Helmut-Schmidt-Universität
Universität der Bundeswehr Hamburg
Fakultät für Maschinenbau und Bauingenieurwesen

Prof. Dr. Thomas Carraro
M.Sc Janna Puderbach

Mathematik II/B (WI/ET) — Blatt 7

WT 2024 — Newton-Verfahren, Kurvendiskussion, Integration

Einführende Bemerkungen

- Vermeiden Sie die Verwendung von Taschenrechnern oder Online-Ressourcen.

Aufgabe 7.1: Newton-Verfahren

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = 17x^3 - 468x^2 + 2849x - 2294.$$

a) Skizzieren Sie die Funktion im Intervall $-5 \le x \le 20$.

b) Führen Sie mindestens zwei Schritte des Newton-Verfahrens mit dem Startwert $x_0 = 13$ für die Funktion $f(x)$ durch.

c) Skizzieren Sie im Funktionsgraphen die berechneten Iterationen $x_0, x_1, x_2, \ldots$.

Aufgabe 7.2:

a) Bestimmen Sie die folgenden Integrale

i) $\int\limits_{t=0}^{x} (t^2 + 3t - 4)\mathrm{d}t$

ii) $\int\limits_{x=-4}^{4} (x^3 - x)\mathrm{d}x$

iii) $\int\limits_{x=-1}^{3} \left(5x^4 + \frac{x^3}{3} + 2\right)\mathrm{d}x$

iv) $\int \frac{1}{(x+1)^3}\mathrm{d}x.$

b) Bestimmen Sie desweiteren

i) $\int \cos(x)\mathrm{d}x$

ii) $\int\limits_{x=2}^{8} \frac{1}{x}\mathrm{d}x$

iii) $\int\limits_{x=0}^{2\pi} \sin(x)\mathrm{d}x$

iv) $\int\limits_{x=0}^{\pi/2} \cos(x)\mathrm{d}x.$

Aufgabe 7.3:

a) **zur partiellen Integration**

$$\int u(t)\cdot v'(t)\ \mathrm{d}t \ = \ u(t)\cdot v(t) - \int u'(t)\cdot v(t)\ \mathrm{d}t$$

Berechnen Sie Stammfunktionen der beiden Funktionen

i) $(2t-1)\cos(t)$, **ii)** $\left(t^2 + t - 5\right)\mathrm{e}^{t/2}$.

b) **zur Substitution**

$$\int f\big(g(t)\big)\cdot g'(t)\ \mathrm{d}t \ = \ \int f(z)\ \mathrm{d}z \text{ mit } z = g(t)\ , \quad \mathrm{d}z = g'(t)\,\mathrm{d}t$$

Berechnen Sie Stammfunktionen von

i) $4\,t\,\mathrm{e}^{t^2}$ **ii)** $\frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{e}^{\sqrt{t}}$.

Aufgabe 7.4: Partialbruchzerlegung

Berechnen Sie mit Hilfe der Partialbruchzerlegung die unbestimmten Integrale folgender Funktionen:

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$, b) $f(x) = \dfrac{x^2}{(x-3)^3}$,

c) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{(x+1)(x-2)^2}$, d) $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)(x^2+x+1)}$.

Aufgabe 7.5: Integration

a) Berechnen Sie folgende Integrale mittels partieller Integration:

- **i)** $\int x \cdot \sin x \, \mathrm{d}x$,
- **ii)** $\int \sin^2(x) \, \mathrm{d}x$,
- **iii)** $\int x^2 \mathrm{e}^{1-x} \, \mathrm{d}x$,
- **iv)** $\int \frac{x}{\cos^2 x} \, \mathrm{d}x$,
- **v)** $\int\limits_0^{\pi/4} \frac{x}{\cos^2 x} \, \mathrm{d}x$

b) Berechnen Sie folgende Integrale mittels einer geeigneten Substitution:

- **i)** $\int\limits_1^2 \frac{3x^2+7}{x^3+7x-2} \, \mathrm{d}x$,
- **ii)** $\int\limits_\pi^{3\pi/2} x^2 \cos(x^3+2) \, \mathrm{d}x$,
- **iii)** $\int\limits_1^2 \frac{1}{x} \mathrm{e}^{1+\ln x} \, \mathrm{d}x$,
- **iv)** $\int\limits_{1/4}^1 \mathrm{e}^{\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x$,
- **v)** $\int \cosh^2 x \sinh x \, \mathrm{d}x$

Aufgabe 7.6: Kurvendiskussion

Gegeben sei die reelle Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 + 7\,x + 10}{x+1} .$$

i) Geben Sie den maximalen Definitionsbereich der Funktion an.

ii) Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion.

iii) Bestimmen Sie die kritischen Punkte für die Extrema der Funktion und deren Funktionswerte.

iv) Bestimmen Sie die (nicht vertikale) Asymptote der Funktion, d. h. diejenige Gerade $g(x) = a + bx$, für die

$$\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - g(x)) = 0$$

gilt.

v) Skizzieren Sie die Funktion.

Ergebnisse zu Aufgabe 7.2:

a) $\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 4x$, 0, $\frac{776}{3}$, $-\frac{1}{2(x+1)^2} + C$
b) $\sin(x) + C$, $\ln(4)$, 0, 1

Ergebnisse zu Aufgabe 7.3:

a)i) $(2t-1)\sin(t) + 2\cos(t)$, **a)ii)** $2(t^2 - 3t + 1)\mathrm{e}^{t/2}$, **b)i)** $2\mathrm{e}^{t^2}$, **b)ii)** $2\mathrm{e}^{\sqrt{t}}$

Ergebnisse zu Aufgabe 7.4:

a) $-\frac{1}{2}\ln|x-1| - \ln|x-2| + \frac{5}{2}\ln|x-3| + C$

b) $\ln|x-3| - \frac{6}{x-3} - \frac{9}{2(x-3)^2} + C$

c) $\frac{2}{9}\ln|x+1| + \frac{7}{9}\ln|x-2| - \frac{5}{3(x-2)} + C$

d) $\frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$

Ergebnisse zu Aufgabe 7.5:

a) $-x\cos x + \sin x + C$, $\frac{x - \sin x \cos x}{2} + C$, $-(x^2+2x+2)\mathrm{e}^{1-x} + C$, $x\tan x + \ln|\cos x| + C$, $\frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$
b) $\ln\frac{10}{3}$, $\frac{1}{3}\left(\sin\frac{27\pi^3+16}{8} - \sin(\pi^3+2)\right)$, $\mathrm{e}^{1+\ln 2} - \mathrm{e}$, $\sqrt{\mathrm{e}}$, $\frac{1}{3}\cosh^3 x + C$