Helmut-Schmidt-Universität
Universität der Bundeswehr Hamburg
Fakultät für Maschinenbau

Prof. Dr. Thomas Carraro
Dr. Frank Gimbel
Janna Puderbach

Mathematik II — Blatt 1

WT 2024 — Grenzwerte

Einführende Bemerkungen

- Vermeiden Sie die Verwendung von Taschenrechnern oder Online-Ressourcen.
- Die mit einem Stern *) markierten (Teil-)Aufgaben entfallen in diesem Trimester. Stattdessen werden einzelne Online-Aufgaben im ILIAS-Kurs kenntlich gemacht, zu denen Sie dort Ihre Lösungswege zur Korrektur hochladen können.
- Die mit zwei Sternen **) markierten (Teil-)Aufgaben richten sich an Studierende, die die übrigen Aufgaben bereits gelöst haben und die Inhalte weiter vertiefen möchten.

Aufgabe 1.1: Grenzwertdefinition

Bestimmen Sie zu den unten angegebenen Folgen (a_n) mit dem Grenzwert a und die angegebenen Werte für k jeweils ein N so, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > N$ gilt

$$|a_n - a| < 10^{-k}.$$

a) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, $a = 0$, $k = 2$

b) $a_n = \frac{3n+1}{n+1}$, $a = 3$, $k = 4$

c) $a_n = \frac{(-1)^n}{n!} + 1$, $a = 1$, $k = 3$

Aufgabe 1.2: Folgenkonvergenz

Untersuchen Sie die nachfolgenden Folgen auf Konvergenz und bestimmten Sie – wenn möglich – den Grenzwert:

$$a_n = \frac{2n^2+3n}{2n^2+7} \qquad b_n = \frac{2n^3-2}{5n^2-1}$$

$$c_n = \frac{2n^2+7n+(-1)^n}{5n+2} - \frac{2n^3-2}{5n^2-1}, \qquad d_n = \left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$$

$$e_n = n\left(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}\right) \qquad f_n = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \text{ (mit ganzzahligem } x\text{)}$$

$$g_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n+1}$$

Hinweise:
- Setzen Sie voraus, dass f_n konvergiert und ermitteln Sie den Grenzwert.
- Benutzen Sie zur Untersuchung von g_n das Ergebnis für f_n.

Aufgabe 1.3:

a) Zeigen Sie anhand der Definition der Konvergenz, dass gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+n-12}{n^2-8} = 2\,.$$

b) Zeigen Sie: Konvergiert $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a, so konvergiert auch $\{|a_n|\}_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $|a|$.

c) Gilt die Umkehrung von b)? Begründen Sie Ihre Aussage mit einem Beweis oder einem Gegenbeispiel.

Aufgabe 1.4: Grenzwerte monotoner Folgen

Es seien $a_1 = \sqrt{2}$ und $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$. Überprüfen Sie,

a) dass (a_n) beschränkt ist,

b) dass (a_n) monoton wächst und

c) gegen die größte Lösung der Gleichung $x^2 - x - 2 = 0$ konvergiert.

Aufgabe 1.5: Funktionenlimes

a) Gegeben sei die Funktion

$$f(x) := \frac{x^3 + |x+1| + \operatorname{sign}(x+1)}{\operatorname{sign} x}, \quad x \in D(f) := \mathbb{R}\,.$$

Bestimmen Sie $\lim_{x\to 0+} f(x)$, $\lim_{x\to 0-} f(x)$, $\lim_{x\to(-1)+} f(x)$ und $\lim_{x\to(-1)-} f(x)$.

b) Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \frac{\sinh x}{\cosh(ax)}\,, \quad a \in \mathbb{R}\,.$$

Bestimmen Sie $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$.

Hinweise:

- Mit der zunächst als bekannt vorausgesetzten Exponentialfunktion e^x gilt

$$\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \text{und} \qquad \cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

- Die Signum-Funktion liefert das Vorzeichen des Argumentes:

$$\operatorname{sign}(z) = \begin{cases} +1 & , z \geq 0 \\ -1 & , z < 0 \end{cases}$$

Aufgabe 1.6: Grenzwert Analyse - Definition

a) Notieren Sie die Definition des Grenzwertes und zeigen Sie, dass die Folge $a_n = \dfrac{1}{n}$ gegen den Grenzwert $a = 0$ konvergiert.
(Dies ist gleichbedeutend mit dem Nachweis, dass $\forall k \in \mathbb{N}$ eine Zahl $N \in \mathbb{R}$ existiert, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > N$ gilt: $|a_n - a| < 10^{-k}$).

b) Berechnen Sie den Grenzwert $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ der untenstehenden Folgen und dokumentieren Sie die Rechenregel, die Sie zur Berechnung des Grenzwertes verwendet haben (Produktregel, Einschließungssatz, Produkt beschränkter Folgen, Produkt von Nullfolgen etc).

i) $a_n = \dfrac{n^2 + 5n}{3n^2 + 1}$ **ii)** $a_n = \log_{10}(10n^2 - 2n) - \log_{10}(n^2 + 1)$

iii) $a_n = \dfrac{(n+1)!}{n! - (n+1)!}$ **iv)** $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{3n}$

v) $a_n = \dfrac{\cos n}{n}$ **vi)** $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

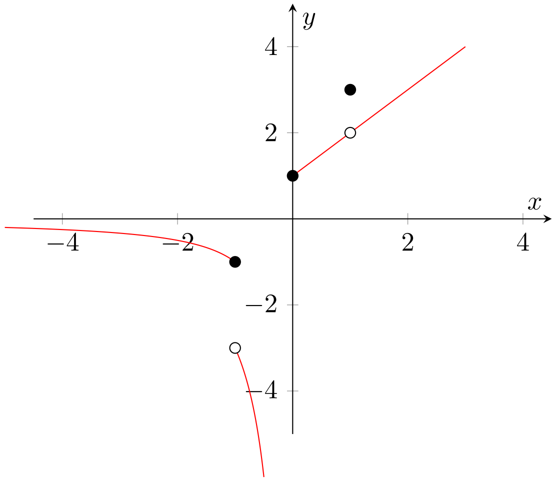
vii) $a_n = \dfrac{2^n}{n!}$

Aufgabe 1.7: Stetigkeit

Betrachten Sie die Funktion $y = f(x)$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{für } x \in (-\infty, -1], \\ \frac{3}{x} & \text{für } x \in (-1, 0), \\ \frac{x^2-1}{x-1} & \text{für } x \in [0, 1) \cup (1, \infty), \\ 3 & \text{für } x = 1. \end{cases}$$

und deren Graphen



a) Finden Sie alle Werte an denen die Funktion unstetig ist.

b) Begründen Sie für jeden dieser Werte, weshalb die formale Definition der Stetigkeit verletzt ist.

c) Klassifizieren Sie jede der Untetigkeitsstellen als **Sprungstelle**, **hebbare Unstetigkeit** oder **Polstelle**.

Aufgabe 1.8: Online Aufgabe

Bearbeiten Sie die aktuelle Online-Aufgabe im ILIAS-Kurs.
Beachten Sie, dass Sie dort auch die Lösungswege zu einzelnen Aufgaben zur Korrektur hochladen können.

Ergebnisse zu Aufgabe 1.1:

a) $N = 10000$, **b)** $N = 19999$, **c)** $N = 6$

Ergebnisse zu Aufgabe 1.2:

$a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$, $b_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, $c_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{31}{25}$, $d_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, $e_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$, $f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^x$,

Ergebnisse zu Aufgabe 1.3:

c) Betrachten Sie $a_n = (-1)^n$.

Ergebnisse zu Aufgabe 1.4:

a)/b) Es ist z. B. $0 < a_n \leq 2$.

Ergebnisse zu Aufgabe 1.5:

a) $\lim\limits_{x\to 0\pm} f(x) = \pm 2$, $\lim\limits_{x\to -1\pm} f(x) = 1 \pm (-1)$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \begin{cases} 0, & |a| > 1 \\ 1, & |a| = 1 \\ \infty, & |a| < 1 \end{cases}$

Ergebnisse zu Aufgabe 1.6:

b)

i) $a = \frac{1}{3}$

ii) $a = 1$

iii) $a = -1$

iv) $a = \mathrm{e}^3$

v) $a = 0$

vi) $a = 0$

vii) $a = 0$