Helmut-Schmidt-Universität
Universität der Bundeswehr Hamburg
Fakultät für Maschinenbau und Bauingenieurwesen

Prof. Dr. Thomas Carraro
Dr. Ulrike Kochan-Eilers

Mathematik II/B (WI/ET) — Blatt 2

WT 2025 — Grenzwerte, Stetigkeit, Ableitungen

Einführende Bemerkungen

- Vermeiden Sie die Verwendung von Taschenrechnern oder Online-Ressourcen.

Aufgabe 2.1: Funktionenlimes

a) Gegeben sei die Funktion

$$f(x) := \frac{x^3 + |x+1| + \operatorname{sign}(x+1)}{\operatorname{sign} x}, \quad x \in D(f) := \mathbb{R}.$$

Bestimmen Sie $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to(-1)+} f(x)$ und $\lim\limits_{x\to(-1)-} f(x)$.

b) Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \frac{\sinh x}{\cosh(ax)}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Bestimmen Sie $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$.
Hinweise:
- Mit der zunächst als bekannt vorausgesetzten Exponentialfunktion e^x gilt

$$\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \text{und} \qquad \cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

- Die Signum-Funktion liefert das Vorzeichen des Argumentes:

$$\operatorname{sign}(z) = \begin{cases} +1 & , z \geq 0 \\ -1 & , z < 0 \end{cases}$$

Lösung 2.1:

a) **i)** Für $x > 0$ gilt $\operatorname{sign}(x) = \operatorname{sign}(1+x) = 1$ sowie $|x+1| = x+1$, damit gilt

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} (x^3 + x + 1 + 1) = 2.$$

ii) Für $-1 < x < 0$ gilt $\operatorname{sign}(x) - 1$, $\operatorname{sign}(1+x) = 1$ sowie $|x+1| = x+1$, damit gilt

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} \frac{x^3 + x + 1 + 1}{-1} = -2.$$

iii) Für $-1 < x < 0$ gilt $\operatorname{sign}(x) = -1$, $\operatorname{sign}(1+x) = 1$ sowie $|x+1| = x+1$, damit gilt

$$\lim_{x\to(-1)+} f(x) = \lim_{x\to(-1)+} \frac{x^3 + x + 1 + 1}{-1} = 0.$$

iv) Für $x < -1$ gilt $\operatorname{sign}(x) = \operatorname{sign}(1+x) = -1$ sowie $|x+1| = -(x+1)$, damit gilt

$$\lim_{x\to(-1)-} f(x) = \lim_{x\to(-1)-} \frac{x^3 - x - 1 - 1}{-1} = 2.$$

b) Die Funktion $f(x)$ ist eine ungerade Funktion:

$$f(-x) = \frac{\sinh(-x)}{\cosh(ax)} = \frac{\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-(-x)}}{\mathrm{e}^{-ax} + \mathrm{e}^{-(-ax)}} = -\frac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{ax} + \mathrm{e}^{-ax}} = -f(x)$$

Daher ist $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ und es genügt einen der beiden Grenzwerte zu berechnen.
Es wird vorausgesetzt, dass e^x stetig ist und dass gilt $\lim\limits_{x\to\infty} \mathrm{e}^x = \infty$, somit kann man den Funktionsgrenzwert durch die Substitution $z = \mathrm{e}^x$ bestimmen:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{ax} + \mathrm{e}^{-ax}} = \lim_{z\to\infty} \frac{z - \frac{1}{z}}{z^a + \frac{1}{z^a}}$$
$$= \lim_{z\to\infty} \left(\frac{z}{z^a} \cdot \frac{1 - \frac{1}{z^2}}{1 + \frac{1}{z^{2a}}} \right)$$

Der Grenzwert des ersten Bruches ist

$$\lim_{z\to\infty} \frac{z}{z^a} = \lim_{z\to\infty} z^{1-a} = \begin{cases} \infty, & a < 1 \\ 1, & a = 1 \\ 0, & a > 1 \end{cases}.$$

Für den zweiten Bruch hat man

$$\lim_{z\to\infty} \frac{1 - \frac{1}{z^2}}{1 + \frac{1}{z^{2a}}} = \begin{cases} 0, & a < 0 \\ \frac{1}{2}, & a = 0 \\ 1, & a > 0 \end{cases}.$$

Insgesamt ergibt sich daraus:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \begin{cases} \infty, & 0 \leq a < 1 \\ 1, & a = 1 \\ 0, & a > 1 \end{cases}$$

Für $a < 0$ hat man

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{z\to\infty} \left(\frac{z}{z^a z^{-2a}} \cdot \frac{1-\frac{1}{z^2}}{z^{2a}+1} \right) \\ &= \lim_{z\to\infty} \left(\frac{z}{z^{-a}} \cdot \frac{1-\frac{1}{z^2}}{z^{2a}+1} \right) = \begin{cases} 0, & a < -1 \\ 1, & a = -1 \\ \infty, & -1 < a < 0 \end{cases} \quad . \end{aligned}$$

Aufgabe 2.2: Grenzwert Analyse - Definition

a) Notieren Sie die Definition des Grenzwertes und zeigen Sie, dass die Folge $a_n = \dfrac{1}{n}$ gegen den Grenzwert $a = 0$ konvergiert.
(Dies ist gleichbedeutend mit dem Nachweis, dass $\forall k \in \mathbb{N}$ eine Zahl $N \in \mathbb{R}$ existiert, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > N$ gilt: $|a_n - a| < 10^{-k}$).

b) Berechnen Sie den Grenzwert $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ der untenstehenden Folgen und dokumentieren Sie die Rechenregel, die Sie zur Berechnung des Grenzwertes verwendet haben (Produktregel, Einschließungssatz, Produkt beschränkter Folgen, Produkt von Nullfolgen etc).

i) $a_n = \dfrac{n^2+5n}{3n^2+1}$ **ii)** $a_n = \log_{10}(10n^2-2n) - \log_{10}(n^2+1)$

iii) $a_n = \dfrac{(n+1)!}{n!-(n+1)!}$ **iv)** $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{3n}$

v) $a_n = \dfrac{\cos n}{n}$ **vi)** $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

vii) $a_n = \dfrac{2^n}{n!}$

Lösung 2.2:

a) Es ist zu zeigen: $\forall k \in \mathbb{N} : \exists N \in \mathbb{R} :$

$$|n^{-1} - 0| < 10^{-k}, \forall n > N.$$

Wählen Sie $N = 10^k$, um die Eigenschaft zu zeigen.

b) Im vorigen Aufgabenteil wurde gezeigt, dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Mit dem Ergebnis aus **a**) gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0, \text{ for all } \alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0.$$

Des Weiteren wird die Stetigkeit der Funktionen vorausgesetzt und ausgenutzt.

i) Teilen von Zähler und Nenner durch n^2 liefert

$$\frac{1+\frac{5}{n}}{3+\frac{1}{n^2}}$$

Der Grenzwert des Zählers ist 1, der Grenzwert des Nenners ist 3. Somit liefert die Quotientenregel für Grenzwerte das Ergebnis $a = \frac{1}{3}$.

ii)

$$\begin{aligned}\log_{10}(10n^2-2n) - \log_{10}(n^2+1) &= \log_{10}\frac{10n^2-2n}{n^2+1}\\ &= \log_{10}\frac{10-\frac{2}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}.\end{aligned}$$

Der Grenzwert des Arguments b des Logarithmus-Terms liefert

$$b = \lim_{n\to\infty} \frac{10-\frac{2}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}} = 10.$$

Aufgrund der Stetigkeit der Logarithmus-Funktionen innerhalb ihres Definitionsbereichs auf $x > 0$, berechnet sich der Grenzwert zu

$$a = \lim_{n\to\infty} \log_{10} b_n = \log_{10} b = 1.$$

iii) Umformung des Bruchausdrucks liefert

$$\frac{(n+1)!}{n!-(n+1)!} = \frac{(n+1)n!}{n!-(n+1)n!} = \frac{(n+1)}{-n} = -(1+\frac{1}{n}).$$

Unter Verwendung der Summenregel ergibt sich der Grenzwert

$$a = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!-(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} -(1+\frac{1}{n}) = -1.$$

iv) Es gilt

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n} = \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^3$$

Der Grenzwert der Folge $b_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ ist genau die Eulersche Zahl e.

$$b = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}\,.$$

Die Produktregel liefert dann

$$\lim_{n\to\infty} b_n^3 = \lim_{n\to\infty} b_n \lim_{n\to\infty} b_n \lim_{n\to\infty} b_n = b^3 = \mathrm{e}^3 \,.$$

Alternativ kann auch die Stetigkeit der Funktion x^3 ausgenutzt werden, um das Ergebnis zu erhalten.

v) Die Folge

$$a_n = \frac{\cos n}{n}$$

kann als Produkt $a_n = b_n c_n$ einer beschränkten Teilfolgen $b_n = \cos n \neq 0$ und einer Nullfolge $c_n = \frac{1}{n}$ aufgefasst werden. Entsprechend ist deren Produkt ebenfalls eine Nullfolge und der Grenzwert ist $a = 0$.

vi) Es gilt

$$\begin{aligned}\sqrt{n+1} - \sqrt{n} &= \frac{\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{\frac{1}{n}}}.\end{aligned}$$

Unter Verwendung der Produkt und Additionsregel erhalten wir den Grenzwert $a = 0$.

vii) Die Folge $a_n = \dfrac{2^n}{n!}$ kann für $n > 3$ nach oben und unten beschränkt werden

$$0 \leq \frac{2^n}{n!} = \frac{\overbrace{2\cdot 2\cdot 2 \ldots 2}^{n}}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n} \leq \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{2}\cdot\underbrace{\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{4}\cdots\frac{2}{n-1}}_{\leq 1}\cdot\frac{2}{n} \leq \frac{4}{n}.$$

Da die Folge von oben und unten durch zwei Nullfolge beschränkt ist, erhält man mit dem Einschließungssatz den Grenzwert $a = 0$.

Aufgabe 2.3: Folgenkonvergenz

Untersuchen Sie die nachfolgenden Folgen auf Konvergenz und bestimmten Sie – wenn möglich – den Grenzwert:

$$a_n = \frac{2n^2+3n}{2n^2+7} \qquad b_n = \frac{2n^3-2}{5n^2-1}$$

$$c_n = \frac{2n^2+7n+(-1)^n}{5n+2} - \frac{2n^3-2}{5n^2-1}, \qquad d_n = \left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$$

$$e_n = n\left(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}\right) \qquad f_n = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \text{ (mit ganzzahligem } x\text{)}$$

$$g_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n+1}$$

Hinweise:
- Setzen Sie voraus, dass f_n konvergiert und ermitteln Sie den Grenzwert.
- Benutzen Sie zur Untersuchung von g_n das Ergebnis für f_n.

Lösung 2.3:

a) Der Bruch wird zunächst mit dem Kehrwert der höchsten auftretenden n-Potenz $(1/n^2)$ erweitert:

$$a_n = \frac{2+\frac{3}{n}}{2+\frac{7}{n^2}}$$

Die beiden Ausdrücke $\frac{3}{n}$ und $\frac{7}{n^2}$, die noch von n abhängen, konvergieren beide gegen Null, damit konvergieren Zähler und Nenner jeweils gegen 2 und man hat insgesamt:

$$a_n = \frac{2+\frac{3}{n}}{2+\frac{7}{n^2}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{2+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n}}{2+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{7}{n^2}} = \frac{2+0}{2+0} = 1.$$

b) Da die n-Potenz des Zählers größer als die des Nenners ist, nehmen wir an, dass b_n divergiert. Um dies zu zeigen, schätzen wir ab:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2n^3-2}{5n^2-1} = \frac{\frac{2}{5}(5n^2-1)n + \frac{2}{5}\cdot n - 2}{5n^2-1} = \frac{2}{5}n + \underbrace{\frac{2n-10}{25n^2-5}}_{\geq 0 \text{ für } n\geq 5} \\ &\geq \frac{2}{5}n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty \end{aligned}$$

Also ist b_n größer als die divergente Folge $\frac{2}{5}n$ und divergiert ebenfalls.

c) Der Ausdruck für c_n wird zunächst auf einen Bruchstrich gebracht und dann mit dem Kehrwert der höchsten n-Potenz $(1/n^3)$ erweitert:

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{(2n^2+7n+(-1)^n)(5n^2-1) - (2n^3-2)(5n+2)}{(5n+2)(5n^2-1)} \\ &= \frac{31n^3 + (5\cdot(-1)^n - 2)n^2 + 3n - (-1)^n + 4}{25n^3 + 10n^2 - 5n - 2} \\ &= \frac{31 + \frac{5\cdot(-1)^n-2}{n} + \frac{3}{n^2} + \frac{4-(-1)^n}{n^3}}{25 + \frac{10}{n} - \frac{5}{n^2} - \frac{2}{n^3}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{31}{25} \end{aligned}$$

Alle Ausdrücke, die noch von n abhängen, haben die Form $\frac{z}{n^l}$, wobei z entweder konstant oder zumindest beschränkt ist, deswegen konvergieren diese Ausdrücke z/n^l gegen Null.
Bringt man beide Ausdrücke nicht auf einen Hauptnenner, kann man nichts weiter über die Konvergenzeigenschaften sagen, da die einzelnen Brüche divergieren. (siehe b_n)

d) Wir zeigen, dass d_n durch eine divergente Folge nach unten abgeschätzt werden kann und folgern die Divergenz von d_n: Für $n \geq 2$ gilt

$$\begin{aligned} d_n &= \left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n = \left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 \cdot \left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n-2} \\ &= \left(1+\frac{2}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n-3} \\ &= \left(1+\frac{2}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{2}{n}+\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n-3} \\ &= \left(1+\frac{3}{\sqrt{n}}+\ldots\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n-3} \\ &\geq 1+\frac{n}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

Die Ungleichung gilt, da die wegfallenden Summanden auf jeden Fall positiv sind, also kann man abschätzen:

$$d_n \geq 1 + \frac{n}{\sqrt{n}} = 1+\sqrt{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

Damit muss auch für d_n gelten $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = \infty$.

e) Wir erweitern den Ausdruck für die Folge e_n mit $(\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1})$ um die dritte binomische Formel anzuwenden:

$$\begin{aligned}e_n =&\frac{n(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1})(\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1})}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}} = \frac{n(\sqrt{n^2+1}^2-\sqrt{n^2-1}^2)}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}}\\ =&\frac{n(n^2+1-n^2+1)}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}} = \frac{2n}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}}\end{aligned}$$

Erweitern mit dem Kehrwert der höchsten n-Potenz $\frac{1}{n}$ liefert nun

$$e_n = \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{2}{1+1} = 1.$$

f) Im ersten Schritt werden nur $x > 0$ zugelassen.
Der Vollständigkeit halber überprüfen wir zunächst als Ergänzung der Aufgabenstellung, dass die Folge f_n konvergiert, dies geschieht in zwei Schritten und unter Nutzung der Bernoulli-Ungleichung

$$(1+y)^m \geq 1+my \qquad \text{für } m\in\mathbb{N} \text{ und } y\geq -1$$

i) Die Folge f_n steigt monoton:

$$\begin{aligned}\frac{f_{n+1}}{f_n} =&\frac{\left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n} = \left(\frac{1+\frac{x}{n+1}}{1+\frac{x}{n}}\right)^{n+1}\left(1+\frac{x}{n}\right)\\ =&\left(1+\frac{-\frac{x}{n}+\frac{x}{n+1}}{1+\frac{x}{n}}\right)^{n+1}\left(1+\frac{x}{n}\right) = \left(1+\frac{-x}{(n+x)(n+1)}\right)^{n+1}\cdot\frac{n+x}{n}\\ \geq&\left(1+(n+1)\cdot\frac{-x}{(n+x)(n+1)}\right)\cdot\frac{n+x}{n} \qquad \text{(Bernoulli-Ungleichung)}\\ =&\frac{n+x-x}{n+x}\cdot\frac{n+x}{n} = 1\\ \Rightarrow \quad f_{n+1} \geq& f_n\end{aligned}$$

ii) Die Folge f_n ist beschränkt:
Wegen der Monotonie muss lediglich gezeigt werden, dass f_n eine obere Schranke besitzt:

$$\begin{aligned}1+\frac{x}{n} <& 1+\frac{2x}{n}\\ \leq&\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2x} \qquad \text{(Bernoulli-Ungleichung)}\\ \Rightarrow \quad \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \leq&\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2x\cdot n}\\ =&\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{2x} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{2x}\end{aligned}$$

Damit ist f_n begrenzt durch eine konvergente Folge und somit selbst auch beschränkt.

Als beschränkte, monotone Folge muss f_n auch konvergieren.

Für $x > 0$ lässt sich f_n umformen zu

$$f_n = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \left(\left(1+\frac{1}{n/x}\right)^{n/x}\right)^x$$

f_n hat mit $n_k = k\cdot x$ die konvergente Teilfolge

$$f_{n_k} = \left(\left(1+\frac{1}{k\cdot x/x}\right)^{kx/x}\right)^x = \left(\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\right)^x \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} e^x.$$

Wenn also f_n konvergiert muss der Grenzwert mit dem der Teilfolge übereinstimmen und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} f_n = e^x.$$

Der Fall negativer $x < 0$ lässt sich mit Hilfe des Falls $x > 0$ behandeln: Wir untersuchen dazu mit $y = -x > 0$ die Folge

$$h_n := f_n\cdot\left(1+\frac{y}{n}\right)^n = \left(\left(1-\frac{y}{n}\right)\left(1+\frac{y}{n}\right)\right)^n = \left(1-\frac{y^2}{n^2}\right)^n.$$

Es gilt einerseits $h_n < 1$. Andererseits liefert die Bernoulli-Ungleichung zumindest für $n > y$:

$$h_n \geq 1-n\cdot\frac{y^2}{n^2} = 1-\frac{y^2}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Wegen dieser beiden Ungleichungen muss h_n konvergieren:

$$\lim_{n\to\infty} h_n = 1.$$

Nach Definition von h_n ist

$$f_n = \frac{h_n}{\left(1+\frac{y}{n}\right)^n}.$$

Zähler und Nenner dieses Ausdruckes konvergieren und somit konvergiert auch f_n:

$$\lim_{n\to\infty} f_n = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} h_n}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{y}{n}\right)^n} = \frac{1}{\mathrm{e}^y} = \mathrm{e}^{-y} = \mathrm{e}^x.$$

Für $x = 0$ hat man ohnehin

$$\lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} 1^n = 1 = \mathrm{e}^0.$$

Es gilt also für alle $x \in \mathbb{Z}$:

$$\lim_{n\to\infty} f_n = \mathrm{e}^x.$$

g) Es ist

$$g_n = \left(\frac{n+1-2}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{-2}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Also ist $g_n = f_{n+1}$ mit $x = -2$ und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} g_n = \lim_{n\to\infty} f_n = \mathrm{e}^{-2}.$$

Aufgabe 2.4: Ableitungen

Berechnen Sie die erste Ableitung der folgenden Funktionen

a) $f(x) = x^x$

b) $g(x) = x^{3^x}$

c) $h(x) = x^{\cos(x)}$

Lösung 2.4:

Wir nutzen die folgende Identität:

$$a^b = \mathrm{e}^{b \ln(a)} \, .$$

a) Wir schreiben zunächst:
$f(x) = \mathrm{e}^{x \ln(x)}$
Mit der Ketten- und der Produktregel erhalten wir die Ableitung
$f'(x) = x^x \left(\ln(x) + 1\right)$

b) Wir schreiben $g(x)$ als:
$g(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{x \ln(3)} \ln(x)}$
Mit der Ketten- und der Produktregel erhalten wir die Ableitung
$g'(x) = x^{3^x} \left(\ln(3)\, 3^x \ln(x) + \frac{3^x}{x}\right)$

c) Wir schreiben $h(x)$ als:
$h(x) = \mathrm{e}^{\cos(x) \ln(x)}$
Mit der Ketten- und Produktregel erhalten wir die Ableitung
$h'(x) = x^{\cos(x)} \left(\frac{\cos(x)}{x} - \ln(x) \sin(x)\right)$

Aufgabe 2.5: Differenzieren

a) Bestimmen Sie jeweils die erste Ableitung. (Eventuell notwendige Beschränkungen des Definitionsgebietes sind nicht angegeben.)

$$\begin{aligned} f_9(t) &= \sinh(t) - \cosh(2t), & f_{10}(t) &= (t-3)^4 \sinh(t),\\ f_{11}(t) &= t^2\, e^{-2t} \sin(3t), & f_{12}(t) &= \sqrt{t}\, e^{2t},\\ f_{13}(t) &= \sin^3\left(e^{2t^2} + t^5\right), & f_{14}(t) &= \sqrt{2\,t^2+1},\\ f_{15}(t) &= \ln(t) - \ln(5t), & f_{16}(t) &= \ln(t^2) - \ln(t^5). \end{aligned}$$

b) Bestimmen Sie die n–te Ableitung folgender Funktionen.

$$\begin{aligned} f_{21}(t) &= \sin(3t), & f_{22}(t) &= t\, e^{2t}\\ f_{23}(t) &= t\cdot\cos(t), & f_{24}(t) &= t\,\ln(2t) \end{aligned}$$

Lösung 2.5:

a)

$$\begin{aligned} f_9'(t) &= \cosh(t) - 2\sinh(2t)\\ f_{10}'(t) &= 4(t-3)^3\sinh(t) + (t-3)^4\cosh(t)\\ f_{11}'(t) &= 2te^{-2t}\sin(3t) + t^2(-2e^{-2t})\sin(3t) + t^2e^{-2t}\cdot 3\cos(3t)\\ &= te^{-2t}\big(2(1-t)\sin(3t) + 3t\cos(3t)\big)\\ f_{12}'(t) &= \frac{1}{2\sqrt{t}}e^{2t} + \sqrt{t}\cdot 2e^{2t} = \frac{1+4t}{2\sqrt{t}}e^{2t}\\ f_{13}'(t) &= 3\sin^2\left(e^{2t^2}+t^5\right)\cdot\cos\left(e^{2t^2}+t^5\right)\cdot\left(4te^{2t^2}+5t^4\right)\\ f_{14}'(t) &= \frac{4t}{2\sqrt{2t^2+1}}\\ f_{15}'(t) &= \frac{1}{t} - \frac{5}{5t} = 0\\ f_{16}'(t) &= \frac{d}{dt}(\ln(t^2) - \ln(t^5)) = \frac{d}{dt}(2\ln t - 5\ln t) = \frac{-3}{t} \end{aligned}$$

b) **i)** Jedes Ableiten der Funktion f_{21} führt wegen der inneren Ableitung aus der Kettenregel zu einem Faktor 3. Außerdem ergibt jedes zweite Ableiten der äußeren Funktion (immer die Ableitung einer cos-Funktion) einen weiteren Faktor (-1). Die äußere Funktion wird nach gradzahligem Ableiten zu einem Sinus, bei ungradzahligen Ableitungen zu einem Kosinus. Insgesamt ergibt sich also:

$$f_{21}^{(n)}(t) = \begin{cases} 3^n\sin(3t) & \text{für } n = 4k+0\ (k\in\mathbb{N}_0)\\ 3^n\cos(3t) & \text{für } n = 4k+1\ (k\in\mathbb{N}_0)\\ -3^n\sin(3t) & \text{für } n = 4k+2\ (k\in\mathbb{N}_0)\\ -3^n\cos(3t) & \text{für } n = 4k+3\ (k\in\mathbb{N}_0) \end{cases}$$

ii) Die erste Ableitung von f_{22} ist

$$f_{22}'(t) = e^{2t} + 2te^{2t} = e^{2t} + 2f_{22}(t).$$

Setzt man dies sukzessive fort, ergibt sich

$$\begin{aligned} f_{22}^{(n)}(t) &= n\cdot 2^{n-1}e^{2t} + 2^n f_{22}(t)\\ &= \left(n\cdot 2^{n-1} + 2^n\cdot t\right)e^{2t} = (n+2t)2^{n-1}e^{2t} \end{aligned}$$

iii) Die ersten vier Ableitungen von f_{23} sind:

$$\begin{aligned} f_{23}(t) &= t\cdot\cos(t), & f_{23}'(t) &= \cos(t) - t\sin(t)\\ f_{23}''(t) &= -2\sin(t) - t\cos(t), & f_{23}'''(t) &= -3\cos(t) + t\sin(t),\\ f_{23}^{(4)}(t) &= 4\sin(t) + t\cos(t), & f_{23}^{(5)} &= 5\cos(t) - t\sin(t) \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich für $n\geq 1$:

$$f_{23}^{(n)} = \begin{cases} +n\cos(t) - t\sin(t) & \text{für } n = 4k+1\ (k\in\mathbb{N}_0)\\ -n\sin(t) - t\cos(t) & \text{für } n = 4k+2\ (k\in\mathbb{N}_0)\\ -n\cos(t) + t\sin(t) & \text{für } n = 4k+3\ (k\in\mathbb{N}_0)\\ +n\sin(t) + t\cos(t) & \text{für } n = 4k+4\ (k\in\mathbb{N}_0) \end{cases}.$$

iv) Die ersten beiden Ableitungen von f_{24} sind

$$\begin{aligned} f_{24}'(t) &= \ln(2t) + t\cdot\frac{2}{2t} = \ln(2t) + 1\\ f_{24}''(t) &= \frac{1}{t}. \end{aligned}$$

Alle weiteren Ableitungen $(n = 2, 3, \ldots)$ ergeben sich zu

$$f_{24}^{(n)}(t) = (-1)\cdot(-2)\cdot\ldots\cdot(-(n-2))t^{-(n-1)} = (-1)^n(n-2)!t^{-(n-1)}.$$

Aufgabe 2.6: Differentiation

a) Geben Sie die Konstanten b, c, $d \in \mathbb{R}$ an, damit die Funktion

$$g(x) = \begin{cases} bx^3 + cx^2 + d & \text{für } x \leq 1 \\ \ln x & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

auf $\mathbb{R}$ zweimal differenzierbar ist.
Ist $g(x)$ für diese Wahl auch dreimal differenzierbar?

b) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x \sin(1/x) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

in $x = 0$ stetig ist, aber *nicht* differenzierbar.
Hinweis: Betrachten Sie zur Untersuchung der Differenzierbarkeit die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n = \frac{1}{n\pi+\pi/2}$.

Lösung 2.6:

a) Außerhalb des kritischen Punktes $x = 1$ hat man

$$g'(x) = \begin{cases} 3bx^2 + 2cx & \text{für } x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

sowie

$$g''(x) = \begin{cases} 6bx + 2c & \text{für } x < 1 \\ -\frac{1}{x^2} & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

Da die Funktion zweimal differenzierbar sein soll, müssen $g(x)$ und $g'(x)$ stetig sein, im Punkt $x = 1$ muss also gelten:

$$g(1) = b + c + d = \ln 1 = 0 \text{ und } g'(1) = 3b + 2c = \frac{1}{1} = 1.$$

Aus der zweiten Relation erhält man $c = \frac{1-3b}{2}$.
Die linksseitige zweite Ableitung im Punkt $x = 1$ ist

$$\begin{aligned} g''_-(1) &= \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \frac{g'(x) - g'(1)}{x - 1} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \frac{3bx^2 + 2cx - 1}{x - 1} \\ &= \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \frac{3bx^2 + (1-3b)x - 1}{x - 1} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \frac{3b(x^2 - x) + x - 1}{x - 1} \\ &= \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} (3bx + 1) = 3b + 1 \end{aligned}$$

und die rechtsseitige zweite Ableitung:

$$\begin{aligned} g''_+(1) &= \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \frac{g'(x) - g'(1)}{x - 1} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \frac{\frac{1}{x} - 1}{x - 1} \\ &= \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \frac{1 - x}{x(x-1)} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \left(-\frac{1}{x}\right) = -1 \end{aligned}$$

Beide Grenzwerte müssen übereinstimmen, damit $g''(1)$ sinnvoll definiert ist, also gilt

$$b = \frac{-2}{3} \Rightarrow c = \frac{3}{2} \Rightarrow d = -b - c = \frac{-5}{6}.$$

Man hat dann

$$g''(x) = \begin{cases} -4x + 3 & \text{für } x < 1 \\ -1 & \text{für } x = 1 \\ -\frac{1}{x^2} & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

Die linksseitige Ableitung dieser Funktion im Punkt $x = 1$ ist

$$\begin{aligned} g'''_-(1) &= \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \frac{g''(x) - g''(1)}{x - 1} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \frac{-4x + 3 - (-1)}{x - 1} \\ &= \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \frac{-4x + 4}{x - 1} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \left(-4\frac{x - 1}{x - 1}\right) = -4 \end{aligned}$$

und die rechtsseitige Ableitung:

$$\begin{aligned} g'''_+(1) &= \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \frac{g''(x) - g''(1)}{x - 1} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \frac{-\frac{1}{x^2} - (-1)}{x - 1} \\ &= \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \frac{x^2 - 1}{x^2(x - 1)} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \frac{x + 1}{x^2} = 2 \end{aligned}$$

Da die beiden Werte nicht übereinstimmen ($-4 \neq 2$), ist g'' im Punkt $x = 1$ nicht differenzierbar.

b) Die Funktion ist stetig in $x = 0$, denn $|\sin(1/x)| \leq 1$ und somit ist $|f(x) - f(0)| = |f(x)| \leq |x| \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.
Der Differenzenquotient in $x_0 = 0$ ist

$$Q(x) := \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{x} f(x) = \sin(1/x).$$

Dieser Ausdruck konvergiert **nicht** für $x \to 0$. Setzt man zum Beispiel $x_n = \dfrac{1}{n\pi + \pi/2}$, dann gilt $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ und

$$Q(x_n) = \sin(n\pi + \pi/2) = \begin{cases} +1, & \text{für gerade } n \\ -1, & \text{für ungerade } n \end{cases}$$

Ergebnisse zu Aufgabe 2.1:

a) $\lim_{x\to 0\pm} f(x) = \pm 2,\ \lim_{x\to -1\pm} f(x) = 1 \pm (-1)$

b) $\lim_{x\to\infty} f(x) = \begin{cases} 0, & |a| > 1 \\ 1, & |a| = 1 \\ \infty, & |a| < 1 \end{cases}$

Ergebnisse zu Aufgabe 2.2:

b)

i) $a = \frac{1}{3}$

ii) $a = 1$

iii) $a = -1$

iv) $a = \mathrm{e}^3$

v) $a = 0$

vi) $a = 0$

vii) $a = 0$

Ergebnisse zu Aufgabe 2.3:

$a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1,\ b_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty,\ c_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{31}{25},\ d_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty,\ e_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1,\ f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^x,$

Ergebnisse zu Aufgabe 2.4:

- $f'(x) = x^x\left(\ln(x) + 1\right)$
- $g'(x) = x^{3^x}\left(\ln(3)\, 3^x \ln(x) + \dfrac{3^x}{x}\right)$
- $h'(x) = x^{\cos(x)}\left(\dfrac{\cos(x)}{x} - \ln(x)\sin(x)\right)$

Ergebnisse zu Aufgabe 2.5:

a) $f_9'(2) \approx -50.818,\ f_{10}'(2) \approx -10.745,\ f_{11}'(2) \approx 0.2315,\ f_{12}'(2) \approx 173.73,\ f_{13}'(2) \approx -2039.7,$
$f_{14}'(2) = 4/3,\ f_{15}'(2) = 0,\ f_{16}'(2) = -3/2$
b) $f_{22}^{(n)}(t) = (n+2t)2^{n-1}\mathrm{e}^{2t},\ f_{24}^{(n)}(t) = (-1)^n(n-2)!t^{-(n-1)}.$

Ergebnisse zu Aufgabe 2.6:

a) $b = -\frac{2}{3},\ c = \frac{3}{2}\ ,\ d = -\frac{5}{6}$