

Mathematik II/B (WI/ET)

Blatt 4

WT 2024

Regel von L'Hospital, Differenzieren, Kurven

Einführende Bemerkungen

- Vermeiden Sie die Verwendung von Taschenrechnern oder Online-Ressourcen.

Aufgabe 4.1: Differenzieren

- a) Bestimmen Sie jeweils die erste Ableitung. (Eventuell notwendige Beschränkungen des Definitionsbereiches sind nicht angegeben.)

$$\begin{aligned} f_9(t) &= \sinh(t) - \cosh(2t), & f_{10}(t) &= (t-3)^4 \sinh(t), \\ f_{11}(t) &= t^2 e^{-2t} \sin(3t), & f_{12}(t) &= \sqrt{t} e^{2t}, \\ f_{13}(t) &= \sin^3(e^{2t^2} + t^5), & f_{14}(t) &= \sqrt{2t^2 + 1}, \\ f_{15}(t) &= \ln(t) - \ln(5t), & f_{16}(t) &= \ln(t^2) - \ln(t^5). \end{aligned}$$

- b) Bestimmen Sie die n -te Ableitung folgender Funktionen.

$$\begin{aligned} f_{21}(t) &= \sin(3t), & f_{22}(t) &= t e^{2t} \\ f_{23}(t) &= t \cdot \cos(t), & f_{24}(t) &= t \ln(2t) \end{aligned}$$

Lösung 4.1:

a)

$$\begin{aligned} f_9'(t) &= \cosh(t) - 2 \sinh(2t) \\ f_{10}'(t) &= 4(t-3)^3 \sinh(t) + (t-3)^4 \cosh(t) \\ f_{11}'(t) &= 2te^{-2t} \sin(3t) + t^2(-2e^{-2t}) \sin(3t) + t^2 e^{-2t} \cdot 3 \cos(3t) \\ &= te^{-2t} (2(1-t) \sin(3t) + 3t \cos(3t)) \\ f_{12}'(t) &= \frac{1}{2\sqrt{t}} e^{2t} + \sqrt{t} \cdot 2e^{2t} = \frac{1+4t}{2\sqrt{t}} e^{2t} \\ f_{13}'(t) &= 3 \sin^2(e^{2t^2} + t^5) \cdot \cos(e^{2t^2} + t^5) \cdot (4te^{2t^2} + 5t^4) \\ f_{14}'(t) &= \frac{4t}{2\sqrt{2t^2+1}} \\ f_{15}'(t) &= \frac{1}{t} - \frac{5}{5t} = 0 \\ f_{16}'(t) &= \frac{d}{dt}(\ln(t^2) - \ln(t^5)) = \frac{d}{dt}(2 \ln t - 5 \ln t) = \frac{-3}{t} \end{aligned}$$

- b) i) Jedes Ableiten der Funktion f_{21} führt wegen der inneren Ableitung aus der Kettenregel zu einem Faktor 3. Außerdem ergibt jedes zweite Ableiten der äußeren Funktion (immer die Ableitung einer cos-Funktion) einen weiteren Faktor (-1) . Die äußere Funktion wird nach gradzahligem Ableiten zu einem Sinus, bei ungradzahligen Ableitungen zu einem Kosinus. Insgesamt ergibt sich also:

$$f_{21}^{(n)}(t) = \begin{cases} 3^n \sin(3t) & \text{für } n = 4k + 0 \ (k \in \mathbb{N}_0) \\ 3^n \cos(3t) & \text{für } n = 4k + 1 \ (k \in \mathbb{N}_0) \\ -3^n \sin(3t) & \text{für } n = 4k + 2 \ (k \in \mathbb{N}_0) \\ -3^n \cos(3t) & \text{für } n = 4k + 3 \ (k \in \mathbb{N}_0) \end{cases}$$

- ii) Die erste Ableitung von f_{22} ist

$$f_{22}'(t) = e^{2t} + 2te^{2t} = e^{2t} + 2f_{22}(t).$$

Setzt man dies sukzessive fort, ergibt sich

$$\begin{aligned} f_{22}^{(n)}(t) &= n \cdot 2^{n-1} e^{2t} + 2^n f_{22}(t) \\ &= (n \cdot 2^{n-1} + 2^n \cdot t) e^{2t} = (n+2t) 2^{n-1} e^{2t} \end{aligned}$$

- iii) Die ersten vier Ableitungen von f_{23} sind:

$$\begin{aligned} f_{23}(t) &= t \cdot \cos(t), & f_{23}'(t) &= \cos(t) - t \sin(t) \\ f_{23}''(t) &= -2 \sin(t) - t \cos(t), & f_{23}'''(t) &= -3 \cos(t) + t \sin(t), \\ f_{23}^{(4)}(t) &= 4 \sin(t) + t \cos(t), & f_{23}^{(5)}(t) &= 5 \cos(t) - t \sin(t) \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich für $n \geq 1$:

$$f_{23}^{(n)} = \begin{cases} +n \cos(t) - t \sin(t) & \text{für } n = 4k + 1 \ (k \in \mathbb{N}_0) \\ -n \sin(t) - t \cos(t) & \text{für } n = 4k + 2 \ (k \in \mathbb{N}_0) \\ -n \cos(t) + t \sin(t) & \text{für } n = 4k + 3 \ (k \in \mathbb{N}_0) \\ +n \sin(t) + t \cos(t) & \text{für } n = 4k + 4 \ (k \in \mathbb{N}_0) \end{cases}.$$

iv) Die ersten beiden Ableitungen von f_{24} sind

$$f'_{24}(t) = \ln(2t) + t \cdot \frac{2}{2t} = \ln(2t) + 1$$

$$f''_{24}(t) = \frac{1}{t}.$$

Alle weiteren Ableitungen ($n = 2, 3, \dots$) ergeben sich zu

$$f_{24}^{(n)}(t) = (-1) \cdot (-2) \cdot \dots \cdot (-(n-2)) t^{-(n-1)} = (-1)^n (n-2)! t^{-(n-1)}.$$

Aufgabe 4.2: Vektor- und Matrixwertige Funktionen

Gegeben seien

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(t) &= \begin{pmatrix} t & t^2 \\ \sqrt{t} & t^5 \end{pmatrix}, & \mathbf{B}(t) &= \begin{pmatrix} \sin t & \cos t \\ e^t & \cosh t \end{pmatrix}, \\ \mathbf{c}(t) &= \left(t^3, \sqrt{t^5}, \frac{1}{t} \right)^\top, & \mathbf{d}(t) &= \left(e^{-t^2}, \sin(\sqrt{t}), \tanh(t/2) \right)^\top. \end{aligned}$$

Berechnen Sie

a) $\frac{d}{dt}(\mathbf{A}(t)\mathbf{B}(t))$ und

b) $\frac{d}{dt}(\mathbf{c}(t) \times \mathbf{d}(t))$

auf die folgenden beiden Arten:

- Indem sie vor der Differentiation die Produkte \mathbf{AB} bzw. $\mathbf{c} \times \mathbf{d}$ bilden und die Ergebnisfunktionen ableiten.
- Indem Sie zunächst die Ableitungen der einzelnen Funktionen bilden und diese dann gemäß einer Produktregel verrechnen.

Lösung 4.2:

a) Zunächst ist

$$\begin{aligned} \mathbf{AB} &= \begin{pmatrix} t \sin t + t^2 e^t & t \cos t + t^2 \cosh t \\ \sqrt{t} \sin t + t^5 e^t & \sqrt{t} \cos t + t^5 \cosh t \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \frac{d}{dt}(\mathbf{A}(t)\mathbf{B}(t)) &= \begin{pmatrix} \sin t + t \cos t + (2t + t^2)e^t & \cos t - t \sin t + 2t \cosh t + t^2 \sinh t \\ \frac{\sin t}{2\sqrt{t}} + \sqrt{t} \cos t + (5t^4 + t^5)e^t & \frac{\cos t}{2\sqrt{t}} - \sqrt{t} \sin t + 5t^4 \cosh t + t^5 \sinh t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ebenso ist

$$\begin{aligned} \mathbf{A}'(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 2t \\ \frac{1}{2\sqrt{t}} & 5t^4 \end{pmatrix} \\ \mathbf{B}'(t) &= \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ e^t & \sinh t \end{pmatrix} \\ \frac{d}{dt}(\mathbf{A}(t)\mathbf{B}(t)) &= \mathbf{A}'(t)\mathbf{B}(t) + \mathbf{A}(t)\mathbf{B}'(t) \\ &= \begin{pmatrix} \sin t + 2te^t & \cos t + 2t \cosh t \\ \frac{\sin t}{2\sqrt{t}} + 5t^4 e^t & \frac{\cos t}{2\sqrt{t}} + 5t^4 \cosh t \end{pmatrix} \\ &\quad + \begin{pmatrix} t \cos t + t^2 e^t & -t \sin t + t^2 \sinh t \\ \sqrt{t} \cos t + t^5 e^t & -\sqrt{t} \sin t + t^5 \sinh t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sin t + t \cos t + (2t + t^2)e^t & \cos t - t \sin t + 2t \cosh t + t^2 \sinh t \\ \frac{\sin t}{2\sqrt{t}} + \sqrt{t} \cos t + (5t^4 + t^5)e^t & \frac{\cos t}{2\sqrt{t}} - \sqrt{t} \sin t + 5t^4 \cosh t + t^5 \sinh t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

b) Das Vektorprodukt von \mathbf{c} und \mathbf{d} ist

$$\begin{aligned} \mathbf{c}(t) \times \mathbf{d}(t) &= \begin{pmatrix} t^{5/2} \tanh(t/2) - \frac{\sin(\sqrt{t})}{t} \\ \frac{e^{-t^2}}{t} - t^3 \tanh \frac{t}{2} \\ t^3 \sin(\sqrt{t}) - t^{5/2} e^{-t^2} \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \frac{d}{dt}(\mathbf{c}(t) \times \mathbf{d}(t)) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} t^{3/2} \left(5 \tanh \frac{t}{2} + \frac{t}{\cosh^2(t/2)} \right) + \frac{\sin(\sqrt{t})}{t^2} - \frac{\cos(\sqrt{t})}{2\sqrt{t}t} \\ e^{-t^2} \left(-2 - \frac{1}{t^2} \right) - 3t^2 \tanh \frac{t}{2} - \frac{t^3}{2 \cosh^2 \frac{t}{2}} \\ 3t^2 \sin(\sqrt{t}) + \frac{t^{5/2}}{2} \cos(\sqrt{t}) - e^{-t^2} \left(\frac{5}{2} t^{3/2} - 2t^{7/2} \right) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Durch separates Differenzieren ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathbf{c}'(t) &= \begin{pmatrix} 3t^2 \\ \frac{5}{2} t^{3/2} \\ -\frac{1}{t^2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d}'(t) = \begin{pmatrix} -2te^{-t^2} \\ \frac{\cos(\sqrt{t})}{2\sqrt{t}} \\ \frac{1}{2 \cosh^2 \frac{t}{2}} \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \mathbf{c}'(t) \times \mathbf{d}(t) + \mathbf{c}(t) \times \mathbf{d}'(t) &= \begin{pmatrix} \frac{5t^{3/2} \tanh \frac{t}{2}}{2} + \frac{\sin(\sqrt{t})}{t^2} \\ \frac{-e^{-t^2}}{t^2} - 3t^2 \tanh \frac{t}{2} \\ 3t^2 \sin(\sqrt{t}) - \frac{5}{2} t^{3/2} e^{-t^2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{t^{5/2}}{2 \cosh^2 \frac{t}{2}} - \frac{\cos(\sqrt{t})}{2t^{3/2}} \\ -2e^{-t^2} - \frac{t^3}{2 \cosh^2 \frac{t}{2}} \\ \frac{t^{5/2} \cos \sqrt{t}}{2} + 2t^{7/2} e^{-t^2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Gegeben seien die folgenden Funktionen

ii) $f_2(x) = \ln(x)$.

b) Bestimmen Sie den minimalen vertikalen Abstand beider Funktionsgraphen

$$d = \min \{ |f_1(x) - f_2(x)|; x \in \mathbb{R}^+ \}.$$

A Cartesian coordinate system showing two functions. The x-axis ranges from -3 to 3 with major ticks at -3, -2, -1, 1, 2, and 3. The y-axis ranges from -6 to 6 with major ticks at -6, -4, -2, 2, 4, and 6. The function $f_1(x) = x^2 + 1$ is a blue parabola opening upwards with its vertex at (0, 1). The function $f_2(x) = \ln(x)$ is a red curve that passes through the point (1, 0) and has a vertical asymptote at $x = 0$. The two curves intersect at the point (1, 0).

Es gilt $f_1(x) > f_2(x)$ für alle $x \in D$. Daher ist die Differenz immer positiv.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 + 1 - \ln(x)) \\ &= \ln \left(\lim_{x \rightarrow \infty} e^{x^2 + 1 - \ln(x)} \right) \\ &= \ln \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{x^2 + 1}}{e^{\ln x}} \right) \quad \text{L'Hospital wg. } e^{x^2 + 1} \rightarrow \infty, e^{\ln x} = x \rightarrow \infty. \\ &= \ln \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2xe^{x^2 + 1}}{1} \right) = \infty\end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 1 - \ln x) = \infty$$

Die lokalen Extrema von $h(x)$ liegen in den Nullstellen der ersten Ableitung:

$$\Leftrightarrow x_{1/2} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

von diesen beiden Werten liegt nur $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ im Definitionsbereich D . Dort ist

$$d = g(x_1) = h(x_1) = \frac{1}{2} + 1 - \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

The graph shows the function $g(x) = |x^2 + 1 - \ln(x)|$ for $x \in (0, 3]$. The curve is blue and starts at $(0, 1)$. It reaches a local minimum of about 1.8 at $x \approx 0.8$ and then increases to about 6.2 at $x = 3$. The x-axis is marked from -3 to 3, and the y-axis is marked from 2 to 6.

Aufgabe 4.4: Monotonieverhalten

Untersuchen Sie das Monotonieverhalten der folgenden Funktionen. Geben Sie dazu alle Intervalle an, in denen die Funktion monoton steigend bzw. monoton fallend ist.

- a) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$
b) $g(x) = -\cos(x) - 2\sin(x/2)$

Lösung 4.4:

- a) Die erste Ableitung ist

$$f'(x) = 6x^2 - 6x = x(6x - 6)$$

Damit sind die stationären Punkte bei

$$x_1 = 0 \quad \text{und} \quad x_2 = 1.$$

Mit der zweiten Ableitung erhalten wir für $x_1 = 0$

$$f''(0) = -6$$

und für $x_2 = 1$

$$f(1) = 6.$$

Damit ist bei $x_1 = 0$ ein Maximum und bei $x_2 = 1$ Minimum. In den Intervallen $(-\infty, 0)$ und $(1, \infty)$ ist $f(x)$ monoton steigend und in dem Intervall $(0, 1)$ ist $f(x)$ monoton fallend.

- b) Um alle stationären Punkte zu bestimmen, berechnen wir die Nullstellen der ersten Ableitung

$$g'(x) = \sin(x) - \cos(x/2) \stackrel{!}{=} 0.$$

Mit der Substitution $y = x/2$ erhalten wir

$$0 = \sin(2y) - \cos(y).$$

Wir wenden das Additionstheorem $\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$ an.

$$0 = 2\sin(y)\cos(y) - \cos(y) = (2\sin(y) - 1)\cos(y).$$

Es muss also gelten

$$\sin(y) = 1/2 \quad \text{oder} \quad \cos(y) = 0.$$

Damit erhalten wir die Nullstellen

$$y_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi n \quad \text{für } n \in \mathbb{Z}$$

$$y_2 = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \quad \text{für } n \in \mathbb{Z}$$

$$y_3 = \frac{\pi}{2} + \pi n \quad \text{für } n \in \mathbb{Z}$$

Durch Rücksubstitution erhalten wir die stationären Punkte:

$$x_1 = \frac{\pi}{3} + 4\pi n \quad \text{für } n \in \mathbb{Z}$$

$$x_2 = \frac{5\pi}{3} + 4\pi n \quad \text{für } n \in \mathbb{Z}$$

$$x_3 = \pi + 4\pi n \quad \text{für } n \in \mathbb{Z}$$

$$x_4 = 3\pi + 4\pi n \quad \text{für } n \in \mathbb{Z}$$

Wir sehen, dass $g(x)$ eine Periodenlänge von 4π besitzt. Die Funktion $g(x)$ ist zwischen den stationären Punkten monoton.

In den Intervallen

$$I_1 = \left(\frac{\pi}{3} + 4\pi n, \pi + 4\pi n\right) \quad \text{für } n \in \mathbb{Z}$$

ist $g(x)$ monoton steigend.

In den Intervallen

$$I_2 = \left(\pi + 4\pi n, \frac{5\pi}{3} + 4\pi n\right) \quad \text{für } n \in \mathbb{Z}$$

ist $g(x)$ monoton fallend.

In den Intervallen

$$I_3 = \left(\frac{5\pi}{3} + 4\pi n, 3\pi + 4\pi n\right) \quad \text{für } n \in \mathbb{Z}$$

ist $g(x)$ monoton steigend.

In den Intervallen

$$I_4 = \left(3\pi + 4\pi n, \frac{\pi}{3} + 4\pi n\right) \quad \text{für } n \in \mathbb{Z}$$

ist $g(x)$ monoton fallend

Aufgabe 4.5: Optimierungsproblem

Ein Poster muss mit einer Gesamtfläche von $\bar{A} = 64000 \text{ mm}^2$ gedruckt werden. Es muss 10 mm Seitenränder und 25 mm obere und untere Ränder haben. Welche Höhe und Breite ergeben die maximale Druckfläche?

Lösung 4.5:

Seien x und y die beiden Dimensionen des Plakats und s die Seitenränder und t die oberen und unteren Ränder. Die Gesamtfläche ist $\bar{A} = 64000 \text{ mm}^2 = xy \text{ mm}^2$. Die gedruckte Fläche beträgt

$$\begin{aligned} A(x) &= (x - 2s)(y - 2t) \\ &= (x - 2s) \left(\frac{\bar{A}}{x} - 2t \right) \quad (\text{unter Verwendung der Nebenbedingung der Gesamtfläche}) \\ &= \bar{A} - \frac{2s}{x} \bar{A} - 2tx + 4st \text{ mm}^2. \end{aligned}$$

Um die Fläche zu maximieren, suchen wir die stationären Punkte:

$$A'(x) = 2s\bar{A}\frac{1}{x^2} - 2t.$$

Die stationären Punkte sind:

$$x_c = \pm \sqrt{\frac{s\bar{A}}{t}}.$$

Nur der positive Wert ist sinnvoll, da wir nach physikalischen Größen suchen. Die zweite Ableitung ist

$$A''(x) = -\frac{4s\bar{A}}{x^3}$$

die in x_c negativ ist. Daher ist x_c ein lokales Maximum. Wir haben also

$$x_c = 160 \text{ mm}$$

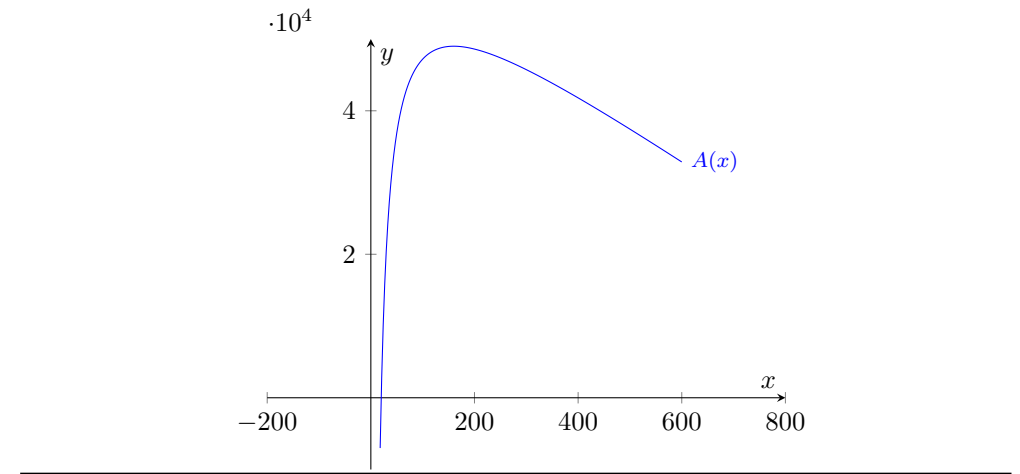
und

$$y_c = \frac{\bar{A}}{x_c} = 400 \text{ mm}.$$

Die maximale Druckfläche beträgt

$$A_{\max} = x_c y_c = 32000 \text{ mm}^2.$$

Der Graph der Fläche $A(x)$ ist



Aufgabe 4.6: Tangenten

- a) Bestimmen Sie die Geradengleichungen (in der Form $ax + by = c$) der Tangenten an den Nullstellen der Funktionen

$$\varphi_1(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6, \quad \varphi_2(x) = x^2 \text{ und } \varphi_3(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{für } x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & \text{für } x < 0 \end{cases}.$$

- b) Geben Sie alle Punkte (x -Werte) an, in denen die Tangenten von $f(x) = x^2$ und $g(x) = x^3$ parallel sind.

- c) Stellen Sie den Verlauf der beiden vektorwertigen Funktionen

$$\mathbf{v}(t) = \begin{pmatrix} t \\ \varphi_3(t) \end{pmatrix} \quad \text{mit } \varphi_3(t) \text{ aus Aufgabenteil a)}$$

und

$$\mathbf{w}(s) = \begin{pmatrix} s \cdot |s| \\ s \end{pmatrix}.$$

im selben Graphen dar.

Berechnen Sie – wo möglich – die Ableitungen beider Funktionen $\mathbf{v}(t)$ und $\mathbf{w}(s)$.

Hinweis: Die Funktion $\mathbf{w}(s)$ lässt sich analog zu $\varphi_3(t)$ mit Hilfe einer Fallunterscheidung auch ohne die Betragsfunktion darstellen.

Lösung 4.6:

- a) i) Eine Nullstelle der Funktion $\varphi_1(x)$ ist $x_1 = 1$. Mittels Horner-Schema erhält man das Restpolynom:

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & -2 & -5 & 6 \\ 1 & \backslash & & & \\ \hline & 1 & -1 & -6 & 0 \end{array}$$

Für weitere Nullstellen muss also gelten

$$1x^2 - 1x - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{2/3} = \begin{cases} -2 \\ 3 \end{cases}.$$

Die Ableitung der Funktion liefert die Steigung der Tangenten. An den Nullstellen x_1, x_2 und x_3 hat man

$$\varphi_1'(x) = 3x^2 - 4x - 5 \Rightarrow \varphi_1'(1) = -6, \varphi_1'(-2) = 15, \varphi_1'(3) = 10.$$

Damit sind die Tangentengeraden gegeben durch:

$$\begin{array}{lll} x_1 = 1 : & y = -6x + 6 & \Rightarrow \quad 6x + y = 6 \\ x_2 = -2 : & y = 15x + 30 & \Rightarrow \quad 15x - y = -30 \\ x_3 = 3 : & y = 10x - 30 & \Rightarrow \quad 10x - y = 30 \end{array}$$

- ii) $\varphi_2(x)$ hat nur die Nullstelle $x_0 = 0$. Die Ableitung $\varphi_2'(x) = 2x$ hat dort den Wert Null, so dass die Tangente durch

$$y = 0$$

gegeben ist.

- iii) Die Funktion $\varphi_3(x)$ hat nur die Nullstelle $\varphi_0 = 0$. Dort ist φ_3 nicht differenzierbar:

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_3(x) - \varphi(0)}{x - 0} &= \begin{cases} \frac{\sqrt{x}-0}{x}, & x > 0 \\ \frac{-\sqrt{-x}-0}{x}, & x < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}, & x > 0 \\ \frac{-\sqrt{-x}-0}{-(\sqrt{-x})^2}, & x < 0 \end{cases} \\ &= \frac{1}{\sqrt{|x|}} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \infty. \end{aligned}$$

Die Steigung der Funktion ist dort also unendlich und sie hat die senkrechte Tangente:

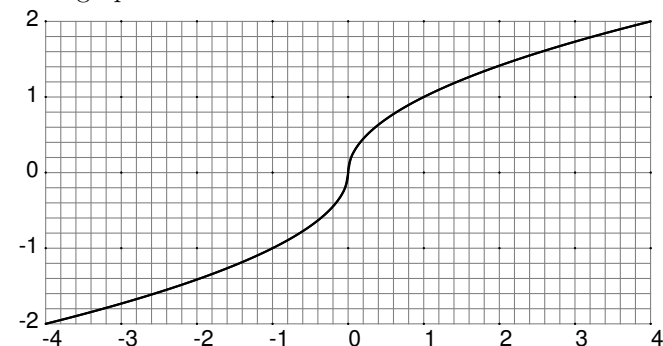
$$x = 0.$$

- b) Die beiden Funktionen haben im Punkt x parallele Tangenten, wenn ihre Ableitungen dort denselben Wert annehmen:

$$f'(x) = g'(x) \Leftrightarrow 2x = 3x^2$$

Dies ist für $x = 0$ oder für $x = \frac{2}{3}$ der Fall.

- c) Die Funktionsgraphen beider Funktionen stimmen überein.



In Aufgabenteil **a)** wurde bereits gezeigt, dass $\varphi_3(t)$ und damit auch $\boldsymbol{v}(t)$ an der Stelle $t = 0$ nicht differenzierbar ist. In allen anderen Punkten hat man:

$$\boldsymbol{v}'(t) = \begin{pmatrix} \frac{dt}{\varphi_3'(t)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{|t|}} \end{pmatrix}.$$

Durch die Umparametrisierung der Kurve hat man eine differenzierbare Funktion $\boldsymbol{w}(s)$ mit

$$\boldsymbol{w}'(s) = \begin{pmatrix} 2s \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{für } s > 0$$

$$\boldsymbol{w}'(s) = \begin{pmatrix} -2s \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{für } s < 0$$

Für $s = 0$ ergibt sich für die erste Komponente $w_1(s)$:

$$\begin{aligned} \frac{w_1(s) - w_1(0)}{s - 0} &= \begin{cases} \frac{s^2 - 0}{s} & \text{für } s > 0 \\ \frac{-s^2 - 0}{s} & \text{für } s < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} s & \text{für } s > 0 \\ -s & \text{für } s < 0 \end{cases} \\ &\xrightarrow{s \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

Damit hat man

$$\boldsymbol{w}'(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und insgesamt

$$\boldsymbol{w}'(s) = \begin{pmatrix} 2|s| \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4.7: Regel von L'Hospital

Berechnen Sie mit Hilfe der Regel von L'Hospital die Grenzwerte

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x}{x} \right), \quad B = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cosh x}{x^3} \right), \quad C = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\ln x}{\sin(\pi x)} \right)$$

Lösung 4.7:

Es gilt $\lim_{x \rightarrow 0} \tan x = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$, also darf der Satz von L'Hospital angewendet werden:

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{1} = 1.$$

Für B gehen Zähler und Nenner gegen Null ($\lim_{x \rightarrow 0} \cosh x = 1$), also kann auch hier der Satz von L'Hospital angewendet werden:

$$\begin{aligned} B &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cosh x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sinh x}{3x^2} \quad (\text{erneut ist } \lim_{x \rightarrow 0} \sinh x = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cosh x}{6x} = \begin{cases} -\infty & , \text{ für } x > 0 \text{ (rechtsseitiger Grenzwert)} \\ \infty & , \text{ für } x < 0 \text{ (linksseitiger Grenzwert)} \end{cases}. \end{aligned}$$

Für C gilt wiederum $\lim_{x \rightarrow 1} \ln x = \lim_{x \rightarrow 1} \sin(\pi x) = 0$, also kann auch hier der Satz von L'Hospital angewendet werden:

$$\begin{aligned} C &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{\sin(\pi x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x}}{\pi \cos(\pi x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\pi x \cos(\pi x)} = -\frac{1}{\pi}. \end{aligned}$$
