Helmut-Schmidt-Universität
Universität der Bundeswehr Hamburg
Fakultät für Maschinenbau

Prof. Dr. Thomas Carraro
Dr. Frank Gimbel
Janna Puderbach

Mathematik II — Blatt 5

WT 2022 — Newtonverfahren, Taylorentwicklung

Einführende Bemerkungen

- Vermeiden Sie die Verwendung von Taschenrechnern oder Online-Ressourcen.
- Die mit einem Stern *) markierten (Teil-)Aufgaben entfallen in diesem Trimester. Stattdessen werden einzelne Online-Aufgaben im ILIAS-Kurs kenntlich gemacht, zu denen Sie dort Ihre Lösungswege zur Korrektur hochladen können.
- Die mit zwei Sternen **) markierten (Teil-)Aufgaben richten sich an Studierende, die die übrigen Aufgaben bereits gelöst haben und die Inhalte weiter vertiefen möchten.

Aufgabe 5.1: Taylor-Entwicklung in einer Variablen

Bestimmen Sie die Taylor-Entwicklung zweiter Ordnung der Exponentialfunktion e^x um den Punkt $x_0 = 0$ in dem Intervall $0 \le x \le 1$ einschließlich des Restgliedtermes. Zeigen Sie damit die Abschätzung:

$$\mathrm{e} \le 3.$$

Lösung 5.1:

Wir beginnen mit der Taylor-Entwicklung der Exponentialfunktion in dem Intervall $0 \le x \le 1$:

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{\mathrm{e}^\xi}{3!}x^3,$$

mit $0 \le \xi \le 1$.
Da die Exponentialfunktion monoton steigend ist und $\xi \le 1$, gilt $\mathrm{e}^\xi \le \mathrm{e}^1$. Daher gilt die folgende Abschätzung

$$\mathrm{e}^x \le 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{\mathrm{e}}{3!}x^3,$$

für $0 \le x \le 1$. Der obige Ausdruck an der Stelle $x = 1$ ausgewertet führt zu

$$\begin{aligned} \mathrm{e} &\le 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{\mathrm{e}}{6}, \\ \frac{5}{6}\mathrm{e} &\le \frac{5}{2}, \\ \mathrm{e} &\le 3. \end{aligned}$$

Aufgabe 5.2: Taylor-Polynom

a) Geben Sie das Taylorpolynom n-ter Ordnung der folgenden Funktionen um den angegebenen Entwicklungspunkt x_0 an:

i) $f(x) = \sin(x) \cdot \cos(x)$ um $x_0 = 0$, $n = 4$

ii) $g(x) = \cos(x)$ um $x_0 = \pi/2$, $n = 4$

iii) $h(x) = \mathrm{e}^{1-x}(x^2 - 2x)$ um $x_0 = 1$, $n = 2$

b) Geben Sie die Nullstellen der Funktionen sowie der Taylor-Polynome im Intervall $[0, 5]$ an.

c) Skizzieren Sie die Funktionen und deren Taylor-Polynome.

Lösung 5.2:

a) **i)** Zunächst werden die ersten vier Ableitungen ermittelt:

$$f(x) = \sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin(2x), \qquad f'(x) = \cos(2x), \qquad f''(x) = -2\sin(2x)$$
$$f'''(x) = -4\cos(2x), \qquad f^{(4)}(x) = 8\sin(2x)$$

Damit ist das Taylorpolynom

$$\begin{aligned} T_4(x) &= \sum_{k=0}^{4} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x-0)^k \\ &= 0 + \frac{1}{1!}x - 0 - \frac{4}{3!}x^3 + 0 = x - \frac{2}{3}x^3. \end{aligned}$$

ii) Die Ableitungen von $g(x)$ sind:

$$g(x) = \cos x, \qquad g'(x) = -\sin x, \qquad g''(x) = -\cos x$$
$$g'''(x) = \sin x, \qquad g^{(4)}(x) = \cos x$$

Damit hat man dann

$$
\begin{aligned}
T_4(x) =& \sum_{k=0}^{4} \frac{g^{(k)}(\pi/2)}{k!} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^k \\
=& 0 - \frac{1}{1}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 0 + \frac{1}{6}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3 + 0 \\
=& -\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{6}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3 .
\end{aligned}
$$

iii) Es ist

$$
\begin{aligned}
h(x) =& \mathrm{e}^{1-x}(x^2 - 2x) \\
h'(x) =& \mathrm{e}^{1-x}(-x^2 + 2x + 2x - 2) = \mathrm{e}^{1-x}(-x^2 + 4x - 2) \\
h''(x) =& \mathrm{e}^{1-x}(x^2 - 4x + 2 - 2x + 4) = \mathrm{e}^{1-x}(x^2 - 6x + 6),
\end{aligned}
$$

und damit

$$
T_2(x) = -1 + (x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2 .
$$

b) **i**) Die Nullstellen im Intervall $[0, 5]$ liegen bei:

$$
\begin{aligned}
f(x) =& 0 \text{ für } x \in \left\{0,\, \frac{\pi}{2},\, \pi,\, \frac{3}{2}\pi\right\} \\
T_4(x) =& 0 \text{ für } x \in \left\{0,\, \sqrt{\frac{3}{2}}\right\}
\end{aligned}
$$

ii)

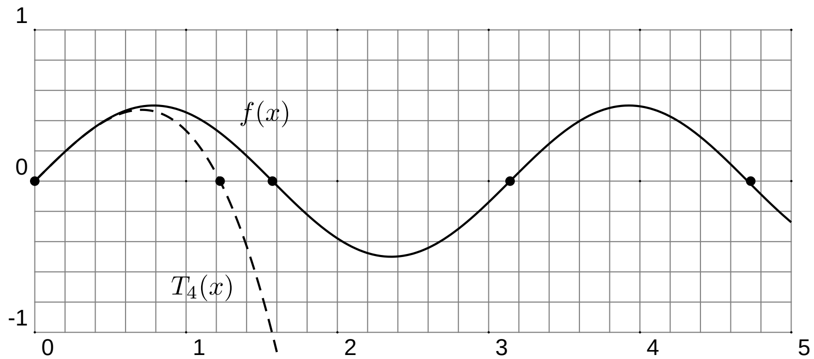
$$
\begin{aligned}
g(x) =& 0 \text{ für } x \in \left\{\frac{\pi}{2},\, \frac{3}{2}\pi\right\} \\
T_4(x) =& 0 \text{ für } x \in \left\{\frac{\pi}{2},\, \frac{\pi}{2} + \sqrt{6}\right\}
\end{aligned}
$$

iii)

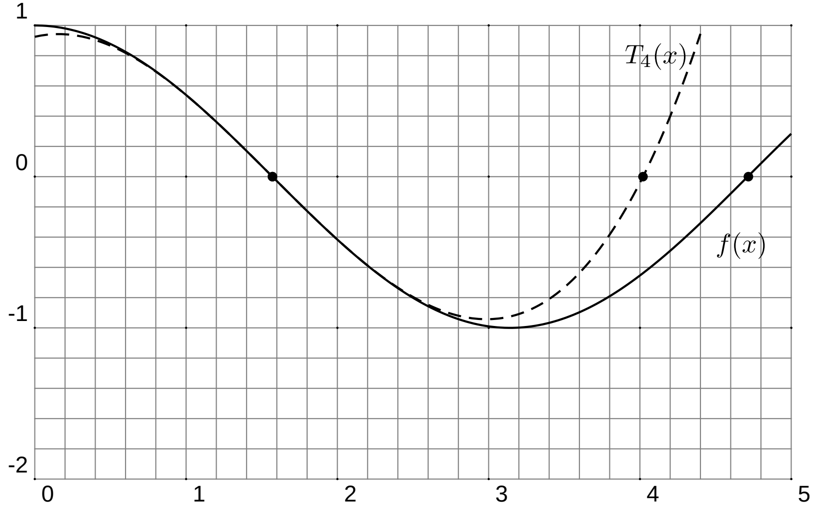
$$
\begin{aligned}
h(x) =& 0 \text{ für } x \in \{0,\, 2\} \\
T_2(x) =& 0 \text{ für } x \in \{\sqrt{3}\}.
\end{aligned}
$$

c)

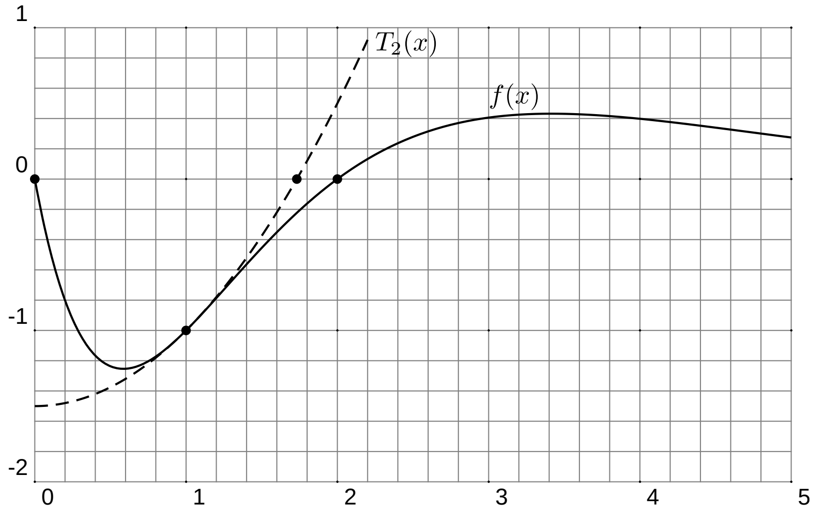
i)



ii)



iii)



Aufgabe 5.3: Kurvendiskussion, Taylorentwicklung

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x^2/2}(2x-3).$$

a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich von f.

b) Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion f.

c) Bestimmen Sie eine Asymptote von f, also eine Gerade $g(x) = a + bx$ mit

$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - g(x)) = 0.$$

d) Bestimmen Sie die kritischen Punkte der Funktion f und charakterisieren Sie diese **ohne** Berechnung der zweiten Ableitung.

e) Geben Sie die Taylorentwicklung in den Extrempunkten bis zum Grad 2 an.

f) Skizzieren Sie die Funktion, die Asymptote, sowie die Taylorapproximationen.

Lösung 5.3:

a) Die Funktion f ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert.

b) Die einzige Nullstelle der Funktion ist $x_0 = \frac{3}{2}$.

c) Die Funktion $g(x) = 0$ ist Asymptote der Funktion $f(x)$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - g(x)) &= \lim_{x\to\pm\infty}(\mathrm{e}^{-x^2/2}(2x-3) - 0)\\ &= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x-3}{\mathrm{e}^{x^2/2}}\\ &= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{2}{x\mathrm{e}^{x^2/2}}, \qquad \text{(L'Hospital)}\\ &=0\end{aligned}$$

d) Kritische Punkte sind Nullstellen der ersten Ableitung von f:

$$\begin{aligned} 0 &\overset{!}{=} f'(x) = \mathrm{e}^{-x^2/2}(-x(2x-3)+2) = \mathrm{e}^{-x^2/2}(-2x^2+3x+2)\\ \Leftrightarrow \qquad 0 &= x^2 - \frac{3}{2}x - 1\\ \Leftrightarrow \qquad x_{1,2} &= \frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16}+1} = \begin{cases} 2 \\ -\frac{1}{2}\end{cases}\end{aligned}$$

Da die Funktion $f(x)$ zwischen den beiden kritischen Punkten x_1 und x_2 bei x_0 eine Nullstelle hat und links davon negativ und rechts von x_0 positiv ist und sich asymptotisch der x-Achse annähert, muss in $x_1 = 2$ ein Maximum und in $x_2 = \frac{1}{2}$ ein Minimum liegen.

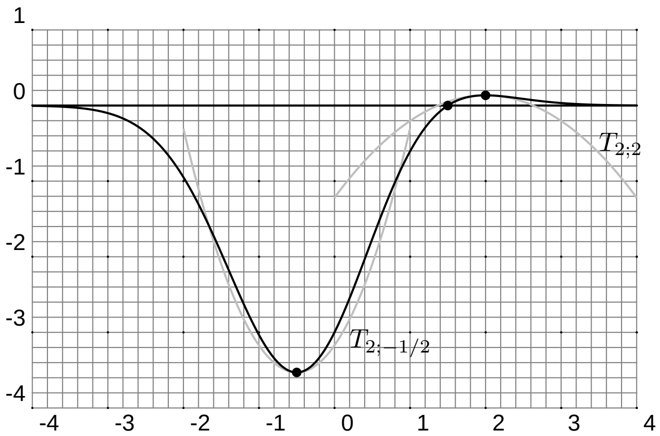
e) Zur Bestimmung der Taylorpolynome wird die zweite Ableitung von f benötigt:

$$f''(x) = \mathrm{e}^{-x^2/2}(2x^3 - 3x^2 - 2x - 4x + 3) = \mathrm{e}^{-x^2/2}(2x^3 - 3x^2 - 6x + 3)$$

Die Taylor-Polynome in den beiden Extrempunkten sind damit

$$\begin{aligned}\text{in } x_1 = 2: \quad T_{2;2}(x) &= f(x_1) + \frac{f'(x_1)}{1!}(x-x_1) + \frac{f''(x_1)}{2!}(x-x_1)^2\\ &= \mathrm{e}^{-2} + 0 + \frac{\mathrm{e}^{-2}\cdot(-5)}{2}(x-2)^2 = \mathrm{e}^{-2}\left(1 - \frac{5}{2}(x-2)^2\right)\\ \text{in } x_2 = -1/2: \quad T_{2;-1/2}(x) &= f(x_2) + \frac{f'(x_2)}{1!}(x-x_2) + \frac{f''(x_2)}{2!}(x-x_2)^2\\ &= \mathrm{e}^{-1/8}(-4) + 0 + 5\mathrm{e}^{-1/8}\frac{(x+\frac{1}{2})^2}{2}\\ &= \mathrm{e}^{-1/8}\left(-4 + \frac{5}{2}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2\right)\end{aligned}$$

f)



Aufgabe 5.4: Newton-Verfahren

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = 17x^3 - 468x^2 + 2849x - 2294.$$

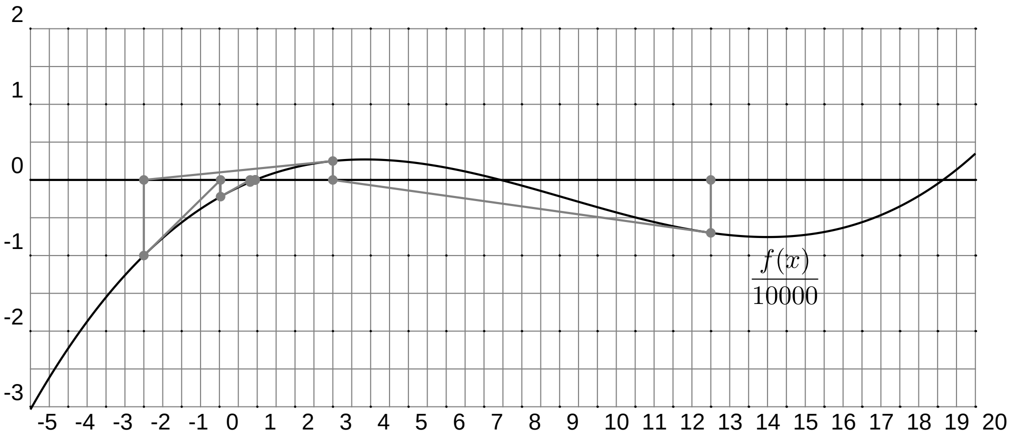
a) Skizzieren Sie die Funktion im Intervall $-5 \leq x \leq 20$.

b) Führen Sie mindestens zwei Schritte des Newton-Verfahrens mit dem Startwert $x_0 = 13$ für die Funktion $f(x)$ durch.

c) Skizzieren Sie im Funktionsgraphen die berechneten Iterationen $x_0, x_1, x_2, \ldots$.

Lösung 5.4:

a)/c)



b) Das Newtonverfahren mit der Iterationsvorschrift:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

ergibt

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$-f(x_n)/f'(x_n)$
0	13.0000	-7000.0000	-700	-10.0000000
1	3.0000	2500.0000	500	-5.0000000
2	-2.0000	-10000.0000	4925	2.0304568
3	0.0304	-2207.6621	2821	0.7827090
4	0.8131	-277.6091	2122	0.1308489
5	0.9440	-7.2647	2011	0.0036127
6	0.9476	-0.0055	2008	0.0000027
7	0.9476			

Aufgabe 5.5: Newton-Verfahren

a) Gegeben seien die Funktionen

$$f(x) = \frac{x}{3} \text{ und } g(x) = \sin(x^2).$$

i) Skizzieren Sie die Funktionen und bestimmen Sie Näherungen für die Schnittstelle der beiden Funktionsgraphen.

ii) Bestimmen Sie die kleinste positive Schnittstelle mit dem Newton-Verfahren auf fünf Nachkommastellen genau.

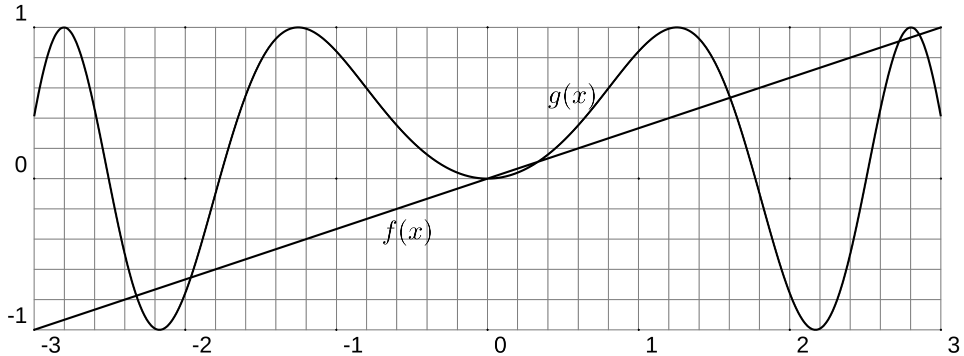
b) Führen Sie das Verfahren ebenso für die Funktionen

$$f(x) = x^3 \text{ und } g(x) = \cos(2\pi x)$$

und die betragskleinste Schnittstelle durch.

Lösung 5.5:

a)



i) Aus der Skizze kann man die ungefähren Schnittpunkte

$$(-2.3, -0.8),\ (-2, -0.7),\ (0, 0),\ (0.3, 0.1),\ (1.6, 0.5),\ (2.7, 0.9),\ (2.9, 0.9)$$

ablesen.

ii) Die kleinste positive Schnittstelle z liegt im Intervall $[0.3, 0.4]$. Sie ist Nullstelle der Funktion $F(x) = f(x) - g(x)$ mit

$$F'(x) = \frac{1}{3} - 2x\cos(x^2).$$

Die Iterationsvorschrift für das Newton-Verfahren lautet:

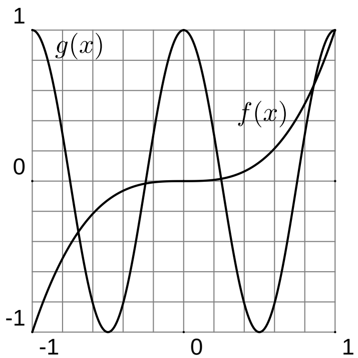
$$x_{i+1} = x_i - \frac{F(x_i)}{F'(x_i)}.$$

Mit $x_0 = 0.35$ liefert sie

n	x_n	$F(x_n)$	$F'(x_n)$	$F(x_n)/F'(x_n)$
0	0.3500000	-0.0055272	-0.3614210	0.0152929
1	0.3347071	-0.0002256	-0.3318845	0.0006798
2	0.3340273	-0.0000004	-0.3305673	0.0000014
3	0.3340259	0.0000000	-0.3305647	-0.0000000

Bereits nach drei Schritten findet keine Korrektur der ersten sechs Nachkommastellen mehr statt, der gesuchte Schnittpunkt liegt also bei $z \approx 0.33403$.

b)



i) Aus der Skizze kann man die ungefähren Schnittpunkte

$$(-0.6, -0.4),\ (-0.2, 0.0),\ (0.2, 0.0),\ (0.9, 0.6),\ (1.0, 1.0)$$

ablesen.

ii) Die betraglich kleinste Schnittstelle z liegt im Intervall $[0.2,\ 0.3]$. Sie ist Nullstelle der Funktion $G(x) = f(x) - g(x)$ mit

$$G'(x) = 3x^2 + 2\pi \sin(2\pi x).$$

Die Iterationsvorschrift für das Newton-Verfahren lautet:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{G(x_i)}{G'(x_i)}.$$

Mit $x_0 = 0.25$ liefert sie

n	x_n	$G(x_n)$	$G'(x_n)$	$G(x_n)/G'(x_n)$
0	0.250000	0.015625	6.470685	0.002415
1	0.247585	0.000004	6.466358	0.000001
2	0.247585	0.000000	6.466356	0.000000
3	0.247585			

Für diesen Fall hat das Verfahren bereits nach zwei Schritten die gewünschte Genauigkeit erreicht und das Ergebnis ist $z \approx 0.24759$.

Aufgabe 5.6: Online Aufgabe

Bearbeiten Sie die aktuelle Online-Aufgabe im ILIAS-Kurs.
Beachten Sie, dass Sie dort auch die Lösungswege zu einzelnen Aufgaben zur Korrektur hochladen können.