer Ordnung

Lösen Sie die homogenen Differentialgleichungen mit Hilfe des Exponentialansatzes

$$y(t) = ce^{\lambda t},\ c, \lambda = \text{const.}.$$

a) $y'' - 3y' + 2y = 0$

b) $y'' + 4y = 0$

c) $y'' + 2y' + 2y = 0$

d) $y^{(4)} - y = 0$

Lösung 23:

a) Einsetzen des Exponentialansatzes in die hom. lin. Dgl. mit konstanten Koeffizienten ergibt das charakteristische Polynom

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2,$$

das die Nullstellen $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 2$ besitzt. Die allgemeine Lösung ist die Linearkombination der beiden Fundamentallösungen $y_1(x) = e^x$ und $y_2(x) = e^{2x}$

$$y(x) = c_1e^x + c_2e^{2x} \,\text{mit}\, c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

b) Aus $p(\lambda) = \lambda^2 + 4 = 0$ erhält man $\lambda_{1,2} = \pm 2i$ und damit die reelle Lösung

$$y(x) = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x) \,\text{mit}\, c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

c) Aus $p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$ erhält man $\lambda_{1,2} = -1 \pm i$. Ein reelles Fundamentalsystem ist $e^{-x}\cos(x), e^{-x}\sin(x)$. Die allgemeine Lösung ist eine gedmämpfte Schwingung

$$y(x) = (c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x))e^{-x} \,\text{mit}\, c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

d) Mit $p(\lambda) = \lambda^4 - 1 = (\lambda^2 - 1)(\lambda^2 + 1) = (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - i)(\lambda + i)$ erhält man die allgemeine reelle Lösung

$$y(x) = c_1e^x + c_2e^{-x} + c_3 \cos(x) + c_4 \sin(x) \,\text{mit}\, c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 24: Harmonischer Oszillator

Man betrachte die Differentialgleichung

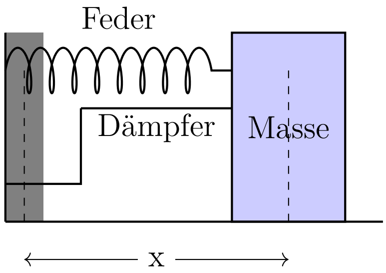
$$y'' + 2\rho y' + \omega^2 y = 0, \quad \text{mit } \rho, \omega \in \mathbb{R}_+$$

Die gegebene Differentialgleichung, ist eine klassische Form einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Aus physikalischer Sicht beschreibt diese Gleichung typischerweise gedämpfte harmonische Bewegungen, wobei:

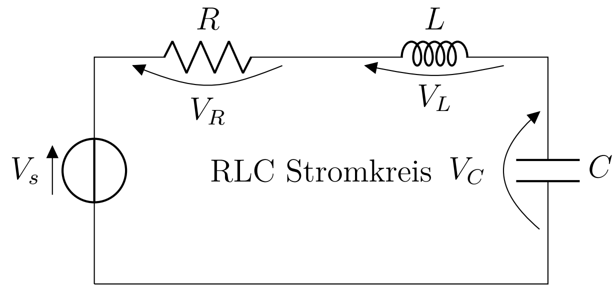
- $y(t)$ die Verschiebung des Systems vom Gleichgewicht über die Zeit darstellt.
- ρ (der Koeffizient der ersten Ableitung y') repräsentiert den Dämpfungsfaktor, der beeinflusst, wie schnell das System Energie durch Reibung oder andere resistive Kräfte verliert.
- ω^2 (der Koeffizient von y) steht im Zusammenhang mit der Steifigkeit des Systems oder der Kraft, die es ins Gleichgewicht zurückführt. Der Parameter ω selbst wird oft als natürliche Frequenz des ungedämpften Systems betrachtet.

Physikalische Interpretationen

1. **Mechanische Systeme:** In der Mechanik kann diese Gleichung ein Masse-Feder-Dämpfer-System modellieren, bei dem eine Masse an einer Feder und möglicherweise einem Dämpfungselement (wie einem Stoßdämpfer) befestigt ist. Die Masse oszilliert um eine Gleichgewichtsposition, wobei die Feder eine rückstellende Kraft proportional zur Verschiebung liefert und der Dämpfer eine Kraft proportional zur Geschwindigkeit bereitstellt, die der Bewegung entgegenwirkt.



2. **Elektrische Schaltkreise:** In der Elektrotechnik kann die Gleichung einen RLC-Schaltkreis (einen Schaltkreis, der einen Widerstand R, eine Induktivität L, und einen Kondensator C enthält) beschreiben. Hier könnte $y(t)$ die elektrische Ladung oder den Strom darstellen, $2\rho = R/L$ und $\omega^2 = 1/(LC)$. Das Verhalten des Schaltkreises — ob er oszilliert oder schnell stabilisiert wird — hängt von den Werten dieser Komponenten ab.



Diese Gleichung ist allgemein bekannt als *"Gedämpfter harmonischer Oszillator"* oder einfach als *"Gedämpfter Oszillator"*. Sie umfasst drei spezifische Szenarien basierend auf dem Wert von ρ im Vergleich zu ω:

1. **Überdämpft ($\rho > \omega$):** Das System kehrt ohne Oszillation langsam zum Gleichgewicht zurück.

2. **Kritisch gedämpft ($\rho = \omega$):** Das System kehrt so schnell wie möglich ohne Oszillation zum Gleichgewicht zurück.

3. **Untergedämpft ($\rho < \omega$):** Das System oszilliert mit einer Amplitude, die allmählich auf null abnimmt.

Aufgabe: Bestimmen Sie die Lösung der DGl für alle drei Fälle: überdämpft, kritisch gedämpft und untergedämpft.

Hinweis: Bestimmen Sie das charakteristische Polynom und seine Nullstellen und verwenden Sie den Exponentialansatz. Man betrachte alle drei Fälle, in denen die Nullstellen einfach, doppelt oder komplex konjiugiert sind.

Lösung 24:

Fall 1: Überdämpft ($\rho > \omega$) Die Wurzeln sind reell und unterschiedlich:

$$\lambda = -\rho \pm \sqrt{\rho^2 - \omega^2}$$

mit der Lösung:

$$y(t) = Ae^{(-\rho+\sqrt{\rho^2-\omega^2})t} + Be^{(-\rho-\sqrt{\rho^2-\omega^2})t}$$

Fall 2: Kritische Dämpfung ($\rho = \omega$) Die charakteristische Gleichung vereinfacht sich zu:

$$\lambda^2 + 2\omega\lambda + \omega^2 = 0$$

mit einer doppelten Wurzel $\lambda = -\omega$. Die Lösung ist:

$$y(t) = (A + Bt)e^{-\omega t}$$

Fall 3: Untergedämpft ($\rho < \omega$) Die Wurzeln sind komplex:

$$\lambda = -\rho \pm i\sqrt{\omega^2 - \rho^2}$$

was zu der Lösung führt:

$$y(t) = e^{-\rho t}(A\cos(\sqrt{\omega^2 - \rho^2}t) + B\sin(\sqrt{\omega^2 - \rho^2}t))$$

Aufgabe 25: Lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung

Bestimmen Sie die allgemeinen Lösungen der folgenden Differentialgleichungen:

a) $y^{(4)} + 2y''' + y'' = 12x,$

b) $y'' + 4y' + 5y = 8\sin t,$

c) $y'' - 4y' + 4y = \mathrm{e}^{2x}.$

Lösung 25:

a) Das charakteristische Polynom $p(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^3 + \lambda^2$ hat die Nullstellen $\lambda_{1/2} = 0$ (doppelte Nullstelle), $\lambda_{3/4} = -1$ (ebenfalls doppelt).
Ein Fundamentalsystem ist also $\{1, x, \mathrm{e}^{-x}, x\mathrm{e}^{-x}\}$.
Für die Partikulärlösung ist der Ansatz $y_p(x) = (ax+b)x^2 = ax^3+bx^2$ sinnvoll.

$$y_p'(x) = 3ax^2 + 2bx, y_p''(x) = 6ax + 2b, y_p^{(3)}(x) = 6a \text{ und } y_p^{(4)}(x) = 0.$$

Eingesetzt in die Dgl. ergibt

$$0 + 12a + 6ax + 2b = 12x.$$

Koeffizientenvergleich liefert dann $a = 2$, $b = -6a = -12$. Die allgemeine Lösung der Gleichung ist

$$y(x) = c_1 + c_2x + c_3\mathrm{e}^{-x} + c_4x\mathrm{e}^{-x} - 12x^2 + 2x^3 \text{ mit } c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}.$$

b) Das charakteristische Polynom $p(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda + 5$ hat die Nullstellen

$$\lambda_1 = -2 + i, \lambda_2 = -2 - i.$$

Die homogene Lösung ist dann

$$y_h = C_1\mathrm{e}^{-2t+it} + C_2\mathrm{e}^{-2t-it} = \mathrm{e}^{-2t}(C_1(\cos t + i\sin t) + C_2(\cos t - i\sin t))$$

$$= \mathrm{e}^{-2t}(c_1\cos t + c_2\sin t), \text{ wobei } C_1 = \overline{C_2} = \frac{ic_1 + c_2}{2}.$$

Eine Partikulärlösung berechnet man für die rechte Seite $8\sin t = \mathrm{Im}(8\mathrm{e}^{it})$ mit dem Ansatz $y_p(t) = \mathrm{Im}(a\mathrm{e}^{it})$.
Man erhält durch Einsetzen in die Dgl.

$$a(-1 + 4i + 5)\mathrm{e}^{it} = 8\mathrm{e}^{it} \Rightarrow a = \frac{2}{1+i} = 1 - i.$$

Damit ist

$$y_p(t) = \mathrm{Im}((1-i)\mathrm{e}^{it}) = \mathrm{Im}\Big((1-i)(\cos t + i\sin t)\Big) = \sin t - \cos t$$

eine Partikulärlösung. Die allgemeine Lösung der Gleichung ist

$$y(t) = \mathrm{e}^{-2t}(c_1\cos t + c_2\sin t) + \sin t - \cos t.$$

c) Es ist $p(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2$.
Das Polynom hat die doppelte Nullstelle $\lambda = 2$.
Ein Fundamentalsystem ist daher $\{\mathrm{e}^{2x}, x\mathrm{e}^{2x}\}$.
Mit dem Ansatz $y_p(x) = ax^2\mathrm{e}^{2x}$ folgt

$$y_p'(x) = a(2x^2 + 2x)\mathrm{e}^{2x},\ y_p''(x) = a(4x^2 + 8x + 2)\mathrm{e}^{2x}.$$

Das Einsetzen in die Dgl. liefert somit

$$a\mathrm{e}^{2x}(4x^2 + 8x + 2 - 8x^2 - 8x + 4x^2) = \mathrm{e}^{2x}.$$

Daraus folgt $a = 1/2$.
Die allgemeine Lösung lautet

$$y(x) = \left(c_1 + c_2x + \frac{1}{2}x^2\right)\mathrm{e}^{2x} \text{ mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 26: Lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung

Bestimmen Sie die allgemeinen Lösungen der folgenden Differentialgleichungen. Falls Anfangswerte gegeben sind, ermitteln Sie auch die Lösung des Anfangswertproblems.

a) $y'' + 6y' + 8y = 0,$

b) $y'' + 2y' + 5y = 17\ \sin(2x).$

c) $y''(x) - 2y'(x) - 3y(x) = 4\mathrm{e}^x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 6,$

d) $y''(x) + 5y'(x) + 6y(t) = 3\mathrm{e}^{3x},$

e) $y''(x) - y'(x) - 2y(x) = 4x\mathrm{e}^x.$

f) $y''' + y'' - y' - y = 3\mathrm{e}^{-2x},$

Lösung 26:

a) Das charakteristische Polynom $p(\lambda) = \lambda^2 + 6\lambda + 8$ hat die Nullstellen $\lambda_1 = -2$ und $\lambda_2 = -4$. Damit ist

$$y(x) = c_1\mathrm{e}^{-2x} + c_2\mathrm{e}^{-4x} \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

b) Das charakteristische Polynom $p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 5$ hat die Nullstellen $\lambda_{1/2} = -1 \pm \sqrt{1-5} = -1 \pm 2i$. Damit hat man das reelle Fundamentalsystem

$$\left\{\mathrm{e}^{-x}\cos(2x), \mathrm{e}^{-x}\sin(2x)\right\}.$$

Reeller Ansatz
Ein Ansatz für eine Partikulärlösung ist

$$y_p(x) = A\cos(2x) + B\sin(2x).$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert:

$$\begin{aligned} 17\sin(2x) \overset{!}{=} & -4A\cos(2x) - 4B\sin(2x) - 4A\sin(2x) + 4B\cos(2x) + 5A\cos(2x) + 5B\sin(2x) \\ = & (-4A + 4B + 5A)\cos(2x) + (-4B - 4A + 5B)\sin(2x). \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich führt dann zum linearen Gleichungssystem für A und B:

$$\begin{aligned} \cos(2x): \quad & A + 4B &= 0 \\ \sin(2x): \quad & -4A + B &= 17 \end{aligned}$$

Mit der Lösung $B = 1$ und $A = -4$ haben wir die Partikulärlösung

$$y_p(x) = -4\cos(2x) + \sin(2x)$$

Die Gesamtlösung lautet also

$$y(x) = \sin(2x) - 4\cos(2x) + c_1 \mathrm{e}^{-x}\cos(2x) + c_2 \mathrm{e}^{-x}\sin(2x).$$

c) Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 3$ sind $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 3$. Eine Partikulärlösung der inhomogenen Gleichung berechnet man mit dem Ansatz $y_p(x) = ae^x$, es folgt $-4ae^x \stackrel{!}{=} 4e^x$ und damit $a = -1$. Die allgemeine Lösung ist

$$y_{allg}(x) = -e^x + c_1\mathrm{e}^{-x} + c_2\mathrm{e}^{3x} \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Aus den Anfangsbedingungen $y(0) = -1 + c_1 + c_2 \stackrel{!}{=} 0$ und $y'(0) = -1 - c_1 + 3c_2 \stackrel{!}{=} 6$ folgt das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrl} c_1 & + & c_2 & = 1, \\ -c_1 & + & 3c_2 & = 7 \end{array}$$

mit Lösung $c_2 = 2$ und $c_1 = -1$. Damit ist

$$y_{AWP}(x) = -e^x - \mathrm{e}^{-x} + 2\mathrm{e}^{3x}.$$

d) Man berechnet zuerst die Lösungen der homogenen Gleichung

$$y'' + 5y' + 6y = 0.$$

Das charakteristische Polynom $p(\lambda) = \lambda^2 + 5\lambda + 6$ hat die Nullstellen $\lambda_1 = -2$ und $\lambda_2 = -3$. Ein Fundamentalsystem ist $\{\mathrm{e}^{-2x}, \mathrm{e}^{-3x}\}$. Nun braucht man noch eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung. Diese berechnet man mit dem Ansatz $y_p(x) = a\mathrm{e}^{3x}$ mit $a \in \mathbb{R}$. Einsetzen in die inhomogene DGl liefert $(9 + 15 + 6)a\mathrm{e}^{3x} = 3\mathrm{e}^{3x}$, also $a = 1/10$. Die allgemeine Lösung der Gleichung ist

$$y(x) = c_1\mathrm{e}^{-2x} + c_2\mathrm{e}^{-3x} + \frac{1}{10}\mathrm{e}^{3x} \text{ mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

e) Das Polynom $p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 2$ hat die Nullstellen $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = -1$, dies ergibt das Fundamentalsystem $\{\mathrm{e}^{2x}, \mathrm{e}^{-x}\}$. Der Ansatz für die Partikulärlösung ist $y_p(x) = (ax + b)e^x$. Mit $y_p'(x) = (ax + a + b)e^x$ und $y_p'' = (ax + 2a + b)e^x$

folgt

$$\mathrm{e}^x(ax + 2a + b - (ax + a + b) - 2(ax + b)) = 4x\mathrm{e}^x$$

$$-2ax + a - 2b = 4x$$

Koeffizientenvergleich liefert dann $a = -2$ und $2b = a$, $b = -1$. Damit hat man die allgemeine Lösung

$$y(x) = c_1\mathrm{e}^{2x} + c_2\mathrm{e}^{-x} - (2x + 1)e^x \text{ mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

f) Das charakteristische Polynom ist $p(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 - \lambda - 1$. Eine Nullstelle kann man raten, zum Beispiel $\lambda_1 = 1$. Polynomdivision oder Anwendung des Horner–Schemas liefert dann

$$p(\lambda) = (\lambda - 1)\Big(\lambda^2 + 2\lambda + 1\Big),$$

damit ist $\lambda_2 = -1$ eine weitere, und zwar doppelte, Nullstelle. Folglich hat die homogene Gleichung das Fundamentalsystem

$$\Big\{e^x, \mathrm{e}^{-x}, x\mathrm{e}^{-x}\Big\}.$$

Zur Berechnung einer Partikulärlösung benutzt man den Ansatz $y_p(x) = a\mathrm{e}^{-2x}$. Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$a\mathrm{e}^{-2x}\Big(-8 + 4 + 2 - 1\Big) \stackrel{!}{=} 3\mathrm{e}^{-2x}$$

und damit $a = -1$. Die allgemeine Lösung ist also

$$y(x) = -\mathrm{e}^{-2x} + c_1\mathrm{e}^x + c_2\mathrm{e}^{-x} + c_3x\mathrm{e}^{-x} \quad \text{mit } c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 27: Inhomogene lineare Differentialgleichungen

Bestimmen Sie von folgenden inhomogenen linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten jeweils die allgemeine reelle Lösung, indem Sie zunächst die zugehörige homogene lineare Differentialgleichung allgemein lösen und eine spezielle (partikuläre) Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung mit Hilfe von geeigneten Ansätzen bestimmen.

a) $y''(x) - 5\,y'(x) + 6\,y(x) = r_k(x) \quad \text{mit}$

$$\textbf{i)}\ r_1 = 108\,x^2\ , \qquad \textbf{ii)}\ r_2 = 7\,\mathrm{e}^{3x}\ , \qquad \textbf{iii)}\ r_3 = 18 + 14\,\mathrm{e}^{3x}\ .$$

b) $y'''(x) + 25\,y'(x) = s_k(x) \quad \text{mit}$

$$\begin{array}{llll} \textbf{i)} & s_1 = 150\,x\ , & \textbf{ii)} & s_2 = \sin(x)\ , \\ \textbf{iii)} & s_3 = \sin(5x) - 200\,x\ , & \textbf{iv)} & s_4 = 6\ \sin(3x)\ \cos(2x)\ . \end{array}$$

Hinweis: Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt $\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$.

c) $y''(x) - 2\,y'(x) = t_k(x) \quad \text{mit}$

$$\textbf{i)}\ t_1 = 4\,\mathrm{e}^{2x}\ , \qquad \textbf{ii)}\ t_2 = \cosh(2x)\ .$$

Lösung 27:

a) Zunächst die zugehörige homogene lineare Differentialgleichung:

Die charkt. Gl. ist: $\quad \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \ \Rightarrow\ \lambda_1 = 2\ ,\ \ \lambda_2 = 3\ .$

$$\Rightarrow \qquad \underline{y_{\mathrm{h}}(x) = a\,\mathrm{e}^{2x} + b\,\mathrm{e}^{3x}\ ,\ \ a, b \in \mathbb{R}}\ .$$

i) Faustregelansatz:

$$y_{\mathrm{p}} = A + B\,x + C\,x^2 \ \Rightarrow\ y_{\mathrm{p}}' = B + 2C\,x \ \text{und}\ y_{\mathrm{p}}'' = 2C\ .$$

Einsetzen in die Differentialgleichung:

$$2C - 5\cdot(B + 2C\,x) + 6\cdot\left(A + B\,x + C\,x^2\right) = 108\,x^2\ .$$

Koeffizientenvergleich:

$$\begin{aligned} 1: &\quad 2\,C - 5\,B + 6\,A = 0 \\ x: &\quad -10\,C + 6\,B = 0 \\ x^2: &\quad 6\,C = 108 \qquad \Rightarrow C = 18\,, \quad B = 30 \;\; A = 19\,. \end{aligned}$$

Partikuläre Lösung der inhomogen linearen Differentialgleichung:

$$\Rightarrow \qquad \underline{y_{\mathrm{p}}(x) = 19 + 30\,x + 18\,x^2}\ .$$

Allgemeine Lösung der inhomogen linearen Differentialgleichung:

$$\Rightarrow \ \underline{y(x) = y_{\mathrm{h}} + y_{\mathrm{p}} = a\,\mathrm{e}^{2x} + b\,\mathrm{e}^{3x} + 19 + 30\,x + 18\,x^2\ , \quad a, b \in \mathbb{R}}\ .$$

ii) Faustregelansatz: $y_{\mathrm{p}} = A\,x\,\mathrm{e}^{3x}$ „x–spendieren“.

Eingesetzt:

$$\Big((6A + 9A\,x) - 5\cdot(A + 3A\,x) + 6\cdot A\,x\Big)\cdot \mathrm{e}^{3x} = 7\,\mathrm{e}^{3x} \Rightarrow A = 7 \text{ und } 0 = 0\ .$$

Partikuläre Lösung: $\underline{y_{\mathrm{p}}(x) = 7x\,\mathrm{e}^{3x}}$.

Allgemeine Lösung: $\underline{y(x) = y_{\mathrm{h}} + y_{\mathrm{p}} = a\,\mathrm{e}^{2x} + b\,\mathrm{e}^{3x} + 7x\,\mathrm{e}^{3x}\ , \quad a, b \in \mathbb{R}}$.

iii) Faustregelansätze für beide Summanden der Inhomogenität einzeln.

Ansatz für $r = 18$: $y_{\mathrm{p}_1} = A \Rightarrow \underline{y_{\mathrm{p}_1}(x) = 3}$.

Für $r = 14\,\mathrm{e}^{3x}$ ergibt sich nach ii) : $\underline{y_{\mathrm{p}_2}(x) = 14x\,\mathrm{e}^{3x}}$.

Allgemeine Lösung: $\underline{y(x) = y_{\mathrm{h}} + y_{\mathrm{p}_1} + y_{\mathrm{p}_2} = a\,\mathrm{e}^{2x} + b\,\mathrm{e}^{3x} + 3 + 14x\,\mathrm{e}^{3x}\ , \quad a, b \in \mathbb{R}}$.

b) Das charakteristische Polynom der Differentialgleichung ist $\lambda^3 + 25\lambda$ mit den Nullstellen $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2/3} = \pm 5\,\mathrm{i}$. Die zugehörige homogene lineare Differentialgleichung hat damit die allgemeine (reelle) Lösung

$$\underline{y_{\mathrm{h}}(x) = a\,\cos(5x) + b\,\sin(5x) + c\,, \quad a, b, c \in \mathbb{R}}\ .$$

i) Faustregelansatz: $y_{\mathrm{p}} = A\,x + B\,x^2$ („x–spendieren“). Einsetzen in die

Differentialgleichung ergibt

$$
\begin{aligned}
& & y'''(x) + 25y'(x) \\
& & = 0 + 25(A + 2Bx) \stackrel{!}{=} 150x \\
\Rightarrow & & A = 0,\ B = 3 \\
\Rightarrow & & y_\mathrm{p} = 3\,x^2 \\
\Rightarrow & & y(x) = y_\mathrm{h} + y_\mathrm{p} = a\,\cos(5x) + b\,\sin(5x) + c + 3\,x^2\ , \quad a, b, c \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

ii)

Faustregelansatz: $y_\mathrm{p} = A\cos(x) + B\sin(x) \Rightarrow \underline{y_\mathrm{p}(x) = -\frac{1}{24}\cos(x)}$.
Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt

$$
\begin{aligned}
& & y'''(x) + 25y'(x) \\
& & = A\sin(x) - B\cos(x) + 25(-A\sin(x) + B\cos(x)) \stackrel{!}{=} \sin(x) \\
\Rightarrow & & -24A = 1,\ 24B = 0 \\
\Rightarrow & & y_\mathrm{p} = -\frac{1}{24}\cos(x)
\end{aligned}
$$

Beide Wege liefern dann die allgemeine Lösung

$$
\Rightarrow \quad \underline{y(x) = y_\mathrm{h} + y_\mathrm{p} = a\,\cos(5x) + b\,\sin(5x) + c - \frac{1}{24}\cos(x)\ , \quad a, b, c \in \mathbb{R}} \ .
$$

iii) Faustregelansätze für beide Summanden einzeln:

Ansatz für $s = \sin(5x) = \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{i5x})$: $y_{\mathrm{p}_1} = \mathrm{Im}(Ax\mathrm{e}^{i5x})$ („x–spendieren“) liefert nach Einsetzen in die DGL

$$
A \cdot (3 \cdot (5i)^2 \cdot \mathrm{e}^{i5x} + x \cdot (5i)^3 \cdot \mathrm{e}^{i5x} + 25 \cdot (\mathrm{e}^{i5x} + x \cdot 5i \cdot \mathrm{e}^{i5x})) = \mathrm{e}^{i5x}
$$

$$
A \cdot (-75 - 125ix + 25 + 125ix) = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{-50}
$$

$$
\Rightarrow y_{\mathrm{p}_1} = \mathrm{Im}\left(\frac{1}{-50}x\mathrm{e}^{i5x}\right) = -\frac{1}{50}\,x\,\sin(5x)
$$

Alternativ kann mann den Ansatz $Ax\,\cos(5x) + Bx\,\sin(5x)$ benutzen. Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt

$$
\begin{aligned}
&y'''(x) + 25y'(x)\\
&= -\,3\cdot 25A\cos(5x) + 125Ax\sin(5x) - 3\cdot 25B\sin(5x) - 125Bx\cos(5x) +\\
&\quad + 25(A\cos(5x) - 5Ax\sin(5x) + B\sin(5x) + 5Bx\cos(5x)) \stackrel{!}{=} \sin(5x)\\
\Rightarrow\quad \sin(5x) &= (-75A + 25A)\cos(5x) + (-75B + 25B)\sin(5x)\\
\Rightarrow\quad A &= 0,\ B = -\frac{1}{50}\\
\Rightarrow\quad y_{\mathrm{p}1} &= -\frac{1}{50}\sin(x)
\end{aligned}
$$

Für $s = -200$ ergibt sich die spezielle Lösung nach i) zu $\underline{y_{\mathrm{p}_2} = -4\,x^2}$.

$$\underline{y(x) = y_{\mathrm{h}} + y_{\mathrm{p}_1} + y_{\mathrm{p}_2} = a\,\cos(5x) + b\,\sin(5x) + c - \frac{1}{50}\,x\,\sin(5x) - 4\,x^2\ , \quad a,b,c \in \mathbb{R}}\ .$$

iv) Die Inhomogenität ist $s_4 = 6\,\sin(3x)\,\cos(2x) = 3\Big(\sin(x) + \sin(5x)\Big)$.

Nach ii) und iii) ist damit die spezielle Lösung: $\underline{y_{\mathrm{p}} = -\frac{1}{8}\,\cos(x) - \frac{3}{50}\,x\,\sin(5x)}$.

$$\underline{y(x) = y_{\mathrm{h}} + y_{\mathrm{p}} = a\,\cos(5x) + b\,\sin(5x) + c - \frac{1}{8}\,\cos(x) - \frac{3}{50}\,x\,\sin(5x)\ , \quad a,b,c \in \mathbb{R}}\ .$$

c) Das charakteristische Polynom $\lambda^2 - 2\lambda$ hat die Nullstellen $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$. Damit ist die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen linearen Differentialgleichung

$$\underline{y_{\mathrm{h}}(x) = a + b\,\mathrm{e}^{2x}\ , \quad a,b \in \mathbb{R}}\ .$$

i) Faustregelansatz $y_{\mathrm{p}} = A\,x\,\mathrm{e}^{2x}$ („x–spendieren“) $\Rightarrow$ $\underline{y_{\mathrm{p}} = 2\,x\,\mathrm{e}^{2x}}$.

$$\Rightarrow \quad \underline{y(x) = y_{\mathrm{h}} + y_{\mathrm{p}} = a + b\,\mathrm{e}^{2x} + 2\,x\,\mathrm{e}^{2x}\ , \quad a,b \in \mathbb{R}.}$$

ii) Die Inhomogenität ist $t_2 = \cosh(2x) = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2x} + \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-2x}$.

Faustregelansätze für beide Summanden einzeln:

Für $t = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2x}$ ergibt sich nach i) $\underline{y_{\mathrm{p}_1}(x) = \frac{1}{4}\,x\,\mathrm{e}^{2x}}$.

Ansatz für $t = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-2x}$: $y = A\,\mathrm{e}^{-2x}$ (**kein** „x–spendieren“ !) $\Rightarrow$ $\underline{y_{\mathrm{p}_2} = \frac{1}{16}\,\mathrm{e}^{-2x}}$.

$$\Rightarrow \quad \underline{y(x) = y_{\mathrm{h}} + y_{\mathrm{p}_1} + y_{\mathrm{p}_2} = a + b\,\mathrm{e}^{2x} + \frac{1}{4}\,x\,\mathrm{e}^{2x} + \frac{1}{16}\,\mathrm{e}^{-2x}\ , \quad a,b \in \mathbb{R}}$$

Aufgabe 28: Lineare Differentialgleichungen mit Resonanz

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden linearen Differentialgleichungen

a) $y'' - y = 1$,

b) $y''' + y'' = 1$,

c) $y'' + y' - 2y = e^x$,

d) $y'' + y = \cos(x)$.

Lösung 28:

a) Wir lösen zunächst die homogene Gleichung

$$y'' - y = 0.$$

Das charakteristische Polynom ist

$$\lambda^2 - 1 = 0$$

mit den Nullstellen $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -1$. Damit ist die homogene Lösung

$$y_h = c_1 \mathrm{e}^x + c_2 \mathrm{e}^{-x}.$$

Für die partikuläre Lösung wählen wir den Ansatz

$$y_p = A.$$

Damit ist

$$y_p'' = 0.$$

Eingesetzt in die Differentialgleichung erhalten wir

$$0 - A = 1.$$

Also ist $y_p = -1$. Die allgemeine Lösung ist dann

$$\begin{aligned} y &= y_h + y_p \\ &= c_1 \mathrm{e}^x + c_2 \mathrm{e}^{-x} - 1. \end{aligned}$$

b) Wir lösen zunächst die homogene Gleichung

$$y''' + y'' = 1.$$

Das charakteristische Polynom ist

$$\lambda^3 + \lambda^2 = \lambda^2(\lambda + 1) = 0$$

mit der doppelten Nullstelle $\lambda = 0$ und der einfachen Nullstelle $\lambda = -1$. Damit ist die homogene Lösung

$$y_h = (c_1 + c_2 x) + c_3 \,\mathrm{e}^{-x}\,.$$

Da $\lambda = 0$ eine doppelte Nullstelle ist und die rechte Seite eine Konstante, haben wir hier einen Fall mit Resonanz und wählen für die partikuläre Lösung den Ansatz

$$y_p = Ax^2.$$

Wir bestimmen die Ableitungen

$$\begin{aligned} y_p' &= 2Ax, \\ y_p'' &= 2A, \\ y_p''' &= 0 \end{aligned}$$

und setzen sie in die Differentialgleichung ein:

$$0 + 2A = 1.$$

Damit ist $A = \frac{1}{2}$ und die partikuläre Lösung

$$y_p = \frac{x^2}{2}.$$

Die allgemeine Lösung ist

$$\begin{aligned} y &= y_h + y_p \\ &= (c_1 + c_2 x) + c_3 \,\mathrm{e}^{-x} + \frac{x^2}{2}. \end{aligned}$$

c) Wir lösen zunächst homogene Gleichung

$$y'' + y' - 2y = 0.$$

Das charakteristische Polynom ist

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

mit den Nullstellen $\lambda_1 = -2$ und $\lambda_2 = 1$. Damit ist die homogene Lösung

$$y_h = c_1 \,\mathrm{e}^{-2x} + c_2 \,\mathrm{e}^{x} .$$

Wir haben hier wieder einen Fall mit Resonanz. Daher wählen wir für die partikuläre Lösung den Ansatz

$$y_p = Ax \,\mathrm{e}^{x} .$$

Wir bestimmen die Ableitungen

$$\begin{aligned} y_p' &= A \,\mathrm{e}^{x} + Ax \,\mathrm{e}^{x}, \\ y_p'' &= 2A \,\mathrm{e}^{x} + Ax \,\mathrm{e}^{x} . \end{aligned}$$

In die Gleichung eingesetzt erhalten wir

$$\begin{aligned} 2A \,\mathrm{e}^{x} + Ax \,\mathrm{e}^{x} + A \,\mathrm{e}^{x} + Ax \,\mathrm{e}^{x} - 2Ax \,\mathrm{e}^{x} &= \mathrm{e}^{x} \\ 3A \,\mathrm{e}^{x} &= \mathrm{e}^{x} . \end{aligned}$$

Wir erhalten dann $A = \frac{1}{3}$. Die partikuläre Lösung ist dann also

$$y_p = \frac{x \,\mathrm{e}^{x}}{3}.$$

Die allgemeine Lösung ist dann

$$\begin{aligned} y &= y_h + y_p \\ &= c_1 \,\mathrm{e}^{-2x} + c_2 \,\mathrm{e}^{x} + \frac{x \,\mathrm{e}^{x}}{3}. \end{aligned}$$

d) Wir lösen zunächst die homogene Gleichung

$$y'' + y = 0$$

mit dem charakteristischen Polynom

$$\lambda^2 + 1 = 0.$$

Die Nullstellen sind $\lambda = \pm\,\mathrm{i}$ Damit ist die homogene Lösung

$$y_h = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x).$$

Als Ansatz für die partikuläre Gleichung wählen wir

$$y_p = x(A\cos(x) + B\sin(x)).$$

Wir erhalten die Ableitungen

$$\begin{aligned} y_p' &= (A + Bx)\cos(x) + (B - Ax)\sin(x), \\ y_p'' &= (2B - Ax)\cos(x) - (2A + Bx)\sin(x). \end{aligned}$$

Wir setzen die Ableitungen in die Gleichung ein:

$$(2B - Ax)\cos(x) - (2A + Bx)\sin(x) + x(A\cos(x) + B\sin(x)) = \cos(x).$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir $A = 0$ und $B = \frac{1}{2}$. Die partikuläre Lösung ist damit

$$y_p = x\frac{1}{2}\sin(x).$$

Die allgemeine Lösung ist

$$\begin{aligned} y &= y_h + y_p \\ &= c_1\cos(x) + c_2\sin(x) + x\frac{1}{2}\sin(x). \end{aligned}$$

Aufgabe 29: Harmonischer Oszillator mit Resonanz

Man betrachte die Differentialgleichung des harmonischen Oszillators

$$y'' + 2\rho y' + \omega^2 y = r(t), \quad \text{mit } \rho, \omega \in \mathbb{R}_+$$

aus Aufgabe !!!!!!, mit den drei Fällen

1. **Überdämpft ($\rho > \omega$):** Das System kehrt ohne Oszillation langsam zum Gleichgewicht zurück.
$$r(t) = \mathrm{e}^{(-\rho+\sqrt{\rho^2-\omega^2})t}$$

2. **Kritisch gedämpft ($\rho = \omega$):** Das System kehrt so schnell wie möglich ohne Oszillation zum Gleichgewicht zurück mit
$$r(t) = \mathrm{e}^{-\omega t}$$

3. **Untergedämpft ($\rho < \omega$):** Das System oszilliert mit einer Amplitude, die allmählich auf null abnimmt.
$$r(t) = \mathrm{e}^{-\rho t} \cos(\sqrt{\omega^2 - \rho^2} t)$$

Bestimmen Sie die Lösung der Dgl. für die Fälle überdämpft, kritisch gedämpft und untergedämpft.

Lösung 29:

Fall 1: Überdämpft ($\rho > \omega$)

Die Wurzeln sind reell und unterschiedlich:

$$\lambda = -\rho \pm \sqrt{\rho^2 - \omega^2}$$

mit der homogenen Lösung:

$$y_h(t) = A\,\mathrm{e}^{(-\rho+\sqrt{\rho^2-\omega^2})t} + B\,\mathrm{e}^{(-\rho-\sqrt{\rho^2-\omega^2})t}$$

Wir führen die Abkürzung $z = \sqrt{\rho^2 - \omega^2}$ ein. Für die partikuläre Lösung wählen wir den Ansatz

$$y_p = At\,\mathrm{e}^{(-\rho+z)t}\,.$$

mit den Ableitungen

$$\begin{aligned} y_p' &= A(1 + t(-\rho + z))\,\mathrm{e}^{(-\rho+z)t} \\ y_p'' &= A(-\rho + z)(2 + t(-\rho + z))\,\mathrm{e}^{(-\rho+z)t} \end{aligned}$$

Durch Einsetzen und Zusammenfassen erhalten wir

$$2A\sqrt{\rho^2 - \omega^2}\,\mathrm{e}^{(-\rho+\sqrt{\rho^2-\omega^2})t} = \mathrm{e}^{(-\rho+\sqrt{\rho^2-\omega^2})t}$$

Damit ist $A = \frac{1}{2\sqrt{\rho^2-\omega^2}}$. Die partikuläre Lösung ist

$$y_p = \frac{1}{2\sqrt{\rho^2 - \omega^2}} t\,\mathrm{e}^{(-\rho+\sqrt{\rho^2-\omega^2})t}\,.$$

Damit ist die allgemeine Lösung

$$y = A\,\mathrm{e}^{(-\rho+\sqrt{\rho^2-\omega^2})t} + B\,\mathrm{e}^{(-\rho-\sqrt{\rho^2-\omega^2})t} + \frac{1}{2\sqrt{\rho^2 - \omega^2}} t\,\mathrm{e}^{(-\rho+\sqrt{\rho^2-\omega^2})t}\,.$$

Fall 2: Kritische Dämpfung ($\rho = \omega$)
Die charakteristische Gleichung vereinfacht sich zu:

$$\lambda^2 + 2\omega\lambda + \omega^2 = 0$$

mit einer doppelten Wurzel $\lambda = -\omega$. Die homogene Lösung ist:

$$y_h(t) = (A + Bt)\,\mathrm{e}^{-\omega t}\,.$$

Da $\lambda = -\omega$ eine doppelte Nullstelle ist, wählen wir für die partikuläre Lösung den Ansatz

$$y_p = At^2\,\mathrm{e}^{-\omega t}\,.$$

Wir bilden die Ableitungen

$$\begin{aligned} y_p' &= A\,\mathrm{e}^{-\omega t}(2t - \omega t^2) \\ y_p'' &= A\,\mathrm{e}^{-\omega t}(2 + \omega^2 t^2 - 4\omega t) \end{aligned}$$

Durch Einsetzen erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{-\omega t} &= A\,\mathrm{e}^{-\omega t}(2 + \omega^2 t^2 + 2\omega(2t - \omega t^2) + \omega^2 t^2) \\ &= 2A\,\mathrm{e}^{-\omega t} \end{aligned}$$

Damit ist $A = \frac{1}{2}$. Die partikuläre Lösung ist

$$y_p = \frac{1}{2} t^2 \,\mathrm{e}^{-\omega t} .$$

Die allgemeine Lösung ist

$$y = (A + Bt)\,\mathrm{e}^{-\omega t} + \frac{1}{2} t^2 \,\mathrm{e}^{-\omega t} .$$

Fall 3: Untergedämpft ($\rho < \omega$)
Die Wurzeln sind komplex:

$$\lambda = -\rho \pm i\sqrt{\omega^2 - \rho^2}$$

was zu der homogenen Lösung führt:

$$y_h(t) = \mathrm{e}^{-\rho t}(A \cos(\sqrt{\omega^2 - \rho^2} t) + B \sin(\sqrt{\omega^2 - \rho^2} t))$$

Wir führen die Abkürzung $z = \sqrt{\omega^2 - \rho^2}$ ein. Für die partikuläre Lösung wählen wir den Ansatz

$$y_p = t\,\mathrm{e}^{-\rho t}(A \sin(zt) + B \cos(zt))$$

Die Ableitungen sind

$$\begin{aligned} y_p' &= \mathrm{e}^{-\rho t}((A - \rho t A - ztB) \sin(zt) + (B - \rho t B + ztA) \cos(zt)) \\ y_p'' &= \mathrm{e}^{-\rho t}((-2\rho A - 2zB + t(2\rho z B + \rho^2 A - z^2 A)) \sin(zt) \\ &\quad + (-2\rho B + 2zA + t(-2\rho z A + \rho^2 B - z^2 B)) \cos(zt)) \end{aligned}$$

Wir setzen die Ableitungen in die Differentialgleichung ein und erhalten

$$\mathrm{e}^{-\rho t}(-2\sqrt{\omega^2 - \rho^2} B \sin(\sqrt{\omega^2 - \rho^2} t) + 2\sqrt{\omega^2 - \rho^2} A \cos(\sqrt{\omega^2 - \rho^2} t)) = \mathrm{e}^{-\rho t} \cos(\sqrt{\rho^2 - \omega^2} t)$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir

$$A = \frac{1}{2} \quad , \quad B = 0$$

Die partikuläre Lösung ist

$$y_p = \frac{1}{2} t\,\mathrm{e}^{-\rho t} \sin((\sqrt{\omega^2 - \rho^2}) t).$$

Damit ist die allgemeine Lösung

$$y = \mathrm{e}^{-\rho t}(A \cos(\sqrt{\omega^2 - \rho^2} t) + B \sin(\sqrt{\omega^2 - \rho^2} t)) + \frac{1}{2} t\,\mathrm{e}^{-\rho t} \sin((\sqrt{\omega^2 - \rho^2}) t).$$

Ergebnisse

Ergebnisse zu Aufgabe 1:

a) $y(x) = \sqrt{4\sqrt{x} + 5}$, $x \geq 0$

b) $y(x) = -\sqrt{4\sqrt{x} + 12}$, $x \geq 0$

c) keine Lösung, da Dgl. nicht bei $x = -1$ definiert ist

Ergebnisse zu Aufgabe 2:

a) $y_4(x), y_6(x)$ Lösung von Dgl. i), $y_1(x), y_2(x), y_4(x)$ Lösung von Dgl. ii)

b) $\omega = \pm 5$, $A, \varphi \in \mathbb{R}$

Ergebnisse zu Aufgabe 3:

a) $y_{\mathrm{AWP}}(x) = \frac{-1}{x^2 - \frac{1}{4}}$, **b)** $y(x) = \frac{C}{\cos(x)}$

Ergebnisse zu Aufgabe 4:

a) $y(x) = \frac{1}{4}x^2$

b) Das Problem hat unendlich viele Lösungen.

Ergebnisse zu Aufgabe 5:

die spezielle Lösung lautet: $y = \dfrac{y_0 k}{y_0 + (k - y_0)\, \mathrm{e}^{-\lambda k t}}$.

Ergebnisse zu Aufgabe 15:

$y(x) = x \ln\left(\frac{C}{|x|} - 1\right)$, $C > |x| > 0$.

Ergebnisse zu Aufgabe 7:

a) $u(t) = t^3 + \frac{C}{t^2}$, **b)** $u(t) = \frac{-t}{4\ln(t) + C}$

Ergebnisse zu Aufgabe 8:

a) $y(x) = \frac{(15\,x + C)^{1/5} - 2x - 4}{3}$

b) $u(t) = t \cdot \left(\dfrac{3\,\ln(t)}{2} + C\right)^{2/3}$

c) $w(s) = C\,s^2 + 5\,s^5$

Ergebnisse zu Aufgabe 9:

Es gilt $(1-n)u'(x) = u(x)^n \cdot z'(x)$. Damit ist die Lösung $y(x) = \frac{1}{C\cdot x^2 - x^3}$.

Ergebnisse zu Aufgabe 10:

a) $y(x) = Ce^{x^3/3}$

b) i) $y(x) = e^{x^3/3}$, ii) $y(x) = -e^{-1/3}e^{x^3/3}$, iii) $y(x) = 0$

c) $y(x) = y_0 e^{-x_0^3/3} e^{x^3/3}$

Ergebnisse zu Aufgabe 11:

a) $y(x) = \pm\frac{1}{x}\sqrt{32-2x^4}$

b) $y(x) = x\,\mathrm{e}^{\frac{\ln(4)+1}{x}-1}$

Ergebnisse zu Aufgabe 12:

a) $y(x) = \dfrac{1}{9-3x^2}$ mit $-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$

b) $y(x) = 2 \pm \sqrt{x^3+2x^2-4x+2}$ mit $x \geq \bar{x} \approx -3.36$

c) $y(x) = \ln(x^2-4x-4)$ mit $2+2\sqrt{2} < x < \infty$

d) $y(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x_0}$ mit $0 < x < \infty$ falls $x_0 > 0$ und $-\infty < x < 0$ falls $x_0 < 0$

e) $y(x) = \frac{x^3}{3} + y_0$ mit $x \in \mathbb{R}$

Ergebnisse zu Aufgabe 13:

$$I(t) = \begin{cases} 6.25\left(1-e^{-0.2t}\right) & \text{für } 0 < t < 5 \\ 6.25\left(1-e^{-1}\right)e^{-0.2(t-5)} & \text{für } t > 5 \end{cases}$$

Ergebnisse zu Aufgabe 14:

a) $y(x) = Ce^{\cos(x)} + 2\cos(x) + 2$

b) $y(x) = -3e^{\cos(x)-1} + 2\cos(x) + 2$

Ergebnisse zu Aufgabe 15:

$$y(x) = \frac{1}{\cos(x)}\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin(2x) + C\right)$$

Ergebnisse zu Aufgabe 16:

i) $yx\,\mathrm{e}^{\frac{y}{x}} = C$

ii) $u' = -\frac{1}{x}\left(\frac{u^4}{1+u^3}\right)$

iii) $u' = \frac{1+u}{u}$

iv) $u' = \cos^2(u)$

v) $u' = \frac{u^2-1}{x}$

vi) $u' = \frac{1}{x^2}\,\mathrm{e}^{-u}$

Ergebnisse zu Aufgabe 17:

i) $y = C\,\mathrm{e}^{-2x} + \frac{3}{2}x - \frac{3}{4}$

ii) $y = \pm\sqrt{C - x^2}$

iii) $y = \pm x\sqrt{2\ln|x| + C}$

iv) $y = \tan(x + C) - x - 1$

Ergebnisse zu Aufgabe 18:

i) $y(x) = Ce^{\frac{-2}{x}} - \frac{1}{2}$

ii) $y(x) = Ce^{\sin(x)}$

iii) $y(x) = \frac{x}{\ln(x)+C}$

iv) $y(x) = 2\arctan(Ce^x) - 1$

v) $y(x) = 4x + \frac{3+Ce^{4x}}{1-Ce^{4x}}$

vi) $y(x) = Ce^{-3x} + \frac{1}{5}e^{2x} - \frac{2}{3}$

Ergebnisse zu Aufgabe 19:

$y(x) = -\frac{3}{2}\,\mathrm{e}^{-x} + \frac{3}{2}\,\mathrm{e}^{3x}$

Ergebnisse zu Aufgabe 20:

i) $u(t) = a\,\mathrm{e}^{2\,t} + b\,\mathrm{e}^{5\,t}$

ii) $u(t) = \mathrm{e}^{-2\,t}\Big(a\,\cos(3t) + b\,\sin(3t)\Big)$

iii) $u(t) = a + b\,t + c\,\mathrm{e}^{3\,t}$

iv) $u(t) = (a + b\,t)\cdot\cos(2t) + (c + d\,t)\cdot\sin(2t)$

Ergebnisse zu Aufgabe 21:

$y(x) = \mathrm{e}^{-2t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t)$

Ergebnisse zu Aufgabe 22:

a) $y(x) = c_1 e^x \cos x + c_2 e^x \sin x + c_3 \mathrm{e}^{-x} \cos x + c_4 \mathrm{e}^{-x} \sin x$

b) $y(x) = (c_1 + c_2 x)e^{-3x} + (c_3 + c_4 x)e^{3x}$

Ergebnisse zu Aufgabe 23:

a) $y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$ mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

b) $y(x) = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x)$ mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

c) $y(x) = (c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x))e^{-x}$ mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

d) $y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \cos(x) + c_4 \sin(x)$ mit $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$

Ergebnisse zu Aufgabe 24:

Fall 1: $y(t) = Ae^{(-\rho+\sqrt{\rho^2-\omega^2})t} + Be^{(-\rho-\sqrt{\rho^2-\omega^2})t}$,
Fall 2: $y(t) = (A + Bt)e^{-\omega t}$,
Fall 3: $y(t) = e^{-\rho t}(A \cos(\sqrt{\omega^2 - \rho^2}t) + B \sin(\sqrt{\omega^2 - \rho^2}t))$.

Ergebnisse zu Aufgabe 25:

Allgemeine Lösungen: a) $y(x) = c_1 + c_2 x + c_3 \mathrm{e}^{-x} + c_4 x \mathrm{e}^{-x} - 12x^2 + 2x^3$, b) $y(t) = \mathrm{e}^{-2t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t) + \sin t - \cos t$, c) $y(x) = \left(c_1 + c_2 x + \frac{1}{2}x^2\right) \mathrm{e}^{2x}$

Ergebnisse zu Aufgabe 26:

a) $y(x) = c_1 \mathrm{e}^{-2x} + c_2 \mathrm{e}^{-4x}$

b) $y(x) = \sin(2x) - 4\cos(2x) + c_1 \mathrm{e}^{-x} \cos(2x) + c_2 \mathrm{e}^{-x} \sin(2x)$

c) $y_{AWP}(x) = -e^x - \mathrm{e}^{-x} + 2\mathrm{e}^{3x}$

d) $y(x) = c_1 \mathrm{e}^{-2x} + c_2 \mathrm{e}^{-3x} + \frac{1}{10}\mathrm{e}^{3x}$

e) $y(x) = c_1 \mathrm{e}^{2x} + c_2 \mathrm{e}^{-x} - (2x + 1)e^x$

f) $y(x) = -\mathrm{e}^{-2x} + c_1 \mathrm{e}^x + c_2 \mathrm{e}^{-x} + c_3 x \mathrm{e}^{-x}$

Ergebnisse zu Aufgabe 27:

Lösungen der homogenen Gleichungen: a) $ae^{2x} + be^{3x}$, b) $a\cos(5x) + b\sin(5x) + c$, c) $a + be^{2x}$.

Ergebnisse zu Aufgabe 28:

a) $y(x) = c_1\,\mathrm{e}^{x} + c_2\,\mathrm{e}^{-x} - 1$

b) $y(x) = (c_1 + c_2 x) + c_3\,\mathrm{e}^{-x} + \frac{x^2}{2}$

c) $y(x) = c_1\,\mathrm{e}^{-2x} + c_2\,\mathrm{e}^{x} + \frac{x\,\mathrm{e}^{x}}{3}$

d) $y(x) = c_1\cos(x) + c_2\sin(x) + x\frac{1}{2}\sin(x)$

Ergebnisse zu Aufgabe 29:

Fall 1: $y(t) = A\,\mathrm{e}^{(-\rho+\sqrt{\rho^2-\omega^2})t} + B\,\mathrm{e}^{(-\rho-\sqrt{\rho^2-\omega^2})t} + \frac{1}{2\sqrt{\rho^2-\omega^2}}t\,\mathrm{e}^{(-\rho+\sqrt{\rho^2-\omega^2})t}$,
Fall 2: $y(t) = (A + Bt)\,\mathrm{e}^{-\omega t} + \frac{1}{2}t^2\,\mathrm{e}^{-\omega t}$,
Fall 3: $y(t) = \mathrm{e}^{-\rho t}(A\cos(\sqrt{\omega^2-\rho^2}t) + B\sin(\sqrt{\omega^2-\rho^2}t)) + \frac{1}{2}t\,\mathrm{e}^{-\rho t}\sin((\sqrt{\omega^2-\rho^2})t)$.