# Aufgabensammlung

# Mathematik III/B

für WI/ET

Prof. Dr. Thomas Carraro
Frühjahrstrimester 2025

# Inhaltsverzeichnis

# Gewöhnliche Differentialgleichungen

Eine gewöhnliche Differentialgleichung (Dgl.) ist eine Gleichung, die aus einer unbekannten Funktion $y(x)$ und ihren Ableitungen $y'(x)$, $y''(x)$,..., $y^m(x)$ besteht, wobei die Funktion $y$ nur von einer Variablen $x$ abhängt und nur nach dieser abgeleitet wird. Es wird zwischen einer **impliziten** Darstellung der Differentialgleichung **$n$-ter Ordnung**

$$F(x, y'(x), y''(x), ..., y^n(x)) = 0$$

und einer **expliziten** Darstellung der Differentialgleichung $n$-ter Ordnung

$$y^n(x) = f(x, y'(x), y''(x), ..., y^{n-1}(x))$$

unterschieden. Die Differentialgleichung heißt **autonom**, wenn $F$ bzw. $f$ nicht explizit von $x$ abhängt.

Eine Differentialgleichung ist **linear**, wenn sie die Form

$$a_n(x)\, y^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y = f(x)$$

besitzt, wobei $a_n(x)$ **variable Koeffizienten** sind. Hängen die Koeffizienten nicht von $x$ ab, so handelt es sich um **konstante Koeffizienten**. Man spricht von einer **homogene** Dgl., wenn $f(x)$=0 ist. Gilt $f(x) \neq 0$, dann handelt es sich um eine **inhomogene** Differentialgleichung.

Eine Differentialgleichung zusammen mit einer Anfangsbedingung heißt **Anfangswertproblem** (AWP) und hat z.B. die Form

$$y'(x) = f(x, y(x)),\; y(x_0) = y_0,$$

wobei $x_0$ und $y_0$ gegebene Werte sind.

Beispiele für **nichtlineare** Differentialgleichungen sind:

$$\begin{aligned} y' &= y^2, \\ y'' + y\, y' &= 0, \\ y' &= \sin(y). \end{aligned}$$

## Explizite Differentialgleichung 1. Ordnung

Eine explizite Dgl. 1. Ordnung besitzt die Form

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} := y' = f(x, y),$$

wobei $f$ im Allgemeinen eine nichtlineare Funktion ist.

**Typ A: Differentialgleichungen mit getrennten Veränderlichen**
Liegt die Differentialgleichung in der Form

$$y' = f(x) \cdot g(y)$$

vor, wobei $f$ und $g$ stetige Funktionen sind, so kann das Lösungeverfahren der **Trennung der Veränderlichen** (TdV) angewendet werden. Die Lösung ist dann gegeben durch

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(x)\,\mathrm{d}x + C.$$

**Beispiel:**

$$\begin{aligned} y' - x^2 y &= 0 \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= x^2 y \\ \int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y &= \int x^2\,\mathrm{d}x \\ \ln(|y|) &= \frac{1}{3}x^3 + C \\ y &= e^{\frac{1}{3}x^3 + C} = e^{\frac{1}{3}x^3}\,C \end{aligned}$$

**Typ B: Homogene Differentialgleichung**
Ist eine Differentialgleichung der Form

$$y' = g\left(\frac{y}{x}\right),\ x \neq 0$$

gegeben, so kann die Dgl. mit der Substitution $u(x) = y(x)/x$ in eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen für $u(x)$ transformiert werden.

**Beispiel:**

$$y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{y}{x}$$

Mit $u(x) = y(x)/x$ ergibt sich:

$$y = u(x)\,x$$
$$y' = u'\,x + u$$

Einsetzen in die Dgl. ergibt:

$$\begin{aligned} u'x + u &= u^2 + u \\ u'x &= u^2 \\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= \frac{u^2}{x} \\ \int \frac{1}{u^2}\,\mathrm{d}u &= \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ -\frac{1}{u} &= \ln(|x|) + C \\ u &= -\frac{1}{\ln(|x| + C)} \\ y &= -\frac{x}{\ln(|x| + C)} \end{aligned}$$

**Typ C:** $y' = f(ax + by + c)$
Ist die Differentialgleichung in der Form

$$y' = f(ax + by + c), \text{ mit } a, b, c \in \mathbb{R},\ b \neq 0$$

gegeben, so kann die Dgl. mit dem Ansatz $u(x) := ax + by + c$ in eine Dgl. mit getrennten Variablen

$$u' = a + bf(u)$$

transformiert werden. Diese Dgl. kann mit dem Verfahren der Trennung der Veränderlichen gelöst werden.

**Typ D: Lineare Differentialgleichung 1. Ordnung**
Handelt es sich um eine lineare Differentialgleichung 1. Ordnung

$$L_1 y := y' + p(x)y = q(x),$$

so besteht die allgemeine Lösung der Dgl. aus der Lösung $y_{\mathrm{h}}(x)$ der homogenen Differentialgleichung

$$L_1 y := y' + p(x)y = 0$$

und einer partikulären Lösung $y_\text{p}$ der inhomogenen Dgl., sodass

$$\mathcal{L}(\text{Dgl.}) = y_\text{p}(x) + y_\text{h}(x)$$

gilt. Die partikuläre Lösung kann mit dem Verfahren der Variation der Konstanten bestimmt werden.

**Beispiel:**
Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y' - 3y = 6.$$

Zunächst wird die hom. Dgl. $y' - 3y = 0$ mit Trennung der Variablen gelöst:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= 3x \\ \int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y &= \int 3\,\mathrm{d}x \\ \ln(|y|) &= 3x + C \\ y &= e^{3x}\,C. \end{aligned}$$

Damit lautet die Lösung der hom. Dgl. $y_\text{h}(x) = e^{3x}\,C$. Für die Lösung der inhomogenen Dgl. wird das Verfahren der Variation der Konstanten angewendet. Damit lautet der Ansatz für die partikuläre Lösung:

$$\begin{aligned} y_\text{p} &= C(x)e^{3x} \\ y_\text{p}' &= C'e^{3x} + 3Ce^{3x}. \end{aligned}$$

Einsetzen in die Dgl. ergibt:

$$\begin{aligned} C'e^{3x} + 3Ce^{3x} - 3Ce^{3x} &= 6 \\ C'e^{3x} &= 6 \\ \Rightarrow C' &= 6e^{-3x}. \end{aligned}$$

Eine Integration liefert:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}x} &= 6e^{-3x} \\ \int \mathrm{d}C &= \int 6e^{-3x}\,\mathrm{d}x \\ C &= -2e^{-3x} + C' \end{aligned}$$

Damit gilt:

$$y_{\mathrm{p}}(x) = C(x)e^{3x} = -2 + C'e^{3x}.$$

Damit gilt für die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} y(x) &= y_{\mathrm{h}}(x) + y_{\mathrm{p}}(x) \\ &= Ce^{3x} - 2. \end{aligned}$$

**Typ E: Bernoulli-Differentialgleichung**

Ist eine Differentialgleichung der Form

$$y' + p(x)y = q(x)y^r$$

gegeben, so spricht man von der Bernoulli-Differentialgleichung. Diese kann mit $z(x) := y^{1-r}(x)$ in eine lineare Dgl. 1. Ordnung

$$z' + (1-r)p(x)z = (1-r)q(x)$$

transformiert werden.

**Typ F: Riccati-Differentialgleichung**

Abgesehen von dem Spezialfall $r = 0$ (Bernoulli-Dgl.) hat die Riccati-Dgl. im Allgemeinen nicht geschlossen lösbar. In einigen Fällen kann eine partikuläre Lösung geraten werden, sodass eine allgemeine Lösung angegeben werden kann.

## Lineare Differentialgleichung höherer Ordnung

Eine lineare Differentialgleichung besitzt die Form

$$L_n y := a_n(x)\, y^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y = f(x),$$

wobei $L_n$ ein linearer gewöhnlicher Differentialoperator $n$-ter Ordnung ist.

### Homogene lineare Differentialgleichung

Ist $f(x) = 0$, so handelt es sich um eine homogene Differentialgleichung. Die allgemeine Lösung der homogenen Dgl. lautet dann

$$y_{\mathrm{h}}(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + ... + C_n y_n(x).$$

Für eine homogene Dgl. mit konstanten Koeffizienten wird als der Exponentialansatz $y(x) = e^{\lambda x}$ gewählt. Der gesuchte Exponent wird ermittelt, indem die Nullstellen $\lambda_i$ des charakteristischen Polynoms $P(\lambda)$ bestimmt werden. Liegen nur einfach Nullstellen vor, so ist die allgemeine Lösung

$$y_{\mathrm{h}}(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + ... + C_n e^{\lambda_n x},$$

wobei $y_1(x)$, $y_2(x)$,..., $y_n(x)$ ein sogenanntes **Fundamentalsystem** bilden.
Liegen mehrfache Nullstellen $\lambda_i$ mit Vielfachheiten $k_i$ vor, so sieht das charakteristische Polynom wie folgt aus:

$$P(\lambda) = a_n(\lambda - \lambda_1)^{k_1}(\lambda - \lambda_2)^{k_2}...(\lambda - \lambda_n)^{k_n}.$$

Dann bilden die Funktionen

$$\begin{gathered} x^{k_1-1}e^{\lambda_1 x}, ..., xe^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_1 x} \\ x^{k_2-1}e^{\lambda_2 x}, ..., xe^{\lambda_2 x}, e^{\lambda_2 x} \\ x^{k_n-1}e^{\lambda_n x}, ..., xe^{\lambda_n x}, e^{\lambda_n x} \end{gathered}$$

ein Fundamentalsystem.

**Beispiel für einfache Nullstellen von $P(\lambda)$:**
Gegeben ist die homogene lineare Differentialgleichung 3. Ordnung

$$y''' - 2y'' - 5y' + 6y = 0.$$

Das charakteristische Polynom ergibt sich durch Einsetzen des Exponentialansatz $y(x) = e^{\lambda x}$ in die Dgl. und lautet:

$$P(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0.$$

Die Nullstellen von $P(\lambda)$ sind $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$ und $\lambda_3 = 3$. Damit ergeben sich $n$ linear unabhängige Lösungen

$$y_1(x) = e^x,\ y_2(x) = e^{-2x},\ y_3(x) = e^{3x}.$$

Damit lautet die allgemeine Lösung der homogen Dgl.

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + C_3 e^{3x}.$$

**Beispiel für Nullstellen von $P(\lambda)$ mit Vielfachheit $\neq 1$:**
Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''' + 3y'' + 3y' + y = 0.$$

Das charakteristische Polynom ist

$$P(\lambda) = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = (\lambda + 1)^3.$$

Damit liegt eine dreifache Nullstelle $\lambda_{1,2,3} = -1$ vor. Es ergeben sich die unabhängigen Lösungen

$$y_1(x) = e^{-x},\ y_2(x) = xe^{-x},\ y_3(x) = x^2 e^{-x}.$$

Damit lautet die allgemeine Lösung der homogen Dgl.

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + C_3 x^2 e^{-x}.$$

### Inhomogene lineare Differentialgleichung

Um die inhomogenen linearen Differentialgleichung $L_n y = f(x)$ zu lösen, wird zunächst die homogene Lösung bestimmt. Im Anschluss wird die inhomogene Dgl. betrachtet und ein geeigneter Ansatz für die partikuläre Lösung bestimmt, welcher der Störfunktion $f(x)$ ähnlich ist. Nach Einsetzen des Ansatzes in die Dgl. und Bestimmung der der Koeffizienten, ergibt sich die allgemeine Lösung:

$$y(x) = y_\mathrm{p}(x) + C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + ... + C_n e^{\lambda_n x}.$$

**Beispiel:**
Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''' + y'' = x.$$

Zunächst wird die hom. Dgl. $y''' + y'' = 0$ gelöst. Das charakteristische Polynom $P(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2$ besitzt die Nullstellen $\lambda_{1,2} = 0$ und $\lambda_3 = -1$. Es liegt also eine doppelte Nullstelle vor, sodass die allgemeine Lösung der hom. Dgl.

$$y_{\mathrm{h}}(x) = C_1 e^{0x} + C_2 x e^{0x} + C_3 e^{-x} = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-x}$$

lautet. Als Ansatz für die partikuläre Lösung wird ein Polynom verwendet:

$$y_{\mathrm{p}}(x) = A_1 + A_2 x.$$

Hier liegt jedoch eine zweifache Resonanz vor, sodass der Ansatz modifiziert wird:

$$\begin{aligned} y_{\mathrm{p}}(x) &= A_1 x^2 + A_2 x^3, \\ y_{\mathrm{p}}'(x) &= 2A_1 x + 3A_2 x^2, \\ y_{\mathrm{p}}''(x) &= 2A_1 + 6A_2 x, \\ y_{\mathrm{p}}'''(x) &= 6A_2. \end{aligned}$$

Einsetzen in die Dgl. ergibt:

$$6A_2 + 2A_1 + 6A_2 x = x.$$

Durchführen eines Koeffizientenvergleiches:

$$\begin{aligned} 6A_2 = 1 &\Rightarrow A_2 = \frac{1}{6} \\ 6A_2 + 2A_1 = 0 &\Rightarrow A_1 = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Damit lautet die partikuläre Lösung

$$y_{\mathrm{p}}(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3.$$

Somit ist die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$y(x) = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-x} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3.$$

# Aufgaben zu gewöhnlichen Differentialgleichungen

### Aufgabe 1: Anfangswertproblem

Gegeben ist die Dgl.

$$y'(x) = \frac{1}{y\sqrt{x}},\ x > 0,\ y \neq 0$$

mit der allgemeinen Lösung

$$y(x) = \pm\sqrt{4\sqrt{x} + C},\ C \geq 0.$$

**a)** Geben Sie, falls möglich, die Lösung der Dgl. an, die die Anfangswertbedingung $y(1) = 3$ erfüllt.

**b)** Geben Sie, falls möglich, die Lösung der Dgl. an, die die Anfangswertbedingung $y(1) = -4$ erfüllt.

**c)** Geben Sie, falls möglich, die Lösung der Dgl. an, die die Anfangswertbedingung $y(-1) = 3$ erfüllt.

### Aufgabe 2: Zum Lösungsbegriff von Dgl.

**a)** Gegeben seien die beiden Differentialgleichungen

**i)** $y'(x) = y(x)\cos(x) + \sin(x)\cos(x)$

**ii)** $y''(x) + y'(x) = 0$

Welcher der folgenden Funktionen ist Lösung einer der Differentialgleichungen?

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \cos(x), & y_2(x) &= 8, \\ y_3(x) &= e^x, & y_4(x) &= \sin(x) - 1, \\ y_5(x) &= e^{-\sin(x)}, & y_6(x) &= y_4 + y_5 = \sin(x) - 1 + e^{-\sin(x)}. \end{aligned}$$

**b)** Für welche Werte der Konstanten $A$, $\omega$ und $\varphi_0$ ist

$$u(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$$

Lösung der Schwingungs-Differentialgleichung

$$u''(t) + 25u(t) = 0.$$

**Aufgabe 3: Definitionsbereich der Lösung einer Dgl.**

**a)** Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'(x) = 2\,x\,y^2$$

und die spezielle Lösung für den Anfangswert $y(0) = 4$ .

Wie groß ist der maximale Definitionsbereich dieser Lösung ?

**b)** Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$\cos(x) \cdot y'(x) = \sin(x) \cdot y(x).$$

**Aufgabe 4: Anfangswertproblem**

Gegeben sei das Anfangswertproblem:

$$y' = \sqrt{y}, \quad y(0) = 0.$$

**a)** Bestimmen sie eine Lösung des gegebenen Anfangswertproblems.

**b)** Hat das Anfangswertproblem eine eindeutige Lösung?

**Aufgabe 5: Logistisches Wachstum**

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(t) = \lambda(k - y(t))y(t) \quad , \quad y(0) = y_0$$

wobei $k, \lambda \in \mathbb{R}$.

**Aufgabe 6: Gewöhnliche Dgl.**

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Dgl.

$$y'(x) = \frac{(y-x)e^{y/x} - x}{xe^{y/x}}, \; x \neq 0.$$

**Aufgabe 7: Differentialgleichungen erster Ordnung**

**a)** Klassifizieren Sie die Differentialgleichung 1. Ordnung

$$u'(t) = \frac{-2\,u(t)}{t} + 5\,t^2\ , \quad t > 0\ ,$$

und bestimmen Sie dann alle Lösungen der Differentialgleichung.

**b)** Lösen Sie das Anfangswertproblem für $t > 0$

$$u'(t) = \left(\frac{2\,u(t)}{t}\right)^2 + \frac{u(t)}{t}\ , \quad u(1) = -2\ .$$

**Aufgabe 8: Differentialgleichungen 1. Ordnung**

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung folgender Differentialgleichungen:

**i)** $y'(x) = (2\,x + 3\,y + 4)^{-4} - \dfrac{2}{3}$

**ii)** $u'(t) = \sqrt{\dfrac{t}{u}} + \dfrac{u}{t}, \quad t > 0$

**iii)** $w'(s) = \dfrac{2}{s}\,w + 15\,s^4$

**Hinweis:**
**Zu a)** Nutzen Sie die Substitution $z = ax + by + c$.
**Zu b)** Nutzen Sie die Substitution $z = \frac{u}{t}$.
**Zu c)** Es handelt sich hier um eine lineare Differentialgleichung. Lösen Sie zuerst die homogene Differentialgleichung. Bestimmen Sie anschließend die partikuläre Lösung.

**Aufgabe 9: Bernoulli'sche Differentialgleichung**

Eine Differentialgleichung der Form

$$u'(x) = f(x) \cdot u(x) + g(x) \cdot \Big(u(x)\Big)^n$$

heißt **Bernoulli'sche Differentialgleichung**. Sie läßt sich mit Hilfe der Substitution

$$z(x) = \Big(u(x)\Big)^{1-n}$$

in eine lineare Differentialgleichung für $z(x)$ überführen.
Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung für $y(x)$

$$y' = \frac{-2}{x} \cdot y + x^2 \cdot y^2\ .$$

**Aufgabe 10: Anfangswertproblem**

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$y'(x) = x^2 y.$$

**a)** Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Dgl..

**b)** Wie lauten die speziellen Lösungen des AWP für die Anfangswerte

- **i)** $y(0) = 1$,
- **ii)** $y(1) = -1$,
- **iii)** $y(1) = 0$.

**c)** Wie lautet die allgemeine Lösung für den beliebigen Anfangswert $y(x_0) = y_0$?

**Aufgabe 11: Substitution: Homogene Differentilagleichung erster Ordnung**

Berechnen Sie die Lösung des folgenden Anfangswertproblems

**a)** $x\,y\,y' + 4x^2 + y^2 = 0, \quad y(2) = 0, \quad x > 0.$

**b)** $x\,y' = y\,(\ln x - \ln y)\,, \quad y(1) = 4, \quad x > 0.$

**Aufgabe 12: Trennung der Variablen**

Lösen die folgenden Anfangswertprobleme und bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich der Lösung

**a)** $y'(x) = 6y^2(x)x, \quad y(1) = \dfrac{1}{6}.$

**b)** $y'(x) = \dfrac{3x^2 + 4x - 4}{2y(x) - 4}, \quad y(1) = 3.$

**c)** $y'(x) = \mathrm{e}^{-y(x)}\,(2x - 4)\,, \quad y(5) = 0.$

**d)** $y'(x) = \dfrac{1}{x^2}, \quad y(x_0) = 0.$

**e)** $y'(x) = x^2, \quad y(0) = y_0.$

**Aufgabe 13: LR-Kreis**

Ein Stromkreis habe einen Widerstand von $R = 0.8$ Ohm und eine Selbstinduktion von $L = 4$ Henry. Bis zur Zeit $t_0 = 0$ fließe kein Strom. Dann wird eine Spannung von $U = 5$ Volt angelegt. Nach 5 Sekunden wird die Spannung abgeschaltet. Berechnen Sie den Stromverlauf $I(t)$ für $0 \leq t \leq 5$ und $t > 5$.

**Hinweis**: In diesem Stromkreis gilt $L\dot{I}(t) + RI(t) = U(t)$.

**Aufgabe 14: Anfangswertproblem**

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$y'(x) + y(x)\sin(x) = \sin(2x).$$

**a)** Bestimmen Sie die allgemeine Lösung.

**b)** Bestimmen Sie die Lösung für den Anfangswert $y(0) = 1$.

**Aufgabe 15: Gewöhnliche Dgl.**

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Dgl.

$$\cos(x)y'(x) = \sin(x)y(x) + \cos^2(x).$$

**Aufgabe 16: Nichtlineare Differentialgleichung erster Ordnung**

**1)** Klassifizieren Sie die folgenden Differentialgleichungen erster Ordnung als

1. Homogene Differentialgleichung: $y' = g(y/x)$ mit Substitution $u = y/x$.
2. Differentialgleichung mit bilinearen Argumenten: $y' = f(ax + by + c)$ mit Substitution $u = ax + by + c$.

a) $y'(x^2 + xy) = y^2 - xy$,

b) $y' = \dfrac{x^2 y}{x^3 + y^3}$,

c) $y' = \dfrac{1}{x + y}$,

d) $y' = -\sin^2(x + y + 1)$,

e) $x^2 y' = y^2 + xy - x^2$,

f) $y' = \dfrac{y + \mathrm{e}^{-\frac{y}{x}}}{x}$

**2)** Verwenden Sie eine angemessene Substitution und formulieren Sie die Gleichungen in Termen von $u$ und $u'$ um ohne sie zu lösen.

**Aufgabe 17: Differentialgleichungen erster Ordnung**

**1)** Klassifizieren Sie die follgenden gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung als

**a)** Linear oder nicht-linear.

**b)** In dem Fall einer linearen Differentialgleichung klassifizieren Sie die Gleichung zusätzlich als

- homogen oder inhomogen.
- Differentialgleichung mit konstanten oder nicht-konstanten Koeffizienten.

**c)** Nutzen Sie die Vorlesungsunterlagen, um die Differentialgleichung als einen der folgenden Typen zu klassifizieren:

(a) $y' = f(x) \cdot g(y)$, zu lösen mittels Trennung der Variablen,

(b) $y' = g(y/x)$, homogen, zu lösen mittels Substitution mit $u = y/x$,

(c) $y' = f(ax + by + c)$, rechte Seite mit bilinearen Argumenten, zu lösen mit der Substitution $u = ax + by + c$,

(d) $y' + p(x) \cdot y = q(x)$, lineare Differentialgleichung.

**i)** $y' + 2y = 3x$.

**ii)** $y'y + x = 0$.

**iii)** $y' = \frac{x^2+y^2}{xy}$.

**iv)** $y' = (x + y + 1)^2$.

**v)** $x^2y' = xy + 2y^2$.

**vi)** $y' = \frac{y(x-y)}{x^2}$.

**vii)** $y' = \frac{x-y}{x+y}$.

**viii)** $y' = \ln(y + 2x + 1)^2$.

**2)** Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Gleichungen **i)** bis **iv)**.

## Aufgabe 18: Differentialgleichungen erster Ordnung

Klassifizieren Sie die folgenden Differentialgleichungen erster Ordnung:

1. $x^2y' = 2y + 1$.
2. $y' = \cos(x)y$.
3. $x^2y' + y^2 = xy$.
4. $y' = \sin(y + 1)$.
5. $y' = (4x - y + 1)^2$.
6. $y' + 3y + 2 = \mathrm{e}^{2x}$.

**a)** Klassifizieren Sie diese als linear oder nicht linear. In dem Fall einer linearen Differentialgleichung klassifizieren Sie die zusätzlich als

- **i)** homogen oder inhomogen.
- **ii)** mit konstanten oder nicht-konstanten Koeffizienten.

**b)** Klassifizieren Sie die Differentialgleichung als einen der folgenden Typen:

- **i)** $y' = f(x) \cdot g(y)$ zu Lösen mit Trennung der Variablen.
- **ii)** $y' = g(y/x)$ zu Lösen mit der Substitution $u = y/x$.
- **iii)** $y' = f(ax + by + c)$ zu Lösen mit der Substitution $u = ax + by + c$.
- **iv)** $y' + p(x) \cdot y = q(x)$.

**c)** Berechnen Sie die allgemeine Lösung aller Differentialgleichungen.

## Aufgabe 19: Anfangswertproblem

Klassifizieren die folgende Differentialgleichung und bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems mit $y(0) = 0$ und $y'(0) = 6$:

$$y''(x) - 2y'(x) - 3y(x) = 0.$$

## Aufgabe 20: Homogene lineare Differentialgleichungen

Bestimmen Sie die allgemeinen reellen Lösungen folgender homogener linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten mit Hilfe geeigneter Ansätze für $u(t)$:

**i)** $u'' - 7\,u' + 10\,u = 0\ .$ **ii)** $7\,u'' + 28\,u' + 91\,u = 0\ .$

**iii)** $u''' - 3\,u'' = 0\ .$ **iv)** $u'''' + 8\,u'' + 16\,u = 0\ .$

**Aufgabe 21: Komplexe Nullstellen des charakteristischen Polynoms**

Bestimmen Sie die Lösung der folgenden Differentialgleichung:

$$y'' + 4y' + 5y = 0$$

**Aufgabe 22: Lineare Differentialgleichungen $n$-ter Ordnung**

Bestimmen Sie die allgemeinen Lösungen der folgenden Differentialgleichungen:

**a)** $y^{(4)} + 4y = 0,$

**b)** $y^{(4)} - 18y'' + 81y = 0.$

**Aufgabe 23: homogene lineare Dgl. höherer Ordnung**

Lösen Sie die homogenen Differentialgleichungen mit Hilfe des Exponentialansatzes

$$y(t) = ce^{\lambda t},\ c, \lambda = \text{const.}.$$

**a)** $y'' - 3y' + 2y = 0$

**b)** $y'' + 4y = 0$

**c)** $y'' + 2y' + 2y = 0$

**d)** $y^{(4)} - y = 0$

**Aufgabe 24: Harmonischer Oszillator**

Man betrachte die Differentialgleichung

$$y'' + 2\rho y' + \omega^2 y = 0, \quad \text{mit } \rho, \omega \in \mathbb{R}_+$$

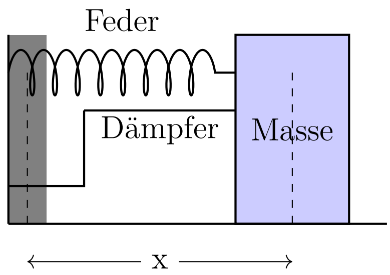
Die gegebene Differentialgleichung, ist eine klassische Form einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Aus physikalischer Sicht beschreibt diese Gleichung typischerweise gedämpfte harmonische Bewegungen, wobei:

- $y(t)$ die Verschiebung des Systems vom Gleichgewicht über die Zeit darstellt.
- $\rho$ (der Koeffizient der ersten Ableitung $y'$) repräsentiert den Dämpfungsfaktor, der beeinflusst, wie schnell das System Energie durch Reibung oder andere resistive Kräfte verliert.

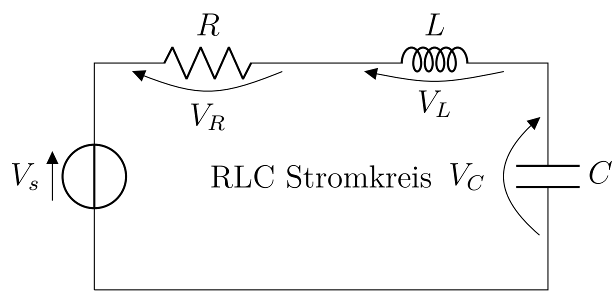
- $\omega^2$ (der Koeffizient von $y$) steht im Zusammenhang mit der Steifigkeit des Systems oder der Kraft, die es ins Gleichgewicht zurückführt. Der Parameter $\omega$ selbst wird oft als natürliche Frequenz des ungedämpften Systems betrachtet.

**Physikalische Interpretationen**

1. **Mechanische Systeme:** In der Mechanik kann diese Gleichung ein Masse-Feder-Dämpfer-System modellieren, bei dem eine Masse an einer Feder und möglicherweise einem Dämpfungselement (wie einem Stoßdämpfer) befestigt ist. Die Masse oszilliert um eine Gleichgewichtsposition, wobei die Feder eine rückstellende Kraft proportional zur Verschiebung liefert und der Dämpfer eine Kraft proportional zur Geschwindigkeit bereitstellt, die der Bewegung entgegenwirkt.




2. **Elektrische Schaltkreise:** In der Elektrotechnik kann die Gleichung einen RLC-Schaltkreis (einen Schaltkreis, der einen Widerstand $R$, eine Induktivität $L$, und einen Kondensator $C$ enthält) beschreiben. Hier könnte $y(t)$ die elektrische Ladung oder den Strom darstellen, $2\rho = R/L$ und $\omega^2 = 1/(LC)$. Das Verhalten des Schaltkreises — ob er oszilliert oder schnell stabilisiert wird — hängt von den Werten dieser Komponenten ab.




Diese Gleichung ist allgemein bekannt als *"Gedämpfter harmonischer Oszillator"* oder einfach als *"Gedämpfter Oszillator"*. Sie umfasst drei spezifische Szenarien basierend auf dem Wert von $\rho$ im Vergleich zu $\omega$:

1. **Überdämpft ($\rho > \omega$):** Das System kehrt ohne Oszillation langsam zum Gleichgewicht zurück.

2. **Kritisch gedämpft ($\rho = \omega$):** Das System kehrt so schnell wie möglich ohne Oszillation zum Gleichgewicht zurück.

3. **Untergedämpft ($\rho < \omega$):** Das System oszilliert mit einer Amplitude, die allmählich auf null abnimmt.

**Aufgabe:** Bestimmen Sie die Lösung der DGl für alle drei Fälle: überdämpft, kritisch gedämpft und untergedämpft.

**Hinweis:** Bestimmen Sie das charakteristische Polynom und seine Nullstellen und verwenden Sie den Exponentialansatz. Man betrachte alle drei Fälle, in denen die Nullstellen einfach, doppelt oder komplex konjiugiert sind.

### Aufgabe 25: Lineare Differentialgleichungen $n$-ter Ordnung

Bestimmen Sie die allgemeinen Lösungen der folgenden Differentialgleichungen:

**a)** $y^{(4)} + 2y''' + y'' = 12x,$

**b)** $y'' + 4y' + 5y = 8 \sin t,$

**c)** $y'' - 4y' + 4y = \mathrm{e}^{2x}.$

### Aufgabe 26: Lineare Differentialgleichungen $n$-ter Ordnung ohne Resonanz

Bestimmen Sie die allgemeinen Lösungen der folgenden Differentialgleichungen. Falls Anfangswerte gegeben sind, ermitteln Sie auch die Lösung des Anfangswertproblems.

**a)** $y'' + 6y' + 8y = 0,$

**b)** $y'' + 2y' + 5y = 17\,\sin(2x).$

**c)** $y''(x) - 2y'(x) - 3y(x) = 4\mathrm{e}^{x}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 6,$

**d)** $y''(x) + 5y'(x) + 6y(t) = 3\mathrm{e}^{3x},$

**e)** $y''(x) - y'(x) - 2y(x) = 4x\mathrm{e}^{x}.$

**f)** $y''' + y'' - y' - y = 3\mathrm{e}^{-2x},$

**Aufgabe 27: Inhomogene lineare Differentialgleichungen**

Bestimmen Sie von folgenden inhomogenen linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten jeweils die allgemeine reelle Lösung, indem Sie zunächst die zugehörige homogene lineare Differentialgleichung allgemein lösen und eine spezielle (partikuläre) Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung mit Hilfe von geeigneten Ansätzen bestimmen.

**a)** $y''(x) - 5\,y'(x) + 6\,y(x) = r_k(x)$ mit

$$\textbf{i)}\ r_1 = 108\,x^2\ , \qquad \textbf{ii)}\ r_2 = 7\,\mathrm{e}^{3x}\ , \qquad \textbf{iii)}\ r_3 = 18 + 14\,\mathrm{e}^{3x}\ .$$

**b)** $y'''(x) + 25\,y'(x) = s_k(x)$ mit

| | | | |
|---|---|---|---|
| **i)** | $s_1 = 150\,x$ , | **ii)** | $s_2 = \sin(x)$ , |
| **iii)** | $s_3 = \sin(5x) - 200\,x$ , | **iv)** | $s_4 = 6\,\sin(3x)\,\cos(2x)$ . |

**Hinweis**: Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt $\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$.

**c)** $y''(x) - 2\,y'(x) = t_k(x)$ mit

$$\textbf{i)}\ t_1 = 4\,\mathrm{e}^{2x}\ , \qquad \textbf{ii)}\ t_2 = \cosh(2x)\ .$$

**Aufgabe 28: Lineare Differentialgleichungen mit Resonanz**

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden linearen Differentialgleichungen

**a)** $y'' - y = 1$,

**b)** $y''' + y'' = 1$,

**c)** $y'' + y' - 2y = e^x$,

**d)** $y'' + y = \cos(x)$.

**Aufgabe 29: Harmonischer Oszillator mit Resonanz**

Man betrachte die Differentialgleichung des harmonischen Oszillators

$$y'' + 2\rho y' + \omega^2 y = r(t), \quad \text{mit } \rho, \omega \in \mathbb{R}_+$$

mit den drei Fällen

1. **Überdämpft ($\rho > \omega$):** Das System kehrt ohne Oszillation langsam zum Gleichgewicht zurück.
$$r(t) = \mathrm{e}^{(-\rho+\sqrt{\rho^2-\omega^2})t}$$

2. **Kritisch gedämpft ($\rho = \omega$):** Das System kehrt so schnell wie möglich ohne Oszillation zum Gleichgewicht zurück mit

$$r(t) = \mathrm{e}^{-\omega t}$$

3. **Untergedämpft ($\rho < \omega$):** Das System oszilliert mit einer Amplitude, die allmählich auf null abnimmt.

$$r(t) = \mathrm{e}^{-\rho t} \cos(\sqrt{\omega^2 - \rho^2} t)$$

Bestimmen Sie die Lösung der Dgl. für die Fälle überdämpft, kritisch gedämpft und untergedämpft.

# Laplace-Transformation

$f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ heißt Laplace-transformierbar, wenn das Integral

$$F(s) := \mathcal{L}f(t) := \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st} f(t)\mathrm{d}t \quad f\ddot{u}r s \in \mathbb{R}$$

existiert. Dabei ist $F(s)$ die Bildfunktion (auch Laplace-Transformierte genannt) zur Urbildfunktion $f(t)$. Hilfreich bei der Laplace-Transformation bzw. bei der Rücktransformation sind sogenannte Korrespondenztabellen, die zur Urbildfunktion die dazugehörige Bildfunktion angeben. Diese Tabellen befinden sich in der Formelsammlung.

# Aufgaben zur Laplace-Transformation

### Aufgabe 30: Laplace-Transformierte

Berechnen Sie die Laplace-Transformierte von $f(t) = \sqrt{t}$:

$$F(s) := \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st} \cdot \sqrt{t}\,\mathrm{d}t.$$

**Hinweise**:

- Substituieren Sie $u = \sqrt{t}$.
- Integrieren Sie partiell.
- Es gilt $\left(\int_0^\infty \mathrm{e}^{-su^2}\,\mathrm{d}u\right)^2 = \int_0^\infty \int_0^\infty \mathrm{e}^{-s(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.
  Dieses Integral können Sie lösen, indem Sie Polarkoordinaten einführen.

### Aufgabe 31: Laplace–Transformierte

Bestimmen Sie unter Verwendung von $\mathcal{L}\Big\{\sin(t)\Big\} = \dfrac{1}{s^2+1}$ und geeigneten Rechenregeln folgende Ausdrücke

**a)** $\mathcal{L}\left\{\dfrac{\sin(t)}{t}\right\}$ , **b)** $\mathcal{L}\left\{\displaystyle\int_0^t \frac{\sin(\tau)}{\tau}\,\mathrm{d}\tau\right\}$ , **c)** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ , **d)** $\mathcal{L}\left\{\mathrm{e}^{-t}\,\dfrac{\sin(t)}{t}\right\}$ .

### Aufgabe 32: Laplace-Transformierte

Berechnen Sie die Laplace-Transformierte der folgenden Funktionen:

**a)** $f_1(t) = \begin{cases} A & \text{für } 0 \le t \le t_0 \\ A\mathrm{e}^{-2(t-t_0)} & \text{sonst} \end{cases}$ mit festem $A \in \mathbb{R}$.

**b)** $f_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq t < a \\ A & \text{für } a \leq t < b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ mit festen $0 < a < b$ und $A \in \mathbb{R}$.

**c)** $f_3(t) = \begin{cases} t & \text{für } 0 \leq t \leq 3 \\ 3 & \text{für } t > 3 \end{cases}$

**d)** $f_4(t) = \begin{cases} \sin t & \text{für } t \leq \pi \\ 0 & \text{für } t > \pi \end{cases}$.

### Aufgabe 33: Laplace-Transformierte

Berechnen Sie die Laplace-Transformierte

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int\limits_{t=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-st} \cdot f(t) \, \mathrm{d}t$$

der folgenden Funktionen:

**i)** $f(t) = 1$,

**ii)** $f(t) = t$,

**iii)** $f(t) = t^2$,

**iv)** $f(t) = t^3$,

**v)** $f(t) = e^{-at}$,

**vi)** $f(t) = e^{-at} \cdot t$,

**vii)** $\mathcal{L}\{g'(t)\}$, für eine allgemeine (gegebene) Funktion $g(t)$,

**viii)** $\mathcal{L}\{g''(t)\}$, für eine allgemeine (gegebene) Funktion $g(t)$.

**Hinweis**: Für die letzten beiden Aufgaben kann die Laplacetransformierte $G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}$ der Funktion $g(t)$ als bekannt vorausgesetzt werden.

### Aufgabe 34: Laplace-Transformierte

Bestimmen Sie die Laplace-Transformierte der folgenden Funktionen, indem Sie die Korrespondenztabelle verwenden.

**a)** $f''(t)$ mit $f(0) = 3$ und $f'(0) = 2$

**b)** $f'''(t)$ mit $f(0) = 1$ und $f'(0) = 2$ und $f''(0) = 3$

**c)** $e^{-2t} f(t)$

**d)** $\dfrac{t^3}{6}$

**e)** $\dfrac{t^2}{2} e^{-t}$

**f)** $t^2e^{-t}$

**g)** $t\sin(2t)$

**h)** $\sin(2t)e^t$

**i)** $\sin(3t)$

### Aufgabe 35: Integralgleichungen mit Laplace–Transformation

Bestimmen Sie die Lösung $y(t)$ (mit $t \geq 0$) der Integralgleichung

$$y(t) = t^2 + \int\limits_0^t y(\tau)\,\sin(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau\,.$$

### Aufgabe 36: Inverse Laplace-Transformation

Bestimmen Sie

**a)** $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{5}{s+2}\right\}$ **b)** $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{4s-3}{s^2+4}\right\}$

**c)** $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{2s-5}{s^2}\right\}$ **d)** $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2+2s}\right\}$

**e)** $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{5s^2-15s+7}{(s+1)(s-2)^2}\right\}$ **f)** $\mathcal{L}^{-1}\left\{3\,\mathrm{e}^{-2s}\right\}$

**g)** $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{(s+2)^2+9}\right\}.$

### Aufgabe 37: Laplace-Transformation

Beantworten Sie die folgenden Fragen und geben Sie gegebenenfalls ein Beispiel.

**a)** Wie ist die Laplace-Transformation definiert?

**b)** Warum muss die Variable $s$ positiv sein?

**c)** Was ist die Heaviside-Funktion $h_{t_0}(t)$?

**d)** Erklären Sie anhand eines Beispiels, was die Dämpfung einer Funktion $f(t)$.

**e)** Ist die folgende Aussage wahr?

$$\mathcal{L}\left\{f(t)+g(t)\right\} = F(s) + G(s)$$

**f)** Ist die folgende Aussage wahr?

$$\mathcal{L}\left\{f(t)\,g(t)\right\} = F(s)\,G(s)$$

**g)** Wiederholen Sie, wie man ein Anfangswertproblem mithilfe der Laplace-Transformation lösen kann.

**h)** Schreiben Sie die Eigenschaften der Dirac-Delta-Funktion $\delta(t)$ (auch $\delta$-Distribution) auf.

### Aufgabe 38: Heaviside-Funktion

Gesucht ist die Laplace–Transformierte von

**i)** $g(t) := h(t-2) \cdot (t-2)^2$

**ii)** $f(t) := h(t-2) \cdot t^2$ ,

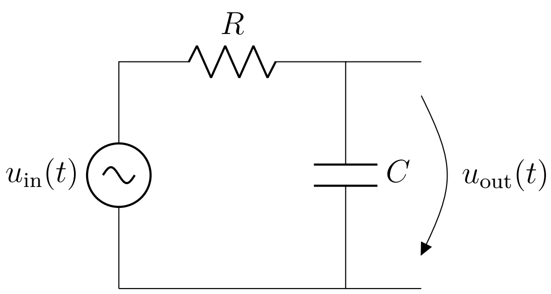
wobei $h$ die Heaviside–Funktion ist.

**a)** Mit Hilfe der Integraldarstellung der Definition.

**b)** Mit Hilfe des Verschiebungssatzes und der Tabelle der Laplace–Transformierten.

### Aufgabe 39: Tiefpassfilter

Ein elektrischer Tiefpassfilter erster Ordnung besteht aus einem Widerstand $R$ und einem Kondensator $C$, die in Reihe geschaltet sind. Die Ausgangsspannung $u_{\text{out}}(t)$ wird über dem Kondensator abgegriffen. Die Eingangsspannung $u_{\text{in}}(t)$ ist eine Funktion der Zeit.




Die Beziehung zwischen Eingangs- und Ausgangsspannung ergibt sich durch folgende Differentialgleichung:

$$RC\,\frac{du_{\text{out}}(t)}{dt} + u_{\text{out}}(t) = u_{\text{in}}(t)$$

Die **Übertragungsfunktion** eines Systems beschreibt den Zusammenhang zwischen Ein- und Ausgang im Laplace-Bildbereich und ist definiert als

$$H(s) = \frac{U_{\text{out}}(s)}{U_{\text{in}}(s)}.$$

**a)** Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $H(s)$ dieses Systems, indem Sie eine Laplace-Transformation der Differentialgleichung unter der Annahme von Null-Anfangsbedingungen durchführen.

**b)** Untersuchen Sie das Frequenzverhalten des Filters, indem Sie den Betrag der Übertragungsfunktion für $s = \mathrm{j}\omega$ berechnen. Bestimmen Sie, für welche Werte von $\omega$ das Eingangssignal nahezu ungedämpft übertragen wird und bei welchen Frequenzen es stark abgeschwächt wird.

### Aufgabe 40: Verschiebungssatz

**a)** Berechnen Sie die Laplace-Transformation der Funktion $f(t) = h(t-3)e^{t-3}$.

**b)** Berechnen Sie die Inverse Laplace-Transformation von $\frac{1}{(s-2)^2}$.

**c)** Berechnen Sie die Inverse Laplace-Transformation von $\frac{1}{(s-1)^2}e^{-3s}$.

### Aufgabe 41: LR-Kreis mit Hilfe der Laplace-Transformation

Ein Stromkreis habe einen Widerstand von $R = 0.8$ Ohm und eine Selbstinduktion von $L = 4$ Henry. Bis zur Zeit $t_0 = 0$ fließe kein Strom. Dann wird eine Spannung von $U = 5$ Volt angelegt. Nach 5 Sekunden wird die Spannung abgeschaltet. Gesucht ist der Stromverlauf $I(t)$ für $0 \leq t \leq 5$ und $t > 5$. Ermitteln Sie $I(t)$ mit Hilfe der Laplace-Transformation.
**Hinweis**: In diesem Stromkreis gilt $L\dot{I}(t) + RI(t) = U(t)$ mit

$$U(t) = 5 \cdot (1 - h(t-5)) = \begin{cases} 5, & 0 \leq t \leq 5 \\ 0, & t > 5 \end{cases}.$$

mit der Heaviside-Funktion $h(t)$.

**Aufgabe 42: Anfangswertprobleme zu linearen Differentialgleichungen $n$-ter Ordnung**

Gegeben seien die folgenden Anfangswertprobleme:

**a**) $y''(t) - 2y'(t) - 3y(t) = 4e^t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 6,$

**b**) $y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) = 4e^{-2t}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$

Bestimmen Sie die Lösungen jeweils mit Hilfe des Exponentialansatzes **und** zusätzlich mit Hilfe der Laplace-Transformation.

**Aufgabe 43: Linear ODE**

Gegeben sie das folgende Anfangswertproblem für $y(t)$ durch

$$y'' + 4\,y = t\ , \quad y(0) = 1, y'(0) = 2.$$

**a**) Berechnen Sie die Lösung mit dem Exponentialansatz.

**b**) Berechnen Sie die Lösung mit Hilfe der Laplace-Transformation.

**Aufgabe 44: AWP mit Laplace–Transformation**

Bestimmen Sie mit Hilfe der Laplace–Transformation die Lösung der Anfangswertaufgabe:

$$u''(t) + 4\,u'(t) - 12\,u(t) = 4\,e^{-2\,t}$$

mit den Anfangswerten

$$u(0) = 0 \text{ und } u'(0) = 0\ .$$

**Aufgabe 45: AWP mit Laplace–Transformation**

Bestimmen Sie mit Hilfe der Laplace–Transformation die Lösung der Anfangswertaufgabe:

$$y''(t) - 3\,y'(t) + 2\,y(t) = 4\,e^{2\,t}$$

mit den Anfangswerten

$$y(0) = -3 \text{ und } y'(0) = 5\ .$$

**Aufgabe 46: Balkenbiegung**

Ein homogener Balken ($E, J$ konstant) der Länge $L = 3$ möge an beiden Enden gelenkig gelagert sein. Bei 2/3 der Länge greife eine punktförmige Last $F$ an. Berechnen Sie die Lage des tiefsten Punktes des Balkens, wobei sein Eigengewicht vernachlässigt werden darf.
Das Materialgesetz des Balkens wird als

$$EJ \cdot w''''(x) = -F \cdot \delta(x - l) \qquad (\text{mit } l = \frac{2}{3}L)$$

angenommen.
**Hinweise**: $EJ$ bezeichnet die Biegesteifigkeit des Balkens. Zur Vereinfachung können Sie annehmen $EJ = 1$. Ebenson können Sie $F = 1$ setzen.
Gehen Sie in den folgenden Schritten vor:

**a**) Ermitteln Sie die Lösung $w_H(x)$ der homogenen Differentialgleichung.

**b**) Bestimmen Sie eine spezielle Lösung $w_P(x)$ (bzw. $W_P(s)$) der inhomogenen Differentialgleichung, indem Sie die Laplace-Transformation nutzen, wobei Sie von homogenen Anfangswerten ausgehen können.

**c**) Bestimmen Sie die Integrationskonstanten der allgemeinen Lösung der inhomogenen Gleichung $w(x) = w_H(x) + w_P(x)$ aus den Randbedingungen

$$w(0) = w(L) = 0 \qquad \text{und} \qquad w''(0) = w''(L) = 0.$$

**d**) Berechnen Sie den Extremwert der so erhaltenen Funktion.

**Aufgabe 47: AWP mit Laplace-Transformation**

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$u''(t) - 2u'(t) + u(t) = \cos(t) \cdot h(t - \pi)$$

mit $u(0) = 0$ und $u'(0) = 0$. Dabei ist $h(t)$ die Heaviside-Funktion.

**a**) Zeigen Sie, dass die Lösung des Anfangswertproblems im Bildbereich der Laplace-Transformation die folgende Gestalt hat:

$$U(s) = -\frac{s\,\mathrm{e}^{-s\pi}}{(1 + s^2)(s - 1)^2}$$

**b**) Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung $u(t)$ im Urbildbereich.

**Aufgabe 48: Lineare Differentialgleichung**

Gegeben sei das Anfangswertproblem für $u(t)$

$$u'' + 4\,u' + 3\,u = 12 \cdot \Big(1 - h(t-2)\Big)\,, \quad u(0) = u'(0) = 0$$

wobei $h(t)$ die Heaviside–Funktion ist.

**a)** Bestimmen Sie die Lösung mit Hilfe der Laplace–Transformation.

**b)** Geben Sie die Lösung in den Bereichen $0 \leq t < 2$ und $2 \leq t$ ohne Verwendung der Heaviside–Funktion an und fassen Sie die Terme sinnvoll zusammen.

**Aufgabe 49: Lineare Differentialgleichung**

Gegeben sei das Anfangswertproblem für $u(t)$

$$u'' + \, u = \sin(t) \cdot \Big(1 - h(t-\pi)\Big)\,, \quad u(0) = u'(0) = 0$$

wobei $h(t)$ die Heaviside–Funktion ist.

**a)** Bestimmen Sie zunächst die Lösung im Bereich $0 \leq t \leq \pi$ mit Hilfe des Exponentialansatzes und dann die Lösung im Bereich $t \geq \pi$.

**b)** Bestimmen Sie die Lösung des AWPs mit Hilfe der Laplace-Transformation

**Aufgabe 50: $\delta$–Distribution**

Bestimmen Sie die folgenden Integrale:

**i)** $I_1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{\cos(x)}{1+x^2} \cdot \delta(x-\pi)\,\mathrm{d}x$

**ii)** $I_2 = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(x) \cdot \delta(x-\pi)\,\mathrm{d}x$

**iii)** $I_3 = \int\limits_{-1}^{5} \dfrac{e^{x^2+3}}{x+2} \cdot \delta(x)\,\mathrm{d}x$

**iv)** $I_4 = \int\limits_{-1}^{1} (f(x) - f(0)) \cdot \delta\left(x + \tfrac{1}{2}\right)\,\mathrm{d}x$

**Aufgabe 51: AWP und $\delta$–Distribution**

Ein mechanisches Pendel werde durch das folgende Anfangswertproblem beschrieben

$$u''(t) + 2\,u'(t) + 5\,u(t) = f(t)\ , \quad u(0) = 2\ , \quad u'(0) = -2\ .$$

$u''(t)$ steht nach dem zweiten Newtonschen Gesetz für die Beschleunigung einer Masse. Der Term $5u(t)$ modelliert ein repulsives Potential (Federkraft) und der Term $2u'(t)$ die Dämpfung des Systems. Das Pendel befindet sich zum Zeitpunkt $t = 0$ am Ort $u(0) = 2$ und hat die Geschwindigkeit $u'(0) = -2$.

a) Bestimmen Sie mit Hilfe der Laplace–Transformation die Lösung des AWPs für $f(t) = 0$, $t > 0$. (Es wirken keine äußeren Kräfte.)

b) Bestimmen Sie den Zeitpunkt $t_0$ des ersten Nulldurchgangs, d.h. $u(t_0) = 0$, der Lösung aus Teil a) .

c) Zum Zeitpunkt $t_0$ aus Teil b) wird ein $\delta$–Impuls $f(t) = \alpha \cdot \delta(t - t_0)$ so auf das System ausgeübt, dass das System anschließend in Ruhe ist.
Dies modelliert ein starres Hindernis, auf welches das Pendel (nicht elastisch) aufprallt, so dass die Bewegung sofort endet.
Wie groß muss die Impulsstärke $\alpha$ sein?

# Lineare Systeme von Differentialgleichungen

## Umwandlung einer lin. homogenen Dgl. höherer Ordnung in ein Differentialgleichungssystem 1. Ordnung

Jede homogene lineare Dgl. $n$-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$L_n y := y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + ... + a_1 y' + a_0 y = 0$$

kann in ein Differentialgleichungssystem 1. Ordnung überführt werden. Dazu werden neue Funktionen definiert:

$$\begin{aligned}
y_1(t) &= y(t) \\
y_2(t) &= y'(t) \\
y_3(t) &= y''(t) \\
&\vdots \\
y_n(t) &= y^{(n-1)}(t),
\end{aligned}$$

welche sich in einem Vektor $\boldsymbol{y}$ zusammenfassen lassen:

$$\boldsymbol{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ . \\ . \\ y_n(x) \end{pmatrix}.$$

Durch Ableiten ergeben sich $n$ Differentialgleichungen 1. Ordnung

$$\begin{aligned}
y_1'(t) &= y'(t) = y_2(t) \\
y_2'(t) &= y''(t) = y_3(t) \\
&\vdots \\
y_n'(t) &= y^{(n)}(t) = -\sum_{k=1}^{n} a_{k-1} y_k(t).
\end{aligned}$$

In Matrixschreibweise ergibt sich

$$\boldsymbol{y}'(t) = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{y}(t)$$

$$\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \\ . \\ y_{n-1}'(t) \\ y_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ . & . & . & ... & . \\ 0 & 0 & 0 & .... & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & ... & -a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ . \\ y_{n-1}(t) \\ y_n(t) \end{pmatrix}$$

**Beispiel:** Gegeben sei die lineare homogene Dgl.:

$$y'' + 4y' + 5y = 0$$

Es werden die Funktionen

$$y_1 = y$$
$$y_2 = y'$$

definiert. Durch Ableiten ergibt sich das System

$$y_1' = y' = y_2$$
$$y_2' = y'' = -5y_1 - 4y_2.$$

Es resultiert in Matrixschreibweise

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -4 \end{pmatrix} \boldsymbol{y}$$

## Lösen eines homogenen lin. Differentialgleichungssystems 1. Ordnung

Es sei $\boldsymbol{y}(t) = (y_1(t), y_2(t), ..., y_n(t))^{\mathrm{T}}$ mit $\boldsymbol{y}'(t) = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{y}(t)$ gegeben. Es wird der Ansatz

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{v}e^{\lambda t}$$

gewählt. Es ergibt sich hiermit

$$\lambda \boldsymbol{v}e^{\lambda t} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}e^{\lambda t}$$
$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} - \lambda\boldsymbol{v})e^{\lambda t} = 0$$
$$(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{v} = 0,$$

das dem Eigenwertproblem entspricht, wobei $\lambda$ ein Eigenwert von $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{v}$ der dazugehörige Eigenvektor ist. Unter der Annahme, dass die Matrix $\boldsymbol{A}$ diagonalisierbar ist, ergibt sich die allgemeine Lösung

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y}(t) &= C_1 e^{\lambda_1 t}\boldsymbol{v}_1 + C_2 e^{\lambda_2 t}\boldsymbol{v}_2 + ... \\ &= \boldsymbol{Y}(t)\,\boldsymbol{C},\end{aligned}$$

wobei $\boldsymbol{Y}(t)$ die sogenannte Fundamentalmatrix oder Wronski-Matrix ist.

**Beispiel:**
Gegeben sei

$$\boldsymbol{y}'(t) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \boldsymbol{y}(t).$$

Um die Eigenwerte $\lambda$ zu bestimmen, werden die Nullstellen des charakteristischen Polynoms bestimmt:

$$\begin{aligned}P(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 2 & 2-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (3-\lambda)(2-\lambda) - 2 \\ &= \lambda^2 - 5\lambda + 4.\end{aligned}$$

Es ergeben sich $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 4$. Zu den Eigenwerten werden nun die dazugehörigen Eigenvektoren $v$ bestimmt.
Es ergeben sich folgendes Gleichungssysteme:

$$\lambda_1 = 1: \qquad \begin{array}{cc|c|l} 2 & 1 & 0 & \\ 2 & 1 & 0 & \text{II' = II- I} \\ \hline 2 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \end{array} \Leftarrow \qquad \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 4: \qquad \begin{array}{cc|c|l} -1 & 1 & 0 & \\ 2 & -2 & 0 & \text{II'= II+2 I} \\ \hline -1 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \end{array} \Leftarrow \qquad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Damit ergibt sich die allgemeine Lösung

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{y}(t) &= C_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} e^t + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t} \\
&= \begin{pmatrix} -e^x & e^{4x} \\ 2e^x & e^{4x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \\
&= \boldsymbol{Y}(t) \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Die Konstanten $C_1$ und $C_2$ können mit Anfangsbedingungen bestimmt werden.

## Hauptvektoren

Ist die Matrix $\boldsymbol{A}$ nicht diagonalisierbar, d.h. ist die algebraische Vielfachheit $k$ des Eigenwertes größer als die geometrische Vielfachheit zum dazugehörigem Eigenwert, so müssen die sogenannten **Hauptvektoren $\boldsymbol{w}$** ermittelt werden, um die allgemeine Lösung bestimmen zu können.

Eine Kette von Hauptvektoren $\boldsymbol{w}_j$ der Stufe $j = 1, 2, ..., k$ zum Eigenwert $\lambda$ lassen sich aus

$$(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E})\boldsymbol{w}_j = \boldsymbol{w}_{j-1}$$

bestimmen. Und damit auch die allgemeine Lösung

$$\boldsymbol{y}(t) = e^{\lambda t} \sum_{j=1}^{k} C_j \sum_{r=0}^{j-1} \frac{t^r}{r!} w_{j-r}.$$

**Beispiel:**
Gegeben sei die Matrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 9 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte der Matrix lauten $\lambda_{1,2,3} = 2$, d.h. es liegt eine algebraische Vielfachheit von 3 vor. Es werden nun die dazugehörigen Eigenvektoren bestimmt.

$$\begin{array}{rrr|l} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 9 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \end{array}.$$

Die Lösung des LGS lautet

$$\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} t,\ t \in \mathbb{R}.$$

Das bedeutet, dass wir eine geometrische Vielfachheit von 1 vorliegen haben und ein erster Eigenvektor

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

lauten kann. Es müssen nun noch zwei weitere Vektoren, die Hauptvektoren, bestimmt werden. Mit $(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E})\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_1$ ergibt sich das LGS

$$\begin{array}{rrr|r} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 9 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \end{array}.$$

Die Lösung des LGS lautet

$$\boldsymbol{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}.$$

Der Hauptvektor 2. Stufe lautet z.B.

$$\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Der dritte Eigenvektor ergibt sich aus $(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E})\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{v}_2$ und dem LGS

$$\begin{array}{rrr|r} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 9 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \end{array}.$$

Die Lösung des LGS lautet

$$\boldsymbol{w}_3 = \begin{pmatrix} 18 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}.$$

Der Hauptvektor 3. Stufe lautet z.B.

$$\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Damit kann die allgemeine Lösung bestimmt werden:

$$\boldsymbol{y}(t) = C_1 \boldsymbol{v}_1 e^{2t} + C_2(\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_1 t)e^{2t} + C_3(\boldsymbol{v}_3 + \boldsymbol{v}_2 t + \boldsymbol{v}_1 \frac{t^2}{2})e^{2t}$$

## Lösen eines inhomogenen lin. Differentialgleichungssystems 1. Ordnung

Ist eine inhomogene Differentialgleichung $n$-ter Ordnung

$$L_n y := y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_1 y' + a_0 y = g(t)$$

gegeben, so wird diese Differentialgleichung in ein System aus Differentialgleichungen 1. Ordnung überführt:

$$\boldsymbol{y}'(t) = \boldsymbol{A}\, \boldsymbol{y}(t) + g(t).$$

Zum Lösen dieses Systems wird zunächst das homogene System betrachtet und gelöst, sodass die Fundamentalmatrix $\boldsymbol{Y}(t)$ vorliegt. Als Ansatz für die partikuläre Lösung wird der Ansatz

$$\boldsymbol{y}_{\mathrm{p}}(t) = \boldsymbol{Y}(t)\boldsymbol{C}(t)$$

gewählt. Aus diesem Ansatz folgt, dass

$$\boldsymbol{Y}(t)\boldsymbol{C}'(t) = \boldsymbol{g}(t)$$

gelten muss. Das so vorliegende Gleichungssystem kann mit dem Gauß-Algorithmus gelöst werden und es können somit die Einträge des Vektors $\boldsymbol{C}'(t)$ bestimmt werden. Durch Integration ergibt sich $\boldsymbol{C}(t)$ und somit die partikuläre Lösung. Die allgemeine Lösung lautet damit

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}(t) &= \boldsymbol{y}_{\mathrm{p}}(h) + \boldsymbol{y}_{\mathrm{p}}(t) \\ &= \boldsymbol{Y}(t)\boldsymbol{C} + \boldsymbol{Y}(t)\boldsymbol{C}(t). \end{aligned}$$

**Beispiel:**
Gegeben sei

$$\boldsymbol{y}'(t) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \boldsymbol{y}(t) + \begin{pmatrix} t^2 \\ 2t+1 \end{pmatrix}.$$

Die homogene Lösung lautet

$$\boldsymbol{y}_{\mathrm{h}}(t) = \begin{pmatrix} -e^x & e^{4x} \\ 2e^x & e^{4x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix},$$

wobei

$$\boldsymbol{Y}(x) = \begin{pmatrix} -e^x & e^{4x} \\ 2e^x & e^{4x} \end{pmatrix}.$$

Der Ansatz der partikuläre Lösung lautet damit

$$\boldsymbol{y}_{\mathrm{p}}(t) = \begin{pmatrix} -e^x & e^{4x} \\ 2e^x & e^{4x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{pmatrix}.$$

Mit $\boldsymbol{Y}(t)\boldsymbol{C}'(t) = \boldsymbol{g}(t)$ ergibt sich das LGS

$$\begin{array}{rr|l|l} -e^t & e^{4t} & t^2 & \\ 2e^t & e^{4t} & 2t+1 & \text{II'=II+2I} \\ \hline -e^t & e^{4t} & t^2 & \\ 0 & 3e^{4t} & 2t^2+2t+1 & \text{II'=II+2I} \end{array}$$

Also Lösung ergeben sich $C_1' = \frac{1}{3}(-t^2+2t+1)e^{-t}$ und $C_2' = \frac{1}{3}(2t^2+2t+1)e^{-4t}$. Durch Integration ergeben sich

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{3}e^{-t}(t^2-1) + \tilde{C}_1 \\ C_2 &= -\frac{1}{48}e^{-4t}(8t^2+12t+7) + \tilde{C}_2. \end{aligned}$$

Damit lautet die partikuläre Lösung

$$\boldsymbol{y}_{\mathrm{p}}(t) = \begin{pmatrix} -e^x & e^{4x} \\ 2e^x & e^{4x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3}e^{-t}(t^2-1) \\ -\frac{1}{48}e^{-4t}(8t^2+12t+7) \end{pmatrix}$$

und die allgemeine Lösung

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}(t) &= \boldsymbol{y}_{\mathrm{h}}(t) + \boldsymbol{y}_{\mathrm{p}}(t) \\ &= \begin{pmatrix} -e^x & e^{4x} \\ 2e^x & e^{4x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -e^x & e^{4x} \\ 2e^x & e^{4x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3}e^{-t}(t^2-1) \\ -\frac{1}{48}e^{-4t}(8t^2+12t+7) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die Konstanten $C_1$ und $C_2$ lassen sich mit Anfangsbedingungen bestimmen.

# Aufgaben zu linearen Systemen von Differentialgleichungen

## Aufgabe 52: Systeme homogener linearer Differentialgleichungen

Bestimmen Sie die allgemeinen reellen Lösungen und gegebenenfalls auch die Lösungen des Anfangswertproblems der folgenden Systeme von homogenen linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Benutzen Sie dazu die Matrizenschreibweise.

**i)** $$\begin{cases} x'(t) &= 4\,x(t) + 5\,y(t) \quad , \quad x(0) = 3\,, \\ y'(t) &= -x(t) - 2\,y(t) \quad , \quad y(0) = 1 \end{cases}$$

**ii)** $$\begin{cases} x'(t) &= 3\,x(t) - 5\,y(t) \quad , \quad x(0) = -20\,, \\ y'(t) &= 5\,x(t) - 3\,y(t) \quad , \quad y(0) = -24 \end{cases}$$

**iii)** $$\begin{cases} x'(t) &= 2\,x(t) - 5\,y(t)\,, \\ y'(t) &= \phantom{2\,}x(t) + 4\,y(t)\,. \end{cases}$$

## Aufgabe 53: Lineare DGl-Systeme 1. Ordnung

Die symmetrische Matrix $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{3,3}$ erfülle $\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_1 = 3\boldsymbol{v}_1\,,$ $\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_2\,,$ $\det \boldsymbol{A} = 6$ mit $\boldsymbol{v}_1 = (1,0,1)^\top$, $\boldsymbol{v}_2 = (-1,0,1)^\top$.

**a)** Zeigen Sie, dass $\lambda = 2$ ein Eigenwert von $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{v}_3 = (0,1,0)^\top$ ein zugehöriger Eigenvektor ist. Geben Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren von $\boldsymbol{A}$ an.
**Hinweis:** Für eine symmetrische Matrix sind die Eigenvektoren orthogonal zueinander.

**b)** Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t), \quad \boldsymbol{x}(0) = (1,1,1)^\top\,.$$

## Aufgabe 54: Systeme linearer Differentialgleichungen

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Systems von Differentialgleichungen

$$\boldsymbol{y}'(x) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -3 & 5 & 1 \\ -10 & -2 & 10 \end{pmatrix} \boldsymbol{y}(x).$$

**Aufgabe 55: Differentialgleichungssysteme erster Ordnung**

Berechnen Sie die allgemeine Lösungen der folgenden Differentialgleichungssysteme:

**a)**

$$\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 - 3y_2, \\ y_2' &= -y_1 + 4y_2. \end{aligned}$$

**b)**

$$\begin{aligned} y_1' &= -y_1, \\ y_2' &= -y_2. \end{aligned}$$

**c)**

$$\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 - y_2, \\ y_2' &= y_1 + 4y_2. \end{aligned}$$

**Aufgabe 56: System linearer Differentialgleichungen 1. Ordnung**

Gegeben seien die Differentialgleichungen zweiter Ordnung:

**i)** $y'' - 2y' - 3y = 0.$

**ii)** $y'' + y' - 6y = 0.$

**a)** Lösen Sie die Gleichungen als Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

**b)** Lösen Sie die Gleichungen, indem Sie sie in ein System erster Ordnung überführen.

**Aufgabe 57: Differentialgleichgungssystem, Hauptvektoren**

Gegeben sei die Matrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

sowie die Vektoren

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{u}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \boldsymbol{u}_5 = \begin{pmatrix} 9 \\ -10 \\ 8 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

**a)** Berechnen Sie die Matrix-Vektor-Produkte $\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_j$, $j = 1, 2, 3, 4, 5$. Welche Eigenwerte und Hauptvektoren hat $\boldsymbol{A}$?

**b)** Lösen Sie das Differentialgleichungssystem

$$\boldsymbol{y}'(x) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}(x).$$

**c)** Lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem mit den Anfangswerten

$$\boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}_0 = (0, 9, -8, 5, -8)^\top.$$

### Aufgabe 58: Fundamentalmatrix

Gegeben sei die Matrix $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Lösen Sie das homogene Differentialgleichungssystem

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t).$$

Geben Sie auch die Fundmentalmatrix an.

### Aufgabe 59: Differentialgleichungssystem und Hauptvektoren

Die Matrix $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{(3,3)}$ und die Vektoren $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^3$ seien wie folgt gegeben:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 4 & 4 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v} := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{w} := \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ a \end{pmatrix}, \boldsymbol{z} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**a)** Offenbar gilt $\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} = 4\boldsymbol{v}$. Berechnen Sie

(i) $\lambda \in \mathbb{R}$ so, dass $\boldsymbol{A}\boldsymbol{z} = \lambda\,\boldsymbol{z}$ gilt, (ii) die Spur $\mathrm{Sp}(\boldsymbol{A})$ von $\boldsymbol{A}$.

Bestimmen Sie mit diesen Ergebnissen alle Eigenwerte der Matrix $\boldsymbol{A}$.

(Selbstverständlich sollen Sie **nicht** das charakteristische Polynom bestimmen und lösen!)

**b)** Berechnen Sie $a \in \mathbb{R}$ so, dass $(\boldsymbol{A} - 4\boldsymbol{E})\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}$ gilt. Bestimmen Sie nun alle Haupt– und Eigenvektoren von $\boldsymbol{A}$.

**c)** Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $\boldsymbol{y}(t)$ des DGl–Systems

$$\boldsymbol{y}'(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

### Aufgabe 60: Differentialgleichungen und Systeme (Hauptvektoren)

Gegeben sei die lineare Differentialgleichung

$$u'''(t) - 4\,u''(t) + 4\,u'(t) = 9\,\mathrm{e}^{-t}\,. \tag{0.1}$$

**a)** Verwandeln Sie die Differentialgleichung in ein System erster Ordnung

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{f}(t)\,.$$

**b)** Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des homogenen Systems $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)$ aus Teil a).

**c)** Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Systems aus Teil a).

**Hinweis:** Eine spezielle Lösung des Systems aus Teil a) kann mit dem Ansatz $\boldsymbol{x}_{\mathrm{p}}(t) = (\alpha, \beta, \gamma)^\top \cdot \mathrm{e}^{-t}$, mit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, bestimmt werden.

### Aufgabe 61: Inhomogenes lineares System von DGLn

**a)** Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$u''(x) - 16u(x) = 16x \qquad \text{mit} \qquad u(0) = 1,\ u'(0) = 4.$$

**i)** Überführen Sie diese gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung in ein System aus zwei Differentialgleichungen erster Ordnung,

$$\boldsymbol{y}'(x) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}(x) + \boldsymbol{g}(x), \qquad \text{mit} \qquad \boldsymbol{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}.$$

Geben Sie hierfür auch die Anfangsbedingung an.

**ii)** Bestimmen Sie die Lösung $\boldsymbol{y}(x)$ dieses Anfangswertproblems.

**iii)** Bestimmen Sie daraus die Lösung $u(x)$ der ursprünglichen Anfangswertaufgabe.

### Aufgabe 62: Inhomogenes lineares System von DGLn

Gegeben seien

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -7 & -5 & 6 \\ 9 & 8 & -9 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{g}(x) = \begin{pmatrix} x\,\mathrm{e}^{-x} \\ \mathrm{e}^{-x} \\ (x+1)\mathrm{e}^{-x} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{y}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Zu untersuchen ist das Anfangswertproblem

$$\boldsymbol{y}'(x) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}(x) + \boldsymbol{g}(x) \quad \text{mit } \boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}_0.$$

**Hinweis**: Ein Eigenwert der Matrix $\boldsymbol{A}$ ist $\lambda = 2$.

**a)** Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem des zugehörigen homogenen Problems.

**b)** Bestimmen Sie die Lösung des inhomogenen Anfangswertproblems.

### Aufgabe 63: Inhomogene lineare Systeme (Hauptvektoren)

Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$\boldsymbol{y}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{y}(t) + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{5t}$$

mit den Anfangswerten $\boldsymbol{y}(0) = (0, 1, 2)^\top$.

**a)** Ermitteln Sie die Fundamentalmatrix $\boldsymbol{Y}(t)$ (des homogenen Systems).

**b)** Berechnen Sie die Lösung des Anfangswertproblemes, indem Sie die Schritte der Variation der Konstanten explizit ausführen.

### Aufgabe 64: Inhomogene lineare Differentialgleichungssystem

Gegeben sei das folgende Differentialgleichungssystem

$$\boldsymbol{y}'(t) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \boldsymbol{y}(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-3t}$$

mit dem Anfangswert $\boldsymbol{y}(0) = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

**a)** Ermitteln Sie die Fundamentalmatrix $\boldsymbol{Y}(t)$ des homogenen Systems und geben Sie die Lösung des homogenen Systems.

**b**) Berechnen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems und lösen Sie das Anfangswertproblem.

# Ergebnisse

### Ergebnisse zu Aufgabe 1:

**a)** $y(x) = \sqrt{4\sqrt{x} + 5}$, $x \geq 0$

**b)** $y(x) = -\sqrt{4\sqrt{x} + 12}$, $x \geq 0$

**c)** keine Lösung, da Dgl. nicht bei $x = -1$ definiert ist

### Ergebnisse zu Aufgabe 2:

**a)** $y_4(x), y_6(x)$ Lösung von Dgl. i), $y_1(x), y_2(x), y_4(x)$ Lösung von Dgl. ii)

**b)** $\omega = \pm 5$, $A, \varphi \in \mathbb{R}$

### Ergebnisse zu Aufgabe 3:

**a)** $y_{\text{AWP}}(x) = \frac{-1}{x^2 - \frac{1}{4}}$, **b)** $y(x) = \frac{C}{\cos(x)}$

### Ergebnisse zu Aufgabe 4:

**a)** $y(x) = \frac{1}{4}x^2$

**b)** Das Problem hat unendlich viele Lösungen.

### Ergebnisse zu Aufgabe 5:

die spezielle Lösung lautet: $y = \dfrac{y_0 k}{y_0 + (k - y_0)\,\mathrm{e}^{-\lambda k t}}$.

### Ergebnisse zu Aufgabe 15:

$y(x) = x \ln\left(\frac{C}{|x|} - 1\right)$, $C > |x| > 0$.

### Ergebnisse zu Aufgabe 7:

**a)** $u(t) = t^3 + \frac{C}{t^2}$, **b)** $u(t) = \frac{-t}{4\,\ln(t) + C}$

### Ergebnisse zu Aufgabe 8:

**a)** $y(x) = \frac{(15\,x + C)^{1/5} - 2x - 4}{3}$

**b)** $u(t) = t \cdot \left(\dfrac{3\,\ln(t)}{2} + C\right)^{2/3}$

**c)** $w(s) = C\,s^2 + 5\,s^5$

**Ergebnisse zu Aufgabe 9:**

Es gilt $(1-n)u'(x) = u(x)^n \cdot z'(x)$. Damit ist die Lösung $y(x) = \frac{1}{C \cdot x^2 - x^3}$.

**Ergebnisse zu Aufgabe 10:**

**a)** $y(x) = Ce^{x^3/3}$

**b)** i) $y(x) = e^{x^3/3}$, ii) $y(x) = -e^{-1/3}e^{x^3/3}$, iii) $y(x) = 0$

**c)** $y(x) = y_0 e^{-x_0^3/3} e^{x^3/3}$

**Ergebnisse zu Aufgabe 11:**

**a)** $y(x) = \pm\frac{1}{x}\sqrt{32 - 2x^4}$

**b)** $y(x) = x\,\mathrm{e}^{\frac{\ln(4)+1}{x} - 1}$

**Ergebnisse zu Aufgabe 12:**

**a)** $y(x) = \dfrac{1}{9 - 3x^2}$ mit $-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$

**b)** $y(x) = 2 \pm \sqrt{x^3 + 2x^2 - 4x + 2}$ mit $x \geq \bar{x} \approx -3.36$

**c)** $y(x) = \ln(x^2 - 4x - 4)$ mit $2 + 2\sqrt{2} < x < \infty$

**d)** $y(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x_0}$ mit $0 < x < \infty$ falls $x_0 > 0$ und $-\infty < x < 0$ falls $x_0 < 0$

**e)** $y(x) = \frac{x^3}{3} + y_0$ mit $x \in \mathbb{R}$

**Ergebnisse zu Aufgabe 13:**

$$I(t) = \begin{cases} 6.25\left(1 - e^{-0.2t}\right) & \text{für } 0 < t < 5 \\ 6.25\left(1 - e^{-1}\right)e^{-0.2(t-5)} & \text{für } t > 5 \end{cases}$$

**Ergebnisse zu Aufgabe 14:**

**a)** $y(x) = Ce^{\cos(x)} + 2\cos(x) + 2$

**b)** $y(x) = -3e^{\cos(x)-1} + 2\cos(x) + 2$

**Ergebnisse zu Aufgabe 15:**

$$y(x) = \frac{1}{\cos(x)}\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin(2x) + C\right)$$

**Ergebnisse zu Aufgabe 16:**

**i)** $yx\,\mathrm{e}^{\frac{y}{x}} = C$

**ii)** $u' = -\frac{1}{x}\left(\frac{u^4}{1+u^3}\right)$

**iii)** $u' = \frac{1+u}{u}$

**iv)** $u' = \cos^2(u)$

**v)** $u' = \frac{u^2-1}{x}$

**vi)** $u' = \frac{1}{x^2}\,\mathrm{e}^{-u}$

**Ergebnisse zu Aufgabe 17:**

**i)** $y = C\,\mathrm{e}^{-2x} + \frac{3}{2}x - \frac{3}{4}$

**ii)** $y = \pm\sqrt{C - x^2}$

**iii)** $y = \pm x\sqrt{2\ln|x| + C}$

**iv)** $y = \tan(x + C) - x - 1$

**Ergebnisse zu Aufgabe 18:**

**i)** $y(x) = Ce^{\frac{-2}{x}} - \frac{1}{2}$

**ii)** $y(x) = Ce^{\sin(x)}$

**iii)** $y(x) = \frac{x}{\ln(x)+C}$

**iv)** $y(x) = 2\arctan(Ce^x) - 1$

**v)** $y(x) = 4x + \frac{3+Ce^{4x}}{1-Ce^{4x}}$

**vi)** $y(x) = Ce^{-3x} + \frac{1}{5}e^{2x} - \frac{2}{3}$

**Ergebnisse zu Aufgabe 19:**

$y(x) = -\frac{3}{2}\,\mathrm{e}^{-x} + \frac{3}{2}\,\mathrm{e}^{3x}$

**Ergebnisse zu Aufgabe 20:**

**i)** $u(t) = a\,\mathrm{e}^{2\,t} + b\,\mathrm{e}^{5\,t}$

**ii)** $u(t) = \mathrm{e}^{-2\,t}\Big(a\,\cos(3t) + b\,\sin(3t)\Big)$

**iii)** $u(t) = a + b\,t + c\,\mathrm{e}^{3\,t}$

**iv)** $u(t) = (a + b\,t)\cdot\cos(2t) + (c + d\,t)\cdot\sin(2t)$

**Ergebnisse zu Aufgabe 21:**

$y(x) = \mathrm{e}^{-2t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t)$

**Ergebnisse zu Aufgabe 22:**

**a)** $y(x) = c_1 e^x \cos x + c_2 e^x \sin x + c_3 \mathrm{e}^{-x} \cos x + c_4 \mathrm{e}^{-x} \sin x$

**b)** $y(x) = (c_1 + c_2 x)e^{-3x} + (c_3 + c_4 x)e^{3x}$

**Ergebnisse zu Aufgabe 23:**

**a)** $y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$ mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

**b)** $y(x) = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x)$ mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

**c)** $y(x) = (c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x))e^{-x}$ mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

**d)** $y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \cos(x) + c_4 \sin(x)$ mit $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$

**Ergebnisse zu Aufgabe 24:**

Fall 1: $y(t) = Ae^{(-\rho+\sqrt{\rho^2-\omega^2})t} + Be^{(-\rho-\sqrt{\rho^2-\omega^2})t}$,
Fall 2: $y(t) = (A + Bt)e^{-\omega t}$,
Fall 3: $y(t) = e^{-\rho t}(A \cos(\sqrt{\omega^2 - \rho^2} t) + B \sin(\sqrt{\omega^2 - \rho^2} t))$.

**Ergebnisse zu Aufgabe 25:**

Allgemeine Lösungen: a) $y(x) = c_1 + c_2 x + c_3 \mathrm{e}^{-x} + c_4 x \mathrm{e}^{-x} - 12x^2 + 2x^3$, b) $y(t) = \mathrm{e}^{-2t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t) + \sin t - \cos t$, c) $y(x) = \left(c_1 + c_2 x + \frac{1}{2}x^2\right) \mathrm{e}^{2x}$

**Ergebnisse zu Aufgabe 26:**

**a)** $y(x) = c_1 \mathrm{e}^{-2x} + c_2 \mathrm{e}^{-4x}$

**b)** $y(x) = \sin(2x) - 4\cos(2x) + c_1 \mathrm{e}^{-x} \cos(2x) + c_2 \mathrm{e}^{-x} \sin(2x)$

**c)** $y_{AWP}(x) = -e^x - \mathrm{e}^{-x} + 2\mathrm{e}^{3x}$

**d)** $y(x) = c_1 \mathrm{e}^{-2x} + c_2 \mathrm{e}^{-3x} + \frac{1}{10}\mathrm{e}^{3x}$

**e)** $y(x) = c_1 \mathrm{e}^{2x} + c_2 \mathrm{e}^{-x} - (2x + 1)e^x$

**f)** $y(x) = -\mathrm{e}^{-2x} + c_1 \mathrm{e}^x + c_2 \mathrm{e}^{-x} + c_3 x \mathrm{e}^{-x}$

**Ergebnisse zu Aufgabe 27:**

Lösungen der homogenen Gleichungen: a) $a\mathrm{e}^{2x} + b\mathrm{e}^{3x}$, b) $a\cos(5x) + b\sin(5x) + c$, c) $a + b\mathrm{e}^{2x}$.

**Ergebnisse zu Aufgabe 28:**

**a)** $y(x) = c_1\,\mathrm{e}^{x} + c_2\,\mathrm{e}^{-x} - 1$

**b)** $y(x) = (c_1 + c_2x) + c_3\,\mathrm{e}^{-x} + \frac{x^2}{2}$

**c)** $y(x) = c_1\,\mathrm{e}^{-2x} + c_2\,\mathrm{e}^{x} + \frac{x\,\mathrm{e}^{x}}{3}$

**d)** $y(x) = c_1\cos(x) + c_2\sin(x) + x\frac{1}{2}\sin(x)$

**Ergebnisse zu Aufgabe 29:**

Fall 1: $y(t) = A\,\mathrm{e}^{(-\rho+\sqrt{\rho^2-\omega^2})t} + B\,\mathrm{e}^{(-\rho-\sqrt{\rho^2-\omega^2})t} + \frac{1}{2\sqrt{\rho^2-\omega^2}}t\,\mathrm{e}^{(-\rho+\sqrt{\rho^2-\omega^2})t}$,
Fall 2: $y(t) = (A + Bt)\,\mathrm{e}^{-\omega t} + \frac{1}{2}t^2\,\mathrm{e}^{-\omega t}$,
Fall 3: $y(t) = \mathrm{e}^{-\rho t}(A\cos(\sqrt{\omega^2-\rho^2}t) + B\sin(\sqrt{\omega^2-\rho^2}t)) + \frac{1}{2}t\,\mathrm{e}^{-\rho t}\sin((\sqrt{\omega^2-\rho^2})t)$.

**Ergebnisse zu Aufgabe 30:**

$F(s) = \sqrt{\frac{\pi}{4s^3}}$.

**Ergebnisse zu Aufgabe 31:**

**a)** $F(s) = \frac{\pi}{2} - \arctan s$, **b)** $F(s) = \frac{\pi/2 - \arctan s}{s}$, **c)** $F(s) = \frac{\pi}{2}$, **d)** $F(s) = \frac{\pi}{2} - \arctan(s+1)$,

**Ergebnisse zu Aufgabe 32:**

**a)** $F_1(s) = \dfrac{A}{s} - \frac{2A\mathrm{e}^{-st_0}}{s^2+2s}$, **b)** $F_2(s) = \dfrac{A(\mathrm{e}^{-as} - \mathrm{e}^{-bs}}{s}$, **c)** $F_3(s) = \dfrac{1-\mathrm{e}^{-3s}}{s^2}$,
**d)** $F_4(s) = \dfrac{1+\mathrm{e}^{-s\pi}}{1+s^2}$

**Ergebnisse zu Aufgabe 33:**

**i)** $\dfrac{1}{s}$,

**ii)** $\dfrac{1}{s^2}$,

**iii)** $\dfrac{2}{s^3}$,

**iv)** $\dfrac{3!}{t^4}$,

**v)** $\frac{1}{s+a}$,

**vi)** $\dfrac{1}{(s+a)^2}$,

**vii)** $sG(s) - g(0)$,

**viii)** $s^2G(s) - sg(0) - g'(0)$.

**Ergebnisse zu Aufgabe 34:**

**a)** $s^2 F(s) - 3s - 2$

**b)** $s^3 F(s) - s^2 - 2s - 3$

**c)** $F(s + 2)$

**d)** $\frac{1}{s^4}$

**e)** $\frac{1}{(s+1)^3}$

**f)** $\frac{2}{(s+1)^3}$

**g)** $\frac{4s}{(s^2+4)^2}$

**h)** $\frac{2}{(s-1)^2+4}$

**i)** $\frac{3}{s^2+9}$

**Ergebnisse zu Aufgabe 35:**

$y(t) = t^2 + t^4/12$.

**Ergebnisse zu Aufgabe 36:**

**a)** $5\,\mathrm{e}^{-2t}$ **b)** $4\cos(2t) - \frac{3}{2}\sin(2t)$ **c)** $2 - 5t$ **d)** $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-2t}$ **e)** $3\,\mathrm{e}^{-t} + 2\,\mathrm{e}^{2t} - t\,\mathrm{e}^{2t}$ **f)** $\frac{8\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}} - \frac{5}{\sqrt{\pi t}}$

**Ergebnisse zu Aufgabe 37:**

**a)** $\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t$

**b)** $\mathrm{e}^{-st}$ nur beschränkt ist für $t \to \infty$, wenn $s > 0$.

**c)** $h_{t_0}$: Stufenfunktion, die 0 für $t < t_0$ und 1 für $t \geq t_0$ ist.

**d)** /

**e)** Ja

**f)** Nein

**g)** /

**h)** $\int_{-\infty}^\infty \delta(t)\,\mathrm{d}t = 1$, $\int_{-\infty}^\infty \delta(t-a)\,\mathrm{d}t = 1$, $\int_{-\infty}^\infty \delta(t-t_0)\,f(t)\,\mathrm{d}t = f(t_0)$

**Ergebnisse zu Aufgabe 38:**

**i)** $F(s) = \frac{2}{s^3} \cdot \mathrm{e}^{-2\,s}$

**ii)** $F(s) = \left(\frac{2}{s^3} + \frac{4}{s^2} + \frac{4}{s}\right) \cdot \mathrm{e}^{-2\,s}$

**Ergebnisse zu Aufgabe 39:**

$H(s) = \frac{1}{1+sRC}, \quad |H(\mathrm{j}\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}$

**Ergebnisse zu Aufgabe 40:**

**a)** $\mathcal{L}\{h(t-3)e^{t-3}\} = \frac{e^{-3s}}{s-1}$

**b)** $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)^2}\right\} = te^{2t}$

**c)** $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2}e^{-3s}\right\} = (t-3)e^{(t-3)}h(t-3)$

**Ergebnisse zu Aufgabe 41:**

$$I(t) = \frac{25}{4} \cdot \begin{cases} (1-\mathrm{e}^{-t/5}), & 0 \leq t \leq 5 \\ (\mathrm{e}-1)\mathrm{e}^{-t/5}, & t > 5 \end{cases}$$

**Ergebnisse zu Aufgabe 42:**

a) $y(t) = -e^t - \mathrm{e}^{-t} + 2\mathrm{e}^{3t}$
b) $y(t) = \left(2t^2 + 2t + 1\right)\mathrm{e}^{-2t}$

**Ergebnisse zu Aufgabe 43:**

**a)** $y(t) = \frac{1}{4}t + \cos 2t + \frac{7}{8}\sin 2t$

**b)** $y(t) = \frac{1}{4}t + \cos 2t + \frac{7}{8}\sin 2t$

**Ergebnisse zu Aufgabe 44:**

$$u_{\mathrm{AW}}(t) = \frac{-1}{4}\,\mathrm{e}^{-2\,t} + \frac{1}{8}\,\mathrm{e}^{2\,t} + \frac{1}{8}\,\mathrm{e}^{-6\,t}$$

**Ergebnisse zu Aufgabe 45:**

$$u_{\mathrm{AW}}(t) = \frac{-1}{4}\,\mathrm{e}^{-2\,t} + \frac{1}{8}\,\mathrm{e}^{2\,t} + \frac{1}{8}\,\mathrm{e}^{-6\,t}$$

**Ergebnisse zu Aufgabe 46:**

$w_P(x) = -\frac{F}{6EJ}(x-l)^3 \cdot h(x-l)$, $x_{\min} = \sqrt{\frac{8}{27}}L$

**Ergebnisse zu Aufgabe 47:**

**a)** /

**b)** $u(t) = -\frac{1}{2}\left[(t-\pi)\mathrm{e}^{t-\pi} + \sin(t)\right] h(t-\pi)$

**Ergebnisse zu Aufgabe 48:**

**a)** $u(t) = 4 + 2\,\mathrm{e}^{-3\,t} - 6\,\mathrm{e}^{-t} - h(t-2)\cdot\left(4 + 2\,\mathrm{e}^{-3\,(t-2)} - 6\,\mathrm{e}^{-(t-2)}\right)$

**b)** $u(t) = \begin{cases} 4 + 2\,\mathrm{e}^{-3\,t} - 6\,\mathrm{e}^{-t} & \text{für } \; 0 \le t < 2 \\ (2 - 2\,\mathrm{e}^{6})\cdot\mathrm{e}^{-3\,t} + (-6 + 6\,\mathrm{e}^{2})\cdot\mathrm{e}^{-t} & \text{für } \; 2 \le t \end{cases}$

**Ergebnisse zu Aufgabe 49:**

a),b) $u_{\mathrm{AWP}}(t) = \frac{1}{2}\sin(t) - \frac{1}{2}t\cos(t)$, $0 \le t \le \pi$ und $u_{\mathrm{AWP}}(t) = -\frac{\pi}{2}\cos(t)$, $t \ge \pi$.

**Ergebnisse zu Aufgabe 50:**

**i)** $I_1 = \dfrac{-1}{1+\pi^2}$

**ii)** $I_2 = 0$

**iii)** $I_3 = \dfrac{e^{0^2+3}}{0+2} = \dfrac{e^3}{2}$

**iv)** $I_4 = f(-1/2) - f(0)$

**Ergebnisse zu Aufgabe 51:**

**a)** $u_{\mathrm{AWP}}(t) = 2\,\mathrm{e}^{-t}\cdot\cos(2t)$, **b)** $t_0 = \pi/4$, **c)** $\alpha = 4\,\mathrm{e}^{-\pi/4}$.

**Ergebnisse zu Aufgabe 52:**

**i)** $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\mathrm{e}^{-t} + b\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}\mathrm{e}^{3t}$, **ii)** $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a \\ 3a-4b \end{pmatrix}\cos(4t) + \begin{pmatrix} 5b \\ 4a+3b \end{pmatrix}\sin(4t)$,
**iii)** $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{3t}\cdot\left[\begin{pmatrix} -5a \\ a+2b \end{pmatrix}\cos(2t) + \begin{pmatrix} -5b \\ -2a+b \end{pmatrix}\sin(2t)\right]$

**Ergebnisse zu Aufgabe 53:**

**b)** $\boldsymbol{x} = (\mathrm{e}^{3t}, \mathrm{e}^{2t}, \mathrm{e}^{3t})^\top$

**Ergebnisse zu Aufgabe 54:**

$$\boldsymbol{y}(x) = \mathrm{e}^{4x}\left\{c_1\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} + c_2\left[\begin{pmatrix}0\\1/2\\1/2\end{pmatrix} + x\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right]\right\} + c_3\mathrm{e}^{6x}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$$

**Ergebnisse zu Aufgabe 55:**

**a)** $\boldsymbol{y}(t) = C_1\,\mathrm{e}^{t}\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix} + C_2\,\mathrm{e}^{5t}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$

**b)** $\boldsymbol{y}(t) = C_1\,\mathrm{e}^{-t}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + C_2\,\mathrm{e}^{-t}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

**c)** $\boldsymbol{y}(t) = C_1\,\mathrm{e}^{3t}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix} + C_2\,\mathrm{e}^{3t}\begin{bmatrix}1-t\\t\end{bmatrix}$

**Ergebnisse zu Aufgabe 56:**

**i)** $y(x) = C_1\,\mathrm{e}^{-x} + C_2\,\mathrm{e}^{3x}$

**ii)** $y(x) = C_1\,\mathrm{e}^{-3x} + C_2\,\mathrm{e}^{2x}$

**Ergebnisse zu Aufgabe 57:**

**a)** $\lambda_{1,2,3,4} = 4$ mit EV $\boldsymbol{u}_1$ und Hauptvektoren $\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4$. $\lambda_5 = 2$ mit EV $\boldsymbol{u}_5$.

**b)** $\boldsymbol{y}(x) = \mathrm{e}^{4x}\left(\alpha\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}x\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}x^2/2\\-2+x\\0\\1\\0\end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix}x^3/6\\4-2x+x^2/2\\-1\\-3+x\\1\end{pmatrix}\right) + \varepsilon\mathrm{e}^{2x}\begin{pmatrix}9\\-10\\8\\-4\\8\end{pmatrix}$

**c)** $\boldsymbol{y}(x) = \mathrm{e}^{4x}\begin{pmatrix}9+x+x^2/2\\-1+x\\0\\1\\0\end{pmatrix} - \mathrm{e}^{2x}\begin{pmatrix}9\\-10\\8\\-4\\8\end{pmatrix}$

**Ergebnisse zu Aufgabe 58:**

$$\boldsymbol{Y}(t) = \begin{pmatrix}\mathrm{e}^t & t\,\mathrm{e}^t\\ 0 & \mathrm{e}^t\end{pmatrix}$$

**Ergebnisse zu Aufgabe 59:**

**a)** **i)** $\lambda_1 = 4,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 4$

**ii)** $\mathrm{Sp}\,(\boldsymbol{A}) = 10$

**b)** $a = 0$, $\boldsymbol{z}$ EW zu $\lambda = 2$, $\boldsymbol{w}$ Hauptvektor 2. Stufe zu $\lambda = 4$

**c)** $\boldsymbol{y}(t) = \mathrm{e}^{2t} C_1\, \boldsymbol{z} + \mathrm{e}^{4t} \Big( C_2\, \boldsymbol{v} + C_3(\boldsymbol{w} + t\boldsymbol{v}) \Big)$

**Ergebnisse zu Aufgabe 60:**

**b)** $\boldsymbol{x}_{\mathrm{hom}}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{e}^{2\,t} + c_3 \begin{pmatrix} t \\ 1+2t \\ 4+4t \end{pmatrix} \cdot \mathrm{e}^{2\,t}$

**c)** $\boldsymbol{x}_{\mathrm{hom}}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{e}^{2\,t} + c_3 \begin{pmatrix} t \\ 1+2t \\ 4+4t \end{pmatrix} \cdot \mathrm{e}^{2\,t} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{e}^{-t}$

**Ergebnisse zu Aufgabe 61:**

**a)** **i)** $\boldsymbol{y}'(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 16 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{y}(x) + \begin{pmatrix} 0 \\ 16x \end{pmatrix}$ mit $\boldsymbol{y}(0) = (1,4)^\top$

**ii)** $\boldsymbol{y}(x) = \begin{pmatrix} 1/8 \\ 1/2 \end{pmatrix} e^{4x} + \begin{pmatrix} -9/8 \\ 9/2 \end{pmatrix} e^{-4x} + \begin{pmatrix} -x \\ -1 \end{pmatrix}$

**iii)** $u(x) = \frac{1}{8} e^{4x} - \frac{9}{8} e^{-4x} - x$

**Ergebnisse zu Aufgabe 62:**

**a)** Fundamentalsystemmatrix: $\boldsymbol{Y}(x) = (\boldsymbol{y}_1,\ \boldsymbol{y}_2,\ \boldsymbol{y}_3) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-x} & x\mathrm{e}^{-x} & -\mathrm{e}^{2x} \\ 0 & \mathrm{e}^{-x} & 3\mathrm{e}^{2x} \\ \mathrm{e}^{-x} & (1+x)\mathrm{e}^{-x} & \mathrm{e}^{2x} \end{pmatrix}$

**b)** $y_{\mathrm{AWP}}(x) = \mathrm{e}^{-x} \begin{pmatrix} x^2 + x \\ x+1 \\ x^2 + 2x + 1 \end{pmatrix} + \mathrm{e}^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$

**Ergebnisse zu Aufgabe 63:**

**a)** $\boldsymbol{Y}(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t & \mathrm{e}^t t & 0 \\ \mathrm{e}^t & \mathrm{e}^t t & \mathrm{e}^{2t} \\ 0 & -\mathrm{e}^t & \mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix}$

**b)** $\boldsymbol{y}_{AWP}(t) = \frac{\mathrm{e}^{5t}}{8} \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{\mathrm{e}^{t}}{8} \begin{pmatrix} 1-12t \\ 1-12t \\ 12 \end{pmatrix}$

**Ergebnisse zu Aufgabe 64:**

**a)** $$\boldsymbol{y}_h(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2t} & -\mathrm{e}^{t} & -\mathrm{e}^{t} \\ -\mathrm{e}^{2t} & \mathrm{e}^{t} & 0 \\ \mathrm{e}^{2t} & 0 & \mathrm{e}^{t} \end{pmatrix} \boldsymbol{c}$$

**b)** $$\boldsymbol{y}_{AWP}(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2t} & -\mathrm{e}^{t} & -\mathrm{e}^{t} \\ -\mathrm{e}^{2t} & \mathrm{e}^{t} & 0 \\ \mathrm{e}^{2t} & 0 & \mathrm{e}^{t} \end{pmatrix} \left( \begin{pmatrix} -\frac{13}{5}\,\mathrm{e}^{-5t} \\ -4\,\mathrm{e}^{-4t} \\ \mathrm{e}^{-4t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ \frac{13}{5} \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$