Aufgabe 0.1: Lineare Abbildung im Komplexen

Gegeben ist die lineare Abbildung $\boldsymbol{L} : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^3$ mit der Matrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1+\mathrm{i} & 1 & \mathrm{i} \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2\,\mathrm{i} & \mathrm{i} & 2\,\mathrm{i}-1 \end{pmatrix}$$

sowie der Vektor $\boldsymbol{b}_\lambda = (\lambda - \mathrm{i},\ 0,\ -2\,\mathrm{i})^\top$.

a) Geben Sie $\mathrm{Rang}(\boldsymbol{A})$ und Orthonormalbasen von $\mathrm{Bild}\,\boldsymbol{A}$ sowie $\mathrm{Kern}\,\boldsymbol{A}$ und $(\mathrm{Bild}\,\boldsymbol{A})^\perp$ an.

Hinweise:

- Der Orthogonalraum $\boldsymbol{U}^\perp$ eines Unterraumes $\boldsymbol{U} \subset \mathbb{C}^n$ enthält alle Vektoren, die senkrecht zu allen Vektoren aus $\boldsymbol{U}$ sind:

$$\boldsymbol{U}^\perp = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n |\ \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \rangle = 0 \text{ für alle } \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{U}\}$$

- Im Komplexen gilt $(\mathrm{Bild}\,\boldsymbol{A})^\perp = \mathrm{Kern}(\boldsymbol{A}^*)$.

b) Für welche $\lambda \in \mathbb{C}$ ist $\boldsymbol{b}_\lambda \in \mathrm{Bild}\,\boldsymbol{A}$ enthalten?

c) Geben Sie für beliebige $\lambda \in \mathbb{C}$ eine Zerlegung von $\boldsymbol{b}_\lambda$ in Komponenten aus $\mathrm{Bild}\,\boldsymbol{A}$ und $(\mathrm{Bild}\,\boldsymbol{A})^\perp$ an.

d) Bestimmen Sie alle $\boldsymbol{x}_\lambda \in \mathbb{C}^4$, so dass $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_\lambda$ die orthogonale Projektion von $\boldsymbol{b}_\lambda$ auf $\mathrm{Bild}\,\boldsymbol{A}$ ist.