Helmut-Schmidt-Universität
Universität der Bundeswehr Hamburg
Fakultät für Maschinenbau

Prof. Dr. Thomas Carraro
Dr. Frank Gimbel
Janna Puderbach

HELMUT SCHMIDT UNIVERSITÄT
Universität der Bundeswehr Hamburg

Mathematik II **Hörsaalübung 4**

WT 2022 Extremwertaufgabe und Taylor

Aufgabe 4.1: Stationäre Punkte

Gegeben sei die Funktion

$$f(x,y) = x^3 + x^2 y - y^2 - 4y.$$

Finde alle stationären Punkte und bestimme, ob sie lokale Minima, Maxima oder Sattelpunkte sind.

Lösung 4.1:

Die stationären Punkte sind die Lösungen des folgenden Gleichungssystems

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = 0 \qquad &\Rightarrow \qquad x(3x+2y) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = 0 \qquad &\Rightarrow \qquad x^2 - 2y - 4 = 0 \end{aligned}$$

Die erste Gleichung ist für $x = 0$ und für $3x + 2y = 0$ erfüllt, d.h. wenn $x = 0$ oder wenn $y = -\frac{3}{2}x$. In beiden Fällen wird der y-Wert durch die zweite Gleichung im System bestimmt.

1. Fall $x = 0$: Aus der zweiten Gleichung ergibt sich $0 - 2y - 4 = 0$, d.h. $y = -2$. Der erste kritische Punkt ist $\boldsymbol{P}_1 = (0, -2)$.

2. Fall $y = -\frac{3}{2}x$. Setzt man dies in die zweite Gleichung ein, erhält man $x^2 - 2(-\frac{3}{2}x) - 4 = 0$. Dies ergibt

   $$x^2 + 3x - 4 = 0 \longrightarrow (x-1)(x+4) = 0.$$

   Die Lösungen sind $x = 1$ und $x = -4$. Die beiden weiteren kritischen Punkte sind dann: $\boldsymbol{P}_2 = (1, -\frac{3}{2})$ und $\boldsymbol{P}_3 = (-4, 6)$.

Zusammengefasst lauten die drei kritischen Punkte

$$\boldsymbol{P}_1 = (0,-2), \qquad \boldsymbol{P}_2 = (0, -\frac{3}{2}), \qquad \boldsymbol{P}_3 = (-4, 6).$$

Die Hessische Matrix ist:

$$H = \begin{pmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{xy}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x+2y & 2x \\ 2x & -2 \end{pmatrix}.$$

Charakterisierung der stationären Punkte:

$$\boldsymbol{P}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad h_{11} < 0, \det(H) = 8 > 0 \to \text{Maximum}$$

$$\boldsymbol{P}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad h_{11} > 0, \det(H) = -10 < 0 \to \text{Sattelpunkt } \boldsymbol{P}_3 \quad = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix},$$

Aufgabe 4.2: Taylor 2D

Man bestimme das Taylor-Polynom vom zweiten Grad der Funktion im Punkt $(0, 1)$

$$f(x, y) = \cosh(x)y^2.$$