Helmut-Schmidt-Universität
Universität der Bundeswehr Hamburg
Fakultät für Maschinenbau und Bauingenieurwesen

Prof. Dr. Thomas Carraro
M.Sc Janna Puderbach

Mathematik II/B (WI/ET) Blatt 11

WT 2024 Stationäre Punkte, Newton-Verfahren, Richtungsableitung

---

Einführende Bemerkungen

- Vermeiden Sie die Verwendung von Taschenrechnern oder Online-Ressourcen.

Aufgabe 11.1: alte Klausuraufgabe

Gegeben sei die Funktion

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad \text{mit } g(x,y) = (y - x^2)(y - 2x^2).$$

a) Zeigen Sie, dass die Funktion $g(x,y)$ auf allen Geraden durch den Ursprung $(0,0)$ lokale Minima hat.

b) Hat die Funktion $g(x,y)$ im Ursprung ein lokales Minimum?
Hinweis: Untersuchen Sie die Funktion längs der Kurve $\boldsymbol{q}(t) = (t, 3t^2/2)^\top$.

c) Berechnen Sie das Taylor-Polynom zweiten Grades der Funktion $g(x,y)$ im Punkt $(1,1)$.

Aufgabe 11.2: Taylor–Polynom & Extrema in 2 Dimensionen

a) Berechnen Sie das Taylor–Polynom 2. Grades der Funktion $f(x,y) = (2x - 3y) \cdot \sin(3x - 2y)$ zum Entwicklungspunkt $\boldsymbol{x}_0 = (0,0)^\mathrm{T}$.

b) Ermitteln Sie die Extrema der Funktion $f(x,y) = 2x^3 - 3xy + 2y^3 - 3$.

Aufgabe 11.3: Bereichsintegrale

Berechnen Sie

a) $I := \int\limits_D x^2\, y + x \, \mathrm{d}\boldsymbol{x}$ mit $D := [-2,2] \times [1,3]$.

b) $J := \int\limits_G x \mathrm{d}(x,y)$ mit dem durch die Kurven

$$x = 0,\ y = 2x \text{ und } y = \frac{1}{a}\,x^2 + a\ ,\ a > 0$$

berandeten Flächenstück G.

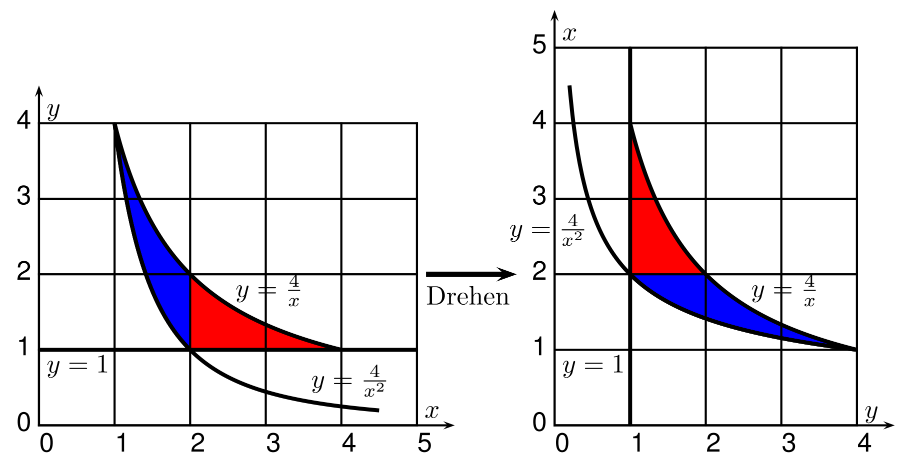
c) Betrachten Sie das zweifache Integral

$$I := \int_{x=1}^{2} \int_{y=4/x^2}^{4/x} xy^2 \mathrm{e}^{x^2y^2/4} \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_{x=2}^{4} \int_{y=1}^{4/x} xy^2 \mathrm{e}^{x^2y^2/4} \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

i) Skizzieren Sie den Integrationsbereich und vertauschen Sie die Integrationsreihenfolge.

ii) Berechnen Sie das Integral.

Hinweis: zu c) Die Integrationsbereiche B_1 und B_2 beider Einzelintegrale sind in folgender Skizze blau und rot markiert. Die y-Grenzen hängen von x ab und speziell die untere y-Grenze wird für beide Bereiche durch unterschiedliche Funktion beschrieben. ($y = \frac{4}{x^2}$ und $y = 1$)
Das Ändern der Integrationsreihenfolge entspricht dem Drehen der Skizze (rechts).
Nun werden die Ober und Untergrenzen für x in beiden Integrationsbereichen von der jeweils selben Funktion (y-abhängig) beschrieben. Daher kann man nun beide Integrale zusammenfassen.



Aufgabe 11.4: Newton-Verfahren

Zur Berechnung eines kritischen Punktes der Funktion

$$f(x,y) = \int_0^x \left(\frac{\sin(\pi t)}{\pi t} - \frac{1}{3} \right) \mathrm{d}t + \frac{1}{\pi^2} \sin\left(\pi \frac{x}{y}\right)$$

soll das Newton-Verfahren angewandt werden. Bestimmen Sie mit Hilfe **eines Schrittes** des Newton-Verfahrens eine Näherung für einen kritischen Punkt von f in der Nähe von $(1,2)$.

Hinweis: Es gibt keine geschlossene Darstellung des Integrals.

Aufgabe 11.5: Taylor–Entwicklung in 2 Dim.

Gegeben seien $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = \mathrm{e}^{xy} + x + y$ und $\boldsymbol{a} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom 2. Grades von f für den Entwicklungspunkt $(0,0)$.

b) Bestimmen Sie die Richtungsableitung $\partial_{\boldsymbol{a}} f$ von f in Richtung $\boldsymbol{a}$ im Punkt $(0,0)$.

Aufgabe 11.6: Schwerpunkt und Trägheitsmoment einer Kreisscheibe

Gegeben sei die Kreisscheibe

$$K = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 | \quad \left\| \boldsymbol{x} - (0,2)^\top \right\|_2 \le 2\}$$

mit der Massendichte $\rho(x,y) = x^2 + 4$.

a) Berechnen Sie die Masse $M = \int\limits_K \rho(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x}$ der Kreisscheibe. Führen Sie die Rechnung in kartesischen Koordinaten durch.

b) Berechnen Sie ebenso den Schwerpunkt

$$\boldsymbol{s} = \frac{1}{M} \int\limits_K \rho(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{x} \mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

Führen Sie die Rechnung in den verschobenen Polarkoordinaten $\boldsymbol{x}(r,\varphi) = (r\cos\varphi,\ 2 + r\sin\varphi)^\top$ aus.

c) Berechnen Sie das Trägheitsmoment bezüglich der x-Achse

$$\Theta_y = \int\limits_K \rho(x,y) y^2 \mathrm{d}(x,y).$$

Aufgabe 11.7: Bereichsintegrale

Gegeben sei das Doppelintegral

$$I := \int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{y-1}^{1-y} \frac{y + x^3}{4} \ \mathrm{d}x \ \mathrm{d}y \ .$$

a) Skizzieren Sie den von den Grenzen beschriebenen Teilbereich der x-y–Ebene.

b) Berechnen Sie das Integral.

Aufgabe 11.8: Kegelvolumen

Gegeben sei ein Kegel als

$$\mathbf{K} = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : z = +\sqrt{x^2 + y^2} \right\}$$

der durch

$$z = +\sqrt{x^2 + y^2}$$

eingeschlossen ist.

a) Bestimmen Sie das Volumen des Kegels für $z = 2$ mittels Integration in Zylinderkoordinaten.

b) Gegeben sei die Dichtefunktion

$$\rho(x,y,z) = x + 2y + z^2$$

Bestimmen Sie die Masse des Kegels.

Aufgabe 11.9:

Gegeben sei ein Kreisring

$$R = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 | 1 \le \|\boldsymbol{x}\| \le 2 \right\}$$

Weiterhin sei die Funktion

$$f(x,y) = \mathrm{e}^{x^2+y^2} \, y^2$$

gegeben. Bestimmen Sie das Integral $I = \int_R f(x,y) \mathrm{d}(x,y)$.

Ergebnisse zu Aufgabe 11.2:

$$T_2(x,y) = 6\,x^2 - 13\,xy + 6\,y^2\,.$$

Kritische Punkte: $P_1 = (0,0)$ und $P_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Ergebnisse zu Aufgabe 11.3:

Zu a) $\frac{64}{3}$, **Zu b)** $\dfrac{1}{12}a^3$, **Zu c)** $4\mathrm{e}^4 + 2\mathrm{e}$

Ergebnisse zu Aufgabe 11.4:

$f_x = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} - \frac{1}{3} + \frac{1}{\pi y}\cos\left(\pi \frac{x}{y}\right)$, $f_y = \frac{-x}{\pi y^2}\cos\left(\pi \frac{x}{y}\right)$.

Ergebnisse zu Aufgabe 11.7:

$I = -1/3$.