Helmut-Schmidt-Universität Universität der Bundeswehr Hamburg Fakultät für Maschinenbau und Bauingenieurwesen

Prof. Dr. Thomas Carraro M.Sc Janna Puderbach



Mathematik II

WT 2024

Blatt 1

Definitheit, Ähnlichkeit

Einführende Bemerkungen

- Vermeiden Sie die Verwendung von Taschenrechnern oder Online-Ressourcen.
- Die mit einem Stern *) markierten (Teil-)Aufgaben entfallen in diesem Trimester. Stattdessen werden einzelne Online-Aufgaben im ILIAS-Kurs kenntlich gemacht, zu denen Sie dort Ihre Lösungswege zur Korrektur hochladen können.

Aufgabe 1.1**: Positive Definitheit

Welche der folgenden Matrizen ist positiv definit?

a)
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
, b) $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ d) $D = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1 + \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$

Aufgabe 1.2*: Lineare Abbildung im Komplexen

Gegeben ist die lineare Abbildung $L:\mathbb{C}^4\to\mathbb{C}^3$ mit der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1+i & 1 & i \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2i & i & 2i-1 \end{pmatrix}$$

sowie der Vektor $\boldsymbol{b}_{\lambda} = (\lambda - i, 0, -2i)^{\top}$.

a) Geben Sie Rang(\boldsymbol{A}) und Orthonormalbasen von Bild \boldsymbol{A} sowie Kern \boldsymbol{A} und (Bild \boldsymbol{A}) $^{\perp}$ an.

Hinweise:

• Der Orthogonalraum U^{\perp} eines Unterraumes $U \subset \mathbb{C}^n$ enthält alle Vektoren, die senkrecht zu allen Vektoren aus U sind:

$$\boldsymbol{U}^{\perp} = \{ \boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n | \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \rangle = 0 \text{ für alle } \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{U} \}$$

- Im Komplexen gilt $(Bild A)^{\perp} = Kern(A^*)$.
- Für welche $\lambda \in \mathbb{C}$ ist $\boldsymbol{b}_{\lambda} \in \text{Bild}\boldsymbol{A}$ enthalten?
- Ceben Sie für beliebige $\lambda \in \mathbb{C}$ eine Zerlegung von \boldsymbol{b}_{λ} in Komponenten aus Bild \boldsymbol{A} und $(\operatorname{Bild} \boldsymbol{A})^{\perp}$ an.
- d) Bestimmen Sie alle $x_{\lambda} \in \mathbb{C}^4$, so dass Ax_{λ} die orthogonale Projektion von b_{λ} auf Bild A ist.

Aufgabe 1.3: Determinanten

Bestimmen Sie die Determinante der folgenden Matrix mit Hilfe des Gauß'schen Algorithmus:

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 & 0 \\ -3 & -6 & -4 & 7 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & -5 & 2 \\ -3 & -8 & -2 & 7 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 1.4: Determinanten

Bestimmen Sie die Determinanten folgender Matrizen:

a)
$$A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 3 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$
, b) $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -7 & 8 & 3 \\ 3 & -4 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$
c) $C = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & -1 \\ -5 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ d) $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 7 & 7 \\ 4 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

1

Aufgabe 1.5: Ähnlichkeitstransformation

Gegeben sind

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 6 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \, \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ -1 \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \beta \\ -\beta \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- a) Bestimmen Sie wenn möglich α und β so, dass \boldsymbol{a} und \boldsymbol{b} Eigenvektoren der Matrix \boldsymbol{A} sind.
- **b**) Berechnen Sie einen weiteren (linear unabhängigen) Eigenvektor nebst zugehörigem Eigenwert.
- c) Bestimmen Sie orthogonale Matrizen Q_i , sowie Diagonalmatrizen D_i (i=1,2,3), so dass gilt

$$\boldsymbol{D}_i = \boldsymbol{Q}_i^{\mathsf{T}} \boldsymbol{B}_i \boldsymbol{Q}_i, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Dabei sind $\boldsymbol{B}_1 = \boldsymbol{A}, \, \boldsymbol{B}_2 = \boldsymbol{A}^{-1}$ und $\boldsymbol{B}_3 = \boldsymbol{A}^3$.

Aufgabe 1.6: Umkehrfunktion

Gegeben seien die folgenden Funktionen

 $\mathbf{i}) \quad f_1(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}},$

iii) $f_3(x) = \sin(x)$,

ii) $f_2(x) = \frac{1}{x^2-1}$,

- **iv**) $f_4(x) = \tan(x)$.
- a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich und den Wertebereich.
- b) Bestimmen Sie die Einschränkung des Definitionsbereichs und Wertebereichs, so dass die Funktionen bijektiv sind. (Betrachten Sie, falls nötig, den Hauptzweig.)
- c) Bestimmen Sie die inverse Funktion.
- d) Skizzieren Sie die Funktion sowie deren inverse Funktion.

Aufgabe 1.7: Umkehrfunktion

Gegeben seien die folgenden Funktionen. Geben Sie den Definitionsbereich an (betrachten Sie dabei den Hauptwert der Funktion) und überprüfen Sie, ob die Funktionen invertierbar sind. Bestimmen Sie jeweils die inverse Funktion.

- i) f(x) = 2x 1.
- **ii**) $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$.
- **iii**) $f(x) = (x-1)^{\frac{1}{3}}$.

- $\mathbf{iv}) \quad f(x) = \frac{x}{x+1}.$
- $\mathbf{v}) \quad f(x) = \log_2(x+3).$
- **vi**) $f(x) = 2 + e^{x-1}$.
- **vii**) $f(x) = \arccos(x^{-2}).$

Aufgabe 1.8: Inverse Funktion

Gegeben seien die folgenden Funktionen

i) $f_1(x) = e^{\frac{1}{x}},$

iii) $f_3(x) = \sin(x)$,

ii) $f_2(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$,

- $iv) f_4(x) = \tan(x).$
- a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich und den Wertebereich.
- b) Betimmen Sie die Einschränkung des Definitionsbereichs und Wertebereichs, so dass die Funktionen bijektiv sind. (Betrachten Sie, falls nötig, den Hauptzweig.)
- e) Bestimmen Sie die inverse Funktion.
- d) Skizzieren Sie die Funktion sowie deren inverse Funktion.

Ergebnisse zu Aufgabe 1.1:

 \boldsymbol{A} und \boldsymbol{B} sind nicht positiv definit, \boldsymbol{C} ist positiv definit.

Ergebnisse zu Aufgabe 1.2:

a) Rang(\mathbf{A}) = 2, Bild(\mathbf{A}) = span{ $(1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})^{\top}, 1/\sqrt{8}(1 - i, 2, i - 1)^{\top}$ }, Kern(\mathbf{A}) = span{ $(1/\sqrt{3}(i, -1, 1, 0)^{\top}, 1/\sqrt{21}(2 - i, -2 - i, i - 1, 3)^{\top}$ } b) $\mathbf{b}_{-i} \in \text{Bild}(\mathbf{A})$

Ergebnisse zu Aufgabe 1.3:

a) $\det \mathbf{B} = -48$

Ergebnisse zu Aufgabe 1.4:

$$\det \mathbf{A} = -160$$
, $\det \mathbf{B} = -6$, $\det \mathbf{C} = 40$, $\det \mathbf{D} = -2$

Ergebnisse zu Aufgabe 1.5:

b)
$$\lambda \in \{-2, 6\}, \ \boldsymbol{v}_1 = (1, 0, -1)^\top, \ \boldsymbol{v}_2 = (1, 0, 1)^\top, \ \boldsymbol{v}_3 = (0, 1, 0)^\top$$

Ergebnisse zu Aufgabe 1.7:

i)
$$f^{-1}(x) = \frac{x+1}{2}$$
. ii) $f^{-1}(x) = x^3$. iii) $f^{-1}(x) = x^3 + 1$. iv) $f^{-1}(x) = \frac{x}{1-x}$. v)

$$f^{-1}(x) = 2^x - 3$$
. **vi**) $f^{-1}(x) = \ln(x - 2) + 1$. **vii**) $f^{-1}(x) = \pm \frac{1}{\sqrt{\cos x}}$.