Aufgabensammlung

Mathematik II/B

für WI/ET

Prof. Dr. Thomas Carraro
Wintertrimester 2026

Inhaltsverzeichnis

Grenzwerte von Folgen

Aufgaben zu Folgen- und Funktionsgrenzwerte

Aufgabe 1: Grenzwertdefinition

Bestimmen Sie zu den unten angegebenen Folgen (a_n) mit dem Grenzwert a und den angegebenen Werten für k jeweils ein N so, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > N$ gilt

$$|a_n - a| < 10^{-k}.$$

a) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, $a = 0$, $k = 2$

b) $a_n = \dfrac{3n+1}{n+1}$, $a = 3$, $k = 4$

c) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n!} + 1$, $a = 1$, $k = 3$

Aufgabe 2: Grenzwerte monotoner Folgen

Es seien $a_1 = \sqrt{2}$ und $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$. Zeigen Sie,

a) dass (a_n) beschränkt ist,

b) dass (a_n) monoton wächst und

c) gegen die größte Lösung der Gleichung $x^2 - x - 2 = 0$ konvergiert.

Aufgabe 3: Grenzwert Analyse - Definition

a) Notieren Sie die Definition des Grenzwertes und zeigen Sie, dass die Folge $a_n = \dfrac{1}{n}$ gegen den Grenzwert $a = 0$ konvergiert.
(Dies ist gleichbedeutend mit dem Nachweis, dass $\forall k \in \mathbb{N}$ eine Zahl $N \in \mathbb{R}$ existiert, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > N$ gilt: $|a_n - a| < 10^{-k}$).

b) Berechnen Sie den Grenzwert $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ der untenstehenden Folgen und dokumentieren Sie die Rechenregel, die Sie zur Berechnung des Grenzwertes verwendet haben (Produktregel, Einschließungssatz, Produkt beschränkter

Folgen, Produkt von Nullfolgen etc).

i) $a_n = \dfrac{n^2+5n}{3n^2+1}$ **ii)** $a_n = \log_{10}(10n^2-2n) - \log_{10}(n^2+1)$

iii) $a_n = \dfrac{(n+1)!}{n!-(n+1)!}$ **iv)** $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{3n}$

v) $a_n = \dfrac{\cos n}{n}$ **vi)** $a_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

vii) $a_n = \dfrac{2^n}{n!}$

Aufgabe 4: Grenzwert

Bestimmen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x\to\infty}(x+3)\left(\mathrm{e}^{2/x}-1\right).$$

Aufgabe 5:

a) Zeigen Sie anhand der Definition der Konvergenz, dass gilt

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+n-12}{n^2-8} = 2\,.$$

b) Zeigen Sie: Konvergiert $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a, so konvergiert auch $\{|a_n|\}_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $|a|$.

c) Gilt die Umkehrung von b)? Begründen Sie Ihre Aussage mit einem Beweis oder einem Gegenbeispiel.

Aufgabe 6: Folgenkonvergenz

Untersuchen Sie die nachfolgenden Folgen auf Konvergenz und bestimmten Sie, wenn möglich, den Grenzwert:

$$a_n = \frac{2n^2+3n}{2n^2+7} \qquad b_n = \frac{2n^3-2}{5n^2-1}$$

$$c_n = \frac{2n^2+7n+(-1)^n}{5n+2} - \frac{2n^3-2}{5n^2-1}, \qquad d_n = \left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$$

$$e_n = n\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}\right) \qquad f_n = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \text{ (mit ganzzahligem } x\text{)}$$

$$g_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n+1}$$

Hinweise:
- Setzen Sie voraus, dass f_n konvergiert und ermitteln Sie den Grenzwert.
- Benutzen Sie zur Untersuchung von g_n das Ergebnis für f_n.

Aufgabe 7: Funktionenlimes

a) Gegeben sei die Funktion

$$f(x) := \frac{x^3 + |x+1| + \operatorname{sign}(x+1)}{\operatorname{sign} x}, \; x \in D(f) := \mathbb{R}\,.$$

Bestimmen Sie $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to(-1)+} f(x)$ und $\lim\limits_{x\to(-1)-} f(x)$.

b) Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \frac{\sinh x}{\cosh(ax)}\,, \quad a \in \mathbb{R}\,.$$

Bestimmen Sie $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$.

Hinweise:
- Mit der zunächst als bekannt vorausgesetzten Exponentialfunktion e^x gilt

$$\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \text{und} \qquad \cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

- Die Signum-Funktion liefert das Vorzeichen des Argumentes:

$$\operatorname{sign}(z) = \begin{cases} +1 & , z \geq 0 \\ -1 & , z < 0 \end{cases}$$

Aufgabe 8: Funktionenlimes

Man bestimme den Limes der folgenden Funktionen

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin(x)}{x}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} x\ln(x)$

Aufgabe 9: Regel von L'Hospital

Berechnen Sie mit Hilfe der Regel von L'Hospital die Grenzwerte

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 \sin x}{\tan x - x}\,,$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\mathrm{e}^x - x)}{\ln(\cos x)}\,,$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} x(2\arctan x - \pi)\,,$

d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x^x - 1}\,.$

Aufgabe 10: Regel von L'Hospital

Berechnen Sie mit Hilfe der Regel von L'Hospital die Grenzwerte

$$A = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\tan x}{x} \right), \qquad B = \lim_{x \to 0} \left(\frac{1 - \cosh x}{x^3} \right), \qquad C = \lim_{x \to 1} \left(\frac{\ln x}{\sin(\pi x)} \right)$$

Aufgabe 11: Iterierte Grenzwerte

Berechnen Sie für folgende Funktionen $f(x, y)$ die Grenzwerte

$$\lim_{x \to 0} \lim_{y \to 0} f(x, y)\,; \quad \lim_{y \to 0} \lim_{x \to 0} f(x, y)\,; \quad \lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{0}} f(\boldsymbol{x}) \text{ mit } \boldsymbol{x} := (x, y)^\top ,$$

(falls diese existieren):

a) $f(\boldsymbol{x}) := \dfrac{x - y}{x + y}\,,$

b) $f(\boldsymbol{x}) := \dfrac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2}$

c) $f(\boldsymbol{x}) := (x + y) \sin\left(\frac{1}{x}\right) \sin\left(\frac{1}{y}\right)\,.$

Hinweis zu b): Betrachten Sie auch den Fall $y = \alpha x\,,\ \alpha \in \mathbb{R}\,.$

Differentiation

Aufgaben zu Differentiation

Aufgabe 12: Ableitungen

Berechnen Sie die erste Ableitung der folgenden Funktionen

a) $f(x) = x^x$

b) $g(x) = x^{3^x}$

c) $h(x) = x^{\cos(x)}$

Aufgabe 13: Bewegung

Ein Elektron bewegt sich mit der Geschwindigkeit

$$v(t) = e^{-\cosh(3t^2+2t+1)},$$

wobei t in Sekunden gegeben ist.

a) Wie hoch ist seine Beschleunigung nach $t = 10$ Sekunden?

b) Kommt das Elektron jemals zur Ruhe? Man begründe die Antwort.

Aufgabe 14: Differentiation

a) Geben Sie die Konstanten b, c, $d \in \mathbb{R}$ an, damit die Funktion

$$g(x) = \begin{cases} bx^3 + cx^2 + d & \text{für } x \leq 1 \\ \ln x & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

auf $\mathbb{R}$ zweimal differenzierbar ist.
Ist $g(x)$ für diese Wahl auch dreimal differenzierbar?

b) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x \sin(1/x) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

in $x = 0$ stetig ist, aber *nicht* differenzierbar.
Hinweis: Betrachten Sie zur Untersuchung der Differenzierbarkeit die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n = \frac{1}{n\pi+\pi/2}$.

c) Die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

ist in $x = 0$ differenzierbar. Ist die Ableitung dort stetig? **Hinweis:** Betrachten Sie die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n = \frac{1}{2n\pi}$.

Aufgabe 15: Differentiation

a) Geben Sie die Konstanten b, c, $d \in \mathbb{R}$ an, damit die Funktion

$$g(x) = \begin{cases} bx^3 + cx^2 + d & \text{für } x \leq 1 \\ \ln x & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

auf $\mathbb{R}$ zweimal differenzierbar ist.
Ist $g(x)$ für diese Wahl auch dreimal differenzierbar?

b) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x\sin(1/x) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

in $x = 0$ stetig ist, aber *nicht* differenzierbar.
Hinweis: Betrachten Sie zur Untersuchung der Differenzierbarkeit die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n = \frac{1}{n\pi+\pi/2}$.

Aufgabe 16: Differenzieren

a) Bestimmen Sie jeweils die erste Ableitung. (Eventuell notwendige Beschränkungen des Definitionsgebietes sind nicht angegeben.)

$$f_{11}(t) = t^2\,\mathrm{e}^{-2t}\,\sin(3t), \qquad f_{12}(t) = \sqrt{t}\,\mathrm{e}^{2t},$$
$$f_{13}(t) = \sin^3\left(\mathrm{e}^{2t^2} + t^5\right), \qquad f_{14}(t) = \sqrt{2\,t^2+1},$$
$$f_{15}(t) = \ln(t) - \ln(5t), \qquad f_{16}(t) = \ln(t^2) - \ln(t^5).$$

$$f_{21}(t) = \sin(3t), \qquad f_{22}(t) = t\,\mathrm{e}^{2t}$$
$$f_{23}(t) = t\cdot\cos(t), \qquad f_{24}(t) = t\,\ln(2t)$$

Aufgabe 17: Differenzieren (Schulstoff)

Bestimmen Sie jeweils die erste Ableitung. Zur Kontrolle sind die Werte der Ableitung an Kontrollpunkten angegeben. (Eventuell notwendige Beschränkungen des

Definitionsgebietes sind nicht angegeben.)

$$f_1(t) = 3t^4 - 4t + 7\,, \qquad f_2(t) = (2t-3)^4\,, \qquad f_3(t) = t^3\,(t+3)^4\,,$$

$$f_4(t) = 3\,\cos(2t)\,, \qquad f_5(t) = \sin^2(3t)\,, \qquad f_6(t) = \tan(2 - t/2)\,,$$

$$f_7(t) = \frac{2t-3}{(t+2)^3}\,, \qquad f_8(t) = \frac{4t\,\sin(t)}{\cos(2t)}\,, \qquad f_9(t) = t^2 e^{\sqrt{t}}\,,$$

$$f_{10}(t) = \sqrt{t\sqrt{t\sqrt{t}}}\,, \qquad f_{11}(t) = e^{\frac{1}{1+t^2}}\,, \qquad f_{12}(t) = \tan(t)\,,$$

$$f_{13}(t) = \frac{t + \cos(t)\sin(t)}{2}\,, \qquad f_{14}(t) = \frac{t^2 - t + 2}{2t+3}\,, \qquad f_{15}(t) = \frac{\sin^2(t)}{\cos(t)}.$$

Aufgabe 18: Differenzieren

Berechnen Sie folgende Aufgaben:

i) $f(t) := (2t+1)^4 \cdot \sin(3t)$ gesucht: $f'''(t)$

ii) $g(t) := t^4 \cdot \cos(3t) \cdot e^{-2t}$ gesucht: $g''(t)$

iii) $h(t) := \dfrac{2t^2 - 2t + 1}{3t - 2}$ gesucht: $h'''(t)$

Hinweis: Vergessen Sie nicht die Ergebnisse (auch die Zwischenergebnisse) sinnvoll zusammenzufassen!

Aufgabe 19: Minimaler Abstand

Gegeben seien die folgenden Funktionen:

i) $f_1(x) = x^2 + 1$, mit $D(f_1) = \mathbb{R}$, **ii)** $f_2(x) = \ln(x)$, mit $D(f_2) = \mathbb{R}^+$.

a) Skizzieren Sie die Funktionen f_1 und f_2.

b) Bestimmen Sie den minimalen vertikalen Abstand beider Funktionsgraphen:

$$d = \min\,\left\{|f_1(x) - f_2(x)|;\; x \in \mathbb{R}^+\right\}.$$

Aufgabe 20: Mittelwertsatz

Sei $s(t)$ die Gesamtzahl der Kilometer, die Sie auf Ihrer Reise auf einer Autobahn mit einer Geschwindigkeitsbegrenzung von 120 km/h nach der Zeit t Stunden zurückgelegt haben. Nehmen Sie außerdem an, dass $s(1/4) = 10$ Kilometer und $s(5/4) = 160$ Kilometer beträgt. An einer Kontrollstelle entlang der Autobahn gestehen Sie diese

Tatsachen einem Beamten der Autobahnpolizei, der mit dem Mittelwertsatz vertraut ist. Der Beamte führt ein paar schnelle Berechnungen durch, lächelt und bereitet sich dann höflich darauf vor, Ihnen einen Strafzettel auszustellen. Erklären Sie, warum.

Aufgabe 21: Tangenten

a) Bestimmen Sie die Geradengleichungen (in der Form $ax + by = c$) der Tangenten an den Nullstellen der Funktionen

$$\varphi_1(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6, \qquad \varphi_2(x) = x^2 \text{ und } \varphi_3(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{für } x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & \text{für } x < 0 \end{cases} .$$

b) Geben Sie alle Punkte (x−Werte) an, in denen die Tangenten von $f(x) = x^2$ und $g(x) = x^3$ parallel sind.

c) Stellen Sie den Verlauf der beiden vektorwertigen Funktionen

$$\boldsymbol{v}(t) = \begin{pmatrix} t \\ \varphi_3(t) \end{pmatrix} \qquad \text{mit } \varphi_3(t) \text{ aus Aufgabenteil } \mathbf{a)}$$

und

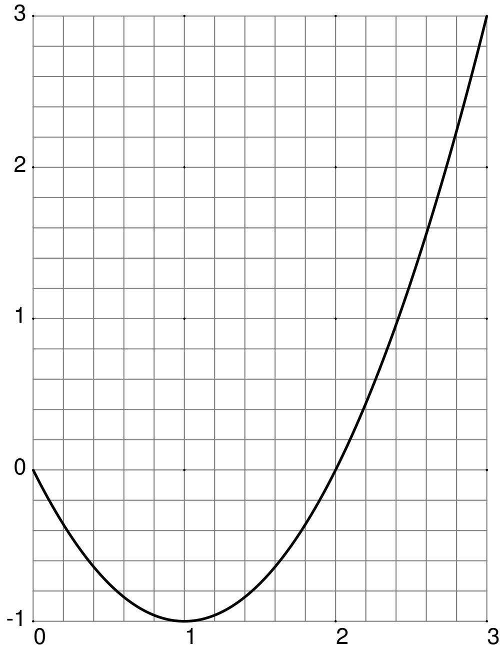
$$\boldsymbol{w}(s) = \begin{pmatrix} s \cdot |s| \\ s \end{pmatrix}$$

im selben Graphen dar.
Berechnen Sie, wo möglich, die Ableitungen beider Funktionen $\boldsymbol{v}(t)$ und $\boldsymbol{w}(s)$.

Hinweis: Die Funktion $\boldsymbol{w}(s)$ lässt sich analog zu $\varphi_3(t)$ mit Hilfe einer Fallunterscheidung auch ohne die Betragsfunktion darstellen.

Aufgabe 22: Sekantensteigung

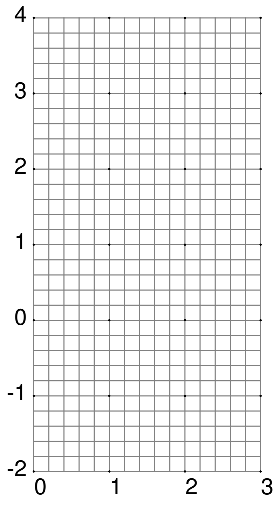
a) Gegeben ist der Funktionsgraph der Funktion f.



Zeichnen Sie an den Punkten

$$(x_j, y_j) \text{ mit } x_j = j,\ y_j = f(x_j) \text{ für } j = 0, 1, 2, 3$$

Steigungsdreiecke mit $\Delta x = 1$ an den Funktionsgraphen und berechnen Sie aus x- und y-Achsenabschnitt die Sekantensteigung $s(x_j)$.
Wiederholen Sie dies für $\Delta x = \frac{1}{2}$ und für $\Delta x = \frac{1}{4}$. Skizzieren Sie die so berechneten Steigungswerte im zweiten Graphen.



b) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $f(x) = x^2 - 2x$ anhand der Definition als Grenzwert eines Differenzenquotienten. Skizzieren Sie auch diese im zweiten Graphen.

Aufgabe 23: Partielle Ableitungen

Bestimmen Sie zu jeder der folgenden Funktionen $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die ersten und zweiten Ableitungen

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix}.$$

$$f(x,y) = \mathrm{e}^{2xy^2} \qquad g(x,y) = x^2 \sin(2x+y)$$

$$h(x,y) = \sin(2x)\cos(3y) \qquad k(x,y,z) = xy^2 z^3$$

$$l(x,y) = \frac{xy}{xy-1}$$

Aufgabe 24: Partielle Ableitungen

Gegeben sei die Funktion

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Berechnen Sie $f_{xy}(x,y)$ für alle $(x,y)^\top \in \mathbb{R}^2$ und untersuchen Sie, wo

$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y)$$

gilt.

Sind die zweiten Ableitungen von f stetig in $(0,0)^\top$?

Hinweis: Berechnen Sie die Ableitungen im Ursprung $(0,0)^\top$ über die Grenzwert-Definition.

Aufgabe 25: Partielle Ableitungen

Bestimmen Sie alle ersten und zweiten partiellen Ableitungen der folgenden reellen Funktionen und geben Sie jeweils die ersten und zweiten Ableitungen in Matrixschreibweise an:

i) $f(x,y) = \mathrm{e}^{2\,xy^2}$ **ii)** $g(x,y) = x^2 \sin(2x+y)$

iii) $h(x,y) = \sin(2x)\,\cos(3y)$ **iv)** $k(x,y,z) = x\,y^2\,z^3$

v) $j(u,v) = \dfrac{uv}{uv-1}$

Aufgabe 26: Optimierungsproblem

Ein Poster muss mit einer Gesamtfläche von $\bar{A} = 64000\ \text{mm}^2$ gedruckt werden. Es muss 10 mm Seitenränder und 25 mm obere und untere Ränder haben. Welche Höhe und Breite ergeben die maximale Druckfläche?

Aufgabe 27: Mehrdimensionale Kettenregel

Berechnen Sie mit Hilfe der Kettenregel die Jacobi-Matrix der Funktion

$$\boldsymbol{h}(x, y, z) = \boldsymbol{h}_2(\boldsymbol{h}_1(x, y, z))$$

mit

$$\boldsymbol{h}_1(x, y, z) = \begin{pmatrix} 3xz + 2y \\ 4y^2 + \frac{1}{3}x^3 z \end{pmatrix} \text{ und } \boldsymbol{h}_2(u, v) = \begin{pmatrix} \cos(2u - 3v) \\ \frac{1}{2}u + \frac{3}{2}v^2 \\ 4v + u \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 28: Vektor- und Matrixwertige Funktionen

Gegeben seien

$$\boldsymbol{A}(t) = \begin{pmatrix} t & t^2 \\ \sqrt{t} & t^5 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{B}(t) = \begin{pmatrix} \sin t & \cos t \\ \mathrm{e}^t & \cosh t \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{c}(t) = \left(t^3,\ \sqrt{t^5},\ \frac{1}{t}\right)^\top, \qquad \boldsymbol{d}(t) = \left(\mathrm{e}^{-t^2},\ \sin(\sqrt{t}),\ \tanh(t/2)\right)^\top.$$

Berechnen Sie

a) $\frac{d}{dt}\Big(\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{B}(t)\Big)$ und

b) $\frac{d}{dt}\Big(\boldsymbol{c}(t) \times \boldsymbol{d}(t)\Big)$

auf die folgenden beiden Arten:

- Indem sie vor der Differentiation die Produkte $\boldsymbol{AB}$ bzw. $\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}$ bilden und die Ergebnisfunktionen ableiten.
- Indem Sie zunächst die Ableitungen der einzelnen Funktionen bilden und diese dann gemäß einer Produktregel verrechnen.

Aufgabe 29: Richtungsableitungen

Gegeben seien die skalarwertigen Funktionen

$$f(x, y, z) = y^2 - xz \qquad \text{und} \qquad g(x, y, z) = x^2 \sin(y) + \cos(z).$$

Berechnen Sie die Richtungsableitung beider Funktionen in Richtung $\boldsymbol{h} := (-2, 3, 4)^\top$.

Aufgabe 30: Kurven im $\mathbb{R}^n$

Ein Satellit bewege sich auf der Bahn

$$\boldsymbol{r}(t) = \left(\sqrt{1+t^2},\, 3t\right)^\top$$

.

a) Berechnen Sie die Geschwindigkeit $\dot{\boldsymbol{r}}(t)$ des Satelliten.

b) Geben Sie die Grenzwerte (für $t \to +\infty$ und für $t \to -\infty$) der Bahnrichtung r_2/r_1 und Geschwindigkeit $\dot{\boldsymbol{r}}$ des Satelliten an.

Aufgabe 31: Wegableitungen

Gegeben sind die Funktionen

$$f(x, y) = \mathrm{e}^x \cdot \sin y \text{ und } \boldsymbol{g}(t) = (t^3,\, 1+t^2)^\top$$

aus denen sich die Funktion $h(t) = f(\boldsymbol{g}(t))$ ergibt.

a) Berechnen Sie $h'(t)$ durch explizites Einsetzen und anschließendes (eindimensionales) Ableiten nach t.

b) Berechnen Sie $h'(t)$ mit Hilfe der Kettenregel.

Aufgabe 32: Positive Definitheit

a) Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrizen

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 4/3 & \sqrt{5}/3 \\ \sqrt{5}/3 & 7/6 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Welche der Matrizen sind positiv oder negativ definit, welche sind indefinit?

Aufgabe 33: Stetige Fortsetzung

a) Untersuchen Sie, ob die folgenden reellen Funktionen im Punkt $x = 0$ stetig sind oder stetig fortgesetzt werden können.

$$f_1(x) = |x|, \qquad f_2(x) = \frac{x}{|x|}, \qquad f_3(x) = \frac{x^3}{|x|}, \qquad f_4(x) = \frac{x^2}{|x|^2}$$

b) Bestimmen Sie die Definitionslücken der Funktion

$$g(x) = \frac{2x^3 - 12x^2 + 18x}{x^3 - 9x}$$

In welchen dieser Lücken ist die Funktion stetig fortsetzbar?

Aufgabe 34: Stetige Fortsetzung

a) Untersuchen Sie, ob die folgenden reellen Funktionen im Punkt $x = 0$ stetig sind oder stetig fortgesetzt werden können.

$$f_1(x) = |x|, \qquad f_2(x) = \frac{x}{|x|}, \qquad f_3(x) = \frac{x^3}{|x|}, \qquad f_4(x) = \frac{x^2}{|x|^2}$$

b) Bestimmen Sie die Definitionslücken der Funktion

$$g(x) = \frac{2x^3 - 12x^2 + 18x}{x^3 - 9x}$$

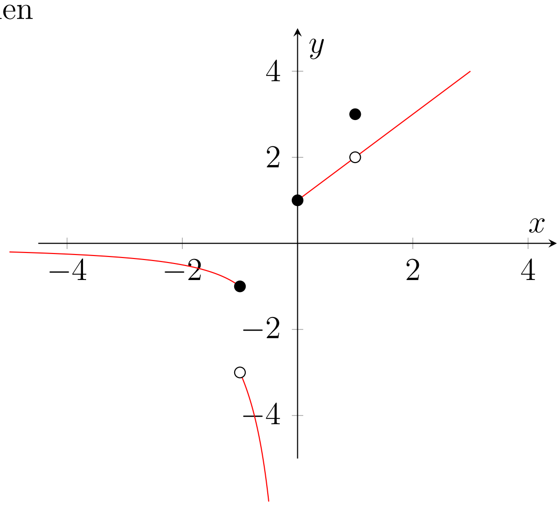
In welchen dieser Lücken ist die Funktion stetig fortsetzbar?

Aufgabe 35: Stetigkeit

Betrachten Sie die Funktion $y = f(x)$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{für } x \in (-\infty, -1], \\ \frac{3}{x} & \text{für } x \in (-1, 0), \\ \frac{x^2-1}{x-1} & \text{für } x \in [0, 1) \cup (1, \infty), \\ 3 & \text{für } x = 1. \end{cases}$$

und deren Graphen



a) Finden Sie alle Werte an denen die Funktion unstetig ist.

b) Begründen Sie für jeden dieser Werte, weshalb die formale Definition der Stetigkeit verletzt ist.

c) Klassifizieren Sie jede der Untetigkeitsstellen als **Sprungstelle**, **hebbare Unstetigkeit** oder **Polstelle**.

Aufgabe 36: Umkehrfunktion

a) Geben Sie zu den folgenden Funktionen an, in welchem Bereich sie umkehrbar sind, geben Sie im Punkt $(0, f_j(0))$ den Wert der Ableitung von $f_j^{-1}(x)$ an.

$$\begin{aligned} f_1(y) &= y^3 - 3y \\ f_2(y) &= \frac{y^2 + 3y}{1 - y} \end{aligned}$$

b) Gegeben seien die Funktionen

$$g_3(x) = \tan(x), \qquad g_4(x) = \mathrm{e}^{x^2+2x-8}, \qquad g_5(x) = \cosh(x), \qquad g_6(x) = \frac{1}{x^2 + 2}.$$

Bestimmen Sie zunächst die Ableitungen $g_j'(x)\,(j = 3, 4, 5, 6)$ dieser Funktionen.
Ermitteln Sie daraus mit Hilfe von Satz 3.38 (Ableitung der Umkehrfunktion) die Ableitung der Umkehrfunktionen $f_j(y) = g_j^{-1}(x)\,(j = 3, 4, 5, 6)$. (Es gilt $f_j(g_j(x)) = x$.)
Geben Sie auch für jede Funktion an, in welchem Bereich die Umkehrfunktion erklärt ist.

Aufgabe 37: Umkehrfunktion

a) Differenzieren Sie die folgenden Funktionen:

i) $f_1(x) = 3x^4(\ln x)^2\,,$

ii) $f_2(x) = x^{x+\ln x}\,,\ x > 0\,,$

iii) $f_3(x) = \mathrm{arcsin_H} x + \mathrm{arcsin_H}\left(2x\sqrt{1 - x^2}\right) - 3\,\mathrm{arcsin_H} x\,,\ |x| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}\,.$

b) Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = e^x + 2x.$$

i) Zeigen Sie, dass $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ umkehrbar ist.

ii) Bestimmen Sie die Ableitungen $g'(1)$ und $g''(1)$ der Umkehrfunktion

$$g = f^{-1}.$$

Kurvendiskussion und stationäre Punkte

Aufgaben zu Kurvendiskussion und stationären Punkten

Aufgabe 38: Kurvendiskussion, Taylorentwicklung

Gegeben sei die Funktion
$$f(x) = \mathrm{e}^{-x^2/2}(2x - 3).$$

a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich von f.

b) Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion f.

c) Bestimmen Sie die Asymptoten von f.

d) Bestimmen Sie die kritischen Punkte der Funktion f und charakterisieren Sie diese **ohne** Berechnung der zweiten Ableitung.

e) Geben Sie die Taylorentwicklung in den Extrempunkten bis zum Grad 2 an.

f) Skizzieren Sie die Funktion, die Asymptote, sowie die Taylorapproximationen.

Aufgabe 39:

Gegeben sei die Funktion $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\sin x\right)$.

i) Bestimmen Sie den Definitionsbereich und den Wertebereich von f.

ii) Zeigen Sie, dass die Funktion f die Periodizität π besitzt, d.h. zeigen Sie, dass $f(x + \pi) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

iii) Bestimmen Sie alle Nullstellen von f.
Hinweis: Beachten Sie die Periodizität von f.

iv) Bestimmen Sie alle Extrema von f und charakterisieren Sie diese.
Hinweis: Beachten Sie die Periodizität von f.

v) Skizzieren Sie den Graphen von f im Intervall $[-\pi, 2\pi]$.

Aufgabe 40: Kurvendiskussion

Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich, die Symmetrie, alle Nullstellen, sowie Art und Lage der kritischen Punkte und Wendepunkte der rellen Funktion

$$f(x) = x\sqrt{16 - x^2}.$$

Aufgabe 41: Kurvendiskussion

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 + 3\,x}{1 - x}.$$

i) Geben Sie den maximalen Definitionsbereich der Funktion f an.

ii) Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion.

iii) Bestimmen Sie die kritischen Punkte der Funktion und deren Funktionswerte. Klassifizieren Sie alle kritischen Punkte als Minimum, Maximum oder Wendepunkt.

iv) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten der Funktion.

v) Bestimmen Sie alle Asymptoten der Funktion.

vi) Bestimmen Sie den Wertebereich der Funktion.

vii) Skizzieren Sie die Funktion.

Aufgabe 42: Kurvendiskussion

Führen Sie eine Kurvendiskussion für die Funktion

$$f(x) = \ln(3x^2 + 2x + 1)$$

durch. Bestimmen Sie dazu:

a) den maximalen Definitionsbereich von f,

b) die Symmetrieachsen von f, d. h. Werte $\alpha \in \mathbb{R}$, so dass $f(\alpha + x) = f(\alpha - x)$,

c) das Verhalten von f im Unendlichen,

d) die Nullstellen von f,

e) die Extrema und das Monotonieverhalten von f,

f) sowie die Wendepunkte und das Krümmungsverhalten von f.

g) Skizzieren Sie den Graphen von f.

Aufgabe 43: Kurvendiskussion

Gegeben sei die reelle Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 + 7\,x + 10}{x + 1}\ .$$

i) Geben Sie den maximalen Definitionsbereich der Funktion an.

ii) Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion.

iii) Bestimmen Sie die kritischen Punkte für die Extrema der Funktion und deren Funktionswerte. Klassifizieren Sie die Punkte als Minimum, Maximum oder Sattelpunkt.

iv) Bestimmen Sie die (nicht vertikale) Asymptote der Funktion, d. h. diejenige Gerade $g(x) = a + bx$, für die

$$\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - g(x)) = 0$$

gilt.

v) Skizzieren Sie die Funktion.

Aufgabe 44: Stationäre Punkte

Gegeben sei die Funktion

$$g\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ :\ x \to \left(x^2 - 4\right)^2 \cdot \mathrm{e}^{-x}.$$

Bestimmen Sie alle relativen Minima und Maxima der Funktion g **ohne** die zweite Ableitung zu berechnen.

Aufgabe 45: alte Klausuraufgabe

Gegeben sei die Funktion

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad \text{mit } g(x, y) = (y - x^2)(y - 2x^2).$$

a) Zeigen Sie, dass die Funktion $g(x, y)$ auf allen Geraden durch den Ursprung $(0, 0)$ lokale Minima hat.

b) Hat die Funktion $g(x, y)$ im Ursprung ein lokales Minimum?
Hinweis: Untersuchen Sie die Funktion längs der Kurve $\boldsymbol{q}(t) = (t, 3t^2/2)^\top$.

Aufgabe 46:

Bestimmen und klassifizieren Sie alle stationären Punkte der Funktion

$$g(x,y) = 3x^2 - 2xy - \frac{y^3}{6}.$$

Aufgabe 47: Stationäre Punkte

Gegeben sei die Funktion

$$f(x,y) = x^3 + x^2y - y^2 - 4y.$$

Finde alle stationären Punkte und bestimme, ob sie lokale Minima, Maxima oder Sattelpunkte sind.

Aufgabe 48: Extremwerte

a) Ermitteln Sie die kritischen Punkte der Funktion

$$f(x,y) = (1 + 2x - y)^2 + (2 - x + y)^2 + (1 + x - y)^2$$

und bestimmen Sie, ob es sich um Maxima, Minima oder Sattelpunkte handelt.

b) Ermitteln Sie ebenso die kritischen Punkte der Funktionen

$$\begin{aligned} g(x,y,z) &= x^2 + xz + y^2 \\ h(x,y) &= (y^2 - x^2)\mathrm{e}^{\frac{x^2+y^2}{2}} \end{aligned}$$

und bestimmen Sie, ob es sich um Maxima, Minima oder Sattelpunkte handelt.

Aufgabe 49: lokale Extrema in 3 Dimensionen

Gegeben sei die Funktion

$$f\,:\,\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\,:\,(x,y,z) \to \frac{2\,y^3}{3} + x^2 - 2\,xy + xz - x - z + 1\;.$$

Bestimmen Sie die stationären (kritischen) Punkte der Funktion und bestimmen Sie deren Charakteristik.

Hinweis: Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind praktisch nur numerisch zu bestimmen. Die Vorzeichen der Eigenwerte erhält man aber sehr leicht aus einer einfachen Kurvendiskussion oder Skizze.

Aufgabe 50: Stationäre Punkte

Gegeben sei die Funktion

$$f(x,y) = ax^2 + 2xy + ay^2 - ax - ay.$$

Bestimmen Sie diejenigen $a \in \mathbb{R}$, für welche die Funktion f relative Maxima, relative Minima und Sattelpunkte besitzt und geben Sie diese an.

Aufgabe 51: Lokale Extrema in 2 Dim.

Gegeben sei die Funktion $f \in \mathrm{Abb}\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}\right)$ mit

$$f(x,y) = (x+y)^2 - 4\,(x+y-2) + y^3 - 3y.$$

Bestimmen Sie alle stationären (kritischen) Punkte dieser Funktion und geben Sie an, ob es sich dabei um lokale Minima, Maxima oder Sattelpunkte handelt, oder ob der Charakter des stationären Punktes nicht durch die Hesse–Matrix entschieden werden kann.

Aufgabe 52: Monotonieverhalten

Untersuchen Sie das Monotonieverhalten der folgenden Funktionen. Geben Sie dazu alle Intervalle an, in denen die Funktion monoton steigend bzw. monoton fallend ist.

a) $f(x) = \sin(2x)$

b) $h(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$

c) $g(x) = -\cos(x) - 2\sin(x/2)$

d) $k(x) = \cosh(x+1)$

Aufgabe 53: Asymptoten

Man bestimme die (waagerechten bzw. senkrechten bzw. schrägen) Asymptoten der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = \frac{x}{4-x^2}$

b) $g(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$

c) $h(x) = \frac{x^2-3x}{2x-2}$

d) $l(x) = x^2 e^{-x}$

Taylorentwicklung

Aufgaben zur Taylorentwicklung

Aufgabe 54: Taylor-Entwicklung in einer Variablen

Bestimmen Sie die Taylor-Entwicklung zweiter Ordnung der Exponentialfunktion e^x um den Punkt $x_0 = 0$ in dem Intervall $0 \leq x \leq 1$ einschließlich des Restgliedtermes. Zeigen Sie damit die Abschätzung:

$$\mathrm{e} \leq 3.$$

Aufgabe 55: Taylor-Entwicklung

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \sin(x)\ln(x).$$

a) Geben Sie den maximalen Definitionsbereich von $f(x)$ an.

b) Kann die Funktion $f(x)$ im Punkt $x = 0$ stetig fortgesetzt werden? Wenn ja, geben Sie die stetige Fortsetzung an.

c) Bestimmen Sie das Taylor-Polynom zweiter Ordnung $T_2(x)$ von $f(x)$ um den Punkt $x = 1$.

d) Bestimmen Sie die Differenz zwischen dem Taylor-Polynom $T_2(x)$ und der Funktion $f(x)$ im Punkt $x = 0$, d.h. bestimmen Sie $d(0)$, wobei

$$d(x) := |T_2(x) - f(x)|.$$

Man beachte, dass die Funktion $f(x)$ an der Stelle $x = 0$ stetig fortgesetzt werden muss.

Aufgabe 56: Taylor-Entwicklung

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \ln(x).$$

a) Bestimmen Sie das Taylor-Polynom der Ordnung zwei, $T_2(x)$, von $f(x)$ an der Stelle $x = 1$.

b) Bestimmen Sie das Restglied $R_2(x; 1)$ und schätzen Sie

$$\max_{x\in[1,2]} |R_2(x; 1)|.$$

Aufgabe 57: Taylor-Polynom

a) Geben Sie das Taylorpolynom n-ter Ordnung der folgenden Funktionen um den angegebenen Entwicklungspunkt x_0 an:

i) $f(x) = \sin(x) \cdot \cos(x) \quad \text{um} \quad x_0 = 0,\ n = 4$

ii) $g(x) = \cos(x) \quad \text{um} \quad x_0 = \pi/2,\ n = 4$

iii) $h(x) = \mathrm{e}^{1-x}(x^2 - 2x) \quad \text{um} \quad x_0 = 1,\ n = 2$

b) Geben Sie die Nullstellen der Funktionen sowie der Taylor-Polynome im Intervall $[0, 5]$ an.

c) Skizzieren Sie die Funktionen und deren Taylor-Polynome.

Aufgabe 58: Taylor–Entwicklung

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) := x \cdot \arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1 + x^2)\,.$$

a) Berechnen Sie das Taylorpolynom $T_2(x)$ zweiten Grades im Entwicklungspunkt $x_0 = 1$.

b) Berechnen Sie das zugehörige Restglied und geben Sie den Fehler $|f(x) - T_2(x)|$ im Intervall $|x - 1| \leq 0.1$ an.

Aufgabe 59: Taylor-Entwicklung

a) Geben Sie zu der Funktion

$$f(x, y) = x \sin(xy)$$

die Taylor-Entwicklung ersten Grades $T_1(\boldsymbol{x})$ um den Punkt $\boldsymbol{x}_0 = (1, 0)^\top$ an.

b) Berechnen Sie $f(\boldsymbol{x})$ und $T_1(\boldsymbol{x})$ an der Stelle $\boldsymbol{x}_1 = (0, 1)^\top$. Berechnen Sie außerdem den Fehler der Taylor-Approximation $T_1(\boldsymbol{x}_1) - f(\boldsymbol{x}_1)$.

c) Geben Sie das Lagrange-Restglied an.

Aufgabe 60: Taylor-Entwicklung

Gegeben seien die beiden Funktionen $\mathbb{R} \xrightarrow{\boldsymbol{r}} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = -\,\mathrm{e}^{y+1-x^2} \qquad \text{und} \qquad \boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos(\pi \cdot t) \\ \ln t - \sin^2(\pi \cdot t) \end{pmatrix}.$$

a) Geben Sie die Taylorentwicklung zweiter Ordnung $T_{2,f}$ der Funktion f um den Punkt $\boldsymbol{x}_0 = (1,\, 0)^\top$ an.

b) Geben Sie die Taylorentwicklung zweiter Ordnung $\boldsymbol{T}_{2,r}$ der Funktion $\boldsymbol{r}$ um den Punkt $t_0 = 1$ an. (Entwickeln Sie dazu die Komponenten r_1 und r_2 der Funktion $\boldsymbol{r} = (r_1, r_2)^\top$ separat.)

c) Bilden Sie durch Verkettung beider Funktionen die Funktion

$$g(t) := f \circ \boldsymbol{r}(t).$$

d) Verketten Sie ebenso die beiden Taylor-Polynome

$$\tilde{g}(t) := T_{2,f} \circ \boldsymbol{T}_{2,r}(t).$$

e) Vergleichen Sie g und $\tilde{g}$ und die Taylorpolynome erster Ordung dieser beiden Funktionen.

Aufgabe 61: Taylor-Entwicklung

a) Geben Sie zu der Funktion

$$f(x, y) = x \sin(xy)$$

die Taylor-Entwicklung ersten Grades $T_1(\boldsymbol{x})$ um den Punkt $\boldsymbol{x}_0 = (1, 0)^\top$ an.

b) Berechnen Sie $f(\boldsymbol{x})$ und $T_1(\boldsymbol{x})$ an der Stelle $\boldsymbol{x} = (0, 1)^\top$. Berechnen Sie außerdem den Fehler der Taylor-Approximation $T_1(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x})$.

c) Geben Sie mit Hilfe des Lagrange-Restgliedes eine Abschätzung für den Fehler

$$|f(\boldsymbol{x}) - T_1(\boldsymbol{x})|$$

an.

d) Berechnen Sie die Richtungsableitung der $\partial_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{x}_0)$ in Richtung $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Hinweis: Für das Restglied erhalten Sie einen Ausdruck der Form

$$(3\theta - 2)\cos(\theta^2 - \theta) + \frac{1}{2}(4\theta^3 - 8\theta^2 + 5\theta - 1)\sin(\theta^2 - \theta)$$

mit $0 \le \theta \le 1$. Diesen Ausdruck können Sie abschätzen, indem Sie die Extrema der beiden Vorfaktoren ($3\theta - 2$ und $\frac{1}{2}(4\theta^3 - 8\theta^2 + 5\theta - 1)$) auf dem Intervall $[0, 1]$ und eine obere Schranke der Kosinus- bzw. Sinus-Funktion bestimmen.

Aufgabe 62: Taylor 2D

Man bestimme das Taylor-Polynom vom zweiten Grad der Funktion im Punkt $(0,1)$

$$f(x,y) = \cosh(x)y^2.$$

Aufgabe 63:

a) Entwickeln Sie die Funktion

$$f(x,y,z) = \cosh(x) + \mathrm{e}^{2\,xy} - \ln(-yz) + \frac{1}{y} + \frac{z}{2}$$

nach der Taylor'schen Formel um den Punkt $P = (0\,,\,-1\,,\,2)$ bis zu einschließlich zweiter Ordnung (ohne Restglied).

Aufgabe 64: Taylor–Entwicklung in 2 Dim.

Bestimmen Sie das Taylor-Polynom 2. Ordnung der Funktion

$$f(x,y) = \mathrm{e}^{x}\cos(\pi(x+2y))$$

um den Entwicklungspunkt $\boldsymbol{x}_0 = (1,-1)^\top$.

Aufgabe 65: Taylor–Entwicklung in 2 Dim.

Gegeben seien $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = \mathrm{e}^{xy} + x + y$ und $\boldsymbol{a} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom 2. Grades von f für den Entwicklungspunkt $(0,0)$.

b) Bestimmen Sie die Richtungsableitung $\partial_{\boldsymbol{a}} f$ von f in Richtung $\boldsymbol{a}$ im Punkt $(0,0)$.

Aufgabe 66: Taylor–Polynom & Extrema in 2 Dimensionen

a) Berechnen Sie das Taylor–Polynom 2. Grades der Funktion $f(x,y) = (2x - 3y)\cdot\sin(3x-2y)$ zum Entwicklungspunkt $\boldsymbol{x}_0 = (0,0)^\mathrm{T}$.

b) Ermitteln Sie die Extrema der Funktion $f(x,y) = 2x^3 - 3xy + 2y^3 - 3$.

Newtonverfahren

Aufgaben zum Newtonverfahren

Aufgabe 67: Newton-Verfahren

a) Gegeben seien die Funktionen

$$f(x) = \frac{x}{3} \text{ und } g(x) = \sin(x^2).$$

- **i)** Skizzieren Sie die Funktionen und bestimmen Sie Näherungen für die Schnittstellen der beiden Funktionsgraphen.
- **ii)** Bestimmen Sie die kleinste positive Schnittstelle mit dem Newton-Verfahren auf fünf Nachkommastellen genau. Hierfür ist die Verwendung eines Taschenrechners erlaubt.

b) Führen Sie das Verfahren ebenso für die Funktionen

$$f(x) = x^3 \;\text{ und }\; g(x) = \cos(2\pi x)$$

und die betragskleinste Schnittstelle durch.

Aufgabe 68: Newton-Verfahren

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = 17x^3 - 468x^2 + 2849x - 2294.$$

a) Skizzieren Sie die Funktion im Intervall $-5 \leq x \leq 20$.

b) Führen Sie mindestens zwei Schritte des Newton-Verfahrens mit dem Startwert $x_0 = 13$ für die Funktion $f(x)$ durch. Hierfür ist die Verwendung eines Taschenrechners erlaubt.

c) Skizzieren Sie im Funktionsgraphen die berechneten Iterationen $x_0, x_1, x_2, \ldots$.

Aufgabe 69: Newton-Verfahren

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 15x - 36.$$

a) Bestimmen Sie alle lokalen Extrema der Funktion $f(x)$.

b) Begründen Sie, weshalb f zwei Nullstellen besitzt.

c) Führen Sie das Newton-Verfahren mit der Funktion f zwei mal durch. Wählen Sie im ersten Durchlauf den Startwert $x_0 = 1$ und im zweiten Durchlauf $x_0 = -1$. Führen Sie jeweils drei Iterationsschritte durch.

Aufgabe 70: Newton-Verfahren

Gegeben seien die beiden Kurven in der oberen Halbebene

$$(y-3)^2 - x = 3 \text{ und } xy = 4\ , \quad y \geq 0\ .$$

a) Skizzieren Sie die beiden Kurven und lesen Sie aus Ihrer Skizze eine nicht-ganzzahlige Näherung für den Schnittpunkt ab.

b) Um den Schnittpunkt numerisch zu bestimmen, führen Sie **einen** Iterationsschritt mit dem **zweidimensionalen** Newton–Verfahren durch, wobei Sie den Punkt $(x_0, y_0) := (1, 5) \in \mathbb{N}^2$ als Startwert benutzen.

c) Hat sich die Näherung durch den Newtonschritt aus Teil b) gegenüber dem Startwert (x_0, y_0) verbessert? Kurze Begründung!

Aufgabe 71: Newton-Verfahren

Zur Berechnung eines kritischen Punktes der Funktion

$$f(x, y) = \int_0^x \left(\frac{\sin(\pi t)}{\pi t} - \frac{1}{3} \right) \mathrm{d}t + \frac{1}{\pi^2} \sin\left(\pi \frac{x}{y} \right)$$

soll das Newton-Verfahren angewandt werden. Bestimmen Sie mit Hilfe **eines Schrittes** des Newton-Verfahrens eine Näherung für einen kritischen Punkt von f in der Nähe von $(1, 2)$.

Hinweis: Es gibt keine geschlossene Darstellung des Integrals.

Integration

Aufgaben zur Integration

Ergebnisse

Ergebnisse zu Aufgabe 1:

a) $N = 10000$, **b)** $N = 19999$, **c)** $N = 6$

Ergebnisse zu Aufgabe 2:

a)/b) Es ist z. B. $0 < a_n \leq 2$.

Ergebnisse zu Aufgabe 3:

b)

i) $a = \frac{1}{3}$

ii) $a = 1$

iii) $a = -1$

iv) $a = \mathrm{e}^3$

v) $a = 0$

vi) $a = 0$

vii) $a = 0$

Ergebnisse zu Aufgabe 5:

c) Betrachten Sie $a_n = (-1)^n$.

Ergebnisse zu Aufgabe 6:

$a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$, $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$, $c_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{31}{25}$, $d_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$, $e_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$, $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^x$,

Ergebnisse zu Aufgabe 7:

a) $\lim\limits_{x\to 0\pm} f(x) = \pm 2$, $\lim\limits_{x\to -1\pm} f(x) = 1 \pm (-1)$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \begin{cases} 0, & |a| > 1 \\ 1, & |a| = 1 \\ \infty, & |a| < 1 \end{cases}$

Ergebnisse zu Aufgabe 8:

Ergebnisse zu Aufgabe 9:

a) 3, **b)** -1, **c)** -2, **d)** 2

Ergebnisse zu Aufgabe 10:

$A = 1,\ B = \pm\infty,\ C = -1/\pi$

Ergebnisse zu Aufgabe 13:

- $f'(x) = x^x\left(\ln(x) + 1\right)$
- $g'(x) = x^{3^x}\left(\ln(3)\,3^x\ln(x) + \dfrac{3^x}{x}\right)$
- $h'(x) = x^{\cos(x)}\left(\dfrac{\cos(x)}{x} - \ln(x)\sin(x)\right)$

Ergebnisse zu Aufgabe 13:

Ergebnisse zu Aufgabe 15:

a) $b = -\frac{2}{3},\ c = \frac{3}{2}\ ,\ d = -\frac{5}{6}$

Ergebnisse zu Aufgabe 16:

a) $f'_{11}(2) \approx 0.2315,\ f'_{12}(2) \approx 173.73,\ f'_{13}(2) \approx -2039.7,$
$f'_{14}(2) = 4/3,\ f'_{15}(2) = 0,\ f'_{16}(2) = -3/2$

b) $f_{22}^{(n)}(t) = (n+2t)2^{n-1}\mathrm{e}^{2t},\ f_{24}^{(n)}(t) = (-1)^n(n-2)!t^{-(n-1)}.$

Ergebnisse zu Aufgabe 17:

$$\begin{aligned}
f'_1(2) &= 92, & f'_2(2) &= 8, & f'_3(2) &= 11500,\\
f'_4(\pi/3) &= -\,3\sqrt{3}, & f'_5(\pi/3) &= 0, & f'_6(4+2\pi) &= -\,1/2,\\
f'_7(2) &= 5/256, & f'_8(\pi/3) &= \frac{20\pi}{3} - 4\sqrt{3}, & f'_9(4) &= 12\mathrm{e}^2,\\
f'_{10}(256) &= \frac{7}{16}, & f'_{11}(2) &= -\,\frac{4\mathrm{e}^{1/5}}{25}, & f'_{12}(\pi/3) &= 4,\\
f'_{13}(\pi/3) &= \frac{1}{4}, & f'_{14}(2) &= \frac{13}{49}, & f'_{15}(\pi/3) &= \frac{5\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}$$

Ergebnisse zu Aufgabe 18:

$$f'''(t) = \Big[192\,(2t+1) - 216\,(2t+1)^3\Big]\sin(3t) + \Big[432\,(2t+1)^2 - 27\,(2t+1)^4\Big]\cos(3t)$$
$$g''(t) = \Big[\Big(12t^2 - 16t^3 - 5t^4\Big)\cos(3t) + \Big(-\,24t^3 + 12t^4\Big)\sin(3t)\Big]\mathrm{e}^{-2t}$$
$$h'''(t) = \frac{-90}{(3t-2)^4}$$

Ergebnisse zu Aufgabe 19:

$d = \frac{3}{2} - \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Ergebnisse zu Aufgabe 21:

a) Nullstellen: $\varphi_1(1) = \varphi_1(-2) = \varphi(3) = 0$, $\varphi_2(0) = 0$, $\varphi_3(0) = 0$

Ergebnisse zu Aufgabe 22:

b) $f'(x) = 2x - 2$

Ergebnisse zu Aufgabe 23:

$$\begin{aligned}
\nabla f(x,y) =& (2y^2 \mathrm{e}^{2xy^2},\ 4xy\mathrm{e}^{2xy^2})^\top \\
\nabla g(x,y) =& (2x\sin(2x+y) + 2x^2\cos(2x+y),\ x^2\cos(2x+y))^\top \\
\nabla h(x,y) =& (2\cos(2x)\cos(3y),\ -3\sin(2x)\sin(3y))^\top \\
\nabla k(x,y,z) =& (y^2z^3,\ 2xyz^3,\ 3xy^2z^2)^\top \\
\nabla l(x,y) = =& \left(\frac{-y}{(xy-1)^2}, \frac{-x}{(xy-1)^2}\right)^\top
\end{aligned}$$

Ergebnisse zu Aufgabe 26:

Die maximale Druckfläche beträgt: $A_{\max} = 49000\ \mathrm{mm}^2$.

Ergebnisse zu Aufgabe 27:

$$\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{h}_1}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3z & 2 & 3x \\ zx^2 & 8y & \frac{1}{3}x^3 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{h}_2}(u,v) = \begin{pmatrix} -2\sin(2u-3v) & 3\sin(2u-3v) \\ \frac{1}{2} & 3v \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Ergebnisse zu Aufgabe 28:

a) $\begin{pmatrix} t\cos t + t^2\mathrm{e}^t + \sin t + 2t\mathrm{e}^t & -t\sin t + t^2\sinh t + \cos t + 2t\cosh t \\ \sqrt{t}\cos t + t^5\mathrm{e}^t + \frac{\sin t}{2\sqrt{t}} + 5t^4\mathrm{e}^t & -\sqrt{t}\sin t + t^5\sinh t + \frac{\cos t}{2\sqrt{t}} + 5t^4\cosh t \end{pmatrix}$.

b) $\begin{pmatrix} \frac{5}{2}t^{3/2}\tanh\frac{t}{2} + \frac{t^{5/2}}{2\cosh^2\frac{t}{2}} - \frac{\cos\sqrt{t}}{2t^{3/2}} + \frac{\sin\sqrt{t}}{t^2} \\ -2\mathrm{e}^{-t^2} - \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{t^2} - 3t^2\tanh\frac{t}{2} - \frac{t^3}{2\cosh^2\frac{t}{2}} \\ 3t^2\sin\sqrt{t} + \frac{t^{5/2}\cos\sqrt{t}}{2} - \frac{5}{2}t^{3/2}\mathrm{e}^{-t^2} + 2t^{7/2}\mathrm{e}^{-t^2} \end{pmatrix}$

Ergebnisse zu Aufgabe 29:

$\frac{-4x+6y+2z}{\sqrt{29}}$, $\frac{-4x\sin y + 3x^2\cos y - 4\sin z}{\sqrt{29}}$

Ergebnisse zu Aufgabe 30:

$\lim\limits_{t\to\infty} \frac{r_2(t)}{r_1(t)} = 3, \lim\limits_{t\to\pm\infty} \dot{\boldsymbol{r}}(t) = (\pm 1, 3)^\top$

Ergebnisse zu Aufgabe 31:

$h'(t) = t\mathrm{e}^{(t^3)}\Big(3t\sin(t+t^2) + 2\cos(1+t^2)\Big)$

Ergebnisse zu Aufgabe 32:

a) $\boldsymbol{A}$: -1, -2, -4, $\boldsymbol{B}$: $1/2$, 2, $\boldsymbol{C}$: -1, 1

Ergebnisse zu Aufgabe 34:

a) stetig, nicht stetig fortsetzbar, stetig fortsetzbar, stetig fortsetzbar
b) g ist stetig forstetzbar in 0 und $+3$ und nicht stetig fortsetzbar in -3.

Ergebnisse zu Aufgabe 34:

a) stetig, nicht stetig fortsetzbar, stetig fortsetzbar, stetig fortsetzbar
b) g ist stetig forstetzbar in 0 und $+3$ und nicht stetig fortsetzbar in -3.

Ergebnisse zu Aufgabe 1.36:

a) $f_1^{-1}(0) = -1/3$, $f_2^{-1}(0) = 1/3$

Ergebnisse zu Aufgabe 38:

zu **e)**: $T_{2;2}(x) = \mathrm{e}^{-2}\left(1 - \frac{5}{2}(x-2)^2\right)$
$T_{2;-1/2}(x) = \mathrm{e}^{-1/8}\left(-4 + \frac{5}{2}\left(x + \frac{1}{2}\right)^2\right)$

Ergebnisse zu Aufgabe 40:

$D(f) = [-4, 4]$, f ist ungerade, Nullstellen: $x = 0, \pm 4$, Extrema bei $x = \pm 2\sqrt{2}$, Wendepunkt bei $x = 0$

Ergebnisse zu Aufgabe 41:

a)ii) 0, -3, **iii)** -1, 3, **iv)** $g(x) = -x - 4$

Ergebnisse zu Aufgabe 42:

b) $\alpha = -1/3$, **d)** 0, $-2/3$, **e)** Minimum bei $-1/3$, **f)** Wendepunkte bei $-1/3 \pm \sqrt{2}/3$

Ergebnisse zu Aufgabe 44:

$x_{\min} = \pm 2$, $x_{\max} = 2 \pm \sqrt{8}$

Ergebnisse zu Aufgabe 46:

$\boldsymbol{x}_1 = (0, 0)^\top$, $\boldsymbol{x}_2 = (-4/9, -4/3)^\top$

Ergebnisse zu Aufgabe 48:

a) f: $(-3/2, -2)^\top$, g: $(0, 0, 0)^\top$, h: $(0, 0)^\top$

Ergebnisse zu Aufgabe 49:

$\boldsymbol{p}_1 = (1, 1, 1)^\top$, $\boldsymbol{p}_2 = (1, -1, -3)^\top$

Ergebnisse zu Aufgabe 50:

Für $a \neq \pm 1$ ist der stationäre Punkt $\frac{a}{2(1+a)}(1, 1)^\top$. Für $a = 1$ gibt es mehrere stationäre Punkte.

Ergebnisse zu Aufgabe 51:

Die stationären Punkte lauten $P_1 = (3, -1)$ und $P_2 = (1, 1)$.

Ergebnisse zu Aufgabe 53:

a) waagerechte Asymptote bei $y = 0$, **b)** waagerechte Asymptote bei $y = 0$, **c)** schräge Asymptote bei $y = \frac{1}{2}x - 1$, **d)** waagerechte Asymptote bei $y = 0$.

Ergebnisse zu Aufgabe 55:

Die Differenz ist

$$d(0) = \frac{3\sin(1)}{2} - \cos(1).$$

Ergebnisse zu Aufgabe 56:

Eine Abschätzung des Restglieds ist

$$R_2(x; 1) \leq \frac{1}{3}.$$

Ergebnisse zu Aufgabe 57:

a) i) $T_4(x) = x - 2x^3/3$, **ii)** $T_4(x) = -(x - \pi/2) + 1/6 \cdot (x - \pi/2)^3$
iii) $T_2(x) = -1+(x-1)+1/2\cdot(x-1)^2$ **b) i)** $f(x) = 0$ für $x \in \left\{0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3}{2}\pi\right\}$, $T_4(x) = 0$ für $x \in \left\{0,\ \sqrt{\frac{3}{2}}\right\}$, **ii)** $g(x) = 0$ für $x \in \left\{\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi\right\}$, $T_4(x) = 0$ für $x \in \left\{\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2} + \sqrt{6}\right\}$,
iii) $h(x) = 0$ für $x \in \{0,\ 2\}$, $T_2(x) = 0$ für $x \in \{\sqrt{3}\}$.

Ergebnisse zu Aufgabe 58:

$T_2(x) = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2\right) + \frac{\pi}{4} \cdot (x-1) + \frac{1}{4} \cdot (x-1)^2$

Ergebnisse zu Aufgabe 61:

$T_1(x, y) = y$

Ergebnisse zu Aufgabe 60:

$T_{2,f}(x,y) = -1 + 2(x-1) - y - (x-1)^2 + 2(x-1)y - \frac{y^2}{2}$
$T_{2,\boldsymbol{r}} = \begin{pmatrix} -1 - \frac{1}{2}\pi^2(t-1)^2 \\ (t-1) - \frac{1}{2}(1+2\pi^2)(t-1)^2 \end{pmatrix}$

Ergebnisse zu Aufgabe 61:

$T_1(x, y) = y$

Ergebnisse zu Aufgabe 66:

$$T_2(x,y) = 6\,x^2 - 13\,xy + 6\,y^2\,.$$

Kritische Punkte: $P_1 = (0,0)$ und $P_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Ergebnisse zu Aufgabe 67:

Die gesuchten Schnittpunkte liegen bei a) $z \approx 0.33403$ und b) $z \approx 0.24759$

Ergebnisse zu Aufgabe 68:

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$-f(x_n)/f'(x_n)$
0	13.0000	-7000.0000	-700	-10.0000000
1	3.0000	2500.0000	500	-5.0000000
2	-2.0000	-10000.0000	4925	2.0304568

Ergebnisse zu Aufgabe 69:

Es ist $f(-3) = f(4) = 0$.

Ergebnisse zu Aufgabe 70:

Zu b) $\mathrm{D}\,\boldsymbol{f}(x,y) = \begin{pmatrix} -1 & 2y-6 \\ y & x \end{pmatrix}$.

Ergebnisse zu Aufgabe 71:

$f_x = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} - \frac{1}{3} + \frac{1}{\pi y}\cos\left(\pi \frac{x}{y}\right)$, $f_y = \frac{-x}{\pi y^2}\cos\left(\pi \frac{x}{y}\right)$.