

Mathematik II/B (WI/ET)

Blatt 0

WT 2025

Zusatzblatt zur Vorbereitung auf Bonusklausur

Einführende Bemerkungen

- Vermeiden Sie die Verwendung von Taschenrechnern oder Online-Ressourcen.
-

Aufgabe 0.1: Partielle Ableitungen

Berechnen Sie den Gradienten der folgenden reellen Funktionen und geben Sie diesen in Matrixschreibweise an:

- i) $f(x, y) = e^{xy^3}$ ii) $g(x, y) = \sin(x^2 - y)$
iii) $h(x, y) = (2x - y)^2 + \ln(xy)$ iv) $p(x, y) = \ln(x + y^2) - e^{2xy} + 3x$
v) $q(x, y, z) = e^{x-y} \cos(5z)$

Lösung 0.1:

i)

$$\nabla f(x, y) = \left(y^3 e^{xy^3}, 3y^2 x e^{xy^3} \right)^\top$$

ii)

$$\nabla g(x, y) = \left(2x \cos(x^2 - y), -\cos(x^2 - y) \right)^\top$$

iii)

$$\nabla h(x, y) = \left(4(2x - y) + \frac{1}{x}, -2(2x - y) + \frac{1}{y} \right)^\top$$

iv)

$$\nabla p(x, y) = \left(\frac{1}{x + y^2} - 2ye^{2xy} + 3, \frac{2y}{x + y^2} - 2xe^{2xy} \right)^\top$$

v)

$$\nabla q(x, y, z) = \left(e^{x-y} \cos(5z), -e^{x-y} \cos(5z), -5e^{x-y} \sin(5z) \right)^\top$$

Aufgabe 0.2: Richtungsableitungen

Gegeben seien die skalarwertige Funktion $f(x, y)$ und die vektorwertige Funktion $\mathbf{g}(x, y)$

$$f(x, y) = x^2 y^3 \quad \text{und} \quad \mathbf{g}(x, y) = (x^2 + y, xy)^\top.$$

Berechnen Sie die Richtungsableitung beider Funktionen im Punkt $\mathbf{P} = (1, 2)^\top$ in Richtung $\mathbf{h} := (3, 4)^\top$.

Lösung 0.2:

Zunächst berechnen wir die ersten Ableitungen der beiden Funktionen:

$$\nabla f(x, y) = (2xy^3, 3x^2y^2)^\top$$
$$\mathbf{J}_g(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & 1 \\ y & x \end{pmatrix}.$$

Nun berechnen wir die ersten Ableitungen im Punkt $\mathbf{P} = (1, 2)^\top$:

$$\nabla f(1, 2) = (16, 12)^\top$$
$$\mathbf{J}_g(1, 2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Desweiteren benötigen wir den Normalenvektor in Richtung \mathbf{h} :

$$\hat{\mathbf{h}} = \frac{1}{5}(3, 4)^\top$$

Damit ergeben sich dann die Richtungsableitungen:

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{\mathbf{h}}}(x, y) = \left\langle \hat{\mathbf{h}}, \nabla f(x, y, z) \right\rangle = \frac{96}{5}$$

$$\frac{\partial g}{\partial \hat{\mathbf{h}}}(x, y) = \mathbf{J}_g(1, 2) \cdot \hat{\mathbf{h}} = (2, 2)^\top$$

Aufgabe 0.3: Taylor-Entwicklung in 2 Dim.

Gegeben sei $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = e^x \sin(y)$. Bestimmen Sie das Taylorpolynom 2. Grades von f für den Entwicklungspunkt $(0, 0)$.

Lösung 0.3:

Mit den partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned} f_x &= e^x \sin(y) \Rightarrow f_x(0, 0) = 0, \\ f_y &= e^x \cos(y) \Rightarrow f_y(0, 0) = 1, \\ f_{xx} &= e^x \sin(y) \Rightarrow f_{xx}(0, 0) = 0, \\ f_{xy} &= e^x \cos(y) \Rightarrow f_{xy}(0, 0) = 1, \\ f_{yy} &= -e^x \sin(y) \Rightarrow f_{yy}(0, 0) = 0 \end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned} T_{f,2}(x, y) &= f(0, 0) + f_x(0, 0)(x - 0) + f_y(0, 0)(y - 0) + \frac{1}{2}f_{xx}(0, 0)(x - 0)^2 \\ &\quad + \frac{1}{2}f_{yy}(y - 0)^2 + f_{xy}(0, 0)(x - 0)(y - 0) \\ &= y + xy \end{aligned}$$

Aufgabe 0.4: Newton-Verfahren

Gegeben sei die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$f(x, y) = x^3 - 3xy^2.$$

Gesucht sind die stationären Punkte dieser Funktion.

- Geben Sie an, welche Bedingung ein stationärer Punkt $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ erfüllen muss.
- Um eine Näherung für einen solchen Punkt zu berechnen, soll das zweidimensionale Newton-Verfahren angewendet werden. Auf welche Funktion wird das Newton-Verfahren angewendet? Geben Sie die Iterationsvorschrift an.
- Führen Sie für den Startvektor $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ einen Iterationsschritt durch.
- Geben Sie ein geeignetes Abbruchkriterium des Newton-Verfahrens an. (Dieses Kriteriums ist **nicht** auszuwerten.)

Lösung 0.4:

- In einem stationären Punkt muss der Gradient der Funktion f verschwinden:

$$\mathbf{0} \stackrel{!}{=} \nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2 - 3y^2 \\ -6xy \end{pmatrix}$$

- Das Newton-Verfahren wird auf die Funktion $\mathbf{F}(x, y) = \nabla f(x, y)$ angewendet. Die Ableitung dieser Funktion ist

$$\begin{aligned} \mathbf{F}'(x, y) &= H_f(x, y) \\ &= \begin{pmatrix} 6x & -6y \\ -6y & -6x \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Zu gegebenem Startwert \mathbf{x}_0 wird die folgende Iteration durchgeführt:

Für $j = 0, 1, 2, \dots$:

- Löse das lineare Gleichungssystem $\mathbf{F}'(\mathbf{x}_j)\Delta\mathbf{x} = -\mathbf{F}(\mathbf{x}_j)$ nach $\Delta\mathbf{x}$ auf.
 - Berechne nächste Iteration $\mathbf{x}_{j+1} = \mathbf{x}_j + \Delta\mathbf{x}$.
- Für den gegebenen Startvektor $\mathbf{x}_0 = (1, 1)^\top$ ergibt sich zunächst

$$\mathbf{F}(1, 1) = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{F}'(1, 1) = \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ -6 & -6 \end{pmatrix}.$$

Die Lösung des Gleichungssystems $\mathbf{F}'(\mathbf{x}_0)\Delta\mathbf{x} = -\mathbf{F}(\mathbf{x}_0)$ ergibt

$$\Delta\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

und als nächsten Iterationsschritt

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + \Delta\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

- Geeignete Abbruchkriterien sind etwa $\|\mathbf{F}(\mathbf{x}_k)\| < \varepsilon$ oder $\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}\| < \varepsilon$ mit fest vorgegebenem $\varepsilon > 0$.
Desweiteren empfiehlt es sich, die Iteration nach N Schritten (z. B. $N = 1000$) abzurechnen, auch wenn das Abbruchkriterium nicht erfüllt ist.

Aufgabe 0.5: Stationäre Punkte

Gegeben sei die Funktion:

$$f(x, y) = x^3 + axy + y^3 \quad \text{mit} \quad a \in \mathbb{R}.$$

- Bestimmen Sie alle stationären Punkte in Abhängigkeit von a .
- Klassifizieren Sie diese für $a \neq 0$ als Minimum, Maximum oder Sattelpunkt.

Lösung 0.5:

a) Der Gradient ist gegeben durch:

$$\nabla f(x, y) = (3x^2 + ay, ax + 3y^2)$$

Um die stationären Punkte zu finden, setzen wir den Gradienten gleich 0:

$$1. \quad 3x^2 + ay = 0$$

$$2. \quad ax + 3y^2 = 0$$

Für den Fall $a = 0$ erhalten wir $3x^2 = 0$ und $3y^2 = 0$, d.h. einen stationären Punkt bei $(0,0)$. Für $a \neq 0$ lösen wir die erste Gleichung nach y auf:

$$3x^2 + ay = 0 \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{3x^2}{a}.$$

Einsetzen in die zweite Gleichung ergibt:

$$ax + 3y^2 = 0$$

$$ax + 3\left(-\frac{3x^2}{a}\right)^2 = 0$$

$$ax + \frac{27}{a^2}x^4 = 0$$

$$x\left(a + \frac{27}{a^2}x^3\right) = 0$$

Daraus ergeben sich die stationären Punkte $(0,0)$ und $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$.

b) Für $a \neq 0$ ist die Hesse-Matrix gegeben als:

$$\mathbf{H}(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & a \\ a & 6y \end{pmatrix}$$

c) Ausgewertet in $(0,0)$ erhalten wir:

$$\mathbf{H}(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}$$

Für die Determinante ergibt sich $\det(\mathbf{H}(0,0)) = -a^2 < 0$. Daher ist die Matrix indefinit und der Punkt $(0,0)$ ist ein Sattelpunkt.

d) Ausgewertet in $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$ erhalten wir:

$$\mathbf{H}\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) = \begin{pmatrix} -2a & a \\ a & -2a \end{pmatrix}$$

Für die Determinante ergibt sich $\det(\mathbf{H}(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})) = 3a^2 > 0$. Damit erhalten wir für $a < 0$ ein lokales Minimum und für $a > 0$ ein lokales Maximum.

Aufgabe 0.6: Integration

a) Berechnen Sie folgende Integrale

$$I_1 = \int x^2 \ln(x) dx,$$

$$I_2 = \int \frac{x}{(x^2 + 1)^2} dx,$$

$$I_3 = \int \frac{3x + 2}{x^2 + 6x + 9} dx.$$

b) Berechnen Sie das Integral

$$I = \int_G y \, dx dy$$

wobei $G \subset \mathbb{R}^2$ der Bereich ist, der zwischen den beiden Graphen der folgenden Funktionen liegt

$$y = x^2 \quad \text{und} \quad y = 2x.$$

Lösung 0.6:

a) Das erste Integral ergibt sich durch einmalige partielle Integration:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int x^2 \ln x \, dx \\ &= \frac{1}{3} x^3 \ln(x) - \frac{1}{3} \int x^3 \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 dx \\ &= \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{9} x^3 + c. \end{aligned}$$

Für das zweite Integral ergibt die Substitution $u = x^2 + 1$, $du = 2x dx$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \frac{1}{2} \frac{1}{u^2} du \\ &= \frac{1}{2} (-1) \frac{1}{u} + c \\ &= -\frac{1}{2} \frac{1}{u} + c \\ &= -\frac{1}{2} \frac{1}{x^2 + 1} + c. \end{aligned}$$

Das dritte Integral ergibt sich durch die Partialbruchzerlegung:

$$I_3 = \int \frac{3x+2}{(x+3)^2} dx = \int \frac{3x+2}{(x+3)(x+3)} dx$$

$$\frac{3x+2}{(x+3)(x+3)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{(x+3)^2} \quad || \cdot (x+3)(x+3)$$

$$\Leftrightarrow 3x+2 = A(x+3) + B$$

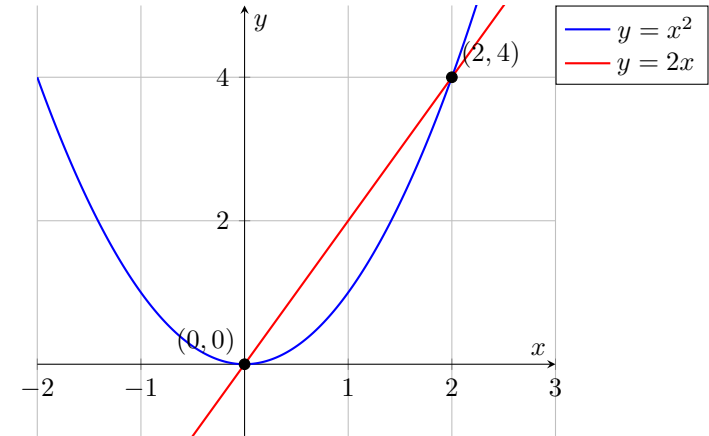
$$-7 = B \quad \Rightarrow \quad B = -7$$

$$2 = 3A - 7 \quad \Rightarrow \quad A = 3$$

$$\begin{aligned} I_3 &= \int \left(\frac{3}{(x+3)} - \frac{7}{(x+3)^2} \right) dx \\ &= 3 \ln(|x+3|) + \frac{7}{x+3} + c \end{aligned}$$

- b) Die Fläche zwischen den beiden Graphen kann als Normalenbereich bezüglich x formuliert werden

$$G := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2 \wedge x^2 \leq y \leq 2x\}$$



$$\begin{aligned} I &= \int_G y \, dx dy, \\ &= \int_{x=0}^2 \int_{y=x^2}^{2x} y \, dy dx, \\ &= \int_0^2 \frac{1}{2} [y^2]_{x^2}^{2x} dy, \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 (4x^2 - x^4) dy, \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{4}{3} x^3 - \frac{1}{5} x^5 \right]_0^2 \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{4}{3} 8 - \frac{1}{5} 32 \right] \\ &= \frac{1}{2} \frac{64}{15} \\ &= \frac{32}{15} \end{aligned}$$