Helmut-Schmidt-Universität
Universität der Bundeswehr Hamburg
Fakultät für Maschinenbau und Bauingenieurwesen

Prof. Dr. Thomas Carraro
Dr. Ulrike Kochan-Eilers

Mathematik II/B (WI/ET) Blatt 1

WT 2025 Funktionsgraphen, Grenzwerte, Folgen, Differenzieren

Einführende Bemerkungen

- Vermeiden Sie die Verwendung von Taschenrechnern oder Online-Ressourcen.

Aufgabe 1.1:

Stellen Sie jede der folgenden Funktionen einzeln in einem Koordinatensystem dar, beschriften Sie die Datenachsen und heben Sie signifikante Werte hervor (z.B. Maxima/Minima, Nullstellen, usw.).

a) $p_1(x) = 2x - 1$

b) $p_2(x) = (x-2)^2 - 1$

c) $p_3(x) = x^3$

d) $p_4(x) = -x^3$

e) $f_1(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$

f) $f_2(x) = -\cos(x)$

g) $f_3(x) = \sin(x)$

h) $f_4(x) = \tan x$

i) $g_1(x) = \sqrt{x}$

j) $g_2(x) = \dfrac{1}{x}$

k) $g_3(x) = \dfrac{1}{x^2}$

l) $h_1(x) = \ln x$

m) $h_2(x) = \ln x + 1$

n) $h_3(x) = \ln(x+1)$

o) $i_1(x) = \exp(x)$

p) $i_2(x) = \exp(-x)$

Aufgabe 1.2: Grenzwertdefinition

Bestimmen Sie zu den unten angegebenen Folgen (a_n) mit dem Grenzwert a und den angegebenen Werten für k jeweils ein N so, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > N$ gilt

$$|a_n - a| < 10^{-k}.$$

a) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, $a = 0$, $k = 2$

b) $a_n = \dfrac{3n+1}{n+1}$, $a = 3$, $k = 4$

c) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n!} + 1$, $a = 1$, $k = 3$

Aufgabe 1.3:

a) Zeigen Sie anhand der Definition der Konvergenz, dass gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 + n - 12}{n^2 - 8} = 2\,.$$

b) Zeigen Sie: Konvergiert $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a, so konvergiert auch $\{|a_n|\}_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $|a|$.

c) Gilt die Umkehrung von b)? Begründen Sie Ihre Aussage mit einem Beweis oder einem Gegenbeispiel.

Aufgabe 1.4: Differenzieren

Bestimmen Sie jeweils die erste Ableitung der folgenden Funktionen:

$$f_1(t) = -\frac{1}{2}t^2 - 2t + 6\,, \qquad f_2(t) = \sqrt[3]{t} + 1\,, \qquad f_3(t) = \sin(\frac{t}{4\pi})\,,$$

$$f_4(t) = e^{t^2}\,, \qquad f_5(t) = (\ln(t))^2\,, \qquad f_6(t) = \ln(e^t)\,,$$

$$f_7(t) = t^3\ln(t) - \frac{1}{2}t^2\,, \qquad f_8(t) = \ln(\sqrt{t})\,, \qquad f_9(t) = \sin(t)\cdot t^2\,,$$

$$f_{10}(t) = \frac{1}{2}(t^2-2)^2.$$

Aufgabe 1.5: Differenzieren

Bestimmen Sie jeweils die erste Ableitung. Zur Kontrolle sind die Werte der Ableitung an Kontrollpunkten angegeben. (Eventuell notwendige Beschränkungen des Definitionsgebietes sind nicht angegeben.)

$$
\begin{aligned}
&f_1(t) = 3t^4 - 4t + 7\,, && f_2(t) = (2t-3)^4\,, && f_3(t) = t^3\,(t+3)^4\,,\\
&f_4(t) = 3\,\cos(2t)\,, && f_5(t) = \sin^2(3t)\,, && f_6(t) = \tan(2 - t/2)\,,\\
&f_7(t) = \frac{2t-3}{(t+2)^3}\,, && f_8(t) = \frac{4t\,\sin(t)}{\cos(2t)}\,, && f_9(t) = t^2 \mathrm{e}^{\sqrt{t}}\,,\\
&f_{10}(t) = \sqrt{t\sqrt{t\sqrt{t}}}\,, && f_{11}(t) = \mathrm{e}^{\frac{1}{1+t^2}}\,, && f_{12}(t) = \tan(t)\,,\\
&f_{13}(t) = \frac{t + \cos(t)\sin(t)}{2}\,, && f_{14}(t) = \frac{t^2 - t + 2}{2t+3}\,, && f_{15}(t) = \frac{\sin^2(t)}{\cos(t)}.
\end{aligned}
$$

Ergebnisse zu Aufgabe 1.2:

a) $N = 10000$, **b)** $N = 19999$, **c)** $N = 6$

Ergebnisse zu Aufgabe 1.3:

c) Betrachten Sie $a_n = (-1)^n$.

Ergebnisse zu Aufgabe 1.4:

$$
\begin{aligned}
&f_1'(t) = -\,(t+2), && f_2'(t) = \frac{1}{3} t^{-\frac{2}{3}}, && f_3'(t) = \frac{1}{4\pi} \cdot \cos(\frac{t}{4\pi}),\\
&f_4'(t) = 2te^{t^2}, && f_5'(t) = \frac{2\ln(t)}{t}, && f_6'(t) = 1,\\
&f_7'(t) = t^2(3\ln(t) + 1) - t, && f_8'(t) = \frac{1}{2t}, && f_9'(t) = t(2\sin(t) + t\cos(t)),\\
&f_{10}'(t) = 2t(t^2 - 2).
\end{aligned}
$$

Ergebnisse zu Aufgabe 1.5:

$$
\begin{aligned}
&f_1'(2) = 92, && f_2'(2) = 8, && f_3'(2) = 11500,\\
&f_4'(\pi/3) = -\,3\sqrt{3}, && f_5'(\pi/3) = 0, && f_6'(4+2\pi) = -\,1/2,\\
&f_7'(2) = 5/256, && f_8'(\pi/3) = \frac{20\pi}{3} - 4\sqrt{3}, && f_9'(4) = 12\mathrm{e}^2,\\
&f_{10}'(256) = \frac{7}{16}, && f_{11}'(2) = -\,\frac{4\mathrm{e}^{1/5}}{25}, && f_{12}'(\pi/3) = 4,\\
&f_{13}'(\pi/3) = \frac{1}{4}, && f_{14}'(2) = \frac{13}{49}, && f_{15}'(\pi/3) = \frac{5\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}
$$