

Einführende Bemerkungen

- Vermeiden Sie die Verwendung von Taschenrechnern oder Online-Ressourcen.

Aufgabe 2.1: Grenzwert Analyse - Definition

- a) Notieren Sie die Definition des Grenzwertes und zeigen Sie, dass die Folge $a_n = \frac{1}{n}$ gegen den Grenzwert $a = 0$ konvergiert.
(Dies ist gleichbedeutend mit dem Nachweis, dass $\forall k \in \mathbb{N}$ eine Zahl $N \in \mathbb{R}$ existiert, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > N$ gilt: $|a_n - a| < 10^{-k}$).
- b) Berechnen Sie den Grenzwert $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ der untenstehenden Folgen und dokumentieren Sie die Rechenregel, die Sie zur Berechnung des Grenzwertes verwendet haben (Produktregel, Einschließungssatz, Produkt beschränkter Folgen, Produkt von Nullfolgen etc).
- i) $a_n = \frac{n^2 + 5n}{3n^2 + 1}$ ii) $a_n = \log_{10}(10n^2 - 2n) - \log_{10}(n^2 + 1)$
- iii) $a_n = \frac{(n+1)!}{n! - (n+1)!}$ iv) $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3n}$
- v) $a_n = \frac{\cos n}{n}$ vi) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$
- vii) $a_n = \frac{2^n}{n!}$

Lösung 2.1:

- a) Es ist zu zeigen: $\forall k \in \mathbb{N} : \exists N \in \mathbb{R} :$

$$|n^{-1} - 0| < 10^{-k}, \forall n > N.$$

Wählen Sie $N = 10^k$, um die Eigenschaft zu zeigen.

- b) Im vorigen Aufgabenteil wurde gezeigt, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Mit dem Ergebnis aus a) gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0, \text{ for all } \alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0.$$

Des Weiteren wird die Stetigkeit der Funktionen vorausgesetzt und ausgenutzt.

- i) Teilen von Zähler und Nenner durch n^2 liefert

$$\frac{1 + \frac{5}{n}}{3 + \frac{1}{n^2}}$$

Der Grenzwert des Zählers ist 1, der Grenzwert des Nenners ist 3. Somit liefert die Quotientenregel für Grenzwerte das Ergebnis $a = \frac{1}{3}$.

- ii)

$$\begin{aligned} \log_{10}(10n^2 - 2n) - \log_{10}(n^2 + 1) &= \log_{10} \frac{10n^2 - 2n}{n^2 + 1} \\ &= \log_{10} \frac{10 - \frac{2}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}}. \end{aligned}$$

Der Grenzwert des Arguments b des Logarithmus-Terms liefert

$$b = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10 - \frac{2}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}} = 10.$$

Aufgrund der Stetigkeit der Logarithmus-Funktionen innerhalb ihres Definitionsbereichs auf $x > 0$, berechnet sich der Grenzwert zu

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} \log_{10} b_n = \log_{10} b = 1.$$

iii) Umformung des Bruchausdrucks liefert

$$\frac{(n+1)!}{n! - (n+1)!} = \frac{(n+1)n!}{n! - (n+1)n!} = \frac{(n+1)}{-n} = -\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Unter Verwendung der Summenregel ergibt sich der Grenzwert

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n! - (n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} -\left(1 + \frac{1}{n}\right) = -1.$$

iv) Es gilt

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3n} = \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)^3$$

Der Grenzwert der Folge $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ist genau die Eulersche Zahl e .

$$b = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Die Produktregel liefert dann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n^3 = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b^3 = e^3.$$

Alternativ kann auch die Stetigkeit der Funktion x^3 ausgenutzt werden, um das Ergebnis zu erhalten.

v) Die Folge

$$a_n = \frac{\cos n}{n}$$

kann als Produkt $a_n = b_n c_n$ einer beschränkten Teilfolge $b_n = \cos n \neq 0$ und einer Nullfolge $c_n = \frac{1}{n}$ aufgefasst werden. Entsprechend ist deren Produkt ebenfalls eine Nullfolge und der Grenzwert ist $a = 0$.

vi) Es gilt

$$\begin{aligned} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} &= \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{\frac{1}{n}}}. \end{aligned}$$

Unter Verwendung der Produkt und Additionsregel erhalten wir den Grenzwert $a = 0$.

vii) Die Folge $a_n = \frac{2^n}{n!}$ kann für $n > 3$ nach oben und unten beschränkt werden

$$0 \leq \frac{2^n}{n!} = \frac{\overbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \dots 2}^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \leq \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{2} \cdot \underbrace{\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{4} \dots \frac{2}{n-1}}_{\leq 1} \cdot \frac{2}{n} \leq \frac{4}{n}.$$

Da die Folge von oben und unten durch zwei Nullfolge beschränkt ist, erhält man mit dem Einschließungssatz den Grenzwert $a = 0$.

Alternativ kann das Quotientenkriterium verwendet werden:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n+1} = 0 < 1.$$

Da der Grenzwert kleiner als 1 ist, konvergiert die Folge a_n .

Aufgabe 2.2: Folgenkonvergenz

Untersuchen Sie die nachfolgenden Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie, wenn möglich, den Grenzwert:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2n^2 + 3n}{2n^2 + 7} & b_n &= \frac{2n^3 - 2}{5n^2 - 1} \\ c_n &= \frac{2n^2 + 7n + (-1)^n}{5n + 2} - \frac{2n^3 - 2}{5n^2 - 1}, & d_n &= \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n \\ e_n &= n \left(\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 - 1}\right) & f_n &= \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \text{ (mit ganzzahligem } x) \\ g_n &= \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n+1} \end{aligned}$$

Hinweise:

- Setzen Sie voraus, dass f_n konvergiert und ermitteln Sie den Grenzwert.
- Benutzen Sie zur Untersuchung von g_n das Ergebnis für f_n .

Lösung 2.2:

- a) Der Bruch wird zunächst mit dem Kehrwert der höchsten auftretenden n -Potenz ($1/n^2$) erweitert:

$$a_n = \frac{2 + \frac{3}{n}}{2 + \frac{7}{n^2}}$$

Die beiden Ausdrücke $\frac{3}{n}$ und $\frac{7}{n^2}$, die noch von n abhängen, konvergieren beide gegen Null, damit konvergieren Zähler und Nenner jeweils gegen 2 und man hat insgesamt:

$$a_n = \frac{2 + \frac{3}{n}}{2 + \frac{7}{n^2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n}}{2 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7}{n^2}} = \frac{2 + 0}{2 + 0} = 1.$$

- b) Da die n -Potenz des Zählers größer als die des Nenners ist, nehmen wir an, dass b_n divergiert. Um dies zu zeigen, schätzen wir ab:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2n^3 - 2}{5n^2 - 1} = \frac{\frac{2}{5}(5n^2 - 1)n + \frac{2}{5} \cdot n - 2}{5n^2 - 1} = \frac{2}{5}n + \underbrace{\frac{2n - 10}{25n^2 - 5}}_{\geq 0 \text{ für } n \geq 5} \\ &\geq \frac{2}{5}n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty \end{aligned}$$

Also ist b_n größer als die divergente Folge $\frac{2}{5}n$ und divergiert ebenfalls.

- c) Der Ausdruck für c_n wird zunächst auf einen Bruchstrich gebracht und dann mit dem Kehrwert der höchsten n -Potenz ($1/n^3$) erweitert:

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{(2n^2 + 7n + (-1)^n)(5n^2 - 1) - (2n^3 - 2)(5n + 2)}{(5n + 2)(5n^2 - 1)} \\ &= \frac{31n^3 + (5 \cdot (-1)^n - 2)n^2 + 3n - (-1)^n + 4}{25n^3 + 10n^2 - 5n - 2} \\ &= \frac{31 + \frac{5 \cdot (-1)^n - 2}{n} + \frac{3}{n^2} + \frac{4 - (-1)^n}{n^3}}{25 + \frac{10}{n} - \frac{5}{n^2} - \frac{2}{n^3}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{31}{25} \end{aligned}$$

Alle Ausdrücke, die noch von n abhängen, haben die Form $\frac{z}{n^l}$, wobei z entweder konstant oder zumindest beschränkt ist, deswegen konvergieren diese Ausdrücke z/n^l gegen Null.

Bringt man beide Ausdrücke nicht auf einen Hauptnenner, kann man nichts weiter über die Konvergenzeigenschaften sagen, da die einzelnen Brüche divergieren. (siehe b_n)

- d) Wir zeigen, dass d_n durch eine divergente Folge nach unten abgeschätzt werden kann und folgern die Divergenz von d_n : Für $n \geq 2$ gilt

$$\begin{aligned} d_n &= \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n-2} \\ &= \left(1 + \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n-3} \\ &= \left(1 + \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{2}{n} + \frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n-3} \\ &= \left(1 + \frac{3}{\sqrt{n}} + \dots\right) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n-3} \\ &\geq 1 + \frac{n}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

Die Ungleichung gilt, da die wegfallenden Summanden auf jeden Fall positiv sind, also kann man abschätzen:

$$d_n \geq 1 + \frac{n}{\sqrt{n}} = 1 + \sqrt{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$$

Damit muss auch für d_n gelten $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = \infty$.

- e) Wir erweitern den Ausdruck für die Folge e_n mit $(\sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{n^2 - 1})$ um die

dritte binomische Formel anzuwenden:

$$e_n = \frac{n(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1})(\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-1})}{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-1}} = \frac{n(\sqrt{n^2+1}^2 - \sqrt{n^2-1}^2)}{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-1}}$$

$$= \frac{n(n^2+1 - n^2+1)}{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-1}} = \frac{2n}{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-1}}$$

Erweitern mit dem Kehrwert der höchsten n -Potenz $\frac{1}{n}$ liefert nun

$$e_n = \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} + \sqrt{1-\frac{1}{n^2}}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{2}{1+1} = 1.$$

f) Im ersten Schritt werden nur $x > 0$ zugelassen.

Der Vollständigkeit halber überprüfen wir zunächst als Ergänzung der Aufgabenstellung, dass die Folge f_n konvergiert, dies geschieht in zwei Schritten und unter Nutzung der Bernoulli-Ungleichung

$$(1+y)^m \geq 1+my \quad \text{für } m \in \mathbb{N} \text{ und } y \geq -1$$

i) Die Folge f_n steigt monoton:

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{\left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n} = \left(\frac{1 + \frac{x}{n+1}}{1 + \frac{x}{n}}\right)^{n+1} \left(1 + \frac{x}{n}\right)$$

$$= \left(1 + \frac{-\frac{x}{n} + \frac{x}{n+1}}{1 + \frac{x}{n}}\right)^{n+1} \left(1 + \frac{x}{n}\right) = \left(1 + \frac{-x}{(n+x)(n+1)}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+x}{n}$$

$$\geq \left(1 + (n+1) \cdot \frac{-x}{(n+x)(n+1)}\right) \cdot \frac{n+x}{n} \quad (\text{Bernoulli-Ungleichung})$$

$$= \frac{n+x-x}{n+x} \cdot \frac{n+x}{n} = 1$$

$$\Rightarrow f_{n+1} \geq f_n$$

ii) Die Folge f_n ist beschränkt:

Wegen der Monotonie muss lediglich gezeigt werden, dass f_n eine obere

Schranke besitzt:

$$1 + \frac{x}{n} < 1 + \frac{2x}{n}$$

$$\leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2x} \quad (\text{Bernoulli-Ungleichung})$$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2x \cdot n}$$

$$= \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^{2x} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{2x}$$

Damit ist f_n begrenzt durch eine konvergente Folge und somit selbst auch beschränkt.

Als beschränkte, monotone Folge muss f_n auch konvergieren.

Für $x > 0$ lässt sich f_n umformen zu

$$f_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \left(\left(1 + \frac{1}{n/x}\right)^{n/x}\right)^x$$

f_n hat mit $n_k = k \cdot x$ die konvergente Teilfolge

$$f_{n_k} = \left(\left(1 + \frac{1}{k \cdot x/x}\right)^{kx/x}\right)^x = \left(\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k\right)^x \xrightarrow{k \rightarrow \infty} e^x.$$

Wenn also f_n konvergiert muss der Grenzwert mit dem der Teilfolge übereinstimmen und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = e^x.$$

Für den Fall $x < 0$ lässt sich f_n umformen zu

$$f_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \quad \text{mit } x < 0$$

$$= \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \quad \text{mit } t = -x > 0.$$

f_n hat mit $n_k = -k \cdot t$ die konvergente Teilfolge

$$f_{n_k} = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{-kt}$$

$$= \left(\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k\right)^{-t} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} e^{-t} = e^x \quad \text{mit } x < 0.$$

Es gilt also für alle $x \in \mathbb{Z}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = e^x.$$

g) Es ist

$$g_n = \left(\frac{n+1-2}{n+1} \right)^{n+1} = \left(1 + \frac{-2}{n+1} \right)^{n+1}.$$

Also ist $g_n = f_{n+1}$ mit $x = -2$ und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = e^{-2}.$$

Aufgabe 2.3: Ableitungen

Berechnen Sie die erste Ableitung der folgenden Funktionen

a) $f(x) = x^x$

b) $g(x) = x^{3^x}$

c) $h(x) = x^{\cos(x)}$

Lösung 2.3:

Wir nutzen die folgende Identität:

$$a^b = e^{b \ln(a)}.$$

a) Wir schreiben zunächst:

$$f(x) = e^{x \ln(x)}$$

Mit der Ketten- und der Produktregel erhalten wir die Ableitung

$$f'(x) = x^x (\ln(x) + 1)$$

b) Wir schreiben $g(x)$ als:

$$g(x) = e^{e^{x \ln(3)} \ln(x)}$$

Mit der Ketten- und der Produktregel erhalten wir die Ableitung

$$g'(x) = x^{3^x} \left(\ln(3) 3^x \ln(x) + \frac{3^x}{x} \right)$$

c) Wir schreiben $h(x)$ als:

$$h(x) = e^{\cos(x) \ln(x)}$$

Mit der Ketten- und Produktregel erhalten wir die Ableitung

$$h'(x) = x^{\cos(x)} \left(\frac{\cos(x)}{x} - \ln(x) \sin(x) \right)$$

Aufgabe 2.4: Differenzieren

Bestimmen Sie jeweils die erste Ableitung. (Eventuell notwendige Beschränkungen des Definitionsgebietes sind nicht angegeben.)

$$f_{11}(t) = t^2 e^{-2t} \sin(3t),$$

$$f_{12}(t) = \sqrt{t} e^{2t},$$

$$f_{13}(t) = \sin^3(e^{2t^2} + t^5),$$

$$f_{14}(t) = \sqrt{2t^2 + 1},$$

$$f_{15}(t) = \ln(t) - \ln(5t),$$

$$f_{16}(t) = \ln(t^2) - \ln(t^5).$$

Lösung 2.4:

$$\begin{aligned} f'_{11}(t) &= 2te^{-2t} \sin(3t) + t^2(-2e^{-2t}) \sin(3t) + t^2 e^{-2t} \cdot 3 \cos(3t) \\ &= te^{-2t} (2(1-t) \sin(3t) + 3t \cos(3t)) \end{aligned}$$

$$f'_{12}(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} e^{2t} + \sqrt{t} \cdot 2e^{2t} = \frac{1+4t}{2\sqrt{t}} e^{2t}$$

$$f'_{13}(t) = 3 \sin^2(e^{2t^2} + t^5) \cdot \cos(e^{2t^2} + t^5) \cdot (4te^{2t^2} + 5t^4)$$

$$f'_{14}(t) = \frac{4t}{2\sqrt{2t^2 + 1}}$$

$$f'_{15}(t) = \frac{1}{t} - \frac{5}{5t} = 0$$

$$f'_{16}(t) = \frac{d}{dt}(\ln(t^2) - \ln(t^5)) = \frac{d}{dt}(2 \ln t - 5 \ln t) = \frac{-3}{t}$$

Aufgabe 2.5: Differenzieren

Bestimmen Sie die n -te Ableitung folgender Funktionen.

$$f_{21}(t) = \sin(3t),$$

$$f_{23}(t) = t \cdot \cos(t),$$

$$f_{22}(t) = t e^{2t}$$

$$f_{24}(t) = t \ln(2t)$$

Lösung 2.5:

- i) Jedes Ableiten der Funktion f_{21} führt wegen der inneren Ableitung aus der Kettenregel zu einem Faktor 3. Außerdem ergibt jedes zweite Ableiten der äußeren Funktion (immer die Ableitung einer \cos -Funktion) einen weiteren Faktor (-1) . Die äußere Funktion wird nach gradzahligem Ableiten zu einem Sinus, bei ungradzahligen Ableitungen zu einem Kosinus. Insgesamt ergibt sich also:

$$f_{21}^{(n)}(t) = \begin{cases} 3^n \sin(3t) & \text{für } n = 4k + 0 \ (k \in \mathbb{N}_0) \\ 3^n \cos(3t) & \text{für } n = 4k + 1 \ (k \in \mathbb{N}_0) \\ -3^n \sin(3t) & \text{für } n = 4k + 2 \ (k \in \mathbb{N}_0) \\ -3^n \cos(3t) & \text{für } n = 4k + 3 \ (k \in \mathbb{N}_0) \end{cases}$$

- ii) Die erste Ableitung von f_{22} ist

$$f_{22}'(t) = e^{2t} + 2te^{2t} = e^{2t} + 2f_{22}(t).$$

Setzt man dies sukzessive fort, ergibt sich

$$\begin{aligned} f_{22}^{(n)}(t) &= n \cdot 2^{n-1} e^{2t} + 2^n f_{22}(t) \\ &= (n \cdot 2^{n-1} + 2^n \cdot t) e^{2t} = (n + 2t) 2^{n-1} e^{2t} \end{aligned}$$

- iii) Die ersten vier Ableitungen von f_{23} sind:

$$f_{23}(t) = t \cdot \cos(t),$$

$$f_{23}''(t) = -2 \sin(t) - t \cos(t),$$

$$f_{23}^{(4)}(t) = 4 \sin(t) + t \cos(t),$$

$$f_{23}'(t) = \cos(t) - t \sin(t)$$

$$f_{23}'''(t) = -3 \cos(t) + t \sin(t),$$

$$f_{23}^{(5)}(t) = 5 \cos(t) - t \sin(t)$$

Daraus ergibt sich für $n \geq 1$:

$$f_{23}^{(n)}(t) = \begin{cases} +n \cos(t) - t \sin(t) & \text{für } n = 4k + 1 \ (k \in \mathbb{N}_0) \\ -n \sin(t) - t \cos(t) & \text{für } n = 4k + 2 \ (k \in \mathbb{N}_0) \\ -n \cos(t) + t \sin(t) & \text{für } n = 4k + 3 \ (k \in \mathbb{N}_0) \\ +n \sin(t) + t \cos(t) & \text{für } n = 4k + 4 \ (k \in \mathbb{N}_0) \end{cases}.$$

- iv) Die ersten beiden Ableitungen von f_{24} sind

$$f_{24}'(t) = \ln(2t) + t \cdot \frac{2}{2t} = \ln(2t) + 1$$

$$f_{24}''(t) = \frac{1}{t}.$$

Alle weiteren Ableitungen ($n = 2, 3, \dots$) ergeben sich zu

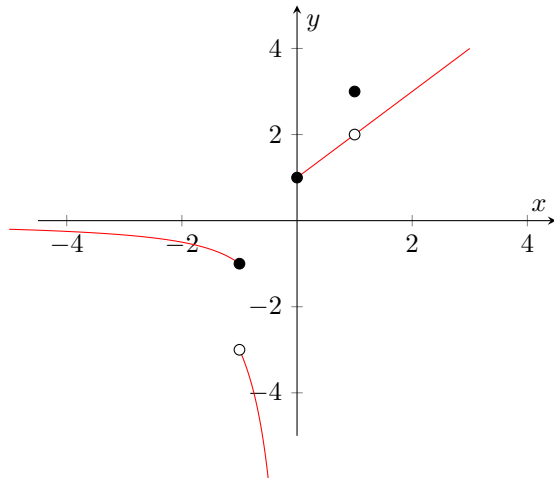
$$f_{24}^{(n)}(t) = (-1) \cdot (-2) \cdot \dots \cdot (-(n-2)) t^{-(n-1)} = (-1)^n (n-2)! t^{-(n-1)}.$$

Aufgabe 2.6: Stetigkeit

Betrachten Sie die Funktion $y = f(x)$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{für } x \in (-\infty, -1], \\ \frac{3}{x} & \text{für } x \in (-1, 0), \\ \frac{x^2-1}{x-1} & \text{für } x \in [0, 1) \cup (1, \infty), \\ 3 & \text{für } x = 1. \end{cases}$$

und deren Graphen



- Finden Sie alle Werte an denen die Funktion unstetig ist.
- Begründen Sie für jeden dieser Werte, weshalb die formale Definition der Stetigkeit verletzt ist.
- Klassifizieren Sie jede der Unstetigkeitsstellen als **Sprungstelle**, **hebbare Unstetigkeit** oder **Polstelle**.

Lösung 2.6:

Die Funktion ist unstetig bei

- $x = -1$,
- $x = 0$,
- $x = 1$.

- Die Funktion ist unstetig für $x = -1$. Diese Unstetigkeit entspricht einer Sprungstelle, da die links- und rechtsseitigen Grenzwerte existieren (sprich, auf einen endlichen Wert konvergieren), diese aber nicht übereinstimmen:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{x} = -1,$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{3}{x} = -3.$$

- Die Funktion ist unstetig bei $x = 0$. Dies ist eine Polstelle, da der linksseitiger Grenzwert nicht existiert.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3}{x} = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x + 1 = 1.$$

- Die Unstetigkeit bei $x = 1$ ist hebbar, da deren links- und rechtsseitige Grenzwerte existieren und übereinstimmen

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} x + 1 = 2,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} x + 1 = 2,$$

jedoch vom Funktionswert $f(1) = 3$ an der Stelle abweichen.
