Helmut-Schmidt-Universität
Universität der Bundeswehr Hamburg
Fakultät für Maschinenbau und Bauingenieurwesen
Prof. Dr. Thomas Carraro

Mathematik II/B (WI/ET) — Zusatzblatt

WT 2025 — Taylor-Entwicklung

Aufgabe 1

Gegeben sei die Funktion
$$f(x) = \ln(1+x),$$

a) Bestimmen Sie das Taylor-Polynom 3. Ordnung $T_3(x)$ von $f(x)$ um den Punkt $x_0 = 0$.

b) Geben Sie das Restglied $R_3(x;0)$ an.

c) Schätzen Sie das Restglied für $|x| < \frac{1}{2}$ ab.

Hinweis: Es ist nicht notwendig das Restglied optimal abzuschätzen.

Lösung:

a) Die Taylor-Entwicklung von $f(x)$ um $x_0 = 0$ ist:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 \cdots$$

$$\begin{aligned}
f(0) &= 0 \\
f'(x) &= \frac{1}{x+1} \quad \Rightarrow \quad f'(0) = 1 \\
f''(x) &= -\frac{1}{(x+1)^2} \quad \Rightarrow \quad f''(0) = -1 \\
f'''(x) &= \frac{2}{(x+1)^3} \quad \Rightarrow \quad f'''(0) = 2
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich das Taylor-Polynom zu

$$T_3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 \qquad = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3.$$

b) Das Restglied wird wie folgt bestimmt:

$$R_3(x;0) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}x^4,$$

wobei $-\frac{1}{2} \leq \xi \leq \frac{1}{2}$ gilt.

$$f^{(4)}(x) = -\frac{6}{(x+1)^4}.$$

Das Restglied wird damit

$$R_3(x;0) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}x^4 = -\frac{1}{4(\xi+1)^4}x^4.$$

c) Für $|x| < \frac{1}{2}$ ergibt sich $-\frac{1}{2} \leq \xi \leq \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned}
|R_3(x;0)| = \left| -\frac{1}{4(\xi+1)^4}x^4 \right| &= \frac{1}{4}\frac{1}{(\xi+1)^4}x^4 \leq \frac{1}{4}\frac{1}{(-\frac{1}{2}+1)^4}\left(\frac{1}{2}\right)^4 \\
&= \frac{1}{4}\frac{1}{(1/2)^4}\frac{1}{16} = \frac{1}{4}\cdot 16 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

D.h.

$$|R_3(x;0)| \leq \frac{1}{4}.$$

Aufgabe 2

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = e^{-2x}.$$

a) Bestimmen Sie das Taylor-Polynom 3. Ordnung $T_3(x)$ von $f(x)$ um den Punkt $x_0 = 0$.

b) Geben Sie das Restglied $R_3(x; 0)$ an.

c) Schätzen Sie das Restglied für $|x| < \frac{1}{2}$ ab.

Lösung:

a) Die Taylor-Entwicklung von $f(x)$ um $x_0 = 0$ ist:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots$$

Berechnung der Ableitungen:

$$\begin{aligned} f(0) &= 1 \\ f'(x) &= -2e^{-2x} \quad \Rightarrow \quad f'(0) = -2 \\ f''(x) &= 4e^{-2x} \quad \Rightarrow \quad f''(0) = 4 \\ f'''(x) &= -8e^{-2x} \quad \Rightarrow \quad f'''(0) = -8 \end{aligned}$$

Damit ergibt sich das Taylor-Polynom dritter Ordnung:

$$T_3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3$$

$$T_3(x) = 1 - 2x + 2x^2 - \frac{4}{3}x^3.$$

b) Das Restglied wird durch die Lagrange-Formel gegeben:

$$R_3(x; 0) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}x^4,$$

Die vierte Ableitung von $f(x)$ ist:

$$f^{(4)}(x) = 16e^{-2x}.$$

Damit folgt für das Restglied:

$$R_3(x; 0) = \frac{16e^{-2\xi}}{24}x^4 = \frac{2}{3}e^{-2\xi}x^4.$$

c) Für $|x| < \frac{1}{2}$ setzen wir die obere Schranke für $e^{-2\xi}$:
Da $e^{-2\xi}$ auf $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ maximal ist für $\xi = -\frac{1}{2}$, gilt:

$$e^{-2\xi} \leq e.$$

Damit ergibt sich die Abschätzung:

$$|R_3(x; 0)| \leq \frac{2}{3}e \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4.$$

$$= \frac{2}{3}e \cdot \frac{1}{16} = \frac{2e}{48} = \frac{e}{24}.$$

Also:

$$|R_3(x; 0)| \leq \frac{e}{24}.$$
