Helmut-Schmidt-Universität
Universität der Bundeswehr Hamburg
Fakultät für Maschinenbau und Bauingenieurwesen

Prof. Dr. Thomas Carraro
M.Sc Janna Puderbach

Mathematik II/B (WI/ET) — Blatt 8

WT 2024 — Integration, partielle Ableitungen

Einführende Bemerkungen

- Vermeiden Sie die Verwendung von Taschenrechnern oder Online-Ressourcen.

Aufgabe 8.1: Uneigentliche Integrale

Überprüfen Sie, ob die folgenden uneigentlichen Integrale existieren (d. h. einen endlichen Wert annehmen). Berechnen Sie für das dritte Beispiel den Wert des Integrals.

$$I_1 = \int_1^\infty \frac{\sin \frac{1}{x^2}}{x^2} \mathrm{d}x$$

$$I_2 = \int_0^1 \frac{\cos x^2}{1-x} \mathrm{d}x$$

$$I_3 = \int_0^\infty \frac{\arctan x}{x^2+1} \mathrm{d}x$$

Aufgabe 8.2: Uneigentliche Integrale

Welche der folgenden uneigentlichen Integrale besitzen einen endlichen Wert? Bestimmen Sie den Wert dieser Integrale.

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^{1/4}} \, \mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_0^{1/\pi} \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x$ d) $\displaystyle\int_0^\infty 2x\mathrm{e}^{-x^2} \, \mathrm{d}x$

Aufgabe 8.3: Integration

Bestimmen Sie jeweils eine Stammfunktion:

a)
$$I_a := \int \frac{4x^4}{x^4-1} \mathrm{d}x \,.$$

b)
$$I_b := \int (1+3x^2) \cdot \ln(x^3) \mathrm{d}x \,.$$

c)
$$I_c := \int \sin(\sqrt{x}) \mathrm{d}x \,.$$

d)
$$I_d := \int \sin(2x) \cdot \mathrm{e}^x \mathrm{d}x \,.$$

Aufgabe 8.4: Newton-Verfahren

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 15x - 36.$$

a) Bestimmen Sie alle lokalen Extrema der Funktion $f(x)$.

b) Begründen Sie, weshalb f zwei Nullstellen besitzt.

c) Führen Sie das Newton-Verfahren mit der Funktion f zwei mal durch. Wählen Sie im ersten Durchlauf den Startwert $x_0 = 1$ und im zweiten Durchlauf $x_0 = -1$. Führen Sie jeweils drei Iterationsschritte durch.

Aufgabe 8.5: Äquipotentialfläche und Tangentialebene

Gegeben seien die Funktion $f(x, y, z) = y^2 - xz$ und der Punkt $\boldsymbol{p}_0 = (1, -2, 3)^\top$.

a) Bestimmen Sie die Äquipotentialfläche der Funktion f durch den Punkt $\boldsymbol{p}_0$:

$$\boldsymbol{F} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 | \quad f(x, y, z) = f(\boldsymbol{p}_0)\}.$$

Skizzieren Sie die Schnitte der Fläche $\boldsymbol{F}$ mit zur xy-Ebene parallelen Ebenen, d. h. für konstante z-Werte. (z. B. $z = 0\pm, 1\pm, 2\pm, 3\pm$ und $z \to \infty$)

b) Bestimmen Sie $\nabla f(\boldsymbol{p}_0)$.

c) Bestimmen Sie die Hessesche Normalform der Tangentialebene $\boldsymbol{E}$ an $\boldsymbol{F}$ im Punkt $\boldsymbol{p}_0$.

d) Bestimmen Sie den Abstand der Tangentialebene $\boldsymbol{E}$ zum kritischen Punkt der Funktion f.

Aufgabe 8.6: Partielle Ableitungen

Gegeben sei die Funktion

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Berechnen Sie $f_{xy}(x, y)$ für alle $(x, y)^\top \in \mathbb{R}^2$ und untersuchen Sie, wo

$$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$$

gilt.
Sind die zweiten Ableitungen von f stetig in $(0, 0)^\top$?
Hinweis: Berechnen Sie die Ableitungen im Ursprung $(0, 0)^\top$ über die Grenzwert-Definition.

Aufgabe 8.7: Richtungsableitungen

a) Gegeben seien die skalarwertigen Funktionen

$$f(x, y, z) = y^2 - xz \qquad \text{und} \qquad g(x, y, z) = x^2 \sin(y) + \cos(z).$$

Berechnen Sie die Richtungsableitung beider Funktionen in Richtung $\boldsymbol{h} := (-2, 3, 4)^\top$.

b) Gegeben sei die folgende vektorwertige Funktion

$$\boldsymbol{f}(x, y) = (\mathrm{e}^{xy}, x^2 + y^3)^\top.$$

i) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix von $\boldsymbol{f}$ in dem Punkt $\boldsymbol{P}_1 = (1, 2)^\top$.

ii) Berechnen Sie die Richtungsableitung von $\boldsymbol{f}$ in Richtung $\boldsymbol{v} = (1, 0)^\top$ in dem Punkt $\boldsymbol{P}_2 = (1, 1)^\top$.

Aufgabe 8.8: Partielle Ableitungen

Bestimmen Sie alle ersten und zweiten partiellen Ableitungen der folgenden reellen Funktionen und geben Sie jeweils die ersten und zweiten Ableitungen in Matrixschreibweise an:

i) $f(x, y) = \mathrm{e}^{2\,xy^2}$ **ii)** $g(x, y) = x^2 \sin(2x + y)$

iii) $h(x, y) = \sin(2x) \cos(3y)$ **iv)** $k(x, y, z) = x\,y^2\,z^3$

v) $j(u, v) = \dfrac{uv}{uv - 1}$

Aufgabe 8.9: Partielle Ableitungen

Bestimmen Sie zu jeder der folgenden Funktionen $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die ersten und zweiten Ableitungen

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix}.$$

$$f(x, y) = \mathrm{e}^{2xy^2} \qquad g(x, y) = x^2 \sin(2x + y)$$
$$h(x, y) = \sin(2x) \cos(3y) \qquad k(x, y, z) = xy^2 z^3$$
$$l(x, y) = \frac{xy}{xy - 1}$$

Ergebnisse zu Aufgabe 8.1:

$I_3 = \lim_{b\to\infty} F(b) - F(0) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - 0 = \frac{\pi^2}{8}$

Ergebnisse zu Aufgabe 8.4:

Es ist $f(-3) = f(4) = 0$.

Ergebnisse zu Aufgabe 8.5:

a) $\boldsymbol{F} = \{(x, y, z)^\top \in \mathbb{R}^3 | \, y^2 - xz = 1\}$, b) $(-3, -4, -1)^\top$

Ergebnisse zu Aufgabe 8.7:

$\frac{-4x+6y+2z}{\sqrt{29}}$, $\frac{-4x \sin y + 3x^2 \cos y - 4 \sin z}{\sqrt{29}}$

Ergebnisse zu Aufgabe 8.9:

$$
\begin{aligned}
\nabla f(x,y) =& (2y^2 \mathrm{e}^{2xy^2},\, 4xy\mathrm{e}^{2xy^2})^\top \\
\nabla g(x,y) =& (2x\sin(2x+y) + 2x^2\cos(2x+y),\, x^2\cos(2x+y))^\top \\
\nabla h(x,y) =& (2\cos(2x)\cos(3y),\, -3\sin(2x)\sin(3y))^\top \\
\nabla k(x,y,z) =& (y^2z^3,\, 2xyz^3,\, 3xy^2z^2)^\top \\
\nabla l(x,y) =& = \left(\frac{-y}{(xy-1)^2}, \frac{-x}{(xy-1)^2}\right)^\top
\end{aligned}
$$

Temporary page!

LaTeX was unable to guess the total number of pages correctly. As there was some unprocessed data that should have been added to the final page this extra page has been added to receive it.
If you rerun the document (without altering it) this surplus page will go away, because LaTeX now knows how many pages to expect for this document.