Helmut-Schmidt-Universität
Universität der Bundeswehr Hamburg
Fakultät für Maschinenbau

**Prof. Dr. Thomas Carraro**
**Dr. Frank Gimbel**
**Janna Puderbach**

## Mathematik III — Blatt 1

FT 2022 — Integration

### Einführende Bemerkungen

- Vermeiden Sie die Verwendung von Taschenrechnern oder Online-Ressourcen.
- Die mit einem Stern *) markierten (Teil-)Aufgaben entfallen in diesem Trimester. Stattdessen werden einzelne Online-Aufgaben im ILIAS-Kurs kenntlich gemacht, zu denen Sie dort Ihre Lösungswege zur Korrektur hochladen können.
- Die mit zwei Sternen **) markierten (Teil-)Aufgaben richten sich an Studierende, die die übrigen Aufgaben bereits gelöst haben und die Inhalte weiter vertiefen möchten.

### Aufgabe 1.1: Integration

Bestimmen Sie jeweils eine Stammfunktion:

**a)**

$$I_a := \int \frac{4x^4}{x^4-1}\mathrm{d}x\,.$$

**b)**

$$I_b := \int (1+3x^2)\cdot \ln(x^3)\mathrm{d}x\,.$$

**c)**

$$I_c := \int \sin(\sqrt{x})\mathrm{d}x\,.$$

**d)**

$$I_d := \int \sin(2x)\cdot \mathrm{e}^x\mathrm{d}x\,.$$

### Lösung 1.1:

**a)** Die Partialbruchzerlegung des Integranden ergibt

$$\frac{4x^4}{x^4-1} = 4 + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} - \frac{2}{x^2+1}.$$

Damit ist

$$\begin{aligned} I_a &= \int 4 + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} - \frac{2}{x^2+1}\mathrm{d}x \\ &= 4x + \ln|x-1| - \ln|x+1| - 2\arctan(x). \end{aligned}$$

**b)** Mit partieller Integration erhält man

$$\begin{aligned} I_b &= 3\int (1+3x^2)\cdot \ln(x)\mathrm{d}x \\ &= 3\left[(x+x^3)\ln(x) - \int \frac{x+x^3}{x}\mathrm{d}x\right] \\ &= 3\left[(x+x^3)\ln(x) - x - \frac{x^3}{3}\right] \\ &= (3x+3x^3)\ln(x) - 3x - x^3. \end{aligned}$$

(Falls man ohne Umformung partiell integriert, erhält man $I_2 = (x+x^3)\ln(x^3) - 3x - x^3$.)

**c)** Mit der Substitution $t = \sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad 2t\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$ erhält man

$$\begin{aligned} I_c &= \int 2t\cdot \sin(t)\mathrm{d}t \\ &= -2t\cos(t) - \int -2\cos(t)\mathrm{d}t \\ &= -2t\cos(t) + 2\sin(t) \\ &= -2\sqrt{x}\cos(\sqrt{x}) + 2\sin(\sqrt{x}). \end{aligned}$$

**d)** Zweimalige partielle Integration ergibt

$$\int \sin(2x)\cdot \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}t = \sin(2x)\cdot \mathrm{e}^x - \int 2\cos(2x)\cdot \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$$
$$= \sin(2x)\cdot \mathrm{e}^x - 2\cos(2x)\cdot \mathrm{e}^x - 4\int \sin(2x)\cdot \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x.$$

Daraus folgt

$$I_d = \int \sin(2x)\cdot \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}t = \frac{1}{5}\sin(2x)\cdot \mathrm{e}^x - \frac{2}{5}\cos(2x)\,\mathrm{e}^x\,.$$

### Aufgabe 1.2$^\star$: Integration in $\mathbb{R}^2$

Berechnen Sie den Wert des Integrals

$$\int_B f_j(x,y)\mathrm{d}(x,y), \qquad j = 1,\,2$$

auf dem Bereich $B = [0,\,\pi] \times [0,\,\mathrm{e}-1]$ für die beiden Funktionen

$$f_1(x,y) = \frac{\sin x}{1+y}, \qquad f_2(x,y) = x(y+1)^{x-1}.$$

### Lösung 1.2:

$$\int_B f_1(x,y)\mathrm{d}(x,y) = \int_{x=0}^{\pi}\int_{y=0}^{\mathrm{e}-1} \frac{\sin x}{1+y}\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_{x=0}^{\pi} \sin x \quad \ln|1+y|\Big|_{y=0}^{\mathrm{e}-1}\mathrm{d}x$$
$$= \int_{x=0}^{\pi} \sin x\mathrm{d}x(1-0) = 2$$
$$\int_B f_2(x,y)\mathrm{d}(x,y) = \int_{x=0}^{\pi}\int_{y=0}^{\mathrm{e}-1} x(y+1)^{x-1}\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$
$$= \int_{x=0}^{\pi} (y+1)^x\Big|_{y=0}^{\mathrm{e}-1}\mathrm{d}x = \int_0^{\pi}(\mathrm{e}^x - 1)\mathrm{d}x$$
$$= \mathrm{e}^\pi - \mathrm{e}^0 - \pi = \mathrm{e}^\pi - 1 - \pi.$$

### Aufgabe 1.3: Bereichsintegrale

Gegeben sei das Doppelintegral

$$I := \int_{-1}^{1}\int_{y-1}^{1-y} \frac{y+x^3}{4}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ .$$

a) Skizzieren Sie den von den Grenzen beschriebenen Teilbereich der $x$-$y$–Ebene.

b) Berechnen Sie das Integral.

### Lösung 1.3:

**a)** Der Bereich ist durch die Geraden $x = y-1 \Rightarrow y = x+1$ und $x = 1-y \Rightarrow y = x+1$, sowie durch die Geraden $y = -1$ und formal auch $y = 1$, eingeschlossen. Das ist ein Dreieck:

**b)**

$$I = \int_{-1}^{1}\int_{y-1}^{1-y} \frac{y}{4}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y + \int_{-1}^{1}\int_{y-1}^{1-y} \frac{x^3}{4}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ .$$

Der zweite Summand ist Null, da eine in $x$ ungerade Funktion über einen zur $y$–Achse symmetrischen Bereich integriert wird (aber auch ohne Beachtung der Symmetrie ist die Berechnung einfach!).
Damit ist

$$I = \int_{-1}^{1}\frac{y}{4}\int_{y-1}^{1-y} 1\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = \int_{-1}^{1}\frac{y}{4}\cdot\Big[x\Big]_{x=y-1}^{1-y}\ \mathrm{d}x$$
$$= \int_{-1}^{1}\frac{y}{4}\cdot\Big((1-y)-(y-1)\Big)\ \mathrm{d}y$$
$$= \int_{-1}^{1}\frac{y-y^2}{2}\ \mathrm{d}y \ = \ -\frac{1}{3}\ .$$

### Aufgabe 1.4: Bereichsintegrale

Berechnen Sie

**a)** $I := \int_D x^2\,y + x\ \mathrm{d}\boldsymbol{x}$ mit $D := [-2,2]\times[1,3]$ .

**b)** $J := \int\limits_G x \mathrm{d}(x,y)$ mit dem durch die Kurven

$$x = 0,\ y = 2x \text{ und } y = \frac{1}{a}\,x^2 + a\ ,\ \ a > 0$$

berandeten Flächenstück G.

**c)** Betrachten Sie das zweifache Integral

$$I := \int_{x=1}^{2} \int_{y=4/x^2}^{4/x} xy^2 \mathrm{e}^{x^2y^2/4}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_{x=2}^{4} \int_{y=1}^{4/x} xy^2 \mathrm{e}^{x^2y^2/4}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

i) Skizzieren Sie den Integrationsbereich und vertauschen Sie die Integrationsreihenfolge.

ii) Berechnen Sie das Integral.

**Zusätzliche Hinweise zu Aufgabe 1.4:**

**zu c)** Die Integrationsbereiche $B_1$ und $B_2$ beider Einzelintegrale sind in folgender Skizze blau und rot markiert. Die $y$-Grenzen hängen von $x$ ab und speziell die untere $y$-Grenze wird für beide Bereiche durch unterschiedliche Funktion beschrieben. ($y = \frac{4}{x^2}$ und $y = 1$)
Das Ändern der Integrationsreihenfolge entspricht dem Drehen der Skizze (rechts).
Nun werden die Ober und Untergrenzen für $x$ in beiden Integrationsbereichen von der jeweils selben Funktion ($y$-abhängig) beschrieben. Daher kann man nun beide Integrale zusammenfassen.

---

**Lösung 1.4:**

**Zu a)**

$$I = \int\limits_1^3 \int\limits_{-2}^{2} \left(x^2\,y + x\right) \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = \int\limits_1^3 \left[\frac{x^3}{3}\,y + \frac{x^2}{2}\right]_{x=-2}^{2} \mathrm{d}y$$

$$= \frac{16}{3} \cdot \int\limits_1^3 y\ \mathrm{d}y = \frac{16}{3} \cdot 4 = \boxed{\frac{64}{3}\ .}$$

**Anmerkung:** Man hätte den Summanden $x$ gleich weglassen können, da eine ungerade Funktion über einen symmetrischen Bereich integriert immer Null ergibt.

**Zu b)** Es werden zunächst die Schnittpunkte der Parabel mit der Geraden bestimmt:

$$\frac{1}{a}x^2 + a = 2x \quad \Rightarrow \quad (x-a)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1/2} = a\,.$$

Die Kurven berühren sich somit im Punkt $P = (a, 2a)$.

Somit ergibt sich für den Integralwert:

$$J = \iint_G x\mathrm{d}(x,y) = \int_{x=0}^{a} x \int_{y=2x}^{\frac{1}{a}x^2+a} \mathrm{d}\,y\mathrm{d}x \ = \int_{x=0}^{a} x\left(\frac{1}{a}x^2 + a - 2x\right)\mathrm{d}x$$

$$= \int_{x=0}^{a} \left(\frac{1}{a}x^3 + ax - 2x^2\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{4a}x^4 + \frac{1}{2}ax^2 - \frac{2}{3}x^3\right]_0^a$$

$$= \frac{1}{4}a^3 + \frac{1}{2}a^3 - \frac{2}{3}a^3 = \boxed{\frac{1}{12}a^3\,.}$$

**Zu c)**

Mit $y = \dfrac{4}{x^2} \Rightarrow x = \dfrac{2}{\sqrt{y}}$ und $y = \dfrac{4}{x} \Rightarrow x = \dfrac{4}{y}$ erhält man den Integrationsbereich

$$D = \left\{(x,y)\,|\,1 \le y \le 4,\ \frac{2}{\sqrt{y}} \le x \le \frac{4}{y}\right\}.$$

Das Integral ist

$$I = \int_1^4 \int_{2/\sqrt{y}}^{4/y} xy^2\,\mathrm{e}^{x^2y^2/4}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

mit dem Integralwert

$$I = \int_1^4 \left[2\mathrm{e}^{x^2y^2/4}\right]_{x=2/\sqrt{y}}^{4/y} \mathrm{d}y = \int_1^4 \left[2\mathrm{e}^4 - 2\mathrm{e}^y\right]\mathrm{d}y$$

$$= 6\mathrm{e}^4 - 2\mathrm{e}^4 + 2\mathrm{e} = 4\mathrm{e}^4 + 2\mathrm{e}.$$

**Aufgabe 1.5: Frühere Klausuraufgabe**

**a)** Berechnen Sie die Integrale

$$I = \int\limits_0^{\pi} (\sin x) \cdot \mathrm{e}^{2\cos x}\mathrm{d}x \qquad \text{und} \qquad J = \int\limits_1^{2} (t^3 - 2t)\mathrm{e}^{3t^2}\mathrm{d}t.$$

**b)** Berechnen Sie das Integral $\int_B \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, wobei $B$ der Kreisring in der $(x,y)-$Ebene mit Mittelpunkt $(0,0)^\top$, Innenradius $a$ und Außenradius $b$ (mit $0 < a < b$) ist.

**c)** Berechnen Sie das Integral

$$\iiint_D \mathrm{e}^{5z+3y+2x}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

über dem Gebiet $D = \left\{(x,y,z)^\top \middle| x,y,z \geq 0 \text{ und } 5z+3y+2x \leq 2\right\}$.

**Lösung 1.5:**

**a)** Im ersten Integral substituieren wir

$$u(x) = 2\cos x, \qquad \mathrm{d}u = -2\sin x\mathrm{d}x.$$

Eingesetzt ergibt das

$$I = \int_0^\pi \sin x \mathrm{e}^{2\cos x}\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{u(0)}^{u(\pi)} \mathrm{e}^u \mathrm{d}u = -\frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^u\right]_{u=2}^{-2} = \frac{\mathrm{e}^2-\mathrm{e}^{-2}}{2} = \sinh(2).$$

Zur Berechnung des zweiten Integrals integrieren wir partiell:

$$J = \int_1^2 \underbrace{(t^2-2)}_{u}\underbrace{t\mathrm{e}^{3t^2}}_{v'} = \Bigg[\underbrace{(t^2-2)}_{u}\underbrace{\left(\frac{1}{6}\mathrm{e}^{3t^2}\right)}_{v}\Bigg]_1^2 - \int_1^2 \underbrace{2t}_{u'}\underbrace{\frac{1}{6}\mathrm{e}^{3t^2}}_{v}\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{3}\mathrm{e}^{12} + \frac{1}{6}\mathrm{e}^3 - \frac{2}{36}\mathrm{e}^{3t^2}\bigg|_1^2 = \frac{\mathrm{e}^3}{6}\left(2\mathrm{e}^9+1\right) + \frac{1}{18}\left(\mathrm{e}^3-\mathrm{e}^{12}\right)$$

$$= \frac{\mathrm{e}^3}{18}\left(5\mathrm{e}^9+4\right).$$

**b)** Es bietet sich eine Berechnung in Polarkoordinaten an:

$$\int_B \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=a}^{b} r r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = 2\pi\frac{b^3-a^3}{3}.$$

**c)** Wir integrieren in kartesischen Koordinaten, wobei zu beachten ist, dass die Integrationsgrenzen für $z$ von $x$ und $y$ abhängen und die für $y$ von $x$. Deswegen ist die Integrationsreihenfolge – nachdem sie einmal gewählt wurde – festgelegt. Die oberen Integrationsgrenzen resultieren aus der Ebenengleichung $2x+3y+5z=2$:

$$\int_D \mathrm{e}^{5z+3y+2x}\mathrm{d}(x,y,z) = \int_{x=0}^{1}\mathrm{e}^{2x}\int_{y=0}^{\frac{2-2x}{3}}\mathrm{e}^{3y}\int_{z=0}^{\frac{2-2x-3y}{5}}\mathrm{e}^{5z}\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

$$= \int_{x=0}^{1}\mathrm{e}^{2x}\int_{y=0}^{\frac{2-2x}{3}}\mathrm{e}^{3y}\left[\frac{\mathrm{e}^{5z}}{5}\right]_{z=0}^{\frac{2-2x-3y}{5}}\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{5}\int_{x=0}^{1}\mathrm{e}^{2x}\int_{y=0}^{\frac{2-2x}{3}}\mathrm{e}^{3y}\left(\mathrm{e}^{2-2x-3y}-1\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{5}\int_{x=0}^{1}\mathrm{e}^{2x}\left[\mathrm{e}^{2-2x}y - \frac{\mathrm{e}^{3y}}{3}\right]_{y=0}^{\frac{2-2x}{3}}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{15}\int_{x=0}^{1}\left(\mathrm{e}^2(2-2x) - \mathrm{e}^2 + \mathrm{e}^{2x}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{15}\left[\mathrm{e}^2(x-x^2) + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\right]_{x=0}^{1} = \frac{\mathrm{e}^2-1}{30}$$

## Aufgabe 1.6: Transformationsformel

**a)** Berechnen Sie

$$I := \int_{\boldsymbol{D}} \frac{x^6-2x^5y-x^4y^2+4x^3y^3-x^2y^4-2xy^5+y^6+32x+32y}{64}\mathrm{d}(x,y),$$

wobei der Bereich $\boldsymbol{D}$ von den Geraden

$$y=-x-4, \qquad y=x-2, \qquad y=4-x \qquad \text{und} \qquad y=x-6$$

eingeschlossen wird.
Führen Sie Ihre Berechnungen zunächst in kartesischen Koordinaten durch.
Berechnen Sie $I$ anschließend in den Koordinaten

$$\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}x+y\\x-y\end{pmatrix}.$$

**b)** Berechnen Sie für den Bereich $B$, der von der Kurve $r = \varphi$, $0 \leq \varphi \leq \pi$ (in Polarkoordinaten) und der $x$-Achse eingeschlossen wird, das Integral

$$J := \int_B \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \mathrm{d}B.$$

Führen Sie Ihre Rechnung in **Polarkoordinaten** durch.

**c)** Berechnen Sie das Integral

$$I_E = \int_E x^2 \mathrm{d}(x,y),$$

wobei der Integrationsbereich eine Ellipse ist:

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1 \right\}$$

**Hinweis**: Nutzen Sie die gestreckten Polarkoordinaten

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ 2r\sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

.

**Lösung 1.6:**

**a)** Zunächst skizzieren wir den Integrationsbereich $\boldsymbol{D}$:

Wir parametrisieren $\boldsymbol{D}$ als Normalbereich bezüglich $x$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{D} =& \{(x,y)^\top \,|\, -4-x \leq y \leq -2+x,\ -1 \leq x \leq 1\} \cup \\ & \cup \{(x,y)^\top \,|\, -6+x \leq y \leq -2+x,\ 1 \leq x \leq 3\} \cup \\ & \cup \{(x,y)^\top \,|\, -6+x \leq y \leq 4-x,\ 3 \leq x \leq 5\}. \end{aligned}$$

Das Integral lässt sich in zwei Teilintegrale zerlegen:

$$I = \int_{\boldsymbol{D}} f_1(x,y)\mathrm{d}(x,y) + \int_{\boldsymbol{D}} f_2(x,y)\mathrm{d}(x,y) =: I_1 + I_2$$

mit $f_1(x,y) = \dfrac{x^6 - 2x^5y - x^4y^2 + 4x^3y^3 - x^2y^4 - 2xy^5 + y^6}{64}$ und $f_2(x,y) = \frac{x+y}{2}$.

Das einfachere Integral von beiden ist $I_2$:

$$\begin{aligned} I_2 =& \int_{x=-1}^{1} \int_{y=-4-x}^{-2+x} \frac{x+y}{2} \mathrm{d}y\mathrm{d}x + \int_{x=1}^{3} \int_{y=-6+x}^{-2+x} \frac{x+y}{2} \mathrm{d}y\mathrm{d}x + \int_{x=3}^{5} \int_{y=-6+x}^{4-x} \frac{x+y}{2} \mathrm{d}y\mathrm{d}x \\ =& \frac{1}{4}\left( \int_{-1}^{1} \left[(x+y)^2\right]_{y=-4-x}^{-2+x} \mathrm{d}x + \int_{1}^{3} \left[(x+y)^2\right]_{y=-6+x}^{-2+x} \mathrm{d}x + \int_{3}^{5} \left[(x+y)^2\right]_{y=-6+x}^{4-x} \right) \\ =& \frac{1}{4}\left( \int_{-1}^{3} (-2+2x)^2\mathrm{d}x - \int_{-1}^{1} (-4)^2\mathrm{d}x - \int_{1}^{5} (-6+2x)^2\mathrm{d}x + \int_{3}^{5} 4^2\mathrm{d}x \right) \\ =& \frac{1}{4}\left( \frac{4}{3}\,(-1+x)^3\Big|_{-1}^{3} - 32 - \frac{4}{3}\,(-3+x)^3\Big|_{1}^{5} + 32 \right) = \frac{16-16}{3} = 0 \end{aligned}$$

Also ist $I = I_1$. Wir vereinfachen zunächst die Darstellung von $f_1(x,y)$. Hierfür kann man wegen $f_1(t,t) = 0$ den Linearfaktor $(x-y)$ abspalten:

$$x^6 - 2x^5y - x^4y^2 + 4x^3y^3 - x^2y^4 - 2xy^5 + y^6 = (x-y)\cdot(x^5 - x^4y - 2x^3y^2 + 2x^2y^3 + xy^4 - y^5)$$

Auch vom Restpolynom lässt sich der Linearfaktor $(x-y)$ abspalten

$$f_1(x,y) = \frac{1}{64}(x-y)^2(x^4 - 2x^2y^2 + y^4)$$

und eine weitere Zerlegung ergibt:

$$f_1(x,y) = \frac{1}{64}(x-y)^2(x^2-y^2)^2 = \frac{1}{64}(x-y)^4(x+y)^2.$$

Dies führt auf das Integral

$$\begin{aligned} I = I_1 =& \int_{x=-1}^{1} \int_{y=-4-x}^{-2+x} \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \left(\frac{x-y}{2}\right)^4 \mathrm{d}y\mathrm{d}x + \\ &+ \int_{x=1}^{3} \int_{y=-6+x}^{-2+x} \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \left(\frac{x-y}{2}\right)^4 \mathrm{d}y\mathrm{d}x + \\ &+ \int_{x=3}^{5} \int_{y=-6+x}^{4-x} \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \left(\frac{x-y}{2}\right)^4 \mathrm{d}y\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich mittels partieller Integration

$$
\begin{aligned}
I =&\frac{1}{64}\Big(\int\limits_{x=-1}^{1}\Big[-(x+y)^2\frac{(x-y)^5}{5}-\frac{2(x+y)(x-y)^6}{5\cdot 6}-\frac{2(x-y)^7}{5\cdot 6\cdot 7}\Big]_{y=-4-x}^{-2+x}\mathrm{d}x+\\
&\qquad+\int\limits_{x=1}^{3}\Big[\dots\Big]_{y=-6+x}^{-2+x}\mathrm{d}x+\int\limits_{x=3}^{5}\Big[\dots\Big]_{y=-6+x}^{4-x}\mathrm{d}x\Big)\\
=&\frac{1}{64}\Big(\int\limits_{-1}^{3}\Big[-(-2+2x)^2\frac{2^5}{5}-\frac{2(-2+2x)2^6}{30}-\frac{2\cdot 2^7}{210}\Big]\mathrm{d}x+\\
&\quad-\int\limits_{-1}^{1}\Big[-(-4)^2\frac{(4+2x)^5}{5}-\frac{2(-4)(4+2x)^6}{30}-\frac{2(4+2x)^7}{210}\Big]\mathrm{d}x+\\
&\quad-\int\limits_{1}^{5}\Big[-(-6+2x)^2\frac{6^5}{5}-\frac{2(-6+2x)6^6}{30}-\frac{2\cdot 6^7}{210}\Big]\mathrm{d}x+\\
&\quad+\int\limits_{3}^{5}\Big[-4^2\frac{(2x-4)^5}{5}-\frac{2\cdot 4\cdot(2x-4)^6}{30}-\frac{2\cdot(2x-4)^7}{210}\Big]\mathrm{d}x\Big)
\end{aligned}
$$

und weiter

$$
\begin{aligned}
I =&2\int\limits_{-1}^{3}\Big[-\frac{(-1+x)^2}{5}-\frac{(-1+x)}{15}-\frac{1}{105}\Big]\mathrm{d}x+\\
&-2\int\limits_{-1}^{1}\Big[-4\frac{(2+x)^5}{5}+\frac{2(2+x)^6}{15}-\frac{(2+x)^7}{105}\Big]\mathrm{d}x+\\
&-2\int\limits_{1}^{5}\Big[-(-3+x)^2\frac{3^5}{5}-\frac{(-3+x)3^6}{15}-\frac{3^7}{105}\Big]\mathrm{d}x+\\
&+2\int\limits_{3}^{5}\Big[-\frac{4(x-2)^5}{5}-\frac{2\cdot(x-2)^6}{15}-\frac{(x-2)^7}{105}\Big]\mathrm{d}x\\
=&\frac{2}{5}\Big(\Big[-\frac{(-1+x)^3}{3}-\frac{(-1+x)^2}{6}-\frac{-1+x}{21}\Big]_{-1}^{3}+\\
&\quad-\Big[-\frac{2(2+x)^6}{3}+\frac{2(2+x)^7}{21}-\frac{(2+x)^8}{21\cdot 8}\Big]_{-1}^{1}+\\
&\quad+\Big[\frac{3^5(-3+x)^3}{3}+\frac{3^5(-3+x)^2}{2}+\frac{3^6(-3+x)}{7}\Big]_{1}^{5}+\\
&\quad+\Big[-\frac{2(x-2)^6}{3}-\frac{2(x-2)^7}{21}-\frac{(x-2)^8}{8\cdot 21}\Big]_{3}^{5}\Big)\\
=&\frac{2}{5}\Big(\Big[-\frac{16}{3}-\frac{4}{21}\Big]-\Big[-\frac{2\cdot 3^6-2}{3}+\frac{2\cdot 3^7-2}{21}-\frac{3^8-1}{21\cdot 8}\Big]+\\
&\quad+\Big[3^4\cdot 2^4+\frac{3^6\cdot 4}{7}\Big]+\Big[-\frac{2(3^6-1)}{3}-\frac{2(3^7-1)}{21}-\frac{3^8-1}{8\cdot 21}\Big]\Big)\\
=&\frac{2}{5}\Big(\frac{-16-2+2}{3}+\frac{-4+2+2}{21}+3^5\,(2-2)+\frac{-2\cdot 3^6+4\cdot 3^6-2\cdot 3^6}{7}+\\
&\quad+\frac{3^8-1-3^8+1}{8\cdot 21}+2^4\cdot 3^4\Big)\\
=&\frac{2}{5}\Big(-\frac{16}{3}+2^4\cdot 3^4\Big)=\frac{32}{5}\cdot\frac{3^5-1}{3}=\frac{64\cdot 121}{15}=\frac{7744}{15}
\end{aligned}
$$

Die Geraden, die das Integrationsgebiet $\boldsymbol{D}$ beranden, werden von der angegebenen Koordinatentransformation

$$\boldsymbol{x}(u,v)=\begin{pmatrix}u+v\\u-v\end{pmatrix}$$

zu achsenparallelen Geraden:

$$
\begin{aligned}
y &= -x-4 &&\Rightarrow && u-v = -u-v-4 &&\Rightarrow && u = -2\\
y &= x-2 &&\Rightarrow && u-v = u+v-2 &&\Rightarrow && v = 1\\
y &= 4-x &&\Rightarrow && u-v = 4-u-v &&\Rightarrow && u = 2\\
y &= x-6 &&\Rightarrow && u-v = u+v-6 &&\Rightarrow && v = 3.
\end{aligned}
$$

Damit hat das transformierte Integrationsgebiet die einfache Gestalt eines achsenparallelen Rechtecks

$$\tilde{\boldsymbol{D}} = [-2,2]\times[1,3].$$

Für die Anwendung der Transformationsformel benötigen wir außerdem die Determinante der Jacobi-Matrix der Transformation $\boldsymbol{x}(u,v)$:

$$\det \boldsymbol{x}'(u,v) = \det\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix} = -2.$$

Das Integral berechnet sich damit zu:

$$
\begin{aligned}
I &= \int\limits_{\tilde{D}} f(x(u,v),y(u,v))|-2|\mathrm{d}(u,v)\\
&= \frac{1}{32}\int\limits_{\tilde{D}}\Big((u+v)^6 - 2(u+v)^5(u-v) - (u+v)^4(u-v)^2 + 4((u+v)(u-v))^3 +\\
&\qquad - (u+v)^2(u-v)^4 - 2(u+v)(u-v)^5 + (u-v)^6 + 32(u+v+u-v)\Big)\mathrm{d}(u,v)\\
&= \frac{1}{32}\int\limits_{v=1}^{3}\int\limits_{u=-2}^{2}\Big(2(u^6+15u^4v^2+15u^2v^4+v^6) - 2(u+v)^4(u^2-v^2) - (u+v)^2(u^2-v^2)^2 +\\
&\qquad + 4(u^2-v^2)^3 - (u^2-v^2)^2(u-v)^2 - 2(u^2-v^2)(u-v)^4 + 64u\Big)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\
&= \frac{1}{8}\int\limits_{v=1}^{3}\left(\frac{2^7}{7} + 3v^2 2^5 + 5v^4 2^3 + v^6\cdot 2\right)\mathrm{d}v +\\
&\quad + \frac{1}{32}\int\limits_{v=1}^{3}\int\limits_{u=-2}^{2}(u^2-v^2)\Big(-4(u^4+6u^2v^2+v^4) - 2(u^2+v^2)(u^2-v^2) + 4(u^2-v^2)^2\Big)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\
&= \frac{\frac{256}{7} + (3^3-1)\cdot 2^5 + 2^3(3^5-1) + \frac{2(3^7-1)}{7}}{8} +\\
&\quad + \frac{1}{16}\int\limits_{v=1}^{3}\int\limits_{u=-2}^{2}(u^2-v^2)\left(-u^4 - 16u^2v^2 + v^4\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\
&= \frac{128+3^7-1}{4\cdot 7} + 26\cdot 4 + 3^5 - 1 +\\
&\quad + \frac{1}{8}\int\limits_{v=1}^{3}\int\limits_{u=0}^{2}\left(-u^6 - 15u^4v^2 + 17u^2v^4 - v^6\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\
&= \frac{127+3^7}{4\cdot 7} + 103 + 3^5 + \frac{1}{8}\int\limits_{v=1}^{3}\left(-\frac{2^7}{7} - 3\cdot 2^5v^2 + \frac{17}{3}\cdot 2^3v^4 - 2v^6\right)\mathrm{d}v\\
&= \frac{127+3^7}{4\cdot 7} + 103 + 3^5 + \frac{1}{8}\left(-\frac{2^8}{7} - 2^5(3^3-1) + \frac{17}{15}\cdot 2^3(3^5-1) - \frac{2}{7}(3^7-1)\right)\\
&= \frac{127+3^7-2^7-3^7+1}{4\cdot 7} + 103 + 3^5 - 4\cdot 26 + \frac{17\cdot 242}{15}\\
&= 0 + 346 - 104 + \frac{17\cdot 242}{15} = \frac{242\cdot 15 + 17\cdot 242}{15} - 13 = \frac{242\cdot 32}{15} = \frac{7744}{15}.
\end{aligned}
$$

**b)** Der angegebene Bereich lässt sich besser in Polarkoordinaten parametrisieren als in kartesischen:

$$\tilde{B} = \{(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2 | \, 0 \leq r \leq \varphi, \, 0 \leq \varphi \leq \pi\}.$$

Die Determinante der Jakobimatrix der Koordinatentransformation

$$\begin{pmatrix} u(r,\varphi) \\ y(r,\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$$

ist

$$\det \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} = r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r.$$

Damit berechnet sich das Integral zx:

$$J = \int_{\tilde{B}} \frac{r\cos\varphi}{\sqrt{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi}} |r| \mathrm{d}(r,\varphi) = \int_{\varphi=0}^{\pi} \int_{r=0}^{\varphi} r\cos\varphi \mathrm{d}r d\varphi = \int_{\varphi=0}^{\pi} \frac{1}{2}\varphi^2 \cos\varphi \mathrm{d}\varphi$$

$$= \frac{\varphi^2}{2}\sin\varphi\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \varphi\sin\varphi \mathrm{d}\varphi = 0 - \varphi(-\cos\varphi)|_0^\pi - \int_0^\pi \cos\varphi \mathrm{d}\varphi = -\pi + 0 = -\pi.$$

**c)** Das Integral ergibt sich zu

$$\begin{aligned} I_E &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{1} r^2\cos^2(\varphi) \cdot 2r \mathrm{d}r \mathrm{d}\varphi \\ &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{r^4}{2}\Big|_{r=0}^{1} \cos^2(\varphi) \mathrm{d}\varphi \\ &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \cos^2(\varphi) \mathrm{d}\varphi \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

## Aufgabe 1.7: Online Aufgabe

Bearbeiten Sie die aktuelle Online-Aufgabe im ILIAS-Kurs.
Beachten Sie, dass Sie dort auch die Lösungswege zu einzelnen Aufgaben zur Korrektur hochladen können.