

Mathematik II/B (WI/ET)

Blatt 2

WT 2024

Grenzwerte, Folgen, Stetigkeit

---

Einführende Bemerkungen

- Vermeiden Sie die Verwendung von Taschenrechnern oder Online-Ressourcen.
- 

Aufgabe 2.1: Grenzwertdefinition

Bestimmen Sie zu den unten angegebenen Folgen  $(a_n)$  mit dem Grenzwert  $a$  und die angegebenen Werte für  $k$  jeweils ein  $N$  so, dass für alle  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n > N$  gilt

$$|a_n - a| < 10^{-k}.$$

- a)  $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}, a = 0, k = 2$
- b)  $a_n = \frac{3n+1}{n+1}, a = 3, k = 4$
- c)  $a_n = \frac{(-1)^n}{n!} + 1, a = 1, k = 3$

Lösung 2.1:

- a) Es soll gelten  $|a_n - a| = \frac{1}{\sqrt{n}} \stackrel{!}{<} 10^{-2}$ . Dies lässt sich umstellen zu:

$$n > \left(\frac{1}{10^{-2}}\right)^2 = 10^4 = 10000 = N.$$

- b) Hier ergibt sich

$$\begin{aligned} |a_n - a| &< 10^{-4} \\ \Leftrightarrow 10^{-4} &> \left| \frac{3n+1}{n+1} - 3 \right| = \frac{|-2|}{n+1} \\ \Leftrightarrow \frac{n+1}{2} &> 10^4 \\ \Leftrightarrow n &> 20000 - 1 = 19999 = N. \end{aligned}$$

- c) Für diese Folge ist  $|a_n - a| = \left| \frac{(-1)^n}{n!} \right| = \frac{1}{n!}$ . Mit  $k = 3$  soll also gelten:

$$\frac{1}{n!} < 10^{-3} \quad \Leftrightarrow \quad n! > 1000.$$

Das ist beispielsweise erfüllt für  $n > 1000 = N$ . Ein kleinstmögliches  $N$  kann man durch die Untersuchung von  $n!$  ermitteln. Es ist  $6! = 720 < 1000$  und  $7! = 7 \cdot 6! = 5040 > 1000$ . Die Bedingung ist also bereits für  $n > 6$  erfüllt.

---

**Aufgabe 2.2:**

- a) Zeigen Sie anhand der Definition der Konvergenz, dass gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + n - 12}{n^2 - 8} = 2.$$

- b) Zeigen Sie: Konvergiert  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  gegen  $a$ , so konvergiert auch  $\{|a_n|\}_{n \in \mathbb{N}}$  gegen  $|a|$ .
- c) Gilt die Umkehrung von b)? Begründen Sie Ihre Aussage mit einem Beweis oder einem Gegenbeispiel.

**Lösung 2.2:****Lösung**

**Zu a)** Die Aussage „ $a_n$  konvergiert gegen  $a$ “ bedeutet: Für jedes  $k \in \mathbb{N} > 0$  existiert ein  $N = N(k) \in \mathbb{R}$ , so dass für alle  $n > N$  gilt, dass  $|a_n - a| < 10^{-k}$ . Für  $n \in \mathbb{N}$  gilt:

$$a_n := \frac{2n^2 + n - 12}{n^2 - 8} = \frac{2(n^2 - 8) + (n + 4)}{n^2 - 8} = 2 + \frac{n + 4}{n^2 - 8}.$$

Damit folgt

$$|a_n - 2| = \left| \frac{n + 4}{n^2 - 8} \right| \stackrel{\text{für } n \geq 3}{=} \frac{n + 4}{n^2 - 8} = \frac{n + 4}{n^2 - 16 + 8}$$

$$\stackrel{\text{für } n \geq 5}{<} \frac{n + 4}{n^2 - 16} = \frac{n + 4}{(n + 4)(n - 4)} = \frac{1}{n - 4}.$$

Sei nun  $k \in \mathbb{N}$  vorgegeben. Es gilt

$$\frac{1}{n - 4} = 10^{-k} \quad \Longleftrightarrow \quad n = 10^k + 4.$$

Ist  $N(k) := 4 + 10^k$ , dann gilt insbesondere für alle  $n > N(k)$ :

$$|a_n - 2| < 10^{-k}.$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

**Zu b)** Die Aussage „ $a_n$  konvergiert gegen  $a$ “ bedeutet: Für jedes  $k \in \mathbb{N}$  gibt es ein  $N(k) \in \mathbb{R}$ , so dass für alle  $n > N$  gilt, dass  $|a_n - a| < 10^{-k}$ . Wegen

$$||a_n| - |a|| \leq |a_n - a|,$$

gilt für jedes  $k \in \mathbb{N}$ , dass das dazugehörige  $N(k)$  und jedes  $n > N$  auch

$$||a_n| - |a|| < 10^{-k}$$

erfüllt, d.h.  $|a_n|$  konvergiert gegen  $|a|$ .

**Zu c)** Die Umkehrung gilt nicht, zum Beispiel gilt für  $a_n = (-1)^n$  sicher  $|a_n| = 1 \rightarrow 1$ , aber  $(-1)^n$  ist nicht konvergent.

---

### Aufgabe 2.3: Grenzwerte monotoner Folgen

Es seien  $a_1 = \sqrt{2}$  und  $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$  für  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Überprüfen Sie,

- a) dass  $(a_n)$  beschränkt ist,
- b) dass  $(a_n)$  monoton wächst und
- c) gegen die größte Lösung der Gleichung  $x^2 - x - 2 = 0$  konvergiert.

### Lösung 2.3:

- a) Null ist sicher eine untere Schranke für alle  $a_n > 0$ . Eine obere Schranke ist 2. Wir untersuchen dazu das Quadrat der Folge und rechnen nach, dass  $a_n^2 \leq 4$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ :

$$a_{n+1}^2 = 2 + a_n \stackrel{!}{\leq} 4$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn bereits  $a_n \leq 2$  ist. Das ist für  $a_1 = \sqrt{2}$  der Fall und damit auch für alle folgenden  $a_n$ .

- b) Es ist zu zeigen, dass für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt  $a_n \leq a_{n+1}$ .

Äquivalent dazu ist  $\frac{a_{n+1}^2}{a_n^2} \geq 1$ :

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}^2}{a_n^2} &\geq \frac{2 + a_n}{2a_n} \quad (\text{wegen } a_n \leq 2) \\ &= \frac{1}{a_n} + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \quad (\text{wegen } a_n \leq 2) \end{aligned}$$

- c) Da  $a_n$  beschränkt und monoton ist, muss die Folge einen Grenzwert

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}$$

besitzen. Mit diesem Grenzwert ist

$$\begin{aligned} a^2 - a - 2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}^2 - \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - 2 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2 + a_n}^2 - a_n) - 2 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 2 - 2 = 0 \end{aligned}$$

Damit muss  $a$  eine Nullstelle des Polynoms  $p(x) = x^2 - x - 2$  sein.

$p(x)$  ist ein Polynom zweiten Grades, besitzt also zwei Nullstellen. Negative Werte nimmt  $p(x)$  nur zwischen den beiden Nullstellen an. Da

$$p(a_1) = p(\sqrt{2}) = -\sqrt{2} < 0$$

ist, liegt  $a_1$  zwischen den beiden Nullstellen. Wegen der Monotonie von  $(a_n)$  muss es sich bei  $a$  also um die größere der beiden Nullstellen handeln.

---

### Aufgabe 2.4: Funktionenlimes

a) Gegeben sei die Funktion

$$f(x) := \frac{x^3 + |x+1| + \operatorname{sign}(x+1)}{\operatorname{sign} x}, \quad x \in D(f) := \mathbb{R}.$$

Bestimmen Sie  $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0-} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow (-1)+} f(x)$  und  $\lim_{x \rightarrow (-1)-} f(x)$ .

b) Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \frac{\sinh x}{\cosh(ax)}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Bestimmen Sie  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$ .

**Hinweise:**

- Mit der zunächst als bekannt vorausgesetzten Exponentialfunktion  $e^x$  gilt

$$\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{und} \quad \cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

- Die Signum-Funktion liefert das Vorzeichen des Argumentes:

$$\operatorname{sign}(z) = \begin{cases} +1 & , z \geq 0 \\ -1 & , z < 0 \end{cases}$$

### Lösung 2.4:

a) i) Für  $x > 0$  gilt  $\operatorname{sign}(x) = \operatorname{sign}(1+x) = 1$  sowie  $|x+1| = x+1$ , damit gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} (x^3 + x + 1 + 1) = 2.$$

ii) Für  $-1 < x < 0$  gilt  $\operatorname{sign}(x) = -1$ ,  $\operatorname{sign}(1+x) = 1$  sowie  $|x+1| = x+1$ , damit gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{x^3 + x + 1 + 1}{-1} = -2.$$

iii) Für  $-1 < x < 0$  gilt  $\operatorname{sign}(x) = -1$ ,  $\operatorname{sign}(1+x) = 1$  sowie  $|x+1| = x+1$ , damit gilt

$$\lim_{x \rightarrow (-1)+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)+} \frac{x^3 + x + 1 + 1}{-1} = 0.$$

iv) Für  $x < -1$  gilt  $\operatorname{sign}(x) = \operatorname{sign}(1+x) = -1$  sowie  $|x+1| = -(x+1)$ , damit gilt

$$\lim_{x \rightarrow (-1)-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)-} \frac{x^3 - x - 1 - 1}{-1} = 2.$$

b) Die Funktion  $f(x)$  ist eine ungerade Funktion:

$$f(-x) = \frac{\sinh(-x)}{\cosh(ax)} = \frac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{e^{-ax} + e^{-(-ax)}} = -\frac{e^x - e^{-x}}{e^{ax} + e^{-ax}} = -f(x)$$

Daher ist  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  und es genügt einen der beiden Grenzwerte zu berechnen.

Es wird vorausgesetzt, dass  $e^x$  stetig ist und dass gilt  $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$ , somit kann man den Funktionsgrenzwert durch die Substitution  $z = e^x$  bestimmen:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^{ax} + e^{-ax}} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z - \frac{1}{z}}{z^a + \frac{1}{z^a}} \\ &= \lim_{z \rightarrow \infty} \left( \frac{z}{z^a} \cdot \frac{1 - \frac{1}{z^2}}{1 + \frac{1}{z^{2a}}} \right) \end{aligned}$$

Der Grenzwert des ersten Bruches ist

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z}{z^a} = \lim_{z \rightarrow \infty} z^{1-a} = \begin{cases} \infty, & a < 1 \\ 1, & a = 1 \\ 0, & a > 1 \end{cases}.$$

Für den zweiten Bruch hat man

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{z^2}}{1 + \frac{1}{z^{2a}}} = \begin{cases} 0, & a < 0 \\ \frac{1}{2}, & a = 0 \\ 1, & a > 0 \end{cases}.$$

Insgesamt ergibt sich daraus:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \begin{cases} \infty, & 0 \leq a < 1 \\ 1, & a = 1 \\ 0, & a > 1 \end{cases}$$

Für  $a < 0$  hat man

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{z \rightarrow \infty} \left( \frac{z}{z^{-a}} \cdot \frac{1 - \frac{1}{z^2}}{z^{2a} + 1} \right) = \begin{cases} 0, & a < -1 \\ 1, & a = -1 \\ \infty, & -1 < z < 0 \end{cases}.$$

---

### Aufgabe 2.5: Grenzwert Analyse - Definition

- a) Notieren Sie die Definition des Grenzwertes und zeigen Sie, dass die Folge  $a_n = \frac{1}{n}$  gegen den Grenzwert  $a = 0$  konvergiert.  
(Dies ist gleichbedeutend mit dem Nachweis, dass  $\forall k \in \mathbb{N}$  eine Zahl  $N \in \mathbb{R}$  existiert, so dass für alle  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n > N$  gilt:  $|a_n - a| < 10^{-k}$ ).
- b) Berechnen Sie den Grenzwert  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  der untenstehenden Folgen und dokumentieren Sie die Rechenregel, die Sie zur Berechnung des Grenzwertes verwendet haben (Produktregel, Einschließungssatz, Produkt beschränkter Folgen, Produkt von Nullfolgen etc).

i)  $a_n = \frac{n^2 + 5n}{3n^2 + 1}$       ii)  $a_n = \log_{10}(10n^2 - 2n) - \log_{10}(n^2 + 1)$

iii)  $a_n = \frac{(n+1)!}{n! - (n+1)!}$       iv)  $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3n}$

v)  $a_n = \frac{\cos n}{n}$       vi)  $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

vii)  $a_n = \frac{2^n}{n!}$

### Lösung 2.5:

- a) Es ist zu zeigen:  $\forall k \in \mathbb{N} : \exists N \in \mathbb{R} :$

$$|n^{-1} - 0| < 10^{-k}, \forall n > N.$$

Wählen Sie  $N = 10^k$ , um die Eigenschaft zu zeigen.

- b) Im vorigen Aufgabenteil wurde gezeigt, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Mit dem Ergebnis aus a) gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0, \text{ for all } \alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0.$$

Des Weiteren wird die Stetigkeit der Funktionen vorausgesetzt und ausgenutzt.

- i) Teilen von Zähler und Nenner durch  $n^2$  liefert

$$\frac{1 + \frac{5}{n}}{3 + \frac{1}{n^2}}$$

Der Grenzwert des Zählers ist 1, der Grenzwert des Nenners ist 3. Somit liefert die Quotientenregel für Grenzwerte das Ergebnis  $a = \frac{1}{3}$ .

- ii)

$$\begin{aligned} \log_{10}(10n^2 - 2n) - \log_{10}(n^2 + 1) &= \log_{10} \frac{10n^2 - 2n}{n^2 + 1} \\ &= \log_{10} \frac{10 - \frac{2}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}}. \end{aligned}$$

Der Grenzwert des Arguments  $b$  des Logarithmus-Terms liefert

$$b = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10 - \frac{2}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}} = 10.$$

Aufgrund der Stetigkeit der Logarithmus-Funktionen innerhalb ihres Definitionsbereichs auf  $x > 0$ , berechnet sich der Grenzwert zu

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} \log_{10} b_n = \log_{10} b = 1.$$

- iii) Umformung des Bruchausdrucks liefert

$$\frac{(n+1)!}{n! - (n+1)!} = \frac{(n+1)n!}{n! - (n+1)n!} = \frac{(n+1)}{-n} = -(1 + \frac{1}{n}).$$

Unter Verwendung der Summenregel ergibt sich der Grenzwert

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n! - (n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} -(1 + \frac{1}{n}) = -1.$$

- iv) Es gilt

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3n} = \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)^3$$

Der Grenzwert der Folge  $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  ist genau die Eulersche Zahl  $e$ .

$$b = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Die Produktregel liefert dann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n^3 = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b^3 = e^3.$$

Alternativ kann auch die Stetigkeit der Funktion  $x^3$  ausgenutzt werden, um das Ergebnis zu erhalten.

v) Die Folge

$$a_n = \frac{\cos n}{n}$$

kann als Produkt  $a_n = b_n c_n$  einer beschränkten Teilfolge  $b_n = \cos n \neq 0$  und einer Nullfolge  $c_n = \frac{1}{n}$  aufgefasst werden. Entsprechend ist deren Produkt ebenfalls eine Nullfolge und der Grenzwert ist  $a = 0$ .

vi) Es gilt

$$\begin{aligned} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} &= \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{\frac{1}{n}}}. \end{aligned}$$

Unter Verwendung der Produkt und Additionsregel erhalten wir den Grenzwert  $a = 0$ .

vii) Die Folge  $a_n = \frac{2^n}{n!}$  kann für  $n > 3$  nach oben und unten beschränkt werden

$$0 \leq \frac{2^n}{n!} = \frac{\overbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \dots 2}^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \leq \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{2} \cdot \underbrace{\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{4} \dots \frac{2}{n-1}}_{\leq 1} \cdot \frac{2}{n} \leq \frac{4}{n}.$$

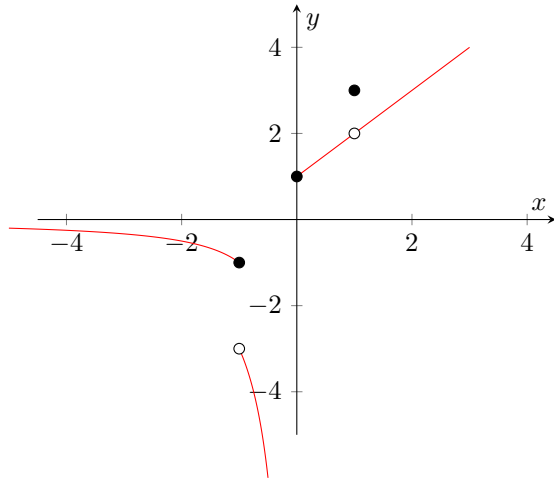
Da die Folge von oben und unten durch zwei Nullfolge beschränkt ist, erhält man mit dem Einschließungssatz den Grenzwert  $a = 0$ .

### Aufgabe 2.6: Stetigkeit

Betrachten Sie die Funktion  $y = f(x)$  mit

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{für } x \in (-\infty, -1], \\ \frac{3}{x} & \text{für } x \in (-1, 0), \\ \frac{x^2-1}{x-1} & \text{für } x \in [0, 1) \cup (1, \infty), \\ 3 & \text{für } x = 1. \end{cases}$$

und deren Graphen



- Finden Sie alle Werte an denen die Funktion unstetig ist.
- Begründen Sie für jeden dieser Werte, weshalb die formale Definition der Stetigkeit verletzt ist.
- Klassifizieren Sie jede der Unstetigkeitsstellen als **Sprungstelle**, **hebbare Unstetigkeit** oder **Polstelle**.

### Lösung 2.6:

Die Funktion ist unstetig bei

- $x = -1$ ,
- $x = 0$ ,
- $x = 1$ .

- Die Funktion ist unstetig für  $x = -1$ . Diese Unstetigkeit entspricht einer Sprungstelle, da die links- und rechtsseitigen Grenzwerte existieren (sprich, auf einen endlichen Wert konvergieren), diese aber nicht übereinstimmen:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{x} = -1,$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{3}{x} = -3.$$

- Die Funktion ist unstetig bei  $x = 0$ . Dies ist eine Polstelle, da der linksseitiger Grenzwert nicht existiert.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3}{x} = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x+1 = 1.$$

- Die Unstetigkeit bei  $x = 1$  ist hebbar, da deren links- und rechtsseitige Grenzwerte existieren und übereinstimmen

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} x+1 = 2,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} x+1 = 2,$$

jedoch vom Funktionswert  $f(1) = 3$  an der Stelle abweichen.

---