Aufgabensammlung

Mathematik III/B

für WI/ET

Prof. Dr. Thomas Carraro

Frühjahrstrimester 2025

Inhaltsverzeichnis

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Aufgabe 1: Bernoulli'sche Differentialgleichung

Eine Differentialgleichung der Form

$$u'(x) = f(x) \cdot u(x) + g(x) \cdot \Big(u(x)\Big)^n$$

heißt **Bernoulli'sche Differentialgleichung**. Sie läßt sich mit Hilfe der Substitution

$$z(x) = \Big(u(x)\Big)^{1-n}$$

in eine lineare Differentialgleichung für $z(x)$ überführen.
Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung für $y(x)$

$$y' = \frac{-2}{x} \cdot y + x^2 \cdot y^2 \ .$$

Lösung 1:

Die Bernoulli'sche Differentialgleichung teilt man zuerst durch $\Big(u(x)\Big)^n$:

$$\frac{u'(x)}{\Big(u(x)\Big)^n} = f(x) \cdot \frac{1}{u(x)} + g(x)$$

Nun substituiert man $z(x) = \dfrac{1}{u(x)} = \Big(u(x)\Big)^{1-n}$. Es gilt

$$z'(x) = (1-n) \cdot \Big(u(x)\Big)^{-n} \cdot u'(x) = (1-n) \cdot \frac{u'(x)}{\Big(u(x)\Big)^n} 0$$

Somit wird die Bernoulli'sche Differentialgleichung in die folgende inhomogene lineare Dgl überführt:

$$\frac{z'(x)}{1-n} = f(x) \cdot z(x) + g(x)$$

Für die gegebene DGl $\quad y'(x) = \dfrac{-2}{x} y + x^2 \cdot y^2 \quad$ gilt

$$u(x) = y(x),\ n = 2,\ f(x) = \frac{-2}{x},\ g(x) = x^2.$$

Diese Gleichung geht also durch die Substitution $z(x) = (y(x))^{-1} = \dfrac{1}{y(x)}$ in eine inhomogene lineare Dgl. für $z(x)$

$$-z'(x) = -\frac{2}{x} \cdot z + x^2$$

über. Durch Trennung der Veränderlichen und Variation der Konstanten erhält man die folgende Lösung

$$\underline{z(x) = C \cdot x^2 - x^3}\,.$$

Die Rücksubstitution ergibt die gesuchte Lösung für $y(x)$:

$$\underline{\underline{y(x) = \frac{1}{C \cdot x^2 - x^3}}}\ .$$

Aufgabe 2: Definitionsbereich der Lösung einer Dgl.

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'(x) = 2\,x\,y^2$$

und die spezielle Lösung für den Anfangswert $y(0) = 4$.

Wie groß ist der maximale Definitionsbereich dieser Lösung ?

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$\cos(x) \cdot y'(x) = \sin(x) \cdot y(x).$$

Lösung 2:

a) Die Dgl. ist vom trennbaren Typ

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y^2} = \int 2x \ \mathrm{d}x \ \Rightarrow \ \frac{y^{-1}}{-1} = x^2 + C \quad \vee \quad y = 0$$

und hat die allgemeine Lösung

$$\underline{y(x) = \frac{-1}{x^2 + C} \ , \quad C \in \mathbb{R} \quad \text{bzw. } y = 0}$$

Der Anfangswert $y(0) = 4$ ergibt mit $C = -\frac{1}{4}$ die Lösung

$$\underline{y_{\mathrm{AWP}}(x) = \frac{-1}{x^2 - \frac{1}{4}}}\ .$$

Die Lösung ist nur im Bereich $\frac{-1}{2} < x < \frac{1}{2}$ definiert und hat an den Rändern bei $x = \pm\frac{1}{2}$ Polstellen.

b) Lösen der hom. lin. DGl.

$$\cos(x) \cdot y'(x) = \sin(x) \cdot y(x)$$

durch Trennung der Veränderlichen:

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x \Rightarrow \ln(|y|) = -\ln\Big(|\cos(x)|\Big) + \tilde{C} \quad \vee \quad y = 0$$

also

$$y(x) = \frac{C}{\cos(x)}, C \in \mathbb{R}\ .$$

Aufgabe 3: Differentialgleichungen 1. Ordnung

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung folgender Differentialgleichungen:

i) $y'(x) = (2\,x + 3\,y + 4)^{-4} - \dfrac{2}{3}$

ii) $u'(t) = \sqrt{\dfrac{t}{u}} + \dfrac{u}{t}, \quad t > 0$

iii) $w'(s) = \dfrac{2}{s}\,w + 15\,s^4$

Hinweis:
Zu a) Nutzen Sie die Substitution $z = ax + by + c$.
Zu b) Nutzen Sie die Substitution $z = \frac{u}{t}$.
Zu c) Es handelt sich hier um eine lineare Differentialgleichung. Lösen Sie zuerst die homogene Differentialgleichung. Bestimmen Sie anschließend die partikuläre Lösung.

Lösung 3:

a) Mit der Substitution $z(x) = 2\,x + 3\,y(x) + 4$ erhält man

$$y(x) = \frac{z(x) - 2\,x - 4}{3} \Rightarrow y'(x) = \frac{1}{3}(z'(x) - 2)\ .$$

Durch Eingesetzt in die Dgl. ergibt sich

$$z'(x) - 2 = 3\left(z^{-4} - \frac{2}{3}\right)\ .$$

Daraus folgt

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 3z^{-4}\ .$$

Trennung der Variablen:

$$\int z^4 \,\mathrm{d}z = \int 3 \,\mathrm{d}x \Rightarrow \frac{z^5}{5} = 3\,x + c \Rightarrow z(x) = (15\,x + C)^{1/5} \text{ mit } C = 5c \in \mathbb{R}\ .$$

Mit der Rücksubstitution ergibt sich:

$$y(x) = \frac{(15\,x + C)^{1/5} - 2x - 4}{3}\ .$$

b) Mit der Substitution $z(x) = \dfrac{u(t)}{t}$ erhält man

$$u(t) = tz(t) \Rightarrow u'(t) = z(t) + tz'(t)\ .$$

Einsetzen in die Dgl liefert dann

$$z + tz' = \frac{1}{\sqrt{z}} + z \quad \Rightarrow \quad z' = \frac{1}{t\sqrt{z}}\ .$$

Trennung der Variablen:

$$\int \sqrt{z}\,\mathrm{d}z = \int \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \Rightarrow \frac{2}{3}\,z^{3/2} = \ln|t| + c \Rightarrow z(t) = \left(\frac{3\ln|t|}{2} + C\right)^{2/3} \text{ mit } C = \frac{3\,c}{2} \in \mathbb{R}\ .$$

Mit der Rücksubstitution ergibt sich:

$$\frac{u(t)}{t} = \left(\frac{3\ln|t|}{2} + C\right)^{2/3} \Rightarrow u(t) = t \cdot \left(\frac{3\ln(t)}{2} + C\right)^{2/3} \text{ mit } C \in \mathbb{R},\ t > 0.$$

c) Zunächst löst man die homogene lin. Dgl.:

$$w'(s) = \frac{2}{s}\,w\ .$$

Die homogene Lösung lautet:

$$w_{\mathrm{h}}(s) = C \cdot \mathrm{e}^{\left(\int \frac{2}{s}\,\mathrm{d}s\right)} = C \cdot \mathrm{e}^{2\ln|s|} = C\mathrm{e}^{\ln(s^2)} = C\,s^2\ .$$

Damit erhält man den Produktansatz für die inhomogen lin. Dgl. $w(s) = z(s)\,s^2$. Mit $w'(s) = z'\,s^2 + z \cdot 2\,s$ wird die inhomogene Gleichung wie folgt umgeformt:

$$z'\,s^2 + z\,2\,s = \frac{2}{s}\,z\,s^2 + 15\,s^4 \Rightarrow z' = 15\,s^2 \Rightarrow z = 5\,s^3 + C\ .$$

Damit erhält man die allgemeine Lösung

$$w(s) = C\,s^2 + 5\,s^5\ .$$

Aufgabe 4: Trennung der Veränderlichen und Anfangswertproblem

Klassifizeren die folgende Differentialgleichung und bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems mit $y(0) = 0$ und $y'(0) = 6$:

$$y''(x) - 2y'(x) - 3y(x) = 0.$$

Lösung 4:

Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 3$ sind $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 3$.

Die allgemeine Lösung ist

$$y(x) = c_1 \mathrm{e}^{-x} + c_2 \mathrm{e}^{3x} \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Mit den Anfangswertbedingungen $y(0) = c_1 + c_2 \overset{!}{=} 0$ und $y'(0) = -c_1 + 3c_2 \overset{!}{=} 6$ erhalten wir das lineare System

$$\begin{array}{rcrl} c_1 & + & c_2 & = 0, \\ -c_1 & + & 3c_2 & = 6 \end{array}$$

mit Lösung $c_2 = 3/2$ und $c_1 = -3/2$. Damit ist

$$y(x) = -\frac{3}{2} \mathrm{e}^{-x} + \frac{3}{2} \mathrm{e}^{3x}.$$

Aufgabe 5: Homogene lineare Differentialgleichungen

Bestimmen Sie die allgemeinen reellen Lösungen folgender homogener linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten mit Hilfe geeigneter Ansätze für $u(t)$:

i) $u'' - 7\,u' + 10\,u = 0\ .$ **ii)** $7\,u'' + 28\,u' + 91\,u = 0\ .$

iii) $u''' - 3\,u'' = 0\ .$ **iv)** $u'''' + 8\,u'' + 16\,u = 0\ .$

Lösung 5:

Der Ansatz ist jedesmal $u(t) = \alpha\, \mathrm{e}^{\lambda t}\ ,\quad \alpha, \lambda = \mathrm{const} \in \mathbb{C}\ .$

i) Die charkt. Gl. ist: $\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2\ ,\quad \lambda_2 = 5\ .$

$$\Rightarrow \underline{\ u(t) = a\,\mathrm{e}^{2\,t} + b\,\mathrm{e}^{5\,t}\ ,\quad a, b \in \mathbb{R}\ }\ .$$

ii) Die charkt. Gl. ist: $\lambda^2 + 4\lambda + 13 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -2 \pm 3\,\mathrm{i}\ .$

$$\Rightarrow \underline{\ u(t) = \mathrm{e}^{-2\,t}\Big(a\,\cos(3t) + b\,\sin(3t)\Big)\ ,\quad a, b \in \mathbb{R}\ }\ .$$

iii) Die charkt. Gl. ist: $\lambda^3 - 3\lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 0\ ,\quad \lambda_3 = 3\ .$

$$\Rightarrow \underline{\ u(t) = a + b\,t + c\,\mathrm{e}^{3\,t}\ ,\quad a, b, c \in \mathbb{R}\ }\ .$$

iv) Die charkt. Gl. ist: $\lambda^4 + 8\lambda^2 + 16 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 2\,\mathrm{i}\ ,\quad \lambda_{3,4} = -2\,\mathrm{i}\ .$

$$\Rightarrow \underline{\ u(t) = (a + b\,t)\cdot\cos(2t) + (c + d\,t)\cdot\sin(2t)\ ,\quad a, b, c, d \in \mathbb{R}\ }\ .$$

Aufgabe 6: Inhomogene lineare Differentialgleichungen

Bestimmen Sie von folgenden inhomogenen linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten jeweils die allgemeine reelle Lösung, indem Sie zunächst die zugehörige homogene lineare Differentialgleichung allgemein lösen und eine spezielle (partikuläre) Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung mit Hilfe von geeigneten Ansätzen bestimmen.

a) $y''(x) - 5\,y'(x) + 6\,y(x) = r_k(x) \quad \text{mit}$

$$\textbf{i)}\ r_1 = 108\,x^2\ , \qquad \textbf{ii)}\ r_2 = 7\,\mathrm{e}^{3x}\ , \qquad \textbf{iii)}\ r_3 = 18 + 14\,\mathrm{e}^{3x}\ .$$

b) $y'''(x) + 25\,y'(x) = s_k(x) \quad \text{mit}$

$$\begin{array}{llll} \textbf{i)} & s_1 = 150\,x\ , & \textbf{ii)} & s_2 = \sin(x)\ , \\ \textbf{iii)} & s_3 = \sin(5x) - 200\,x\ , & \textbf{iv)} & s_4 = 6\ \sin(3x)\ \cos(2x)\ . \end{array}$$

Hinweis: Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt $\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$.

c) $y''(x) - 2\,y'(x) = t_k(x) \quad \text{mit}$

$$\textbf{i)}\ t_1 = 4\,\mathrm{e}^{2x}\ , \qquad \textbf{ii)}\ t_2 = \cosh(2x)\ .$$

Lösung 6:

a) Zunächst die zugehörige homogene lineare Differentialgleichung:

Die charkt. Gl. ist: $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \ \Rightarrow\ \lambda_1 = 2\ ,\ \ \lambda_2 = 3\ .$

$$\Rightarrow \qquad \underline{y_\mathrm{h}(x) = a\,\mathrm{e}^{2x} + b\,\mathrm{e}^{3x}\ ,\ \ a, b \in \mathbb{R}}\ .$$

i) Faustregelansatz:

$$y_\mathrm{p} = A + B\,x + C\,x^2\ \Rightarrow ; y_\mathrm{p}' = B + 2C\,x\ \text{und}\ y_\mathrm{p}'' = 2C\ .$$

Einsetzen in die Differentialgleichung:

$$2C - 5\cdot(B + 2C\,x) + 6\cdot\left(A + B\,x + C\,x^2\right) = 108\,x^2\ .$$

Koeffizientenvergleich:

$$\begin{aligned}
1: &\quad 2\,C - 5\,B + 6\,A = 0 \\
x: &\quad -10\,C + 6\,B = 0 \\
x^2: &\quad 6\,C = 108 \qquad \Rightarrow C = 18\,, \quad B = 30 \quad A = 19\,.
\end{aligned}$$

Partikuläre Lösung der inhomogen linearen Differentialgleichung:

$$\Rightarrow \quad \underline{y_\mathrm{p}(x) = 19 + 30\,x + 18\,x^2}\;.$$

Allgemeine Lösung der inhomogen linearen Differentialgleichung:

$$\Rightarrow \underline{\underline{y(x) = y_\mathrm{h} + y_\mathrm{p} = a\,\mathrm{e}^{2x} + b\,\mathrm{e}^{3x} + 19 + 30\,x + 18\,x^2\;, \quad a, b \in \mathbb{R}}}\;.$$

ii) Faustregelansatz: $y_\mathrm{p} = A\,x\,\mathrm{e}^{3x}$ „x–spendieren".

Eingesetzt:

$$\big((6A + 9A\,x) - 5 \cdot (A + 3A\,x) + 6 \cdot A\,x\big) \cdot \mathrm{e}^{3x} = 7\,\mathrm{e}^{3x} \Rightarrow A = 7 \text{ und } 0 = 0\,.$$

Partikuläre Lösung: $\underline{y_\mathrm{p}(x) = 7x\,\mathrm{e}^{3x}}$.

Allgemeine Lösung: $\underline{\underline{y(x) = y_\mathrm{h} + y_\mathrm{p} = a\,\mathrm{e}^{2x} + b\,\mathrm{e}^{3x} + 7x\,\mathrm{e}^{3x}\;, \quad a, b \in \mathbb{R}}}$.

iii) Faustregelansätze für beide Summanden der Inhomogenität einzeln.

Ansatz für $r = 18$: $y_{\mathrm{p}_1} = A \Rightarrow \underline{y_{\mathrm{p}_1}(x) = 3}$.

Für $r = 14\,\mathrm{e}^{3x}$ ergibt sich nach ii) : $\underline{y_{\mathrm{p}_2}(x) = 14x\,\mathrm{e}^{3x}}$.

Allgemeine Lösung: $\underline{\underline{y(x) = y_\mathrm{h} + y_{\mathrm{p}_1} + y_{\mathrm{p}_2} = a\,\mathrm{e}^{2x} + b\,\mathrm{e}^{3x} + 3 + 14x\,\mathrm{e}^{3x}\;, \quad a, b \in \mathbb{R}}}$.

b) Das charakteristische Polynom der Differentialgleichung ist $\lambda^3 + 25\lambda$ mit den Nullstellen $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2/3} = \pm 5\,\mathrm{i}$. Die zugehörige homogene lineare Differentialgleichung hat damit die allgemeine (reelle) Lösung

$$\underline{y_\mathrm{h}(x) = a\,\cos(5x) + b\,\sin(5x) + c\,, \quad a, b, c \in \mathbb{R}}\;.$$

i) Faustregelansatz: $y_\mathrm{p} = A\,x + B\,x^2$ („x–spendieren"). Einsetzen in die

Differentialgleichung ergibt

$$\begin{aligned} & y'''(x) + 25y'(x) \\ & = 0 + 25(A + 2Bx) \overset{!}{=} 150x \\ \Rightarrow \quad A & = 0,\ B = 3 \\ \Rightarrow \quad y_{\text{p}} & = 3\,x^2 \\ \Rightarrow \quad y(x) & = y_{\text{h}} + y_{\text{p}} = a\,\cos(5x) + b\,\sin(5x) + c + 3\,x^2\ , \quad a, b, c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

ii)

Faustregelansatz: $y_{\text{p}} = A\cos(x) + B\sin(x) \Rightarrow \underline{y_{\text{p}}(x) = -\frac{1}{24}\cos(x)}$.
Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt

$$\begin{aligned} & y'''(x) + 25y'(x) \\ & = A\sin(x) - B\cos(x) + 25(-A\sin(x) + B\cos(x)) \overset{!}{=} \sin(x) \\ \Rightarrow \quad -24A & = 1,\ 24B = 0 \\ \Rightarrow \quad y_{\text{p}} & = -\frac{1}{24}\cos(x) \end{aligned}$$

Beide Wege liefern dann die allgemeine Lösung

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{y(x) = y_{\text{h}} + y_{\text{p}} = a\,\cos(5x) + b\,\sin(5x) + c - \frac{1}{24}\cos(x)\ , \quad a, b, c \in \mathbb{R}}}\ .$$

iii) Faustregelansätze für beide Summanden einzeln:

Ansatz für $s = \sin(5x) = \operatorname{Im}(e^{i5x})$: $y_{\text{p}_1} = \operatorname{Im}(Axe^{i5x})$ („x–spendieren“) liefert nach Einsetzen in die DGL

$$A \cdot (3 \cdot (5i)^2 \cdot e^{i5x} + x \cdot (5i)^3 \cdot e^{i5x} + 25 \cdot (e^{i5x} + x \cdot 5i \cdot e^{i5x})) = e^{i5x}$$

$$A \cdot (-75 - 125ix + 25 + 125ix) = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{-50}$$

$$\Rightarrow y_{\text{p}_1} = \operatorname{Im}\left(\frac{1}{-50}xe^{i5x}\right) = -\frac{1}{50}\,x\,\sin(5x)$$

Alternativ kann mann den Ansatz $Ax\cos(5x) + Bx\sin(5x)$ benutzen. Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt

$$\begin{aligned}
&y'''(x) + 25y'(x) \\
&= -3 \cdot 25A\cos(5x) + 125Ax\sin(5x) - 3 \cdot 25B\sin(5x) - 125Bx\cos(5x) + \\
&\quad + 25(A\cos(5x) - 5Ax\sin(5x) + B\sin(5x) + 5Bx\cos(5x)) \overset{!}{=} \sin(5x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad \sin(5x) &= (-75A + 25A)\cos(5x) + (-75B + 25B)\sin(5x) \\
\Rightarrow \quad A &= 0,\ B = -\frac{1}{50} \\
\Rightarrow \quad y_{p1} &= -\frac{1}{50}\sin(x)
\end{aligned}$$

Für $s = -200$ ergibt sich die spezielle Lösung nach i) zu $\underline{y_{p_2} = -4\,x^2}$.

$$\underline{\underline{y(x) = y_h + y_{p_1} + y_{p_2} = a\ \cos(5x) + b\ \sin(5x) + c - \frac{1}{50}\,x\ \sin(5x) - 4\,x^2\ , \quad a, b, c \in \mathbb{R}}}\ .$$

iv) Die Inhomogenität ist $s_4 = 6\ \sin(3x)\ \cos(2x) = 3\Big(\sin(x) + \sin(5x)\Big)$.

Nach ii) und iii) ist damit die spezielle Lösung: $\underline{y_p = -\frac{1}{8}\ \cos(x) - \frac{3}{50}\,x\ \sin(5x)}$.

$$\underline{\underline{y(x) = y_h + y_p = a\ \cos(5x) + b\ \sin(5x) + c - \frac{1}{8}\ \cos(x) - \frac{3}{50}\,x\ \sin(5x)\ , \quad a, b, c \in \mathbb{R}}}\ .$$

c) Das charakteristische Polynom $\lambda^2 - 2\lambda$ hat die Nullstellen $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 2$. Damit ist die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen linearen Differentialgleichung

$$\underline{y_h(x) = a + b\,e^{2x}\ , \quad a, b \in \mathbb{R}}\ .$$

i) Faustregelansatz $y_p = A\,x\ e^{2x}$ („x–spendieren") $\Rightarrow$ $\underline{y_p = 2\,x\,e^{2x}}$.

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{y(x) = y_h + y_p = a + b\,e^{2x} + 2\,x\,e^{2x}\ , \quad a, b \in \mathbb{R}.}}$$

ii) Die Inhomogenität ist $t_2 = \cosh(2x) = \frac{1}{2}\,e^{2x} + \frac{1}{2}\,e^{-2x}$.

Faustregelansätze für beide Summanden einzeln:

Für $t = \frac{1}{2}\,e^{2x}$ ergibt sich nach i) $\underline{y_{p_1}(x) = \frac{1}{4}\,x\,e^{2x}}$.

Ansatz für $t = \frac{1}{2}\,e^{-2x}$: $y = A\,e^{-2x}$ (**kein** „x–spendieren" !) $\Rightarrow$ $\underline{y_{p_2} = \frac{1}{16}\,e^{-2x}}$.

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{y(x) = y_h + y_{p_1} + y_{p_2} = a + b\,e^{2x} + \frac{1}{4}\,x\,e^{2x} + \frac{1}{16}\,e^{-2x}\ , \quad a, b \in \mathbb{R}}}$$

Aufgabe 7: Differentialgleichungen erster Ordnung

a) Klassifizieren Sie die Differentialgleichung 1. Ordnung

$$u'(t) = \frac{-2\,u(t)}{t} + 5\,t^2 \ , \quad t > 0 \ ,$$

und bestimmen Sie dann alle Lösungen der Differentialgleichung.

b) Lösen Sie das Anfangswertproblem für $t > 0$

$$u'(t) = \left(\frac{2\,u(t)}{t}\right)^2 + \frac{u(t)}{t} \ , \quad u(1) = -2 \ .$$

Lösung 7:

a) Klassifikation: explizit, linear, variable Koeffizienten, inhomogen.

(Hinweis: Mindestens die 3 letzten Eigenschaften müssen benannt sein!)

Die homogene lineare Dgl. $u'(t) = -2\,u(t)/t$ ist eine trennbare Dgl.

$$\int \frac{1}{u}\ \mathrm{d}u = \int \frac{-2}{t}\ \mathrm{d}t \Rightarrow u_h(t) = \frac{c}{t^2} \ .$$

Die Lösung der inhomogen linearen Dgl. erhält man mit dem Produktansatz

$$u_{allg}(t) = c(t)/t^2 \ .$$

Das Einsetzen in die inhomogene Gleichung ergibt

$$\frac{-2}{t^3} \cdot c(t) + c'(t) \cdot \frac{1}{t^2} = \frac{-2\,\frac{c(t)}{t^2}}{t} + 5\,t^2 \Rightarrow c'(t) = 5\,t^4 \ .$$

Die Integration ergibt die Funktion $c(t)$ und dann die allgemeine Lösung

$$c(t) = t^5 + C \Rightarrow \underline{\underline{u_{allg}(t) = t^3 + \frac{C}{t^2}}} \ .$$

b) Die Substitution $z(t) = u(t)/t$ ergibt $u(t) = tz(t)$, $u'(t) = z(t) + tz'(t)$. Eingesetzt in die Dgl. erhält man

$$z + tz' = \left(2\,z\right)^2 + z \Rightarrow z' = \frac{4\,z^2}{t} \ .$$

Die trennbare Dgl. für $z(t)$ hat die Lösung $z(t) = -1/(4\,\ln(t) + C)$. Rücksubstitution ergibt die allgemeine Lösung

$$u(t) = z(t) \cdot t = \frac{-t}{4\,\ln(t) + C}\ .$$

Einsetzen der Anfangswerte ergibt $C = 1/2$ und damit die Lösung des AWPs zu

$$\underline{\underline{u_{\mathrm{AWP}}(t) = \frac{-2\,t}{8\,\ln(t) + 1}}}\ .$$

Aufgabe 8: Lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung

Bestimmen Sie die allgemeinen Lösungen der folgenden Differentialgleichungen:

a) $y^{(4)} + 2y''' + y'' = 12x$,

b) $y'' + 4y' + 5y = 8\sin t$,

c) $y'' - 4y' + 4y = \mathrm{e}^{2x}$.

Lösung 8:

a) Das Polynom $p(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^3 + \lambda^2$ hat die Nullstellen
$\lambda_{1/2} = 0$ (doppelte Nullstelle), $\lambda_{3/4} = -1$ (ebenfalls doppelt).
Ein Fundamentalsystem ist also $\{1, x, \mathrm{e}^{-x}, x\mathrm{e}^{-x}\}$.
Für die Partikulärlösung ist der Ansatz $y_p(x) = (ax+b)x^2 = ax^3+bx^2$ sinnvoll.

$$y_p'(x) = 3ax^2 + 2bx, y_p''(x) = 6ax + 2b, y_p^{(3)}(x) = 6a \text{ und } y_p^{(4)}(x) = 0$$

Eingesetzt in die DGL:

$$0 + 12a + 6ax + 2b = 12x$$

Koeffizientenvergleich liefert dann $a = 2$, $b = -6a = -12$. Die allgemeine Lösung der Gleichung ist

$$y(x) = c_1 + c_2 x + c_3 \mathrm{e}^{-x} + c_4 x\mathrm{e}^{-x} - 12x^2 + 2x^3 \text{ mit } c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}.$$

b) Das Polynom $p(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda + 5$ hat die Nullstellen

$$\lambda_1 = -2 + i, \lambda_2 = -2 - i$$

Die homogene Lösung ist dann

$$y_h = C_1 \mathrm{e}^{-2t+it} + C_2 \mathrm{e}^{-2t-it} = \mathrm{e}^{-2t}(C_1(\cos t + i\sin t) + C_2(\cos t - i\sin t))$$
$$= \mathrm{e}^{-2t}(c_1\cos t + c_2\sin t), \text{ wobei } C_1 = \overline{C_2} = \frac{ic_1 + c_2}{2}$$

Eine Partikulärlösung berechnet man für die rechte Seite $8\sin t = \mathrm{Im}(8\mathrm{e}^{it})$ mit dem Ansatz $y_p(t) = \mathrm{Im}(a\mathrm{e}^{it})$.
Man erhält durch Einsetzen in die DGL

$$a(-1 + 4i + 5)\mathrm{e}^{it} = 8\mathrm{e}^{it} \Rightarrow a = \frac{2}{1+i} = 1 - i$$

Damit ist

$$y_p(t) = \operatorname{Im}((1-i)e^{it}) = \operatorname{Im}\Big((1-i)(\cos t + i\sin t)\Big) = \sin t - \cos t$$

eine Partikulärlösung . Die allgemeine Lösung der Gleichung ist

$$y(t) = e^{-2t}(c_1\cos t + c_2\sin t) + \sin t - \cos t.$$

c) Es ist $p(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda-2)^2$.
Das Polynom hat die doppelte Nullstelle $\lambda = 2$.
Ein Fundamentalsystem ist daher $\{e^{2x}, xe^{2x}\}$.
Mit dem Ansatz $y_p(x) = ax^2e^{2x}$ folgt

$$y_p'(x) = a(2x^2+2x)e^{2x},\ y_p''(x) = a(4x^2+8x+2)e^{2x}$$

Das Einsetzen in die DGL liefert somit

$$ae^{2x}(4x^2+8x+2-8x^2-8x+4x^2) = e^{2x}$$

Daraus folgt $a = 1/2$.
Die allgemeine Lösung lautet

$$y(x) = \left(c_1 + c_2x + \frac{1}{2}x^2\right)e^{2x} \text{ mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 9: Lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung

Bestimmen Sie die allgemeinen Lösungen der folgenden Differentialgleichungen:

a) $y^{(4)} + 4y = 0,$

b) $y^{(4)} - 18y'' + 81y = 0.$

Lösung 9:

a) Das charakteristische Polynom ist $p(\lambda) = \lambda^4 + 4$, mit den Nullstellen $\lambda_\ell = \sqrt{2}\mathrm{e}^{i(\pi/2+k\pi)/2}$ for $k = 0, 1, 2, 3,$

$$\lambda_0 = 1 + i, \lambda_1 = -1 + i, \lambda_2 = -1 - i, \lambda_3 = 1 - i.$$

Das Fundamentalsystem ist dann

$$\{e^x \cos x, e^x \sin x, \mathrm{e}^{-x} \cos x, \mathrm{e}^{-x} \sin x\}$$

Die allgemeine Lösung ist also gegeben als

$$y(x) = c_1 e^x \cos x + c_2 e^x \sin x + c_3 \mathrm{e}^{-x} \cos x + c_4 \mathrm{e}^{-x} \sin x \text{ with } c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}.$$

b) Von der gegebenen Gleichung

$$y^{(4)} - 18y'' + 81y = 0,$$

ist das charakteristische Polynom

$$\lambda^4 - 18\lambda^2 + 81 = 0$$

und kann geschrieben werden als

$$(x^2 - 9)^2 = (x - 3)^2 \cdot (x + 3)^2 = 0$$

mit den zwei doppelten Nullstellen: $\lambda_1 = -3$ und $\lambda_2 = 3$. Die allgemeine Lösung der hommogenen Differentialgleichung ist

$$y(x) = (c_1 + c_2 x)e^{-3x} + (c_3 + c_4 x)e^{3x}.$$

Die Koeffizienten vor der Exponentialfunktion sind lineare Funktionen, weil es sich um doppelte Nulstellen handelt.

Aufgabe 10: Komplexe Nullstellen des charakteristischen Problems

Bestimmen Sie die Lösung der folgenden Differentialgleichung:

$$y'' + 4y' + 5y = 0$$

Lösung 10:

a) Das charakteristische Polynom $p(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda + 5$ hat die Nullstellen

$$\lambda_1 = -2 + i, \lambda_2 = -2 - i$$

die Lösung ist dann

$$\begin{aligned} y &= C_1 \mathrm{e}^{-2t + \mathrm{i}t} + C_2 \mathrm{e}^{-2t - \mathrm{i}t} \\ &= \mathrm{e}^{-2t}(C_1(\cos t + \mathrm{i}\sin t) + C_2(\cos t - \mathrm{i}\sin t)) \\ &= \mathrm{e}^{-2t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t) \end{aligned}$$

wobei die reellem Konstanten $c_1 = C_1 + C_2$ und $c_2 = i(C_1 - C_2)$ sind.

Die komplexen Konstanten können durch die rellen Konstanten wie folgt ausgedrückt werden: $C_1 = \overline{C_2} = \dfrac{c_1 - \mathrm{i}c_2}{2}$.

Aufgabe 11: Lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung

Bestimmen Sie die allgemeinen Lösungen der folgenden Differentialgleichungen. Falls Anfangswerte gegeben sind, ermitteln Sie auch die Lösung des Anfangswertproblems.

a) $y'' + 6y' + 8y = 0,$

b) $y'' + 2y' + 5y = 17\ \sin(2x).$

c) $y''(x) - 2y'(x) - 3y(x) = 4\mathrm{e}^{x}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 6,$

d) $y''(x) + 5y'(x) + 6y(t) = 3\mathrm{e}^{3x},$

e) $y''(x) - y'(x) - 2y(x) = 4x\mathrm{e}^{x}.$

f) $y''' + y'' - y' - y = 3\mathrm{e}^{-2x},$

Lösung 11:

a) Das charakteristische Polynom $p(\lambda) = \lambda^2 + 6\lambda + 8$ hat die Nullstellen $\lambda_1 = -2$ und $\lambda_2 = -4$. Damit ist

$$y(x) = c_1\mathrm{e}^{-2x} + c_2\mathrm{e}^{-4x} \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

b) Das charakteristische Polynom $p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 5$ hat die Nullstellen $\lambda_{1/2} = -1 \pm \sqrt{1-5} = -1 \pm 2i$. Damit hat man das reelle Fundamentalsystem

$$\left\{\mathrm{e}^{-x}\cos(2x), \mathrm{e}^{-x}\sin(2x)\right\}.$$

Reeller Ansatz
Ein Ansatz für eine Partikulärlösung ist

$$y_p(x) = A\cos(2x) + B\sin(2x).$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert:

$$\begin{aligned}17\sin(2x) \overset{!}{=} &-4A\cos(2x) - 4B\sin(2x) - 4A\sin(2x) + 4B\cos(2x) + 5A\cos(2x) + 5B\sin(2x)\\ =&(-4A + 4B + 5A)\cos(2x) + (-4B - 4A + 5B)\sin(2x).\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich führt dann zum linearen Gleichungssystem für A und B:

$$\begin{aligned}\cos(2x): &\quad A + 4B &= 0\\ \sin(2x): &\quad -4A + B &= 17\end{aligned}$$

Mit der Lösung $B = 1$ und $A = -4$ haben wir die Partikulärlösung

$$y_p(x) = -4\cos(2x) + \sin(2x)$$

Die Gesamtlösung lautet also

$$y(x) = \sin(2x) - 4\cos(2x) + c_1 \mathrm{e}^{-x}\cos(2x) + c_2 \mathrm{e}^{-x}\sin(2x).$$

c) Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 3$ sind $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 3$. Eine Partikulärlösung der inhomogenen Gleichung berechnet man mit dem Ansatz $y_p(x) = ae^x$, es folgt $-4ae^x \overset{!}{=} 4e^x$ und damit $a = -1$. Die allgemeine Lösung ist

$$y_{allg}(x) = -e^x + c_1\mathrm{e}^{-x} + c_2\mathrm{e}^{3x} \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Aus den Anfangsbedingungen $y(0) = -1 + c_1 + c_2 \overset{!}{=} 0$ und $y'(0) = -1 - c_1 + 3c_2 \overset{!}{=} 6$ folgt das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} c_1 \;+\; c_2 &= 1, \\ -c_1 \;+\; 3c_2 &= 7 \end{aligned}$$

mit Lösung $c_2 = 2$ und $c_1 = -1$. Damit ist

$$y_{AWP}(x) = -e^x - \mathrm{e}^{-x} + 2\mathrm{e}^{3x}.$$

d) Man berechnet zuerst die Lösungen der homogenen Gleichung

$$y'' + 5y' + 6y = 0.$$

Das charakteristische Polynom $p(\lambda) = \lambda^2 + 5\lambda + 6$ hat die Nullstellen $\lambda_1 = -2$ und $\lambda_2 = -3$. Ein Fundamentalsystem ist $\{\mathrm{e}^{-2x}, \mathrm{e}^{-3x}\}$. Nun braucht man noch eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung. Diese berechnet man mit dem Ansatz $y_p(x) = a\mathrm{e}^{3x}$ mit $a \in \mathbb{R}$. Einsetzen in die inhomogene DGl liefert $(9 + 15 + 6)a\mathrm{e}^{3x} = 3\mathrm{e}^{3x}$, also $a = 1/10$. Die allgemeine Lösung der Gleichung ist

$$y(x) = c_1\mathrm{e}^{-2x} + c_2\mathrm{e}^{-3x} + \frac{1}{10}\mathrm{e}^{3x} \text{ mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

e) Das Polynom $p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 2$ hat die Nullstellen $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = -1$, dies ergibt das Fundamentalsystem $\{\mathrm{e}^{2x}, \mathrm{e}^{-x}\}$. Der Ansatz für die Partikulärlösung ist $y_p(x) = (ax + b)e^x$. Mit $y_p'(x) = (ax + a + b)e^x$ und $y_p'' = (ax + 2a + b)e^x$

folgt

$$\mathrm{e}^x(ax+2a+b-(ax+a+b)-2(ax+b)) = 4x\mathrm{e}^x$$

$$-2ax+a-2b = 4x$$

Koeffizientenvergleich liefert dann $a = -2$ und $2b = a$, $b = -1$. Damit hat man die allgemeine Lösung

$$y(x) = c_1\mathrm{e}^{2x} + c_2\mathrm{e}^{-x} - (2x+1)e^x \text{ mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

f) Das charakteristische Polynom ist $p(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 - \lambda - 1$. Eine Nullstelle kann man raten, zum Beispiel $\lambda_1 = 1$. Polynomdivision oder Anwendung des Horner–Schemas liefert dann

$$p(\lambda) = (\lambda - 1)\Big(\lambda^2 + 2\lambda + 1\Big),$$

damit ist $\lambda_2 = -1$ eine weitere, und zwar doppelte, Nullstelle. Folglich hat die homogene Gleichung das Fundamentalsystem

$$\Big\{e^x, \mathrm{e}^{-x}, x\mathrm{e}^{-x}\Big\}.$$

Zur Berechnung einer Partikulärlösung benutzt man den Ansatz $y_p(x) = a\mathrm{e}^{-2x}$. Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$a\mathrm{e}^{-2x}\Big(-8+4+2-1\Big) \stackrel{!}{=} 3\mathrm{e}^{-2x}$$

und damit $a = -1$. Die allgemeine Lösung ist also

$$y(x) = -\mathrm{e}^{-2x} + c_1\mathrm{e}^x + c_2\mathrm{e}^{-x} + c_3x\mathrm{e}^{-x} \quad \text{mit } c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 12: LR-Kreis

Ein Stromkreis habe einen Widerstand von $R = 0.8$ Ohm und eine Selbstinduktion von $L = 4$ Henry. Bis zur Zeit $t_0 = 0$ fließe kein Strom. Dann wird eine Spannung von $U = 5$ Volt angelegt. Nach 5 Sekunden wird die Spannung abgeschaltet. Berechnen Sie den Stromverlauf $I(t)$ für $0 \leq t \leq 5$ und $t > 5$.
Hinweis: In diesem Stromkreis gilt $L\dot{I}(t) + RI(t) = U(t)$

Lösung 12:

Es gilt gilt die Differentialgleichung

$$L\dot{I}(t) + RI(t) = U(t)$$

Für $0 \leq t \leq 5$ gilt $U(t) = 5$. Die Trennung der Variablen führt zu

$$\int \frac{dI}{U - RI} = \int \frac{1}{L}\, dt, \Rightarrow -\frac{1}{R} \ln |U - RI(t)| = \frac{1}{L} t + c_1\,, \quad c_1 \in \mathbb{R}\,.$$

Auflösen nach $I(t)$ liefert (mit $c_2 = \mathrm{e}^{c_1}$)

$$U - RI(t) = c_2 e^{-Rt/L}$$

und somit

$$I(t) = \frac{1}{R}\Big(U - c_2 e^{-Rt/L}\Big)\,.$$

Einsetzen der Anfangsbedingung $I(0) = 0$ ergibt $c_2 = U$ und

$$I(t) = \frac{U}{R}\Big(1 - e^{-R/Lt}\Big)\,.$$

Einsetzen der gegebenen Zahlenwerte ergibt die Lösung

$$I(t) = 6.25 \left(1 - e^{-0.2t}\right) \text{ für } 0 < t < 5\,.$$

Im Zeitraum $t > 5$ ist $U(t) = 0$ und der Anfangsstrom ist

$$I(5) = I_0 = 6.25 \left(1 - e^{-1}\right)\,.$$

Die Lösung der Differentialgleichung ist

$$\int \frac{dI}{I} = -\int \frac{R}{L} dt \Rightarrow \ln |I(t)| = -\frac{R}{L} t + c_3$$

und damit

$$I(t) = c_4 e^{-Rt/L}\,.$$

Aus $I(t_0) = I_0$ folgt

$$I(t) = I_0 e^{-R(t-t_0)/L} \ .$$

Einsetzen der Zahlenwerte ergibt die Lösung

$$I(t) = 6.25\Big(1 - e^{-1}\Big)e^{-0.2(t-5)} \text{ für } t > 5 \ .$$

Aufgabe 13: Logistisches Wachstum

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(t) = \lambda(k - y(t))y(t) \quad , \quad y(0) = y_0$$

wobei $k, \lambda \in \mathbb{R}$.

Lösung 13:

Wir lösen diese Differentialgleichung durch Trennung der Variablen.

$$\int \frac{1}{(k - y(t))y(t)} \mathrm{d}y = \int \lambda \mathrm{d}t$$

Das Integral auf der linken Seite lösen wir mit einer Partialbruchzerlegung.

$$\frac{1}{(k-y)y} = \frac{A}{k-y} + \frac{B}{y}$$

Durch Multiplikation mit dem Nenner erhalten wir

$$Ay + B(k - y) = 1$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} A - B &= 0 \\ B &= \frac{1}{k} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{k}\frac{1}{k-y} + \frac{1}{k}\frac{1}{y} \mathrm{d}y &= \int \lambda \mathrm{d}t \\ \frac{1}{k}\int \left(-\frac{1}{y-k} + \frac{1}{y}\right) \mathrm{d}t &= \int \lambda \mathrm{d}t \\ \frac{1}{k}(\ln|y| - \ln|y-k|) &= \lambda t + c^* \\ \frac{1}{k}\ln|\frac{y}{y-k}| &= \lambda t + c^* \end{aligned}$$

Wir stellen die Gleichung nach y um.

$$\begin{aligned}
\frac{y}{y-k} &= c\,\mathrm{e}^{\lambda k t} \\
\frac{1}{1-\frac{k}{y}} &= c\,\mathrm{e}^{\lambda k t} \\
1 &= \left(1-\frac{k}{y}\right) c\,\mathrm{e}^{\lambda k t} \\
1 - c\,\mathrm{e}^{\lambda k t} &= -\frac{ck}{y}\,\mathrm{e}^{\lambda k t} \\
y &= -\frac{ck\,\mathrm{e}^{\lambda k t}}{1-c\,\mathrm{e}^{\lambda k t}}
\end{aligned}$$

Mit dem Anfangswert erhalten wir

$$\begin{aligned}
y_0 = y(0) &= -\frac{ck}{1-c} \\
y_0 &= \frac{k}{1-\frac{1}{c}} \\
\left(1-\frac{1}{c}\right) y_0 &= k \\
\frac{1}{c} y_0 &= k - y_0 \\
c &= \frac{y_0}{y_0-k}
\end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung ist

$$y = -\frac{ck\,\mathrm{e}^{\lambda k t}}{1-c\,\mathrm{e}^{\lambda k t}}$$

Die spezielle Lösung erhalten wir durch einsetzen der Konstanten.

$$\begin{aligned}
y &= \frac{y_0}{k-y_0} \frac{k}{\mathrm{e}^{\lambda k t} + \frac{y_0}{k-y_0}} \\
&= \frac{y_0 k}{y_0 + (k-y_0)\,\mathrm{e}^{-\lambda k t}}
\end{aligned}$$

Aufgabe 14: Differentialgleichungen erster Ordnung

1) Klassifizieren Sie die follgenden gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung als

a) Linear oder nicht-linear.

b) In dem Fall einer linearen Differentialgleichung klassifizieren Sie die Gleichung zusätzlich als

- homogen oder inhomogen.
- Differentialgleichung mit konstanten oder nicht-konstanten Koeffizienten.

c) Nutzen Sie die Vorlesungsunterlagen, um die Differentialgleichung als einen der folgenden Typen zu klassifizieren:

(a) $y' = f(x) \cdot g(y)$, zu lösen mittels Trennung der Variablen,

(b) $y' = g(y/x)$, homogen, zu lösen mittels Substitution mit $u = y/x$,

(c) $y' = f(ax + by + c)$, rechte Seite mit bilinearen Argumenten, zu lösen mit der Substitution $u = ax + by + c$,

(d) $y' + p(x) \cdot y = q(x)$, lineare Differentialgleichung.

i) $y' + 2y = 3x$.

ii) $y'y + x = 0$.

iii) $y' = \frac{x^2+y^2}{xy}$.

iv) $y' = (x + y + 1)^2$.

v) $x^2y' = xy + 2y^2$.

vi) $y' = \frac{y(x-y)}{x^2}$.

vii) $y' = \frac{x-y}{x+y}$.

viii) $y' = \ln(y + 2x + 1)^2$.

2) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Gleichungen **i)** bis **iv)**.

Lösung 14:

1) **i)** $y' + 2y = 3x$. Linear, inhomogen, mit konstanten Koeffizients, Typ: rechte Seite mit bilinearen Koeffizienten.

ii) $y'y + x = 0$. Nicht-linear, Typ: Trennung der Variablen.

iii) $y' = \frac{x^2+y^2}{xy}$. Nicht-linear, Typ: homogen mit Substitution $u = y/x$.

iv) $y' = (x + y + 1)^2$. Nicht-linear, Typ: rechte Seite mit bilinearen Argumenten.

v) $x^2y' = xy + 2y^2$. Nicht-linear, Typ: homogen mit Substitution $u = y/x$.

vi) $y' = \frac{y(x-y)}{x^2}$. Nicht-linear, Typ: homogen mit Substitution $u = y/x$.

vii) $y' = \frac{x-y}{x+y}$. Nicht-linear, Typ: homogen mit Substitution $u = y/x$.

viii) $y' = \ln(y + 2x + 1)^2$. Nicht-linear, Typ: rechte Seite mit bilineren Argumenten.

2) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Gleichungen **i)** und **ii)**.

Zu **i)**

Die Gleichung kann als lineare Gleichung gelöst werden: Die Gleichung ist linear, erster Ordnung, mit konstanten Koeffizienten und inhomogen. Die Lösung kann als Summe aus der Lösung der homogenen Gleichung und einer partikulären Lösung bestimmt werden:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x).$$

Die Lösung der homogenen Gleichung mit dem allgemeinen Lösungsverfahren für den Fall mit nicht-konstanten Koeffizienten, den wir hier zeigen. Man kann die Lösung auch durch Berechnung der Nullstellen des charakteristischen Polynoms bestimmen. Dieser Methode wird später gezeigt.

Die Gleichung kann interpretiert werden vom Typ rechte Seite mit bilinearen Argumenten.

$$y' = f(ax + by + c) = 3x - 2y$$

und wird mit der Substitution, wie unten gezeigt, gelöst.

Wir beginnen mit der allgemeinen Methode. Die Lösung des homogenen Problems ist

$$y_h(x) = C\,\mathrm{e}^{-P(x)},$$

wobei

$$P(x) = \int^x p(t)\mathrm{d}t$$

und $p(x)$ in diesem Fall 2 ist, sodass $P(x) = 2x$ gilt und

$$y_h(x) = C\,\mathrm{e}^{-2x}\,.$$

Für die partikuläre Lösung nutzen wir die Methode der Variation der Konstanten

$$y_p(x) = C(x)\,\mathrm{e}^{P(x)} = C(x)\,\mathrm{e}^{-2x}\,.$$

Wir nutzen dieselbe Ansatzfunktion wie im homogenen Teil aber multipliziert mit der Funktion $C(x)$ statt der Konstanten C. Um den Ausdruck für $C(x)$ zu bestimmen, leiten wir $y_p(x)$ ab

$$y_p'(x) = C'(x)\,\mathrm{e}^{-2x} - 2C(x)\,\mathrm{e}^{-2x}$$

und setzen y und y' in die Differentialgleichung ein

$$\begin{aligned} C'(x)\,\mathrm{e}^{-2x} - 2C(x)\,\mathrm{e}^{-2x} + 2C(x)\,\mathrm{e}^{-2x} &= 3x \\ C'(x)\,\mathrm{e}^{-2x} &= 3x \\ C'(x) &= 3x\,\mathrm{e}^{2x} \\ \int \mathrm{d}C &= 3\int x\,\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Das Integral auf der rechten Seite wird mit partieller Integration berechnet

$$u = x, \quad u' = 1,$$
$$v' = \mathrm{e}^{2x}, \quad v = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2x}.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \int x\,\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2x} - \int \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2x} - \frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{2x} + \tilde{C} \\ &= \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2x}(x - \frac{1}{2}) + \tilde{C}. \end{aligned}$$

Zurück zu dem Integral

$$\int \mathrm{d}C = 3\int x\,\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x,$$

erhalten wir

$$C(x) = \frac{3}{2}\,\mathrm{e}^{2x}(x - \frac{1}{2}) + \tilde{C}.$$

Die Konstante $\tilde{C}$ kann null gesetzt werden, weil sie bereits in der Lösung der homogenen Gleichung berücksichtigt wurde.

Die partikuläre Lösung ist

$$\begin{aligned} y_p(x) = C(x)\,\mathrm{e}^{-2x} &= \left(\frac{3}{2}\,\mathrm{e}^{2x}(x - \frac{1}{2})\right)\mathrm{e}^{-2x} \\ &= \frac{3}{2}(x - \frac{1}{2}). \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung ist

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C\,\mathrm{e}^{-2x} + \frac{3}{2}(x - \frac{1}{2}).$$

Wir lösen die Gleichung nun als Typ: rechte Seite mit bilinearen Argumenten.

$$y' = f(ax + by + c) = 3x - 2y.$$

Mit der Substitution $u = 3x - 2y$, erhalten wir

$$u' = 3 - 2y'.$$

Da $y' = 3x - 2y = u$ gilt

$$u' = 3 - 2u.$$

Diese lösen wir mit Trennung der Variablen

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= 3 - 2u \\
\int \frac{\mathrm{d}u}{3 - 2u} &= \int \mathrm{d}x \\
-\frac{1}{2} \ln |3 - 2u| &= x + C \\
\frac{1}{3 - 2u} &= C\,\mathrm{e}^{2x},
\end{aligned}$$

mit der Rücksubstitution erhalten wir

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3 - 6x + 4y} &= C\,\mathrm{e}^{2x} \\
3 - 6x + 4y &= C\,\mathrm{e}^{-2x} \\
y &= C\,\mathrm{e}^{-2x} + \frac{3}{2}x - \frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

Die Differentialgleichung gelöst werden als lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten:

Wir bestimmen das charakteristische Polynom

$$p(\lambda) = \lambda + 2$$

mit den Nullstellen $\lambda = -2$. Damit ist die Lösung der homogenen Gleichung

$$y_h(x) = C\,\mathrm{e}^{\lambda x} = C\,\mathrm{e}^{-2x}\,.$$

Der Ansatz für die partikuläre Lösung ist

$$y_p(x) = A_1 x + A_0.$$

Durch Ableiten erhalten wir

$$y_p'(x) = A_1.$$

Wir setzen y_p und y_p' in die Differentialgleichung ein und erhalten

$$A_1 + 2A_1 x + 2A_0 = 3x.$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert

$$\begin{aligned} 2A_1 &= 3 \\ A_1 + 2A_0 &= 0 \end{aligned}$$

wodurch wir die Werte $A_0 = -\frac{3}{4}$ und $A_1 = \frac{3}{2}$ erhalten und die partikuläre Lösung

$$y_p(x) = \frac{3}{2}x - \frac{3}{4}.$$

Die allgemeine Lösung ist wieder

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C\,\mathrm{e}^{-2x} + \frac{3}{2}x - \frac{3}{4}.$$

Zu **ii)**

Die Gleichung

$$y'y = -x,$$

ist vom Typ: Trennung der Variablen

$$
\begin{aligned}
\int y \mathrm{d}y &= -\int x \mathrm{d}x \\
\frac{y^2}{2} &= -\frac{x^2}{2} + \widetilde{C} \\
y^2 &= C - x^2, \quad C = 2\widetilde{C}, \\
y &= \pm\sqrt{C - x^2}.
\end{aligned}
$$

Die Gleichung $y'y - x = 0$ kann auch interpretiert werden als
Typ: nicht-linear, homogen mit der Substitution $u = y/x$

$$
y' = -\frac{x}{y}
$$

und kann mit der Substitution $u = \frac{y}{x}$ gelöst werden.

Aus der Beziehung $ux = y$, erhalten wir durch differenzieren beider Seiten

$$
u'x + u = y',
$$

wobei wir die Produktregel benutzen. Mit der Substitution $y' = -\frac{1}{u}$ erhalten wir

$$
\begin{aligned}
u'x + u &= -\frac{1}{u} \\
u' &= -\frac{1}{x}(u + \frac{1}{u}) \\
\int \frac{u}{u^2+1} \mathrm{d}u &= \int -\frac{1}{x} \mathrm{d}x \\
\frac{1}{2}\ln(u^2+1) &= -\ln x + \ln \widetilde{C} \\
u^2 + 1 &= \frac{C}{x^2}, \quad C = \widetilde{C}^2 \\
u^2 &= \frac{C}{x^2} - 1,
\end{aligned}
$$

durch die Rücksubstitution erhalten wir

$$
\begin{aligned}
u^2 &= \frac{C}{x^2} - 1, \\
\frac{y^2}{x^2} &= \frac{C}{x^2} - 1, \\
y^2 &= C - x^2 \\
y &= \pm\sqrt{C - x^2}.
\end{aligned}
$$

Zu **iii)** Wir schreiben die Differentialgleichung als

$$y' = \frac{x^2+y^2}{xy} = \frac{x^2}{xy} + \frac{y^2}{xy} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}.$$

Wir nutzen nun die Substitution $u = \frac{y}{x}$. Wir berechnen die Ableitung von $y = u(x)x$.

$$y' = u'x + u.$$

Durch Einsetzen erhalten wir:

$$u'x + u = \frac{1}{u} + u.$$

Dies vereinfacht sich zu

$$u'x = \frac{1}{u}.$$

Diese Gleichung können wir mit Trennung der Variablen lösen

$$\begin{aligned} u\mathrm{d}u &= \frac{1}{x}\mathrm{d}x \\ \int u\mathrm{d}u &= \int \frac{1}{x}\mathrm{d}x \\ \frac{1}{2}u^2 &= \ln|x| + C \\ u &= \pm\sqrt{2\ln|x| + C}. \end{aligned}$$

Mit Rücksubstitution erhalten wir die Lösung

$$y = \pm x\sqrt{2\ln|x| + C}.$$

Zu **iv)**

$$y' = (x+y+1)^2$$

Wir lösen die Gleichung mittels der Substitution $u = x + y + 1$. Es gilt

$$y' = u' - 1$$

Damit erhalten wir

$$u' - 1 = u^2$$

Mit der Trennung der Variablen erhalten wir

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}u}{u^2+1} &= 1\mathrm{d}x \\
\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2+1} &= \int 1\mathrm{d}x \\
\arctan(u) &= x + C \\
u &= \tan(x+C)
\end{aligned}$$

Wir erhalten die Lösung durch Rücksubstitution

$$y = \tan(x+C) - x - 1$$

Aufgabe 15: Differentialgleichungen erster Ordnung

Klassifizieren Sie die folgenden Differentialgleichungen erster Ordnung:

1. $x^2y' = 2y + 1$.
2. $y' = \cos(x)y$.
3. $x^2y' + y^2 = xy$.
4. $y' = \sin(y + 1)$.
5. $y' = (4x - y + 1)^2$.
6. $y' + 3y + 2 = \mathrm{e}^{2x}$.

a) Klassifizieren Sie diese als linear oder nicht linear. In dem Fall einer linearen Differentialgleichung klassifizieren Sie die zusätzlich als

- **i)** homogen oder inhomogen.
- **ii)** mit konstanten oder nicht-konstanten Koeffizienten.

b) Klassifizieren Sie die Differentialgleichung als einen der folgenden Typen:

- **i)** $y' = f(x) \cdot g(y)$ zu Lösen mit Trennung der Variablen.
- **ii)** $y' = g(y/x)$ zu Lösen mit der Substitution $u = y/x$.
- **iii)** $y' = f(ax + by + c)$ zu Lösen mit der Substitution $u = ax + by + c$.
- **iv)** $y' + p(x) \cdot y = q(x)$.

c) Berechnen Sie die allgemeine Lösung aller Differentialgleichungen.

Lösung 15:

1) **i)** $x^2y' = 2y + 1$. Linear, inhomogen, nicht-konstant Koeffizienten: Typ A (separabel) oder Typ D.

ii) $y' = \cos(x)y$. Linear, homogen, nicht-konstant Koeffizienten, separabel (Typ A).

iii) $x^2y' + y^2 = xy(x)$. Nicht-linear, homogen, lösbar mit der Substitution von Typ B.

iv) $y' = \sin(y + 1)$. Nicht-linear, separabel von Typ A.

v) $y' = (4x - y + 1)^2$. Nicht-linear, Typ C.

vi) $y' + 3y + 2 = \mathrm{e}^{2x}$. Linear, inhomogen, Typ D mit konstanten Koeffizienten.

2) **i)** $x^2y' = 2y + 1$. Linear, inhomogen, nicht-konstant Koeffizienten: Typ A (separabel)

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{2y+1} &= \frac{\mathrm{d}x}{x^2}, \\
\frac{1}{2}\ln(2y+1) &= -\frac{1}{x}, \\
2y+1 &= \widetilde{C}\,\mathrm{e}^{-\frac{2}{x}}, \\
y &= Ce^{-\frac{2}{x}} - \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

Diese Gleichung kann auch mit einem längeren Verfahren gelöst werden, wenn man sie als vom Typ D betrachtet: Zuerst wird die Lösung des homogenen Teils (H) bestimmt und dann die besondere Lösung (P) mit der Methode der unbestimmten Koeffizienten. Wir beginnen mit (H): Die Gleichung

$$x^2y' = 2y$$

ist separabel und sie hat die Lösung

$$y_h(x) = Ce^{\frac{-2}{x}}.$$

Für den Teil (P) machen wir den Ansatz

$$y_p(x) = C(x)e^{\frac{-2}{x}}.$$

Dann leiten wir ab:

$$y_p'(x) = C'(x)e^{\frac{-2}{x}} + C(x)\frac{2}{x^2}e^{\frac{-2}{x}}.$$

Einsetzen in die Gleichung ergibt

$$
\begin{aligned}
C'(x)x^2e^{\frac{-2}{x}} + 2C(x)e^{\frac{-2}{x}} &= 2C(x)e^{\frac{-2}{x}} + 1 \\
C'(x)x^2e^{\frac{-2}{x}} &= 1 \\
C'(x) &= \frac{e^{\frac{2}{x}}}{x^2} \\
\int \mathrm{d}C &= \int \frac{e^{\frac{2}{x}}}{x^2}\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

Wir integrieren das Integral auf der rechten Seite mit der Substitution $u = 2/x$, woraus wir das Differential $\mathrm{d}u = -\frac{2}{x^2}\mathrm{d}x$ berechnen. Wir haben also

$$\frac{\mathrm{d}x}{x^2} = -\frac{\mathrm{d}u}{2}$$

und

$$\begin{aligned}
\int \mathrm{d}C &= -\frac{1}{2}\int e^u \mathrm{d}u,\\
C &= -\frac{1}{2}e^u + \widetilde{C}, \qquad (\text{z.B. } \widetilde{C}=0)\\
C &= -\frac{1}{2}e^{\frac{2}{x}}. \qquad (\text{nach Rücksubstitution})
\end{aligned}$$

Daher ist die partikuläre Gleichung

$$y_p(x) = -\frac{1}{2}e^{\frac{2}{x}}e^{\frac{-2}{x}} = -\frac{1}{2}$$

und die allgemeine Lösung ist

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Ce^{\frac{-2}{x}} - \frac{1}{2}.$$

ii) $y' = \cos(x)y$. Linear, homogen, nicht-konstant Koeffizienten, separabel (Typ A).

Lösung:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{y}\mathrm{d}y &= \int \cos(x)\mathrm{d}x,\\
\ln(y) &= \sin(x) + \ln(C),\\
y &= Ce^{\sin(x)}.
\end{aligned}$$

iii) $x^2y' + y^2 = xy(x)$. Nicht-linear, homogen, lösbar mit der Substitution von Typ B.

Die Gleichung kann umgeformt werden zu

$$y' = \frac{y}{x} - \frac{y^2}{x^2}.$$

Mit der Substitution $u = y/x$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
y &= ux\\
y' &= u'x + u.
\end{aligned}$$

Wir substituieren y' und y/x in die Differentialgleichung und erhalten

$$u'x + u = u - u^2.$$

Diese kann mit Seperation der Variablen gelöst werden.

$$\begin{aligned}
u' &= -\frac{u^2}{x}, \\
\int \frac{1}{u^2}\mathrm{d}u &= -\frac{1}{x}\mathrm{d}x, \\
-\frac{1}{u} &= \ln(x) + C, \\
u &= \frac{1}{\ln(x) + C}, \\
y &= \frac{x}{\ln(x) + C}. \quad (\text{ nach Rücksubstitution } u = y/x)
\end{aligned}$$

iv) $y' = \sin(y+1)$. Nicht-linear, separabel von Typ A.

Wir lösen die Differentialgleichung mit Trennung der Variablen:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}y}{\sin(y+1)} &= \int \mathrm{d}x, \\
\ln|\tan\left(\frac{y+1}{2}\right)| &= x + \ln(C), \\
\tan\left(\frac{y+1}{2}\right) &= Ce^x, \\
\frac{y+1}{2} &= \arctan(Ce^x), \\
y &= 2\arctan(Ce^x) - 1.
\end{aligned}$$

v) $y' = (4x - y + 1)^2$. Nicht-linear, Typ C.

Diese nichtlinesre Differentialgleichung kann mit Substitution gelöst werden. Wir setzen

$$u = 4x - y + 1$$

und erhalten

$$u' = 4 - y' \quad \rightarrow \quad y' = 4 - u'.$$

Substituieren $u = 4x - y + 1$ und $y' = 4 - u'$ in die Gleichung, führt zu der seperablen Gleichung

$$
\begin{aligned}
4 - u' &= u^2, \\
u' &= 4 - u^2, \\
\frac{\mathrm{d}u}{4-u^2} &= \mathrm{d}x, \\
\int \frac{\mathrm{d}u}{4-u^2} &= \int \mathrm{d}x, \\
\frac{1}{4}\ln|u+2| - \ln|u-2| &= x + \ln(\widetilde{C}), \qquad \text{(mit Partialbruchzerlegung, siehe unten)} \\
\ln \frac{u+2}{u-2} &= 4x + \ln(\widetilde{C}^4), \\
u + 2 &= Ce^{4x}(u-2), \quad (\text{mit } C = \widetilde{C}^4) \\
u &= -2Ce^{4x} + uCe^{4x} - 2, \\
u(1 - Ce^{4x}) &= -2\left(Ce^{4x} + 1\right) \\
u &= -2\frac{Ce^{4x}+1}{1-Ce^{4x}}, \\
4x - y + 1 &= -2\frac{Ce^{4x}+1}{1-Ce^{4x}}, \quad \text{(Rücksubstitution)} \\
y &= 4x + \frac{3 + Ce^{4x}}{1 - Ce^{4x}}.
\end{aligned}
$$

Für die Partialbruchzerlegung im 5. Schritt oben ergibt sich

$$\frac{-1}{u^2-4} = -\frac{1}{4}\frac{1}{x-2} + \frac{1}{4}\frac{1}{x+2}.$$

vi) $y' + 3y + 2 = \mathrm{e}^{2x}$. Linear, inhomogen, Typ D mit konstanten Koeffizienten.

Diese Gleichung kann als Typ D mit der Methode der unbestimmten Koeffizienten oder als lineare inhomogene ODE mit konstanten Koeffizienten gelöst werden, wobei spezielle Ansätze für die Inhomogenitäten und das Superpositionsprinzip verwendet werden.

Beginnen wir mit der ersten Methode. Hier müssen wir das homogene Problem (H) lösen und dann eine partikuläre Lösung (P) finden.

Für das homogene Problem können wir die Variablentrennung verwenden oder im Falle konstanter Koeffizienten (nur in diesem Fall!) das charakteristische Polynom benutzen:

$$\lambda + 3 = 0 \quad \to \quad \lambda = -3$$

um den Lösungsteil zu bestimmen

$$y_h(x) = Ce^{-3x}.$$

Um das Problem (P) zu lösen, machen wir den Ansatz

$$y_p(x) = C(x)e^{-3x}$$

und differentieren ihn

$$y_p'(x) = C'(x)e^{-3x} - C(x)3e^{-3x}.$$

Wir setzen y_p und y_p' in die gleichung ein und erhalten

$$\begin{aligned} C'(x)e^{-3x} - 3C(x)e^{-3x} + 3Ce^{-3x} + 2 = e^{2x} \\ C'(x) = e^{5x} - 2e^{3x} \\ C(x) = \frac{1}{5}e^{5x} - \frac{2}{3}e^{3x}. \end{aligned}$$

Die partikuläre Lösung ist

$$y_p(x) = \left(\frac{1}{5}e^{5x} - \frac{2}{3}e^{3x}\right)e^{-3x} = \frac{1}{5}e^{2x} - \frac{2}{3}$$

un die allgemeine Lösung ist

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Ce^{-3x} + \frac{1}{5}e^{2x} - \frac{2}{3}.$$

Wie bereits erwähnt, können wir das Problem mit Hilfe spezieller Ansätze für die Inhomogenitäten und dem Superpositionsprinzip lösen.
Die rechte Seite der Gleichung ist $e^{2x} - 2$, also finden wir zwei Lösungen für die beiden Terme getrennt. Zunächst für e^{2x}. Der Ansatz im exponentiellen Fall ist wieder exponentiell $y_{p1} = Ae^{\alpha x}$, wobei α der Exponent des rechten Terms ist:

$$y_{p1} = Ae^{2x}.$$

Die Konstante A wird durch Koeffizientenvergleich gefunden:

$$\begin{aligned} y_{p1}' + 3y_{p1} &= e^{2x}, \quad \text{(Bemerkung: der Term -2 wird nicht betrachtet)} \\ 2Ae^{2x} + 3Ae^{2x} &= e^{2x}, \\ A &= \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

Der erste Teil der partikulären Lösung ist

$$y_{p1} = \frac{1}{5}e^{2x}.$$

Der zweite Teil wird mit dem Polynom-Ansatz nullter Ordnung $y_{p2} = B$ berechnet, da der Term -2 eine Konstante ist. Setzt man die Ansatzfunktion in die Differentialgleichung ein, so erhält man

$$3B = -2 \quad B = -\frac{2}{3}.$$

Wir haben also die partikuläre Lösung durch Superposition

$$y_p(x) = y_{p1}(x) + y_{p2}(x) = \frac{1}{5}e^{2x} - \frac{2}{3}$$

un die allgemeine Lösung

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Ce^{-3x} + \frac{1}{5}e^{2x} - \frac{2}{3}.$$

Aufgabe 16: Nichtlineare Differentialgleichung erster Ordnung

1) Klassifizieren Sie die folgenden Differentialgleichungen erster Ordnung als

1. Homogene Differentialgleichung: $y' = g(y/x)$ mit Substitution $u = y/x$.
2. Differentialgleichung mit bilinearen Argumenten: $y' = f(ax+by+c)$ mit Substitution $u = ax + by + c$.

a) $y'(x^2+xy) = y^2 - xy$,

b) $y' = \dfrac{x^2y}{x^3+y^3}$,

c) $y' = \dfrac{1}{x+y}$,

d) $y' = -\sin^2(x+y+1)$,

e) $x^2y' = y^2 + xy - x^2$,

f) $y' = \dfrac{y + \mathrm{e}^{-\frac{y}{x}}}{x}$

2) Verwenden Sie eine angemessene Substitution und formulieren Sie die Gleichungen in Termen von u und u' um ohne sie zu lösen.

Lösung 16:

1) **i)** $y'(x^2+xy) = y^2 - xy$, homogen.

ii) $y' = \dfrac{x^2y}{x^3+y^3}$, homogen.

iii) $y' = \dfrac{1}{x+y}$, bilineare Argumente.

iv) $y' = -\sin^2(x+y+1)$, bilineare Argumente.

v) $x^2y' = y^2 + xy - x^2$, homogen.

vi) $y' = \dfrac{y + \mathrm{e}^{-\frac{y}{x}}}{x}$, homogen.

2) **i)** Mit der Substitution $u = y/x$ erhalten wir

$$
\begin{aligned}
y'(x^2+xy) &= y^2 - xy \\
y' &= \frac{y^2 - xy}{x^2+xy} \\
y' &= \frac{y^2/x^2 - y/x}{1 + y/x} \\
y' &= \frac{u^2 - u}{1+u} \\
y' &= u'x + u = \frac{u^2-u}{1+u} \\
u' &= \frac{1}{x}\left(\frac{u^2-u}{1+u} - u\right) \\
u' &= -\frac{1}{x}\frac{2u}{1+u}.
\end{aligned}
$$

Diese Gleichung kann durch Variablentrennung gelöst werden. Die Lösung wird in der Übung nicht verlangt, aber wir zeigen sie hier um einen Fall einer nicht expliziten Lösung zu zeigen.

$$\begin{aligned}
u' &= -\frac{1}{x}\frac{2u}{1+u} \\
\frac{1+u}{u}\mathrm{d}u &= -\frac{2}{x} \\
\int \frac{1+u}{u}\mathrm{d}u &= -\int \frac{2}{x} \\
\ln|u| + u &= \ln x^{-2} + C \\
\mathrm{e}^{\ln|u|} \cdot \mathrm{e}^{u} &= C\,\mathrm{e}^{\ln x^{-2}} \\
u\,\mathrm{e}^{u} &= \frac{C}{x^2} \\
\frac{y}{x}\,\mathrm{e}^{\frac{y}{x}} &= \frac{C}{x^2} \\
yx\,\mathrm{e}^{\frac{y}{x}} &= C.
\end{aligned}$$

Die letzte Gleichung liefert die Lösung y in impliziter Form. Die Lösung kann z.B. mit Matlab geplottet werden:

ii) $y' = \dfrac{x^2 y}{x^3 + y^3}$.
Mit der Substitution $u = y/x$ erhalten wir:

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{x^2 y}{x^3 + y^3}, \\
y' &= \frac{y/x}{1 + y^3/x^3}, \\
y' &= \frac{u}{1+u^3}, \\
y' &= u'x + u = \frac{u}{1+u^3}, \\
u' &= \frac{1}{x}\left(\frac{u}{1+u^3} - u\right), \\
u' &= -\frac{1}{x}\left(\frac{u^4}{1+u^3}\right).
\end{aligned}$$

Die letzte Gleichung kann durch Variablentrennung gelöst werden und führt nach Rücksubstitution zu einer impliziten Gleichung für y.

iii) $y' = \dfrac{1}{x+y}$.

Mit der Substitution $u = y + x$ erhalten wir:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{u} \\ y' &= u' - 1 = \frac{1}{u} \\ u' &= \frac{1+u}{u}. \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung kann durch Variablentrennung gelöst werden und führt nach Rücksubstitution zu einer impliziten Gleichung für y.

iv) $y' = -\sin^2(x + y + 1)$.

Mit der Substitution $u = x + y + 1$ erhalten wir:

$$\begin{aligned} y' &= -\sin^2(u) \\ y' &= u' - 1 = -\sin^2(u) \\ u' &= \cos^2(u). \end{aligned}$$

Diese Gleichung kann mit Trennung der Variablen glöst werden (Die Lösung ist hier nicht gefordert):

$$\begin{aligned} u' &= \cos^2(u), \\ \frac{\mathrm{d}u}{\cos^2(u)} &= \mathrm{d}x, \\ \int \frac{\mathrm{d}u}{\cos^2(u)} &= \int \mathrm{d}x, \\ \tan(u) &= x + C, \\ u &= \arctan(x + C), \\ y + x + 1 &= \arctan(x + C), \\ y &= \arctan(x + C) - x - 1. \end{aligned}$$

v) $x^2 y' = y^2 + xy - x^2$.

Mit der Substitution $u = y/x$ erhalten wir

$$\begin{aligned} y' &= \frac{y^2}{x^2} + \frac{y}{x} - 1, \\ y' &= u'x + u = u^2 + u - 1, \\ u' &= \frac{u^2 - 1}{x}. \end{aligned}$$

Diese Gleichung kann z. B. durch Trennung der Variablen und partielle Bruchzerlegung gelöst werden.

vi) $y' = \dfrac{y + \mathrm{e}^{-\frac{y}{x}}}{x}$.
Mit der Substitution $u = y/x$ erhalten wir

$$\begin{aligned} y' &= \frac{y}{x} + \frac{1}{x}\,\mathrm{e}^{-\frac{y}{x}}, \\ y' &= u + \frac{1}{x}\,\mathrm{e}^{-u}, \\ y' &= u'x + u = u + \frac{1}{x}\,\mathrm{e}^{-u}, \\ u' &= \frac{1}{x^2}\,\mathrm{e}^{-u}\,. \end{aligned}$$

Das kann mit Trennung der Variablen gelöst werden.

Aufgabe 17: Trennung der Variablen

Lösen die folgenden Anfangswertprobleme und bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich der Lösung

a) $y'(x) = 6y^2(x)x, \quad y(1) = \dfrac{1}{6}.$

b) $y'(x) = \dfrac{3x^2 + 4x - 4}{2y(x) - 4}, \quad y(1) = 3.$

c) $y'(x) = \mathrm{e}^{-y(x)}\,(2x - 4)\,, \quad y(5) = 0.$

d) $y'(x) = \dfrac{1}{x^2}, \quad y(x_0) = 0.$

e) $y'(x) = x^2, \quad y(0) = y_0.$

Lösung 17:

a) $y'(x) = 6y^2(x)x, \quad y(1) = \dfrac{1}{6}$. Mit Trennung der Variablen gilt

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{y^2} &= 6x\mathrm{d}x\\ \int \frac{\mathrm{d}y}{y^2} &= \int 6x\mathrm{d}x\\ -\frac{1}{y} &= 3x^2 + C.\end{aligned}$$

Mit der Anfangsbedingung $y(1) = \frac{1}{6}$ erhalten wir

$$\begin{aligned}-6 &= 3 + C\\ -9 &= C.\end{aligned}$$

Die Lösung ist dann

$$y = \frac{1}{9 - 3x^2}.$$

Wir bestimmen nun den Gültigkeitsbereich der Lösung. Es muss gelten

$$9 - 3x^2 \neq 0,$$

daher

$$x \neq \pm\sqrt{3}.$$

Die Werte $x = \pm\sqrt{3}$ müssen vermieden werden, damit erhalten wir die folgenden möglichen Gültigkeitsbereiche:

$$-\infty < x < -\sqrt{3}, \quad -\sqrt{3} < x < \sqrt{3}, \quad \sqrt{3} < x < \infty.$$

Da die Lösung in $x = 1 < \sqrt{3}$ positiv ist (siehe Anfangswert) ist der Gültigkeitsbereich in dem Intervall

$$-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}.$$

b) $y'(x) = \dfrac{3x^2 + 4x - 4}{2y(x) - 4}, \quad y(1) = 3$. Es gilt

$$\begin{aligned}(2y-4)\mathrm{d}y &= (3x^2 + 4x - 4)\mathrm{d}x\\ \int (2y-4)\mathrm{d}y &= \int (3x^2 + 4x - 4)\mathrm{d}x\\ y^2 - 4y &= x^3 + 2x^2 - 4x + C.\end{aligned}$$

Durch Anwenden der der Anfangsbedingung, gilt

$$\begin{aligned}9 - 12 &= 1 + 2 - 4 + C\\ -2 &= C.\end{aligned}$$

Mit $d = -x^3 - 2x^2 + 4x + 2$ gilt

$$y^2 - 4y + d = 0$$

welches eine quadratische Gleichung mit der Lösungsmenge

$$\begin{aligned}y &= 2 \pm \sqrt{4 - d}\\ &= 2 \pm \sqrt{x^3 + 2x^2 - 4x + 2}.\end{aligned}$$

Von den zwei Kandidaten für die Lösung ist nur eine eine gültige Lösung. Das kann mit Hilfe der Anfangsbedingung nachgewiesen werden $y(1) = 3$. In der Tat gilt

$$\begin{aligned}3 &= 2 + \sqrt{1 + 2 - 4 + 2},\\ 3 &\neq 2 - \sqrt{1 + 2 - 4 + 2},\end{aligned}$$

daher ist die Lösung mit dem negativen Term $2 - \sqrt{4 - d}$ nicht gültig.

Um den Gültigkeitsbereich der Lösung zu untersuchen, nutzen wir

$$4 - d = x^3 + 2x^2 - 4x + 2 \geq 0.$$

Durch Einsetzen verschiener Werte für x, können wir überprüfen, dass für $x = -3$ die Funktion $x^3 + 2x^2 - 4x + 2$ positiv und für $x = -4$ negativ ist.

Da die Funktion stetig ist, muss die Nullstelle zwischen -4 und -3 liegen. Wir bezeichnen diesen Wert mit $\bar{x}$, der Gültigkeitsbereich ist dann

$$x \geq \bar{x} \approx -3.36.$$

c) $y'(x) = \mathrm{e}^{-y(x)}\,(2x-4)\,, \quad y(5) = 0$. Es gilt

$$\begin{aligned} \int \mathrm{e}^y \,\mathrm{d}y &= \int (2x - 4\mathrm{d}x) \\ \mathrm{e}^y &= x^2 - 4x + C. \end{aligned}$$

Durch Einsetzen des Anfangswertes, erhalten wir die Konstante $C = -4$. Die Lösung ist daher

$$y = \ln(x^2 - 4x - 4).$$

Für die Gültigkeit muss gelten

$$x^2 - 4x - 4 > 0.$$

Die Nullstellen der Funktion $x^2 - 4x - 4$ sind $x = 2 \pm 2\sqrt{2}$. Da die Funktion konvex ist, ist die Funktion positiv in dem Intervall

$$-\infty < x < 2 - 2\sqrt{2} \quad \text{and} \quad 2 + 2\sqrt{2} < x < \infty.$$

Da der Anfangswert bei $x = 5$ liegt, ist der Gültigkeitsbereich das Intervall $2 + 2\sqrt{2} < x < \infty$.

d) $y'(x) = \dfrac{1}{x^2}, \quad y(x_0) = 0$. Es gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{d}y &= \frac{\mathrm{d}x}{x^2} \\ \int \mathrm{d}y &= \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2} \\ y &= -\frac{1}{x} + C. \end{aligned}$$

Durch Anwenden der Anfangwertbedingung erhalten wir

$$C = \frac{1}{x_0},$$

woraus wir $x_0 \neq 0$ erhalten. Die Lösung ist

$$y = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x_0}.$$

Für den Gültigkeitsbereich muss gelten, dass $x \neq 0$, damit ist er gegeben als $0 < x < \infty$ falls $x_0 > 0$ und $-\infty < x < 0$ falls $x_0 < 0$.

e) $y'(x) = x^2, \quad y(0) = y_0$. Diese einfache Gleichung hat die Lösung

$$y = \frac{x^3}{3} + y_0,$$

und der Gültigkeitsbereich ist der ganze $\mathbb{R}$.

Aufgabe 18: Anfangswertproblem

Gegeben sei das Anfangswertproblem:

$$y' = \sqrt{y}, \quad y(0) = 0.$$

i) Bestimmen sie eine Lösung des gegebenen Anfangswertproblems.

ii) Hat das Anfangswertproblem eine eindeutige Lösung?

Lösung 18:

i) Die Lösung kann mit Trennung der Variablen berechnet.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{y}}\mathrm{d}y &= \mathrm{d}x \\
\int \frac{1}{\sqrt{y}}\mathrm{d}y &= \int \mathrm{d}x \\
2\sqrt{y} &= x + C \\
y &= \frac{1}{4}(x+C)^2
\end{aligned}$$

Mit dem Anfangswert erhalten wir $C = 0$ und die Lösung

$$y = \frac{1}{4}x^2,$$

Die Lösung ist nicht eindeutig, da offensichtlich die konstante Null-Funktion eine Lösung ist, die die Anfangswertbedingung erfüllt.

ii) Das Problem hat unendlich viele Lösungen der Form

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < \bar{x}, \\ \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}\bar{x}^2, & x > \bar{x}. \end{cases}$$

Das kann man daraus herleiten, dass die Differentialgleichung autonom und daher invariant gegenüber einer Verschiebung bezüglich x ist. Also falls $\bar{y}(t)$ eine Lösung der obigen Differentialgleichung ist, dann ist auch $\hat{y}(t) = \overline{y}(t+t_0)$ eine Lösung des Problems

$$y' = \sqrt{y}, \quad y(t_0) = 0.$$

Aufgabe 19: Substitution: Homogene Differentilagleichung erster Ordnung

Berechnen Sie die Lösung des folgenden Anfangswertproblems

a) $x\,y\,y' + 4x^2 + y^2 = 0, \quad y(2) = 0, \quad x > 0.$

b) $x\,y' = y\,(\ln x - \ln y)\,, \quad y(1) = 4, \quad x > 0.$

Lösung 19:

a) $x\,y\,y' + 4x^2 + y^2 = 0, \quad y(2) = 0, \quad x > 0.$ Wir dividieren alle Terme durch x^2 und erhalten

$$\frac{y}{x}y' + 4 + \frac{y^2}{x^2} = 0.$$

Wir setzen $u = \dfrac{y}{x}$, also $y = ux$ und differenzieren beide Seiten und erhalten

$$y' = u'x + u.$$

Aus der ersten Gleichung können wir die explizite Differentialgleichung schreiben

$$y' = -\frac{x}{y}\left(4 + \frac{y^2}{x^2}\right),$$

mit der Substitution $u = \dfrac{y}{x}$ gilt

$$y' = -\frac{4 + u^2}{u}.$$

Wir nutzen $y' = u'x + u$ und erhalten

$$\begin{aligned} u'x + u &= -\frac{4 + u^2}{u}, \\ u' &= -\frac{1}{x}\frac{4 + 2u^2}{u}. \end{aligned}$$

Diese Gleichung lässt sich durch die Trennung von Variablen wie folgt lösen

$$
\begin{aligned}
\frac{u}{4+2u^2}\mathrm{d}u &= -\frac{1}{x}\mathrm{d}x,\\
\int \frac{u}{4+2u^2}\mathrm{d}u &= -\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x,\\
\int \frac{1}{4}\frac{4u}{4+2u^2}\mathrm{d}u &= -\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x,\\
\frac{1}{4}\ln(4+2u^2) &= -\ln(|x|)+\ln(C),\\
\ln(4+2u^2)^{\frac{1}{4}} &= \ln(C|x|^{-1}).
\end{aligned}
$$

Hier müssen wir $x = 0$ aus dem Gültigkeitsintervall der Lösung ausschließen. Da die Anfangsbedingung auf den positiven Wert $x = 2$ gesetzt wird, wählen wir für die nächsten Schritte das Intervall $x > 0$. Daher gilt

$$
4 + 2u^2 = \frac{C^4}{x^4}.
$$

mit der Rücksubstitution erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\frac{y^2}{x^2} &= \frac{1}{2}\left(\frac{C^4 - 4x^4}{x^4}\right),\\
y^2 &= \frac{x^2}{2}\left(\frac{C^4 - 4x^4}{x^4}\right).
\end{aligned}
$$

Wir wenden die Anfangsbedingung $y(2) = 0$ an. Damit erhalten wir $C^4 = 64$ und

$$
\begin{aligned}
y^2 &= \frac{64 - 4x^4}{2x^2},\\
y &= \pm\frac{1}{x}\sqrt{32 - 2x^4}.
\end{aligned}
$$

Wir müssen sicherstellen, dass bei der Quadratwurzel nur positive Zahlen berücksichtigt werden können. Es muss also gelten

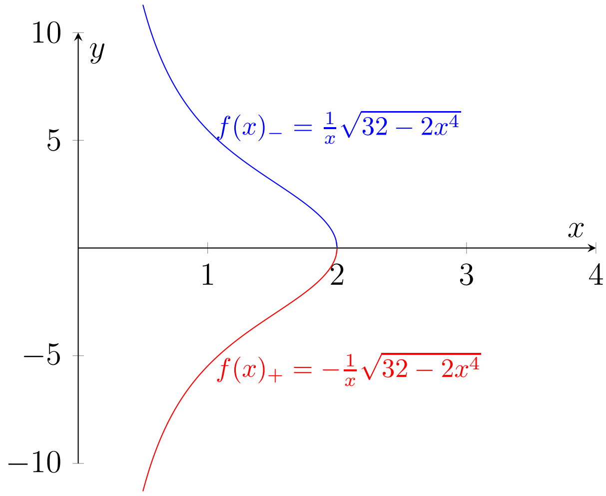
$$
32 - 2x^4 \geq 0,
$$

woraus sich das Gültigkeitsintervall ergibt

$$
0 < x \leq 2.
$$

Wir müssen prüfen, ob die Lösung eindeutig ist oder beide Lösungen akzeptiert werden können. Da die Anfangsbedingung in $x = 2$ liegt, wo die Lösung Null ist, kann dies eine gültige “Anfangsbedingung” für beide Zweige sein, also ist die Lösung nicht eindeutig!

Der Graph der Lösung ist



b) $x\,y' = y\,(\ln x - \ln y)\,,\quad y(1) = 4,\quad x > 0$. Mit Logarithmusgesetzen können wir die Gleichung schreiben als

$$\begin{aligned} xy' &= y\ln(\frac{x}{y}), \\ y' &= \frac{y}{x}\ln(\frac{x}{y}). \end{aligned}$$

Mit der Substitution $u = \dfrac{y}{x}$ gilt

$$y' = u\ln(u^{-1}) = -u\ln(u).$$

Durch Ableiten der Substitution erhalten wir

$$\begin{aligned} y' &= xu' + u, \\ u' &= \frac{y' - u}{x} = \frac{-u\ln(u) - u}{x}. \end{aligned}$$

Jetzt nutzen wir die Trennung der Variablen

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}u}{u\ln(u) + u} &= -\frac{\mathrm{d}x}{x}, \\ \int \frac{\mathrm{d}u}{u\ln(u) + u} &= -\int \frac{\mathrm{d}x}{x}. \end{aligned}$$

Das Integral auf der linken Seite kann mit der Substitution $v = \ln(u) + 1$ und dem Differential $\mathrm{d}v = \dfrac{1}{u}\mathrm{d}u$ berechnet werden und ergibt

$$\begin{aligned} \int \frac{\mathrm{d}v}{v} &= -\int \frac{\mathrm{d}x}{x}, \\ \ln|v| &= -\ln|x| + C. \end{aligned}$$

Mit der Rücksubstitution gilt

$$\ln|\ln(u)+1| = -\ln|x| + C.$$

Da wir die Bedingung $x > 0$ in der Problemstellung haben, können wir den Betrag auf der rechten Seite weglassen.

$$\ln|\ln(u)+1| = -\ln(x) + C.$$

Die Potenzierung beider Seiten ergibt

$$|\ln(u)+1| = C\frac{1}{x},$$

wobei die Konstante C anstelle von e^C durch Umbenennung verwendet wurde, d.h. wir haben $C^* = \mathrm{e}^C$ gesetzt und den Namen von C^* wieder in C geändert, um die Notation zu vereinfachen. Außerdem lassen wir den Betrag auf der linken Seite weg, da das Vorzeichen in der Konstante C aufgehen kann. Wir haben also

$$\begin{aligned} \ln(u) &= C\frac{1}{x} - 1, \\ u &= \mathrm{e}^{\frac{C}{x}-1}. \end{aligned}$$

Mit der Rücksubstitution gilt

$$\begin{aligned} \frac{y}{x} &= \mathrm{e}^{\frac{C}{x}-1}, \\ y &= x\,\mathrm{e}^{\frac{C}{x}-1}, \end{aligned}$$

und unter Verwendung der Anfangsbedingung $y(1) = 4$ ergibt sich

$$\begin{aligned} 4 &= \mathrm{e}^{C-1}, \\ \ln 4 &= C - 1, \\ C &= \ln(4) + 1. \end{aligned}$$

Die Lösung der Differentialgleichung ist dann

$$y = x\,\mathrm{e}^{\dfrac{\ln(4)+1}{x}-1}.$$

Laplace-Transformation

$f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ heißt Laplace-transformierbar, wenn das Integral

$$F(s) := \mathcal{L}f(t) := \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st} f(t) \mathrm{d}t \quad f\ddot{u}r s \in \mathbb{R}$$

existiert. Dabei ist $F(s)$ die Bildfunktion (auch Laplace-Transformierte genannt) zum Urbildfunktion $f(t)$. Hilfreich bei der Laplace-Transformation bzw. bei der Rücktransformation sind sogenannte Korrespondenztabellen, die zur Urbildfunktion die dazugehörige Bildfunktion angeben.

Aufgabe 20:

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$u''(t) - 2u'(t) + u(t) = \cos(t) \cdot h(t - \pi)$$

mit $u(0) = 0$ und $u'(0) = 0$. Dabei ist $h(t)$ die Heaviside-Funktion.

a) Zeigen Sie, dass die Lösung des Anfangswertproblems im Bildbereich der Laplace-Transformation die folgende Gestalt hat:

$$U(s) = -\frac{s\,\mathrm{e}^{-s\pi}}{(1 + s^2)(s - 1)^2}$$

b) Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung $u(t)$ im Urbildbereich.

Lösung 20:

a) Die Laplace-Transformierte des Anfangswertproblems ist

$$s^2U(s) - 2sU(s) + U(s) = \mathcal{L}\{\cos(t) \cdot h(t - \pi)\}.$$

Für die Transformation des letzten Terms wird der Verschiebungssatz angewendet:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\cos(t) \cdot h(t - \pi)\} =& \mathcal{L}\{\cos(t - \pi + \pi) \cdot h(t - \pi)\} = \mathcal{L}\{\cos(t + \pi)\}\mathrm{e}^{-s\pi} \\ =& \mathcal{L}\{-\cos(t)\}\mathrm{e}^{-s\pi} = \frac{-s}{1 + s^2}\mathrm{e}^{-s\pi}.\end{aligned}$$

Damit ist die transformierte Differentialgleichung:

$$U(s)(s^2 - 2s + 1) = -\frac{s}{1 + s^2}\mathrm{e}^{-s\pi}.$$

Die Lösung im Bildbereich ist

$$U(s) = -\frac{s}{(1+s^2)(s-1)^2}\mathrm{e}^{-s\pi}.$$

b) Die Rücktransformation ergibt

$$u(t) = -\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s-1)^2(1+s^2)}\mathrm{e}^{-s\pi}\right\}$$

Die Partialbruchzerlegung des Bruches ergibt

$$\begin{aligned}
&\frac{s}{(s-1)^2(1+s^2)}\\
=&\frac{E}{s-1}+\frac{F}{(s-1)^2}+\frac{G+Hs}{1+s^2}\\
=&\frac{(E+H)s^3+(-E+F+G-2H)s^2+(E-2G+H)s-E+F+G}{(s-1)^2(1+s^2)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow\quad E+H=&0,\ -E+F+G-2H=0,\ E-2G+H=1,\ -E+F+G=0\\
\Rightarrow\qquad H=&0,\ E=0,\ G=-\frac{1}{2},\ F=\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Damit ist dann

$$\begin{aligned}
u(t) =& -\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\left(\frac{1}{(s-1)^2}-\frac{1}{1+s^2}\right)\mathrm{e}^{-\pi s}\right\}\\
=& -\frac{1}{2}\left[t\mathrm{e}^{t}-\sin(t)\right]_{t\leftarrow t-\pi}h(t-\pi) \qquad \text{(Verschiebungssatz)}\\
=& -\frac{1}{2}\left[(t-\pi)\mathrm{e}^{t-\pi}-\sin(t-\pi)\right]h(t-\pi)\\
=& -\frac{1}{2}\left[(t-\pi)\mathrm{e}^{t-\pi}+\sin(t)\right]h(t-\pi)\\
=& \begin{cases} 0 & \text{für } t\le\pi\\ -\frac{1}{2}\left[(t-\pi)\mathrm{e}^{t-\pi}+\sin(t)\right] & \text{für } t>\pi. \end{cases}
\end{aligned}$$

Aufgabe 21: Anfangswertprobleme zu linearen Differentialgleichungen n-ter Ordnung

Gegeben seien die folgenden Anfangswertprobleme:

a) $y''(t) - 2y'(t) - 3y(t) = 4\mathrm{e}^t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 6,$

b) $y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) = 4\mathrm{e}^{-2t}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$

Bestimmen Sie die Lösungen jeweils mit Hilfe des Exponentialansatzes **und** zusätzlich mit Hilfe der Laplace-Transformation.

Lösung 21:

Zunächst die Lösung mittels Exponentialansatz:

a) Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 3$ sind $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 3$. Eine Partikulärlösung der inhomogenen Gleichung berechnet man mit dem Ansatz $y_p(t) = ae^t$, es folgt $-4ae^t \stackrel{!}{=} 4e^t$ und damit $a = -1$. Die allgemeine Lösung ist

$$y_{allg}(t) = -e^t + c_1\mathrm{e}^{-t} + c_2\mathrm{e}^{3t} \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Aus den Anfangsbedingungen $y(0) = -1 + c_1 + c_2 \stackrel{!}{=} 0$ und $y'(0) = -1 - c_1 + 3c_2 \stackrel{!}{=} 6$ folgt das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrl} c_1 & + & c_2 & = 1, \\ -c_1 & + & 3c_2 & = 7 \end{array}$$

mit Lösung $c_2 = 2$ und $c_1 = -1$. Damit ist

$$y_{AWP}(t) = -e^t - \mathrm{e}^{-t} + 2\mathrm{e}^{3t}.$$

b) Die Nullstelle von $p(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda + 4$ ist $\lambda = -2$, dies ist eine doppelte Nullstelle. Als Ansatz für die Partikulärlösung muss man $y_p(t) = at^2\mathrm{e}^{-2t}$ nehmen, denn man hat Resonanz der Ordnung 2. Mit $y_p'(t) = a\mathrm{e}^{-2t}\left(2t - 2t^2\right)$ und $y_p''(t) = a\mathrm{e}^{-2t}\left(2 - 8t + 4t^2\right)$ folgt $2a\mathrm{e}^{-2t} \stackrel{!}{=} 4\mathrm{e}^{-2t}$ und damit $a = 2$. Dies liefert die allgemeine Lösung

$$y_{allg}(t) = \left(2t^2 + c_1 t + c_2\right)\mathrm{e}^{-2t} \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Die Anfangsbedingungen $y(0) = c_2 \stackrel{!}{=} 1$ und $y'(0) = c_1 - 2c_2 \stackrel{!}{=} 0$ liefern $c_2 = 1$

und $c_1 = 2$ und damit die Lösung

$$y_{AWP}(t) = \left(2t^2 + 2t + 1\right)\mathrm{e}^{-2t}.$$

Nun die Lösung mit Hilfe der Laplace-Transformation:

a) Die Laplace-Transformation der Differentialgleichung ergibt

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{4\mathrm{e}^{t}\} =& \mathcal{L}\{y''(t) - 2y'(t) - 3y(t)\} \\
\Rightarrow \qquad \frac{4}{s-1} =& s^2Y(s) - y'(0) - sy(0) - 2(sY(s) - y(0)) - 3Y(s) \\
=& s^2Y(s) - 6 - 2sY(s) - 3Y(s)
\end{aligned}$$

Die Lösung im Bildbereich ist dann

$$\begin{aligned}
Y(s) =& \frac{1}{s^2 - 2s - 3} \cdot \left(\frac{4}{s-1} + 6\right) \\
=& \frac{6s - 2}{(s-1)(s-3)(s+1)}
\end{aligned}$$

Diese lässt sich mittels Partialbruchzerlegung darstellen als

$$Y(s) = \frac{-1}{s-1} + \frac{2}{s-3} + \frac{-1}{s+1}$$

und die Rücktransformation ergibt die Lösung des Anfangswertproblems:

$$\begin{aligned}
y(t) =& -\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} + 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} \\
=& -\mathrm{e}^{t} + 2\mathrm{e}^{3t} - \mathrm{e}^{-t}
\end{aligned}$$

b) Die Laplace-Transformation der Differentialgleichung ergibt

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{4\mathrm{e}^{-2t}\} =& \mathcal{L}\{y''(t) + 4y'(t) + 4y(t)\} \\
\Rightarrow \qquad \frac{4}{s+2} =& s^2Y(s) - y'(0) - sy(0) + 4(sY(s) - y(0)) + 4Y(s) \\
=& s^2Y(s) - s + 4sY(s) - 4 + 4Y(s)
\end{aligned}$$

Die Lösung im Bildbereich ist dann

$$\begin{aligned}
Y(s) =& \frac{1}{s^2 + 4s + 4} \cdot \left(\frac{4}{s+2} + s + 4\right) \\
=& \frac{s^2 + 6s + 12}{(s+2)^3}
\end{aligned}$$

Diese lässt sich mittels Partialbruchzerlegung darstellen als

$$Y(s) = \frac{1}{s+2} + \frac{2}{(s+2)^2} + \frac{4}{(s+2)^3}$$

und die Rücktransformation ergibt die Lösung des Anfangswertproblems:

$$y(t) = \mathrm{e}^{-2t} + 2t\mathrm{e}^{-2t} + 4\frac{t^2\mathrm{e}^{-2t}}{2} = \mathrm{e}^{-2t}(1 + 2t + 2t^2)$$

Aufgabe 22: Anfangswertprobleme zu linearen Differentialgleichungen n-ter Ordnung

Gegeben seien die folgenden Anfangswertprobleme:

a) $y''(t) - 2y'(t) - 3y(t) = 4\mathrm{e}^t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 6,$

b) $y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) = 4\mathrm{e}^{-2t}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$

Bestimmen Sie die Lösungen jeweils mit Hilfe des Exponentialansatzes **und** zusätzlich mit Hilfe der Laplace-Transformation.

Lösung 22:

Zunächst die Lösung mittels Exponentialansatz:

a) Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 3$ sind $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 3$. Eine Partikulärlösung der inhomogenen Gleichung berechnet man mit dem Ansatz $y_p(t) = ae^t$, es folgt $-4ae^t \stackrel{!}{=} 4e^t$ und damit $a = -1$. Die allgemeine Lösung ist

$$y_{allg}(t) = -e^t + c_1\mathrm{e}^{-t} + c_2\mathrm{e}^{3t} \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Aus den Anfangsbedingungen $y(0) = -1 + c_1 + c_2 \stackrel{!}{=} 0$ und $y'(0) = -1 - c_1 + 3c_2 \stackrel{!}{=} 6$ folgt das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} c_1 \; + \; c_2 &= 1, \\ -c_1 \; + \; 3c_2 &= 7 \end{aligned}$$

mit Lösung $c_2 = 2$ und $c_1 = -1$. Damit ist

$$y_{AWP}(t) = -e^t - \mathrm{e}^{-t} + 2\mathrm{e}^{3t}.$$

b) Die Nullstelle von $p(\lambda) = \lambda^2+4\lambda+4$ ist $\lambda = -2$, dies ist eine doppelte Nullstelle. Als Ansatz für die Partikulärlösung muss man $y_p(t) = at^2\mathrm{e}^{-2t}$ nehmen, denn man hat Resonanz der Ordnung 2. Mit $y_p'(t) = a\mathrm{e}^{-2t}\left(2t - 2t^2\right)$ und $y_p''(t) = a\mathrm{e}^{-2t}\left(2 - 8t + 4t^2\right)$ folgt $2a\mathrm{e}^{-2t} \stackrel{!}{=} 4\mathrm{e}^{-2t}$ und damit $a = 2$. Dies liefert die allgemeine Lösung

$$y_{allg}(t) = \left(2t^2 + c_1t + c_2\right)\mathrm{e}^{-2t} \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Die Anfangsbedingungen $y(0) = c_2 \stackrel{!}{=} 1$ und $y'(0) = c_1 - 2c_2 \stackrel{!}{=} 0$ liefern $c_2 = 1$

und $c_1 = 2$ und damit die Lösung

$$y_{AWP}(t) = \left(2t^2 + 2t + 1\right)\mathrm{e}^{-2t}.$$

Nun die Lösung mit Hilfe der Laplace-Transformation:

a) Die Laplace-Transformation der Differentialgleichung ergibt

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{4\mathrm{e}^t\} =& \mathcal{L}\{y''(t) - 2y'(t) - 3y(t)\} \\ \Rightarrow \qquad \frac{4}{s-1} =& s^2Y(s) - y'(0) - sy(0) - 2(sY(s) - y(0)) - 3Y(s) \\ =& s^2Y(s) - 6 - 2sY(s) - 3Y(s) \end{aligned}$$

Die Lösung im Bildbereich ist dann

$$\begin{aligned} Y(s) =& \frac{1}{s^2 - 2s - 3} \cdot \left(\frac{4}{s-1} + 6\right) \\ =& \frac{6s - 2}{(s-1)(s-3)(s+1)} \end{aligned}$$

Diese lässt sich mittels Partialbruchzerlegung darstellen als

$$Y(s) = \frac{-1}{s-1} + \frac{2}{s-3} + \frac{-1}{s+1}$$

und die Rücktransformation ergibt die Lösung des Anfangswertproblems:

$$\begin{aligned} y(t) =& -\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} + 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} \\ =& -\mathrm{e}^t + 2\mathrm{e}^{3t} - \mathrm{e}^{-t} \end{aligned}$$

b) Die Laplace-Transformation der Differentialgleichung ergibt

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{4\mathrm{e}^{-2t}\} =& \mathcal{L}\{y''(t) + 4y'(t) + 4y(t)\} \\ \Rightarrow \qquad \frac{4}{s+2} =& s^2Y(s) - y'(0) - sy(0) + 4(sY(s) - y(0)) + 4Y(s) \\ =& s^2Y(s) - s + 4sY(s) - 4 + 4Y(s) \end{aligned}$$

Die Lösung im Bildbereich ist dann

$$\begin{aligned} Y(s) =& \frac{1}{s^2 + 4s + 4} \cdot \left(\frac{4}{s+2} + s + 4\right) \\ =& \frac{s^2 + 6s + 12}{(s+2)^3} \end{aligned}$$

Diese lässt sich mittels Partialbruchzerlegung darstellen als

$$Y(s) = \frac{1}{s+2} + \frac{2}{(s+2)^2} + \frac{4}{(s+2)^3}$$

und die Rücktransformation ergibt die Lösung des Anfangswertproblems:

$$y(t) = \mathrm{e}^{-2t} + 2t\mathrm{e}^{-2t} + 4\frac{t^2\mathrm{e}^{-2t}}{2} = \mathrm{e}^{-2t}(1 + 2t + 2t^2)$$

Aufgabe 23: Balkenbiegung

Ein homogener Balken (E, J konstant) der Länge $L = 3$ möge an beiden Enden gelenkig gelagert sein. Bei 2/3 der Länge greife eine punktförmige Last F an. Berechnen Sie die Lage des tiefsten Punktes des Balkens, wobei sein Eigengewicht vernachlässigt werden darf.
Das Materialgesetz des Balkens wird als

$$EJ \cdot w''''(x) = -F \cdot \delta(x - l) \qquad (\text{mit } l = \frac{2}{3}L)$$

angenommen.
Hinweise: EJ bezeichnet die Biegesteifigkeit des Balkens. Zur Vereinfachung können Sie annehmen $EJ = 1$.
Ebenson können Sie $F = 1$ setzen. Gehen Sie in den folgenden Schritten vor:

a) Ermitteln Sie die Lösung $w_H(x)$ der homogenen Differentialgleichung.

b) Bestimmen Sie eine spezielle Lösung $w_P(x)$ (bzw. $W_P(s)$) der inhomogenen Differentialgleichung, indem Sie die Laplace-Transformation nutzen, wobei Sie von homogenen Anfangswerten ausgehen können.

c) Bestimmen Sie die Integrationskonstanten der allgemeinen Lösung der inhomogenen Gleichung $w(x) = w_H(x) + w_P(x)$ aus den Randbedingungen

$$w(0) = w(L) = 0 \qquad \text{und} \qquad w''(0) = w''(L) = 0.$$

d) Berechnen Sie den Extremwert der so erhaltenen Funktion.

Lösung 23:

Wir vereinfachen die Differentialgleichung zu

$$w^{(4)}(x) = -6\alpha\delta(x - l)$$

mit der neuen Konstanten $\alpha = \frac{F}{6EJ}$.

a) Die homogene Gleichung $w_H^{(4)}(x) = 0$ kann durch einfache Integration gelöst werden:

$$w_H(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3.$$

b) Für $w_P(0) = w_P'(0) = w_P''(0) = w_P'''(0) = 0$ lautet die Laplace–Transformation der inhomogenen linearen Differentialgleichung $w_P^{(4)}(x) = -6\alpha \cdot \delta(x - l)$:

$$s^4\, W_P(s) = -6\alpha \cdot \mathrm{e}^{-l\,s} \Rightarrow W_P(s) = -6\alpha \cdot \frac{\mathrm{e}^{-l\,s}}{s^4}\ .$$

Die Rücktransformation ergibt

$$w_P(x) = -6\alpha \cdot \frac{(x-l)^3}{6} \cdot h(x-l) = -\alpha(x-l)^3 \cdot h(x-l)\ .$$

Dabei ist $h(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 1 & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$ die Heaviside-Funktion.

c) Damit lautet die allgemeine Lösung:

$$w(x) = w_H(x) + w_P(x) = A + B\,x + C\,x^2 + D\,x^3 - \alpha\,(x-l)^3 \cdot h(x-l).$$

Die Randbedingungen ergeben:

$$\begin{aligned} w(0) = 0 \quad &: \qquad A = 0 \\ w''(0) = 0 \quad &: \qquad 2\,C = 0 \\ w(L) = 0 \quad &: \qquad B \cdot L + D \cdot L^3 - \alpha(L-l)^3 = 0 \\ w''(L) = 0 \quad &: \qquad 6 \cdot D \cdot L - 6\,\alpha(L-l) = 0 \end{aligned}$$

In den letzen beiden Zeilen wurde $A = C = 0$ berücksichtigt.
Aus der letzten erhält man

$$D = \frac{\alpha(L-l)}{L} = \frac{\alpha}{3}$$

und damit aus der dritten:

$$B = \frac{\alpha(L-l)^3 - DL^3}{L} = \frac{\alpha\frac{L^3}{27} - \frac{\alpha}{3}L^3}{L} = \frac{-8\alpha L^2}{27}.$$

Insgesamt haben wir so als Lösung der Randwertaufgabe:

$$\begin{aligned} w(x) &= -\frac{8\alpha}{27}L^2 x + \frac{\alpha}{3}x^3 - \alpha(x-l)^3 \cdot h(x-l) \\ &= -\frac{8}{3}\alpha x + \frac{\alpha}{3}x^3 - \alpha(x-2)^3 \cdot h(x-2). \end{aligned}$$

d) Das Minimum dieser Funktion liegt entweder in einem stationären Punkt ($w'(x) = 0$) oder an den Rändern des Definitionsbereichs ($x = 0$, $x = 3$) oder an der Sprungstelle der Funktionsdefinition ($x = 2$). Dort ist die Funktion zwar zweimal differenzierbar, aber auf die Berechnung der Ableitung wird hier verzichtet. Die stationären Punkte in den Teilintervallen $[0,2]$ und $[2,3]$

ergeben sich zu:

i) $0 < x < 2$:

$$0 = w'(x) = -\frac{8}{3}\alpha + \alpha x^2 \qquad \Rightarrow \qquad x = \sqrt{\frac{8}{3}}$$

Die negative Wurzel entfällt wegen der Bedingung $0 < x$.

ii) $2 < x < 3$:

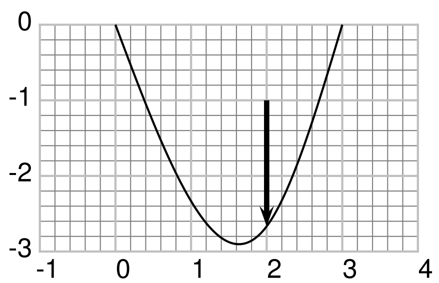
$$\begin{aligned} & 0 = w'(x) = -\frac{8}{3}\alpha + \alpha x^2 - 3\alpha(x-2)^2 \\ \Rightarrow \quad & 0 = (1-3)x^2 + 12x - 12 - \frac{8}{3} \\ \Rightarrow \quad & 0 = x^2 - 6x + \frac{22}{3} = (x-3)^2 - 9 + \frac{22}{3} \\ \Rightarrow \quad & x = 3 \pm \sqrt{\frac{5}{3}} \end{aligned}$$

Beide Lösungen liegen außerhalb des betrachteten Definitionsintervalls ($2 < x < 3$)

Kandidaten für das Minimum sind also $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt{8/3}$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$ mit

$$w(0) = 0,\; w(x_2) = -\frac{2}{3}x_2^3\alpha < w(2) = -\frac{8}{3}\alpha,\; w(3) = 0.$$

Damit liegt das Minimum bei $x_2 = \sqrt{\frac{8}{3}}$.



Aufgabe 24: δ–Distribution

Bestimmen Sie die folgenden Integrale:

i) $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{1+x^2} \cdot \delta\,(x-\pi)\ \mathrm{d}x\,.$$ **ii)** $$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(x) \cdot \delta\,(x-\pi)\ \mathrm{d}x\,.$$

Lösung 24:

i) $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{1+x^2} \cdot \delta\,(x-\pi)\ \mathrm{d}x = \frac{\cos(\pi)}{1+\pi^2} = \frac{-1}{1+\pi^2}\ .$$

ii) $$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(x) \cdot \delta\,(x-\pi)\ \mathrm{d}x = 0 \quad \text{da} \quad \pi \notin [-\pi/2\,,\,\pi/2]\ .$$

Aufgabe 25: AWP und δ–Distribution

Ein mechanisches Pendel werde durch das folgende Anfangswertproblem beschrieben

$$u''(t) + 2\,u'(t) + 5\,u(t) = f(t)\ , \quad u(0) = 2\ , \quad u'(0) = -2\ .$$

$u''(t)$ steht nach dem zweiten Newtonschen Gesetz für die Beschleunigung einer Masse. Der Term $5u(t)$ modelliert ein repulsives Potential (Federkraft) und der Term $2u'(t)$ die Dämpfung des Systems. Das Pendel befindet sich zum Zeitpunkt $t = 0$ am Ort $u(0) = 2$ und hat die Geschwindigkeit $u'(0) = -2$.

a) Bestimmen Sie mit Hilfe der Laplace–Transformation die Lösung des AWPs für $f(t) = 0$, $t > 0$. (Es wirken keine äußeren Kräfte.)

b) Bestimmen Sie den Zeitpunkt t_0 des ersten Nulldurchgangs, d.h. $u(t_0) = 0$, der Lösung aus Teil a) .

c) Zum Zeitpunkt t_0 aus Teil b) wird ein δ–Impuls $f(t) = \alpha \cdot \delta(t - t_0)$ so auf das System ausgeübt, dass das System anschließend in Ruhe ist.
Dies modelliert ein starres Hindernis, auf welches das Pendel (nicht elastisch) aufprallt, so dass die Bewegung sofort endet.
Wie groß muss die Impulsstärke α sein?

Lösung 25:

Zu a) Die Laplace–Transformation des AWPs ergibt mit $\mathcal{L}\Big(u(t)\Big) = \mathcal{U}(s)$:

$$s^2\,\mathcal{U} - 2\,s + 2 + 2 \cdot \Big[s\,\mathcal{U} - 2\Big] + 5\,\mathcal{U} = 0 \;\Rightarrow\; \mathcal{U}(s) = \frac{2(s+1)}{(s+1)^2 + 2^2}\ .$$

Die Rücktransformation ergibt die Lösung des AWPs

$$\boxed{u_{\text{AWP}}(t) = 2\,\mathrm{e}^{-t} \cdot \cos(2t)}\ .$$

Zu b) Aus $2\,t_0 = \pi/2$ erhält man $\boxed{t_0 = \pi/4}$.

Zu c) Das inhomogene lineare AWP lautet

$$u''(t) + 2\,u'(t) + 5\,u(t) = \alpha \cdot \delta(t - \pi/4)\ .$$

Die Laplace–Transformation ergibt

$$s^2\,\mathcal{U} - 2\,s + 2 + 2 \cdot \Big[s\,\mathcal{U} - 2\Big] + 5\,\mathcal{U} = \alpha\,\mathrm{e}^{-s \cdot \pi/4}$$

und nach $\mathcal{U}(s)$ aufgelöst:

$$\mathcal{U}(s) = \frac{2(s+1)}{(s+1)^2+2^2} + \mathrm{e}^{-s\cdot\pi/4} \cdot \frac{\alpha}{(s+1)^2+2^2} \ .$$

Die Rücktransformation ergibt

$$\begin{aligned}
u_{\mathrm{AWP}}(t) &= 2\,\mathrm{e}^{-t} \cdot \cos(2t) + \frac{\alpha}{2} \cdot \mathrm{e}^{-(t-\pi/4)} \cdot \sin\Big(2(t-\tfrac{\pi}{4})\Big) \cdot h(t-\tfrac{\pi}{4}) \\
&= \mathrm{e}^{-t} \cdot \Big\{ 2\,\cos(2t) + \frac{\alpha}{2} \cdot \mathrm{e}^{\pi/4} \cdot \Big[\sin(2t)\,\cos(\tfrac{\pi}{2}) \\
&\qquad - \cos(2t)\,\sin(\tfrac{\pi}{2}) \Big] \cdot h(t-\tfrac{\pi}{4}) \Big\} \\
&= \mathrm{e}^{-t}\,\cos(2t) \cdot \Big\{ 2 - \frac{\alpha}{2}\,\mathrm{e}^{\pi/4} \cdot h(t-\tfrac{\pi}{4}) \Big\}
\end{aligned}$$

Damit die Lösung für $t \geq t_0$ verschwindet, muß $2 = \dfrac{\alpha}{2}\,\mathrm{e}^{\pi/4}$ sein, der δ–Implus also die Stärke

$$\boxed{\alpha = 4\,\mathrm{e}^{-\pi/4}}$$

haben.

Aufgabe 26: Integralgleichungen mit Laplace–Transformation

Bestimmen Sie die Lösung $y(t)$ (mit $t \geq 0$) der Integralgleichung

$$y(t) = t^2 + \int\limits_0^t y(\tau)\ \sin(t-\tau)\ \mathrm{d}\tau\,.$$

Lösung 26:

Die Laplace–Transformation der Integralgleichung ergibt mit $\mathcal{L}\Big(y(t)\Big) = Y(s)$ sowie

$$\int\limits_0^t y(\tau)\sin(t-\tau)\mathrm{d}\tau = \mathcal{L}(y(t) * \sin(t)) = \mathcal{L}(y(t)) \cdot \mathcal{L}(\sin(t))$$

die Gleichung im Frequenzraum:

$$Y(s) = \frac{2}{s^3} + Y(s) \cdot \frac{1}{s^2+1}$$

$$\Rightarrow\quad \left(1 - \frac{1}{s^2+1}\right) Y(s) = \frac{2}{s^3} \ \Rightarrow\ Y(s) = \frac{2(s^2+1)}{s^3 \cdot s^2} = \frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^5}$$

$$\Rightarrow\quad \underline{\underline{y(t) = t^2 + \frac{t^4}{12}}}\ .$$

Aufgabe 27: Lineare Differentialgleichung

Gegeben sei das Anfangswertproblem für $u(t)$

$$u'' + 4\,u' + 3\,u = 12 \cdot \Big(1 - h(t-2)\Big)\;, \quad u(0) = u'(0) = 0$$

wobei $h(t)$ die Heaviside–Funktion ist.

a) Bestimmen Sie die Lösung mit Hilfe der Laplace–Transformation.

b) Geben Sie die Lösung in den Bereichen $0 \le t < 2$ und $2 \le t$ ohne Verwendung der Heaviside–Funktion an und fassen Sie die Terme sinnvoll zusammen.

Lösung 27:

a) Die Laplace–Transformation des AWPs ergibt

$$s^2\,U(s) + 4s\,U(s) + 3\,U(s) = \frac{12}{s} \cdot \Big(1 - \mathrm{e}^{-2s}\Big)\;.$$

Die Laplace–Transformierte der Lösung ergibt sich damit zu

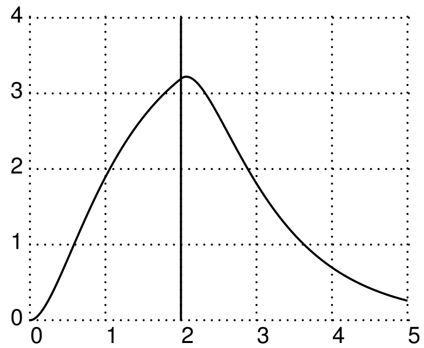
$$U(s) = \frac{12}{s \cdot (s+3) \cdot (s+1)} \cdot \Big(1 - \mathrm{e}^{-2s}\Big) = \Big(\frac{4}{s} + \frac{2}{s+3} + \frac{-6}{s+1}\Big) \cdot \Big(1 - \mathrm{e}^{-2s}\Big)\;.$$

Die Rücktransformation ergibt die gesuchte Lösung

$$u(t) = 4 + 2\,\mathrm{e}^{-3\,t} - 6\,\mathrm{e}^{-t} - h(t-2) \cdot \Big(4 + 2\,\mathrm{e}^{-3\,(t-2)} - 6\,\mathrm{e}^{-(t-2)}\Big)\;.$$

b)

$$u(t) = \begin{cases} 4 + 2\,\mathrm{e}^{-3\,t} - 6\,\mathrm{e}^{-t} & \text{für} \quad 0 \le t < 2 \\ \\ (2 - 2\,\mathrm{e}^{6}) \cdot \mathrm{e}^{-3\,t} + (-6 + 6\,\mathrm{e}^{2}) \cdot \mathrm{e}^{-t} & \text{für} \quad 2 \le t \end{cases}\;.$$



Aufgabe 28: Laplace-Transformierte

Berechnen Sie die Laplace-Transformierte von $f(t) = \sqrt{t}$:

$$F(s) := \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st} \cdot \sqrt{t} \mathrm{d}t.$$

Hinweise:

- Substituieren Sie $u = \sqrt{t}$.
- Spalten Sie u^2 in $u \cdot u$ auf und integrieren Sie partiell.
- Das Quadrat des verbleibenden Integrals können Sie lösen, indem Sie Polarkoordinaten einführen.

Lösung 28:

Mit der Substitution $u = \sqrt{t} \;\Rightarrow\; \mathrm{d}t = 2\,u\,\mathrm{d}u$ erhält man

$$F(s) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-s\,u^2} \cdot u \cdot 2\,u\;\mathrm{d}u = -\frac{1}{s} \cdot \int_0^\infty u \cdot (-2su)\,\mathrm{e}^{-s\,u^2}\;\mathrm{d}u\;.$$

Die partielle Integration ergibt

$$\begin{aligned} F(s) &= -\frac{1}{s}\left(u\mathrm{e}^{-s\,u^2}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty \mathrm{e}^{-s\,u^2}\;\mathrm{d}u \right) \\ &= -\frac{1}{s}\left(0 - 0 - \int_0^\infty \mathrm{e}^{-s\,u^2}\;\mathrm{d}u \right) \\ &= \frac{1}{s} \cdot \int_0^\infty \mathrm{e}^{-s\,u^2}\;\mathrm{d}u\;. \end{aligned}$$

Mit Quadrieren erhält man

$$\big(F(s)\big)^2 \;=\; \frac{1}{s}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-s\,x^2}\;\mathrm{d}x \cdot \frac{1}{s}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-s\,y^2}\;\mathrm{d}y \;=\; \frac{1}{s^2}\int_0^\infty\int_0^\infty \mathrm{e}^{-s\,(x^2+y^2)}\;\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

und durch Übergang zu Polarkoordinaten

$$\big(F(s)\big)^2 \;=\; \frac{1}{s^2}\int_0^\infty\int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{-s\,r^2}\;r\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}r \;=\; \frac{1}{s^2}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\left[\frac{-1}{2\,s}\,\mathrm{e}^{-s\,r^2}\right]_0^\infty \;=\; \frac{\pi}{4\,s^3}\;.$$

Damit ist

$$\underline{\underline{F(s) = \mathcal{L}\left(\sqrt{t}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{4\,s^3}}}}\ .$$

Aufgabe 29: Laplace–Transformierte

Bestimmen Sie unter Verwendung von $\mathcal{L}\Big\{\sin(t)\Big\} = \dfrac{1}{s^2+1}$ und geeigneten Rechenregeln folgende Ausdrücke

a) $\mathcal{L}\left\{\dfrac{\sin(t)}{t}\right\}$, **b)** $\mathcal{L}\left\{\displaystyle\int_0^t \frac{\sin(\tau)}{\tau}\,\mathrm{d}\tau\right\}$, **c)** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$, **d)** $\mathcal{L}\left\{\mathrm{e}^{-t}\,\dfrac{\sin(t)}{t}\right\}$.

Hinweis: Nutzen Sie die Transformationsformel, die Sie im Vorlesunngsskript auf Seite 87-88 finden.

Lösung 29:

a) Mit der Transformationsformel $\mathcal{L}\left\{\dfrac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma$ erhält man

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\sin(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty \frac{1}{\sigma^2+1}\,\mathrm{d}\sigma = \Big[\arctan(\sigma)\Big]_s^\infty = \frac{\pi}{2} - \arctan(s)\ .$$

b) Mit der Transformationsformel $\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau\right\} = \dfrac{F(s)}{s}$ erhält man

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t \frac{\sin(\tau)}{\tau}\,\mathrm{d}\tau\right\} = \frac{1}{s}\cdot\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(s)\right)$$

c)

1. Lösungsweg

Mit Hilfe des Anfangs- und Endwertsatzes ergibt sich

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t &= \lim_{t\to\infty}\int_0^t \frac{\sin\tau}{\tau}\mathrm{d}\tau = \lim_{s\to 0}\left(s\cdot\mathcal{L}\left\{\int_0^t \frac{\sin(\tau)}{\tau}\mathrm{d}\tau\right\}\right)\\ &= \lim_{s\to 0}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(s)\right) = \frac{\pi}{2}\ .\end{aligned}$$

2. Lösungsweg

Nach Definition der Laplace-Transformierten gilt

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\sin(t)}{t}\right\} = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\cdot\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = U(s)$$

Aus der Teilaufgabe **a)** folgt $U(s) = \dfrac{\pi}{2} - \arctan(s)$.

Somit erhält man

$$\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-0\cdot t}\cdot\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = U(0) = \frac{\pi}{2}$$

d) Mit der Transformationsformel $\mathcal{L}\left\{\mathrm{e}^{-at}\,f(t)\right\} = F(s+a)$ erhält man

$$\mathcal{L}\left\{\mathrm{e}^{-t}\,\frac{\sin(t)}{t}\right\} = \frac{\pi}{2} - \arctan(s+1)\ .$$

Aufgabe 30: Laplace-Transformierte

Berechnen Sie die Laplace-Transformierte der folgenden Funktionen:

a) $f_1(t) = \begin{cases} A & \text{für } 0 \leq t \leq t_0 \\ A\mathrm{e}^{-2(t-t_0)} & \text{sonst} \end{cases}$ mit festem $A \in \mathbb{R}$.

b) $f_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq t < a \\ A & \text{für } a \leq t < b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ mit festen $0 < a < b$ und $A \in \mathbb{R}$.

c) $f_3(t) = \begin{cases} t & \text{für } 0 \leq t \leq 3 \\ 3 & \text{für } t > 3 \end{cases}$

d) $f_4(t) = \begin{cases} \sin t & \text{für } t \leq \pi \\ 0 & \text{für } t > \pi \end{cases}$.

Lösung 30:

a)

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f_1(t)\} &= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st} f_1(t)\mathrm{d}t = \int_0^{t_0} \mathrm{e}^{-st} A\mathrm{d}t + \int_{t_0}^\infty A\mathrm{e}^{-2(t-t_0)-st}\mathrm{d}t \\
&= \frac{A}{-s} \cdot \mathrm{e}^{-st}\Big|_0^{t_0} + \frac{A}{-s-2} \cdot \mathrm{e}^{(-s-2)t+2t_0}\Big|_{t_0}^\infty \\
&= \frac{A(1-\mathrm{e}^{-st_0})}{s} + \frac{A\mathrm{e}^{-st_0}}{2+s} = \frac{A}{s} - \frac{2A\mathrm{e}^{-st_0}}{s^2+2s}
\end{aligned}$$

b) $\mathcal{L}\{f_2(t)\} = \int\limits_a^b A\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t = \dfrac{A(\mathrm{e}^{-as} - \mathrm{e}^{-bs})}{s}$

c)

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f_3(t)\} &= \int_0^3 t\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t + \int_3^\infty 3\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t = t\frac{\mathrm{e}^{-st}}{-s}\Big|_0^3 - \int_0^3 \frac{\mathrm{e}^{-st}}{-s}\mathrm{d}t + \frac{3\mathrm{e}^{-st}}{-s}\Big|_3^\infty \\
&= -\frac{3\mathrm{e}^{-3s}}{s} - \frac{\mathrm{e}^{-st}}{s^2}\Big|_0^3 + \frac{3\mathrm{e}^{-3s}}{s} = \frac{-\mathrm{e}^{-3s}+1}{s^2}
\end{aligned}$$

d) **1.Lösungsweg:**(komplexe Zahlen)

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f_4(t)\} &= \int\limits_0^\pi \mathrm{e}^{-st}\sin t\mathrm{d}t = \int\limits_0^\pi \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{-st+it})\mathrm{d}t\\
&=\mathrm{Im}\left(\frac{\mathrm{e}^{-st+it}}{-s+i}\right)\Big|_0^\pi = \mathrm{Im}\left(\frac{(-s-i)\mathrm{e}^{-st+it}}{s^2+1}\right)\Big|_0^\pi\\
&=\frac{\mathrm{e}^{-st}}{s^2+1}\cdot \mathrm{Im}((-s-i)(\cos t + i\sin t))\Big|_0^\pi = \frac{\mathrm{e}^{-st}}{s^2+1}\cdot(-\cos t - s\sin t))\Big|_0^\pi\\
\Rightarrow \qquad &=\frac{\mathrm{e}^{-s\pi}+1}{1+s^2}
\end{aligned}$$

2.Lösungsweg: (zweifache partielle Integration)

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f_4(t)\} &= \int\limits_0^\pi \mathrm{e}^{-st}\sin t\mathrm{d}t = -\cos t\mathrm{e}^{-st}\Big|_0^\pi - \int\limits_0^\pi s\cos t\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t\\
&=\mathrm{e}^{-s\pi}+1-s\sin t\mathrm{e}^{-st}\Big|_0^\pi - \int\limits_0^\pi s^2\sin t\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t\\
&=\mathrm{e}^{-s\pi}+1-s^2\cdot\mathcal{L}\{f_4(t)\}\\
\Rightarrow \qquad \mathcal{L}\{f_4(t)\} &=\frac{\mathrm{e}^{-s\pi}+1}{1+s^2}
\end{aligned}$$

Aufgabe 31: Laplace-Transformierte

a) Berechnen Sie die Laplace-Transformierte

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_{t=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-st} \cdot f(t)\mathrm{d}t$$

der folgenden Funktionen:

i) $f(t) = 1$,

ii) $f(t) = t$,

iii) $f(t) = t^2$,

iv) $f(t) = t^3$,

v) $f(t) = e^{-at}$,

vi) $f(t) = e^{-at} \cdot t$,

vii) $\mathcal{L}\{g'(t)\}$, für eine allgemeine (gegebene) Funktion $g(t)$,

viii) $\mathcal{L}\{g''(t)\}$, für eine allgemeine (gegebene) Funktion $g(t)$.

Hinweis: Für die letzten beiden Aufgaben kann die Laplacetransformierte $G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}$ der Funktion $g(t)$ als bekannt vorausgesetzt werden.

b) Berechnen Sie die Laplace-Transformierte von $f(t) = \sqrt{t}$.

Hinweise:

- Substituieren Sie $u = \sqrt{t}$.
- Spalten Sie u^2 in $u \cdot u$ auf und integrieren Sie partiell.
- Das Quadrat des verbleibenden Integrals können Sie lösen, indem Sie Polarkoordinaten einführen.

Lösung 31:

a) Diese Laplace-Transformationen müssen durch Anwendung der Definition und Bestimmung der Integrale berechnet werden. Es wird in der Regel partiell integriert.

i)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{1\} &= \int_{t=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-st} 1\mathrm{d}t = \left[\frac{\mathrm{e}^{-st}}{-s}\right]_{t=0}^{\infty} \\ &= \frac{1}{s}\end{aligned}$$

ii)

$$\mathcal{L}\{t\} = \int_{t=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-st} t \mathrm{d}t = \left[t\frac{\mathrm{e}^{-st}}{-s} \right]_{t=0}^{\infty} + \frac{1}{s} \int_{t=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-st} \mathrm{d}t$$
$$= 0 - \left. \frac{\mathrm{e}^{-st}}{-s^2} \right|_{t=0}^{\infty} = \frac{1}{s^2}$$

iii)

$$\mathcal{L}\{t^2\} = \int_{t=0}^{\infty} t^2 \mathrm{e}^{-st} \mathrm{d}t = \left[t^2\frac{\mathrm{e}^{-st}}{-s} \right]_{t=0}^{\infty} + \frac{1}{s} \int_{t=0}^{\infty} 2t\mathrm{e}^{-st} \mathrm{d}t$$
$$= 0 + \left[\frac{2t\mathrm{e}^{-st}}{-s^2} \right]_{t=0}^{\infty} + \frac{2}{s^2} \int_{t=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-st} \mathrm{d}t$$
$$= 0 + \left. \frac{2\mathrm{e}^{-st}}{-s^3} \right|_{t=0}^{\infty} = \frac{2}{s^3}$$

iv)

$$\mathcal{L}\{t^3\} = \int_{t=0}^{\infty} t^3 \mathrm{e}^{-st} \mathrm{d}t = \left[t^3\frac{\mathrm{e}^{-st}}{-s} \right]_{t=0}^{\infty} + \frac{1}{s} \int_{t=0}^{\infty} 3t^2\mathrm{e}^{-st} \mathrm{d}t$$
$$= 0 + \left[\frac{3t^2\mathrm{e}^{-st}}{-s^2} \right]_{t=0}^{\infty} + \frac{3}{s^2} \int_{t=0}^{\infty} 2t\mathrm{e}^{-st} \mathrm{d}t$$
$$= 0 + \left. \frac{6t\mathrm{e}^{-st}}{-s^3} \right|_{t=0}^{\infty} + \int_{t=0}^{\infty} \frac{6\mathrm{e}^{-st}}{s^3} \mathrm{d}t$$
$$= 0 + \left. \frac{6\mathrm{e}^{-st}}{s^4} \right|_{t=0}^{\infty} = \frac{6}{s^4}$$

v)

$$\mathcal{L}\{\mathrm{e}^{-at}\} = \int_{t=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-st} \mathrm{e}^{-at} \mathrm{d}t = \left[\frac{\mathrm{e}^{-(s+a)t}}{-(s+a)} \right]_{t=0}^{\infty}$$
$$= \frac{1}{s+a}$$

vi)

$$\mathcal{L}\{t\mathrm{e}^{-at}\} = \int_{t=0}^{\infty} t\mathrm{e}^{-at} \mathrm{e}^{-st} \mathrm{d}t = \left[\frac{t\mathrm{e}^{-(s+a)t}}{-(s+a)} \right]_{t=0}^{\infty} + \frac{1}{s+a} \int_{t=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-(s+a)t} \mathrm{d}t$$
$$= 0 + \left. \frac{\mathrm{e}^{-(s+a)t}}{-(s+a)^2} \right|_{t=0}^{\infty} = \frac{1}{(s+a)^2}$$

vii)

$$\mathcal{L}\{g'(t)\} = \int\limits_{t=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-st} g'(t)\mathrm{d}t$$

$$\left[\mathrm{e}^{-st} g(t)\right]_{t=0}^{\infty} - \int\limits_{t=0}^{\infty} (-s\mathrm{e}^{-st} g(t))\mathrm{d}t$$

$$= 0 - g(0) + s\mathcal{L}\{g(t)\} = sG(s) - g(0)$$

viii)

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{g''(t)\} &= \int\limits_{t=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-st} g''(t)\mathrm{d}t \\
&= \left[\mathrm{e}^{-st} g'(t)\right]_{t=0}^{\infty} - \int\limits_{t=0}^{\infty} (-s\mathrm{e}^{-st} g'(t))\mathrm{d}t \\
&= 0 - g'(0) + s\mathcal{L}\{g'(t)\} \\
&= s(sG(s) - g(0)) - g'(0) = s^2 G(s) - g'(0) - sg(0)
\end{aligned}$$

b) Mit der Substitution $u = \sqrt{t} \;\Rightarrow\; \mathrm{d}t = 2\,u\,\mathrm{d}u$ erhält man

$$F(s) = \int\limits_0^{\infty} \mathrm{e}^{-s\,u^2} \cdot u \cdot 2\,u\;\mathrm{d}u = -\frac{1}{s} \cdot \int\limits_0^{\infty} u \cdot (-2su)\,\mathrm{e}^{-s\,u^2}\;\mathrm{d}u\;.$$

Partielle Integration ergibt

$$\begin{aligned}
F(s) &= -\frac{1}{s}\left(u\mathrm{e}^{-s\,u^2}\Big|_0^{\infty} - \int\limits_0^{\infty} \mathrm{e}^{-s\,u^2}\;\mathrm{d}u \right) \\
&= -\frac{1}{s}\left(0 - 0 - \int\limits_0^{\infty} \mathrm{e}^{-s\,u^2}\;\mathrm{d}u \right) \\
&= \frac{1}{s} \cdot \int\limits_0^{\infty} \mathrm{e}^{-s\,u^2}\;\mathrm{d}u\;.
\end{aligned}$$

Durch Quadrieren der Gleichung erhält man

$$\big(F(s)\big)^2 \;=\; \frac{1}{s}\int\limits_0^{\infty} \mathrm{e}^{-s\,x^2}\;\mathrm{d}x \cdot \frac{1}{s}\int\limits_0^{\infty} \mathrm{e}^{-s\,y^2}\;\mathrm{d}y \;=\; \frac{1}{s^2}\int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{\infty} \mathrm{e}^{-s\,(x^2+y^2)}\;\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

und durch Übergang zu Polarkoordinaten

$$\Big(F(s)\Big)^2 \;=\; \frac{1}{s^2} \int_0^\infty \int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{-s\,r^2} \; r \,\mathrm{d}\phi \,\mathrm{d}r \;=\; \frac{1}{s^2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \left[\frac{-1}{2\,s}\,\mathrm{e}^{-s\,r^2}\right]_0^\infty \;=\; \frac{\pi}{4\,s^3}\;.$$

Damit ist

$$F(s) = \mathcal{L}\left(\sqrt{t}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{4\,s^3}}.$$

Aufgabe 32: Laplace–Transformierte

Bestimmen Sie unter Verwendung von $\mathcal{L}\Big\{\sin(t)\Big\} = \dfrac{1}{s^2+1}$ und geeigneten Rechenregeln folgende Ausdrücke

a) $\mathcal{L}\left\{\dfrac{\sin(t)}{t}\right\}$, **b)** $\mathcal{L}\left\{\displaystyle\int_0^t \dfrac{\sin(\tau)}{\tau}\,\mathrm{d}\tau\right\}$, **c)** $\displaystyle\int_0^\infty \dfrac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$, **d)** $\mathcal{L}\left\{\mathrm{e}^{-t}\,\dfrac{\sin(t)}{t}\right\}$.

Lösung 32:

a) Mit der Transformationsformel $\mathcal{L}\left\{\dfrac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma$ erhält man

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\sin(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty \frac{1}{\sigma^2+1}\,\mathrm{d}\sigma = \Big[\arctan(\sigma)\Big]_s^\infty = \frac{\pi}{2} - \arctan(s)\ .$$

b) Mit der Transformationsformel $\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau\right\} = \dfrac{F(s)}{s}$ erhält man

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t \frac{\sin(\tau)}{\tau}\,\mathrm{d}\tau\right\} = \frac{1}{s}\cdot\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(s)\right)$$

c)

1. Lösungsweg

Mit Hilfe des Anfangs- und Endwertsatzes ergibt sich

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t &= \lim_{t\to\infty}\int_0^t \frac{\sin\tau}{\tau}\mathrm{d}\tau = \lim_{s\to 0}\left(s\cdot\mathcal{L}\left\{\int_0^t \frac{\sin(\tau)}{\tau}\mathrm{d}\tau\right\}\right)\\ &= \lim_{s\to 0}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(s)\right) = \frac{\pi}{2}\ .\end{aligned}$$

2. Lösungsweg

Nach Definition der Laplace-Transformierten gilt

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\sin(t)}{t}\right\} = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\cdot\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = U(s)$$

Aus der Teilaufgabe **a)** folgt $U(s) = \dfrac{\pi}{2} - \arctan(s)$.
Somit erhält man

$$\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-0\cdot t}\cdot\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = U(0) = \frac{\pi}{2}$$

d) Mit der Transformationsformel $\mathcal{L}\left\{\mathrm{e}^{-at}\, f(t)\right\} = F(s+a)$ erhält man

$$\mathcal{L}\left\{\mathrm{e}^{-t}\,\frac{\sin(t)}{t}\right\} = \frac{\pi}{2} - \arctan(s+1)\ .$$

Aufgabe 33: Heaviside-Funktion

Gesucht ist die Laplace–Transformierte von

$$f(t) := h(t-2) \cdot t^2 \ ,$$

wobei h die Heaviside–Funktion ist.

a) Mit Hilfe der Integraldarstellung der Definition.

b) Mit Hilfe des Verschiebungssatzes und der Tabelle der Laplace–Transformierten.

Lösung 33:

a)

$$F(s) = \int_2^\infty \mathrm{e}^{-s\,t}\, t^2 \ \mathrm{d}t = \left[- \left(\frac{t^2}{s} + \frac{2\,t}{s^2} + \frac{2}{s^3} \right) \cdot \mathrm{e}^{-s\,t} \right]_2^\infty = \left(\frac{4}{s} + \frac{4}{s^2} + \frac{2}{s^3} \right) \cdot \mathrm{e}^{-2\,s} \ .$$

b) Für den Verschiebungssatz

$$\mathcal{L}\Big(f(t-a) \cdot h(t-a) \Big) = F(s) \cdot \mathrm{e}^{-a\,s} \ , \quad a > 0 \ ,$$

muss die Funktion erst umgeschrieben werden:

$$t^2 = (t-2)^2 + 4(t-2) + 4 \ .$$

Damit erhält man die Laplace–Transformierte

$$\mathcal{L}\Big(\big((t-2)^2 + 4(t-2) + 4 \big) \cdot h(t-2) \Big) = \left(\frac{2}{s^3} + \frac{4}{s^2} + \frac{4}{s} \right) \cdot \mathrm{e}^{-2\,s}$$

Lineare Systeme von Differentialgleichungen

Aufgabe 34: Differentialgleichungen und Systeme (Hauptvektoren)

Gegeben sei die lineare Differentialgleichung

$$u'''(t) - 4\,u''(t) + 4\,u'(t) = 9\,\mathrm{e}^{-t}\,. \tag{0.1}$$

a) Verwandeln Sie die Differentialgleichung (0.1) in ein System erster Ordnung

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{f}(t)\,.$$

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des homogenen Systems $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)$ aus Teil a).

c) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Systems aus Teil a).

Hinweis: Eine spezielle Lösung des Systems aus Teil a) kann mit dem Ansatz $\boldsymbol{x}_{\mathrm{p}}(t) = (\alpha, \beta, \gamma)^\top \cdot \mathrm{e}^{-t}$, mit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, bestimmt werden.

Lösung 34:

a) Mit den Substitutionen $u' =: v$ und $u'' = v' =: w$ erhält man das System erster Ordnung:

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{e}^{-t}\,.$$

Mit $\boxed{\boldsymbol{x}(t) := (u(t), v(t), w(t))^\top}$ und $\boxed{\boldsymbol{f}(t) := (0,0,9)^\top \mathrm{e}^{-t}}$ folgt

$$\boxed{\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{f}(t)\,, \qquad \boldsymbol{A} := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix}.}$$

b) Die charakteristische Gleichung ist

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & -4 & 4-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda \cdot \left(\lambda^2 - 4\lambda + 4\right) = 0.$$

Die Eigenwerte sind somit $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_{2,3} = 2$. Ein Eigenvektor für $\lambda_1 = 0$ ist $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 , 0 , 0 \end{pmatrix}^\top$. Für $\lambda_{2,3} = 2$ gibt es nur einen linear unabängigen Eigenvektor, z.B. $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 , 2 , 4 \end{pmatrix}^\top$. Es muss also noch ein zugehöriger Hauptvektor bestimmt werden:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{h} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} .$$

Damit erhält man die allgemeine Lösung des homogenen Systems zu

$$\boldsymbol{x}_{\text{hom}}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{e}^{2\,t} + c_3 \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right] \cdot \mathrm{e}^{2\,t}$$

c) Für das inhomogene System erhält man mit dem Ansatz $\boldsymbol{x}_{\mathrm{p}}(t) = (\alpha, \beta, \gamma)^\top \cdot \mathrm{e}^{-t}$ nach Kürzen durch den Exponentialterm das LGS

$$\begin{pmatrix} -\alpha \\ -\beta \\ -\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

Eine partikuläre Lösung des inhomogenen Systems ist damit

$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{p}}(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{e}^{-t} .$$

Die allgemeine Lösung ist die Summe aus der homogenen und der partikulären Lösung:

$$\boxed{\begin{aligned} \boldsymbol{x}(t) &= c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{e}^{2\,t} + c_3 \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right] \cdot \mathrm{e}^{2\,t} \\ &\quad + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{e}^{-t} . \end{aligned}}$$

Aufgabe 35:

a) Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$u''(x) - 16u(x) = 16x \qquad \text{mit} \qquad u(0) = 1,\; u'(0) = 4.$$

i) Überführen Sie diese gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung in ein System aus zwei Differentialgleichungen erster Ordnung,

$$\boldsymbol{y}'(x) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}(x) + \boldsymbol{g}(x), \qquad \text{mit} \qquad \boldsymbol{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}.$$

Geben Sie hierfür auch die Anfangsbedingung an.

ii) Bestimmen Sie die Lösung $\boldsymbol{y}(x)$ dieses Anfangswertproblems.

iii) Bestimmen Sie daraus die Lösung $u(x)$ der ursprünglichen Anfangswertaufgabe.

b) Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$\boldsymbol{y}'(x) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}(x) + \boldsymbol{b}, \qquad \text{mit} \qquad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

i) Bestimmen Sie ein **reelles** Fundamentalsystem des zugehörigen homogenen Problems.

ii) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Differentialgleichungssystems

$$\boldsymbol{y}'(x) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}(x) + \boldsymbol{b}.$$

Lösung 35:

a) **i)** Mit

$$\boldsymbol{y}(x) = \begin{pmatrix} u(x) \\ u'(x) \end{pmatrix}$$

ergibt sich

$$\boldsymbol{y}'(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 16 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{y}(x) + \begin{pmatrix} 0 \\ 16x \end{pmatrix}.$$

Die zugehörigen Anfangswerte sind $\boldsymbol{y}(0) = (1, 4)^\top$.

ii) Die Systemmatrix hat die Eigenwerte $\lambda_1 = +4$ und $\lambda_2 = -4$ mit den

Eigenvektoren

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ und } \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Die Fundamentalmatrix ist damit

$$\boldsymbol{Y}(x) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{4x} & -\mathrm{e}^{-4x} \\ 4\mathrm{e}^{4x} & 4\mathrm{e}^{-4x} \end{pmatrix}.$$

Die Inverse der Matrix $\boldsymbol{Y}(0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$ ist

$$\boldsymbol{Y}(0)^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Eine Lösung des Anfangswertproblems ergibt sich dann zu

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{y}(x) =& \boldsymbol{Y}(x)\boldsymbol{Y}(0)^{-1}\boldsymbol{y}(0) + \int\limits_{t=0}^{x} \boldsymbol{Y}(x-t)\boldsymbol{Y}(0)^{-1}\boldsymbol{g}(t)\mathrm{d}t, \qquad \text{mit } \boldsymbol{g}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 16t \end{pmatrix}. \\
=& \boldsymbol{Y}(x) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int\limits_{t=0}^{x} \boldsymbol{Y}(x-t) \begin{pmatrix} 2t \\ 2t \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\
=& \mathrm{e}^{4x} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \int\limits_{t=0}^{x} 2t \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{4(x-t)} - \mathrm{e}^{-4(x-t)} \\ 4\mathrm{e}^{4(x-t)} + 4\mathrm{e}^{-4(x-t)} \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\
=& \mathrm{e}^{4x} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \left[2t \cdot \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -\mathrm{e}^{4(x-t)} - \mathrm{e}^{-4(x-t)} \\ -4\mathrm{e}^{4(x-t)} + 4\mathrm{e}^{-4(x-t)} \end{pmatrix} \right]_{t=0}^{x} + \\
& - \int\limits_{t=0}^{x} 2 \cdot \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -\mathrm{e}^{4(x-t)} - \mathrm{e}^{-4(x-t)} \\ -4\mathrm{e}^{4(x-t)} + 4\mathrm{e}^{-4(x-t)} \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\
=& \mathrm{e}^{4x} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{x}{2} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{8} \left. \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{4(x-t)} - \mathrm{e}^{-4(x-t)} \\ 4\mathrm{e}^{4(x-t)} + 4\mathrm{e}^{-4(x-t)} \end{pmatrix} \right|_{t=0}^{x} \\
=& \mathrm{e}^{4x} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{8} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{4x} - \mathrm{e}^{-4x} \\ 4\mathrm{e}^{4x} + 4\mathrm{e}^{-4x} \end{pmatrix} \\
=& \begin{pmatrix} -x \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{9\mathrm{e}^{4x}}{8} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{\mathrm{e}^{-4x}}{8} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

b) **i)** Die Eigenwerte der Matrix $\boldsymbol{A}$ ergeben sich aus dem charakteristischen

Polynom:

$$0 = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 3 & 1-\lambda & -2 \\ 2 & 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)((1-\lambda)^2 + 4)$$

$$\Rightarrow \qquad \lambda_1 = 1,\ \lambda_{2/3} = 1 \pm 2\,\mathrm{i}.$$

Die Eigenvektoren zu λ_1 und λ_2 ergeben sich aus dem charakteristischen Gleichungssystem:

$$\lambda_1 = 1: \qquad \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{array} \Leftarrow \qquad \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 1 + 2\,\mathrm{i}: \qquad \begin{array}{ccc|c} -2\,\mathrm{i} & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2\,\mathrm{i} & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & -2\,\mathrm{i} \end{array} \Leftarrow \qquad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ein reelles Fundamentalsystem ist damit gegeben durch

$$\boldsymbol{y}_1 = \mathrm{e}^{\lambda_1 x} \boldsymbol{v}_1 = \mathrm{e}^x \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{y}_2 = \Re\left(\mathrm{e}^{\lambda_2 x} \boldsymbol{v}_2\right) = \mathrm{e}^x \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin(2x) \\ \cos(2x) \end{pmatrix}$$

$$\text{und } \boldsymbol{y}_3 = \Im\left(\mathrm{e}^{\lambda_2 x} \boldsymbol{v}_2\right) = \mathrm{e}^x \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(2x) \\ \sin(2x) \end{pmatrix}.$$

ii) Da die Inhomogenität des Differentialgleichungssystems

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} = 2\boldsymbol{v}_1$$

ein Eigenvektor der Systemmatrix $\boldsymbol{A}$ ist, kann man als Partikulärlösung $\boldsymbol{y}_p(x) = \alpha \boldsymbol{v}_1$ ansetzen. Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt:

$$\boldsymbol{y}_p'(x) = \boldsymbol{0} \stackrel{!}{=} \alpha \boldsymbol{A} \boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_1 = \alpha \cdot 1 \boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_1 \ \Rightarrow\ \alpha = -2.$$

Damit hat man als allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung:

$$\boldsymbol{y}(x) = \boldsymbol{y}_h(x) + \boldsymbol{y}_p(x) = c_1\boldsymbol{y}_1(x) + c_2\boldsymbol{y}_2(x) + c_3\boldsymbol{y}_3(x) - 2\boldsymbol{v}_1.$$

Aufgabe 36:

a) Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$u''(x) - 16u(x) = 16x \qquad \text{mit} \qquad u(0) = 1,\ u'(0) = 4.$$

i) Überführen Sie diese gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung in ein System aus zwei Differentialgleichungen erster Ordnung,

$$\boldsymbol{y}'(x) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}(x) + \boldsymbol{g}(x), \qquad \text{mit} \qquad \boldsymbol{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}.$$

Geben Sie hierfür auch die Anfangsbedingung an.

ii) Bestimmen Sie die Lösung $\boldsymbol{y}(x)$ dieses Anfangswertproblems.

iii) Bestimmen Sie daraus die Lösung $u(x)$ der ursprünglichen Anfangswertaufgabe.

Lösung 36:

a) **i)** Mit

$$\boldsymbol{y}(x) = \begin{pmatrix} u(x) \\ u'(x) \end{pmatrix}$$

ergibt sich

$$\boldsymbol{y}'(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 16 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{y}(x) + \begin{pmatrix} 0 \\ 16x \end{pmatrix}.$$

Die zugehörigen Anfangswerte sind $\boldsymbol{y}(0) = (1, 4)^\top$.

ii) Die Systemmatrix hat die Eigenwerte $\lambda_1 = +4$ und $\lambda_2 = -4$ mit den Eigenvektoren

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ und } \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Die Fundamentalmatrix ist damit

$$\boldsymbol{Y}(x) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{4x} & -\mathrm{e}^{-4x} \\ 4\mathrm{e}^{4x} & 4\mathrm{e}^{-4x} \end{pmatrix}.$$

Die Inverse der Matrix $\boldsymbol{Y}(0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$ ist

$$\boldsymbol{Y}(0)^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Lösung des Anfangswertproblems ergibt sich dann zu

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{y}(x) =& \boldsymbol{Y}(x)\boldsymbol{Y}(0)^{-1}\boldsymbol{y}(0) + \int\limits_{t=0}^{x} \boldsymbol{Y}(x-t)\boldsymbol{Y}(0)^{-1}\boldsymbol{g}(t)\mathrm{d}t, \qquad \text{mit } \boldsymbol{g}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 16t \end{pmatrix}. \\
=& \boldsymbol{Y}(x)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int\limits_{t=0}^{x} \boldsymbol{Y}(x-t)\begin{pmatrix} 2t \\ 2t \end{pmatrix}\mathrm{d}t \\
=& \mathrm{e}^{4x}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \int\limits_{t=0}^{x} 2t \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{4(x-t)} - \mathrm{e}^{-4(x-t)} \\ 4\mathrm{e}^{4(x-t)} + 4\mathrm{e}^{-4(x-t)} \end{pmatrix}\mathrm{d}t \\
=& \mathrm{e}^{4x}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \left[2t\cdot\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -\mathrm{e}^{4(x-t)} - \mathrm{e}^{-4(x-t)} \\ -4\mathrm{e}^{4(x-t)} + 4\mathrm{e}^{-4(x-t)} \end{pmatrix} \right]_{t=0}^{x} + \\
& - \int\limits_{t=0}^{x} 2\cdot\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -\mathrm{e}^{4(x-t)} - \mathrm{e}^{-4(x-t)} \\ -4\mathrm{e}^{4(x-t)} + 4\mathrm{e}^{-4(x-t)} \end{pmatrix}\mathrm{d}t \\
=& \mathrm{e}^{4x}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{x}{2}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{8}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{4(x-t)} - \mathrm{e}^{-4(x-t)} \\ 4\mathrm{e}^{4(x-t)} + 4\mathrm{e}^{-4(x-t)} \end{pmatrix}\Bigg|_{t=0}^{x} \\
=& \mathrm{e}^{4x}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{8}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{4x} - \mathrm{e}^{-4x} \\ 4\mathrm{e}^{4x} + 4\mathrm{e}^{-4x} \end{pmatrix} \\
=& \begin{pmatrix} -x \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{9\mathrm{e}^{4x}}{8}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{\mathrm{e}^{-4x}}{8}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

iii) Die Lösung des ursprünglichen (eindimensionalen) Anfangswertproblems ist die erste Komponente von $\boldsymbol{y}(x)$:

$$u(x) = \boldsymbol{y}_1(x) = -x + \frac{9\mathrm{e}^{4x}}{8} - \frac{\mathrm{e}^{-4x}}{8}.$$

Aufgabe 37:

Gegeben seien

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -7 & -5 & 6 \\ 9 & 8 & -9 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{g}(x) = \begin{pmatrix} x\,\mathrm{e}^{-x} \\ \mathrm{e}^{-x} \\ (x+1)\mathrm{e}^{-x} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{y}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Zu untersuchen ist das Anfangswertproblem

$$\boldsymbol{y}'(x) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}(x) + \boldsymbol{g}(x) \quad \text{mit } \boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}_0.$$

Hinweis: Ein Eigenwert der Matrix $\boldsymbol{A}$ ist $\lambda = 2$.

a) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem des zugehörigen homogenen Problems.

b) Bestimmen Sie die Lösung des inhomogenen Anfangswertproblems.

Lösung 37:

a) Die Eigenwerte der Matrix $\boldsymbol{A}$ ergeben sich aus dem charakteristischen Polynom:

$$\begin{aligned}
0 = \det &\begin{pmatrix} -7-\lambda & -5 & 6 \\ 9 & 8-\lambda & -9 \\ 0 & 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} \\
=&(-7-\lambda)\det\begin{pmatrix} 8-\lambda & -9 \\ 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} - 9\det\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} \\
=&(-7-\lambda)((8-\lambda)(-1-\lambda)+9) - 9(-5(-1-\lambda)-6) \\
=&(-7-\lambda)(\lambda^2-7\lambda+1) - 9(5\lambda-1) \\
=&-\lambda^3+3\lambda+2
\end{aligned}$$

Ein Eigenwert ist $\lambda_1 = -1$:

	-1	0	3	2
	$\backslash$	1	-1	-2
$\lambda=-1$	-1	1	2	0

Die verbliebenen Eigenwerte ergeben sich als Nullstellen des Restpolynoms $-\lambda^2+\lambda+2$:

$$\lambda_{2/3} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}.$$

Die Eigenvektoren ergeben sich aus dem jeweiligen charakteristischen Gleichungssystem:

$$\lambda_2 = 2: \qquad \begin{array}{rrr|r|l} -9 & -5 & 6 & 0 & \\ 9 & 6 & -9 & 0 & +I \\ 0 & 1 & -3 & 0 & \\ \hline -9 & -5 & 6 & 0 & \\ 0 & 1 & -3 & 0 & \\ 0 & 1 & -3 & 0 & -II \\ \hline -9 & -5 & 6 & 0 & \\ 0 & 1 & -3 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \end{array} \quad \Leftarrow \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = \lambda_3 = -1: \qquad \begin{array}{rrr|r|l} -6 & -5 & 6 & 0 & \\ 9 & 9 & -9 & 0 & +3/2 \times I \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \\ \hline -6 & -5 & 6 & 0 & \\ 0 & 3/2 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \end{array} \quad \Leftarrow \quad \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Weitere linear unabhängige Eigenvektoren gibt es nicht. Es muss also ein Hauptvektor ermittelt werden, dieser ist Lösung des Gleichungssystems

$$(\boldsymbol{A} - (-1)\boldsymbol{E})\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}_1 :$$

$$\begin{array}{rrr|l|l} -6 & -5 & 6 & 1 & \\ 9 & 9 & -9 & 0 & +3/2 \times I \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \\ \hline -6 & -5 & 6 & 1 & \\ 0 & 3/2 & 0 & 3/2 & \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \end{array} \quad \Leftarrow \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ein Fundamentalsystem ist damit gegeben durch

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{y}_1 =& \mathrm{e}^{\lambda_1 x}\boldsymbol{v}_1 = \mathrm{e}^{-x}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\\
\boldsymbol{y}_2 =& \mathrm{e}^{\lambda_1 x}(\boldsymbol{w}+x\boldsymbol{v}_1) = \mathrm{e}^{-x}\begin{pmatrix}x\\1\\1+x\end{pmatrix},\\
\boldsymbol{y}_3 =& \mathrm{e}^{\lambda_2 x}\boldsymbol{v}_2 = \mathrm{e}^{2x}\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

b) Eine Fundamentalmatrix des Systems ergibt sich aus dem Fundamentalsystem:

$$\boldsymbol{Y}(x) = (\boldsymbol{y}_1,\, \boldsymbol{y}_2,\, \boldsymbol{y}_3) = \begin{pmatrix}\mathrm{e}^{-x} & x\mathrm{e}^{-x} & -\mathrm{e}^{2x}\\ 0 & \mathrm{e}^{-x} & 3\mathrm{e}^{2x}\\ \mathrm{e}^{-x} & (1+x)\mathrm{e}^{-x} & \mathrm{e}^{2x}\end{pmatrix}.$$

An der Stelle $x = 0$ hat man

$$\boldsymbol{Y}(0) = \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 3\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

Um $\boldsymbol{Y}(0)^{-1}\boldsymbol{g}(t)$ und $\boldsymbol{Y}(0)^{-1}\boldsymbol{y}(0)$ zu ermitteln wird das zugehörige Gleichungssystem gelöst:

$$\begin{array}{ccr|l|c|l}
1 & 0 & -1 & t\mathrm{e}^{-t} & 1 & \\
0 & 1 & 3 & \mathrm{e}^{-t} & 0 & \\
1 & 1 & 1 & (t+1)\mathrm{e}^{-t} & 2 & -I\\
\hline
1 & 0 & -1 & t\mathrm{e}^{-t} & 1 & \\
0 & 1 & 3 & \mathrm{e}^{-t} & 0 & \\
0 & 1 & 2 & \mathrm{e}^{-t} & 1 & -II\\
\hline
1 & 0 & -1 & t\mathrm{e}^{-t} & 1 & \\
0 & 1 & 3 & \mathrm{e}^{-t} & 0 & \\
0 & 0 & -1 & 0 & 1 &
\end{array}$$

Lösung des Systems ist

$$\boldsymbol{Y}(0)^{-1}\boldsymbol{g}(t) = \begin{pmatrix}t\mathrm{e}^{-t}\\ \mathrm{e}^{-t}\\ 0\end{pmatrix}$$

und
$$\boldsymbol{Y}(0)^{-t}\boldsymbol{y}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$
Damit ergibt sich dann die Lösung des Anfangswertproblems zu:

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{y}_{AWP}(x) \\
=&\boldsymbol{Y}(x)\boldsymbol{Y}(0)^{-1}\boldsymbol{y}(0) + \int\limits_{t=0}^{x} \boldsymbol{Y}(x-t)\boldsymbol{Y}(0)^{-1}\boldsymbol{g}(t)\mathrm{d}t \\
=&\boldsymbol{Y}(x)\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \\
&+ \int\limits_{t=0}^{x} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-(x-t)} & (x-t)\mathrm{e}^{-(x-t)} & -\mathrm{e}^{2(x-t)} \\ 0 & \mathrm{e}^{-(x-t)} & 3\mathrm{e}^{2(x-t)} \\ \mathrm{e}^{-(x-t)} & (1+x-t)\mathrm{e}^{-(x-t)} & \mathrm{e}^{2(x-t)} \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-t} \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\
=&3\mathrm{e}^{-x}(\boldsymbol{w} + x\boldsymbol{v}_1) - \mathrm{e}^{2x}\boldsymbol{v}_2 + \\
&+ \mathrm{e}^{-x} \int\limits_{t=0}^{x} \begin{pmatrix} x \\ 1 \\ 1+x \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\
=&\mathrm{e}^{-x}\begin{pmatrix} 0+x \\ 1+0 \\ 1+x \end{pmatrix} - \mathrm{e}^{2x}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + x\mathrm{e}^{-x}\begin{pmatrix} x \\ 1 \\ 1+x \end{pmatrix} \\
=&\mathrm{e}^{-x}\begin{pmatrix} x^2+x \\ x+1 \\ x^2+2x+1 \end{pmatrix} + \mathrm{e}^{2x}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Aufgabe 38*: Differentialgleichungssystem

Die Matrix $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{(3,3)}$ und die Vektoren $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^3$ seien wie folgt gegeben:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 4 & 4 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v} := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{w} := \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ a \end{pmatrix}, \boldsymbol{z} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Offenbar gilt $\boldsymbol{Av} = 4\boldsymbol{v}$. Berechnen Sie

(i) $\lambda \in \mathbb{R}$ so, dass $\boldsymbol{Az} = \lambda\, \boldsymbol{z}$ gilt, (ii) die Spur $\mathrm{Sp}(\boldsymbol{A})$ von $\boldsymbol{A}$.

Bestimmen Sie mit diesen Ergebnissen alle Eigenwerte der Matrix $\boldsymbol{A}$.

(Selbstverständlich sollen Sie **nicht** das charakteristische Polynom bestimmen und lösen!)

b) Berechnen Sie $a \in \mathbb{R}$ so, dass $(\boldsymbol{A} - 4\boldsymbol{E})\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}$ gilt. Bestimmen Sie nun alle Haupt– und Eigenvektoren von $\boldsymbol{A}$.

c) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $\boldsymbol{y}(t)$ des DGl–Systems

$$\boldsymbol{y}'(t) = \boldsymbol{Ay}(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Lösung 38:

a) i) Man berechnet ohne Schwierigkeit

$$\boldsymbol{Az} = (2, 0, 2)^\top = 2\boldsymbol{z}, \quad \text{also} \quad \boxed{\lambda = 2.}$$

ii) Es gilt $\mathrm{Sp}\,(\boldsymbol{A}) = 10$.

Mit den schon bekannten Eigenwerten $\boxed{\lambda_1 := 4}$, $\boxed{\lambda_2 = 2}$ folgt noch $\lambda_3 = \mathrm{Sp}\,(\boldsymbol{A}) - \lambda_1 - \lambda_2$, also $\boxed{\lambda_3 = 4\ .}$

b) Die Gleichung

$$(\boldsymbol{A} - 4\boldsymbol{E})\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 4 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - a \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{v} - a \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \boldsymbol{v}$$

führt auf $\boxed{a = 0\,.}$

Mit diesem Wert $(a = 0)$ erfüllt $\boldsymbol{w}$ die Hauptvektorgleichung, ist also ein **Hauptvektor 2. Stufe** zum Eigenwert $\lambda = 4$.

Eigenvektoren sind $\boldsymbol{v}$ zum EW $\lambda = 4$ sowie $\boldsymbol{z}$ zum EW $\lambda = 2$.

c) Die allgemeine Lösung des DGl–Systems lautet

$$\boxed{\boldsymbol{y}(t) = \mathrm{e}^{2t} C_1\, \boldsymbol{z} + \mathrm{e}^{4t} \Big(C_2\, \boldsymbol{v} + C_3 (\boldsymbol{w} + t\boldsymbol{v}) \Big), \quad C_k \in \mathbb{R}\,.}$$

Aufgabe 39: Differentialgleichgungssystem, Hauptvektoren

Gegeben sei die Matrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

sowie die Vektoren

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{u}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \boldsymbol{u}_5 = \begin{pmatrix} 9 \\ -10 \\ 8 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die Matrix-Vektor-Produkte $\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_j$, $j = 1, 2, 3, 4, 5$. Welche Eigenwerte und Hauptvektoren hat $\boldsymbol{A}$?

b) Lösen Sie das Differentialgleichungssystem

$$\boldsymbol{y}'(x) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}(x).$$

c) Lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem mit den Anfangswerten

$$\boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}_0 = (0, 9, -8, 5, -8)^\top.$$

Lösung 39:

a) Die gefragten Produkte ergeben sich zu

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_1 &= 4\boldsymbol{u}_1 \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_2 &= (1, 4, 0, 0, 0)^\top = 4\boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_1 \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_3 &= (0, -7, 0, 4, 0)^\top = 4\boldsymbol{u}_3 + \boldsymbol{u}_2 \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_4 &= (0, 14, -4, -11, 4)^\top = 4\boldsymbol{u}_4 + \boldsymbol{u}_3 \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_5 &= (18, -20, 16, -8, 16)^\top = 2\boldsymbol{u}_5. \end{aligned}$$

Damit hat $\boldsymbol{A}$ den vierfachen Eigenwert $\lambda_1 = 4$ mit Eigenvektor $\boldsymbol{u}_1$ und den einfachen Eigenwert $\lambda_5 = 2$ mit Eigenvektor $\boldsymbol{u}_5$. Die erweiterten Eigenvektoren zu λ_1 sind $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$ und $\boldsymbol{u}_4$, da jeweils gilt

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_j = \lambda_1 \boldsymbol{u}_j + \boldsymbol{u}_{j-1}, \qquad j = 2, 3, 4.$$

b) Das Differentialgleichungssystem $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$ hat dann die Lösung

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{y}(x) =& \mathrm{e}^{\lambda_1 x}\left(\alpha \boldsymbol{u}_1 + \beta\left(\boldsymbol{u}_2 + x\boldsymbol{u}_1\right) + \gamma\left(\boldsymbol{u}_3 + x\boldsymbol{u}_2 + \frac{x^2}{2}\boldsymbol{u}_1\right) + \right.\\
&\left. + \delta\left(\boldsymbol{u}_4 + x\boldsymbol{u}_3 + \frac{x^2}{2}\boldsymbol{u}_2 + \frac{x^3}{6}\boldsymbol{u}_1\right)\right) + \varepsilon \mathrm{e}^{\lambda_5 x}\boldsymbol{u}_5 \\
=& \mathrm{e}^{4x}\left(\alpha\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}x\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}x^2/2\\-2+x\\0\\1\\0\end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix}x^3/6\\4-2x+x^2/2\\-1\\-3+x\\1\end{pmatrix}\right) + \varepsilon \mathrm{e}^{2x}\begin{pmatrix}9\\-10\\8\\-4\\8\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

c) Setzt man die gegebenen Anfangswerte ein, ergibt sich ein Gleichungssystem für die Integrationskonstanten:

α	β	γ	δ	ε		
1	0	0	0	9	0	
0	1	-2	4	-10	9	
0	0	0	-1	8	-8	4. Zeile
0	0	1	-3	-4	5	3. Zeile
0	0	0	1	8	-8	+3. Zeile
1	0	0	0	9	0	
0	1	-2	4	-10	9	
0	0	1	-3	-4	5	
0	0	0	-1	8	-8	
0	0	0	0	16	-16	

Hieraus ergeben sich die Koeffizienten

$$\varepsilon = -1,\ \delta = 0,\ \gamma = 1,\ \beta = 1,\ \alpha = 9$$

und damit

$$\boldsymbol{y}(x) = \mathrm{e}^{4x}\begin{pmatrix}9+x+x^2/2\\-1+x\\0\\1\\0\end{pmatrix} - \mathrm{e}^{2x}\begin{pmatrix}9\\-10\\8\\-4\\8\end{pmatrix}$$

Aufgabe 40: Inhomogene lineare Systeme (Hauptvektoren)

Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$\boldsymbol{y}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{y}(t) + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{5t}$$

mit den Anfangswerten $\boldsymbol{y}(0) = (0, 1, 2)^\top$.

a) Ermitteln Sie die Fundamentalmatrix $\boldsymbol{Y}(t)$ (des homogenen Systems).

b) Berechnen Sie die Lösung des Anfangswertproblemes, indem Sie die Schritte der Variation der Konstanten explizit ausführen.

c) Berechnen Sie zusätzlich die Lösung des Anfangswertproblemes unter Nutzung der entsprechenden Formel aus der Vorlesung.

Lösung 40:

a) Die Eigenwerte der Systemmatrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

werden als Nullstellen des charakteristischen Polynoms berechnet:

$$\begin{aligned}
0 \stackrel{!}{=} \det \begin{pmatrix} 0-\lambda & 1 & -1 \\ -2 & 3-\lambda & -1 \\ -1 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} 0 & 1-\lambda & -1-\lambda+\lambda^2 \\ 0 & 1-\lambda & -3+2\lambda \\ -1 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\
&= -1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1-\lambda+\lambda^2 \\ 1-\lambda & -3+2\lambda \end{pmatrix} = -(1-\lambda)(-3+2\lambda+1+\lambda-\lambda^2) \\
&= (1-\lambda)(\lambda^2-3\lambda+2) = (1-\lambda)(\lambda-2)(\lambda-1) \\
\Rightarrow \quad \lambda_1 &= \lambda_2 = 1, \ \lambda_3 = 2
\end{aligned}$$

Die Eigenvektoren sind Lösungen der charakteristischen Gleichungssysteme:

i) $\lambda_{1/2} = 1$ (weiße rechte Seite)

$$\begin{array}{rrr|r|r|l}
-1 & 1 & -1 & 0 & 1 & \\
-2 & 2 & -1 & 0 & 1 & -2 \times \text{ 1. Zeile} \\
-1 & 1 & 0 & 0 & 0 & - \text{ 1. Zeile} \\
\hline
-1 & 1 & -1 & 0 & 1 & \\
0 & 0 & 1 & 0 & -1 & \\
0 & 0 & 1 & 0 & -1 & - \text{ 2. Zeile} \\
\hline
-1 & 1 & -1 & 0 & 1 & \\
0 & 0 & 1 & 0 & -1 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 &
\end{array}$$

Die einzige (linear unabhängige Lösung ist $\boldsymbol{v}_1 = (1,1,0)^\top$. Daher wird noch ein Hauptvektor $\boldsymbol{v}_2$ gesucht. Dieser ist Lösung desselben Gleichungssystems mit der rechten Seite $\boldsymbol{v}_1$ (graue Spalte). Es ergibt sich $\boldsymbol{v}_2 = (0,0,-1)^\top$ als möglicher Hauptvektor.

ii) $\lambda_3 = 2$:

$$\begin{array}{rrr|r|l}
-2 & 1 & -1 & 0 & \\
-2 & 1 & -1 & 0 & - \text{ 1. Zeile} \\
-1 & 1 & -1 & 0 & -1/2 \times \text{ 1. Zeile} \\
\hline
-2 & 1 & -1 & 0 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & \\
0 & 1/2 & -1/2 & 0 &
\end{array}$$

Es ergibt sich $\boldsymbol{v}_3 = (0,1,1)^\top$. Damit ist die Fundamentalmatrix

$$\boldsymbol{Y}(t) = \left(\mathrm{e}^t\boldsymbol{v}_1,\ \mathrm{e}^t(\boldsymbol{v}_2 + \frac{t}{1!}\boldsymbol{v}_1),\ \mathrm{e}^{2t}\boldsymbol{v}_3\right) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t & \mathrm{e}^t t & 0 \\ \mathrm{e}^t & \mathrm{e}^t t & \mathrm{e}^{2t} \\ 0 & -\mathrm{e}^t & \mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix}$$

b) Die Lösung des homogenen Systems ist damit

$$\boldsymbol{y}_h(t) = \boldsymbol{Y}(t)\boldsymbol{c} \text{ mit dem konstanten Vektor } \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^3.$$

Zur Lösung des inhomogenen Systems setzen wir den Ansatz $\boldsymbol{y}_p(t) = \boldsymbol{Y}(t)\boldsymbol{c}(t)$

mit der vektorwertigen Funktion $\boldsymbol{c}(t)$ in das inhomogene System ein:

$$
\begin{aligned}
&& (\boldsymbol{Y}(t)\boldsymbol{c}(t))' =& \boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}(t)\boldsymbol{c}(t) + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{5t} \\
\Rightarrow && \boldsymbol{Y}'(t)\boldsymbol{c}(t) + \boldsymbol{Y}(t)\boldsymbol{c}'(t) =& \boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}(t)\boldsymbol{c}(t) + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{5t} \\
\Rightarrow && \underbrace{(\boldsymbol{Y}'(t) - \boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}(t))}_{=\boldsymbol{0}}\boldsymbol{c}(t) + \boldsymbol{Y}(t)\boldsymbol{c}'(t) =& \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{5t} \\
\Rightarrow && \boldsymbol{c}'(t) =& \boldsymbol{Y}(t)^{-1} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{5t}
\end{aligned}
$$

Dabei wird der Ausdruck $\boldsymbol{Y}'(t) - \boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}(t)$ Null, da die Spalten von $\boldsymbol{Y}(t)$ bereits Lösungen der homogenen Gleichung ($\boldsymbol{y}'(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}(t)$) sind.
Auf die Berechnung der inversen Matrix $\boldsymbol{Y}(t)^{-1}$ wird verzichtet, stattdessen lösen wir das Gleichungssystem $\boldsymbol{Y}(t)\boldsymbol{c}' = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{5t}$:

$$
\begin{array}{rrr|r|l}
\mathrm{e}^t & \mathrm{e}^t t & 0 & -1\mathrm{e}^{5t} & \\
\mathrm{e}^t & \mathrm{e}^t t & \mathrm{e}^{2t} & 2\mathrm{e}^{5t} & -\text{ 1. Zeile} \\
0 & -\mathrm{e}^t & \mathrm{e}^{2t} & 1\mathrm{e}^{5t} & \\
\hline
\mathrm{e}^t & \mathrm{e}^t t & 0 & -1\mathrm{e}^{5t} & \\
0 & 0 & \mathrm{e}^{2t} & 3\mathrm{e}^{5t} & -\text{ 3. Zeile} \\
0 & -\mathrm{e}^t & \mathrm{e}^{2t} & 1\mathrm{e}^{5t} & \text{ 2. Zeile} \\
\hline
\mathrm{e}^t & \mathrm{e}^t t & 0 & -1\mathrm{e}^{5t} & \\
0 & \mathrm{e}^t & 0 & 2\mathrm{e}^{5t} & \\
0 & 0 & \mathrm{e}^{2t} & 3\mathrm{e}^{5t} & \\
\hline
\end{array}
$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned}
&& \boldsymbol{c}'(t) &= \begin{pmatrix} -(2t+1)\mathrm{e}^{4t} \\ 2\mathrm{e}^{4t} \\ 3\mathrm{e}^{3t} \end{pmatrix} \\
\Rightarrow && \boldsymbol{c}(t) &= \begin{pmatrix} -\frac{4t+1}{8}\mathrm{e}^{4t} \\ \frac{1}{2}\mathrm{e}^{4t} \\ \mathrm{e}^{3t} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Die Integrationskonstanten wurden hier zu Null gewählt.
Damit ist

$$\boldsymbol{y}_p(t) = \boldsymbol{Y}(t)\boldsymbol{c}(t)$$

eine Lösung des inhomogenen Systems. Die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems ist dann

$$\boldsymbol{y}_{allg}(t) = \boldsymbol{y}_p(t) + \boldsymbol{y}_h(t) = \boldsymbol{Y}(t)(\boldsymbol{c}(t) + \boldsymbol{c}).$$

Der konstante Vektor $\boldsymbol{c}$ wird durch die Anfangsbedingungen festgelegt:

$$\begin{aligned}
&& \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} &\overset{!}{=} \boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{Y}(0)(\boldsymbol{c}(0) + \boldsymbol{c}) \\
&& &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/8 + c_1 \\ 1/2 + c_2 \\ 1 + c_3 \end{pmatrix} \\
\Rightarrow && c_1 &= \frac{1}{8} \\
&& c_3 &= 0 \\
&& c_2 &= -\frac{3}{2}
\end{aligned}$$

Damit ist dann

$$\boldsymbol{y}_{AWP}(t) = \boldsymbol{Y}(t) \begin{pmatrix} \frac{1}{8}((-4t-1)\mathrm{e}^{4t} + 1) \\ \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{4t} - 3) \\ \mathrm{e}^{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8}(-\mathrm{e}^{5t} + (1-12t)\mathrm{e}^{t}) \\ \frac{1}{8}(7\mathrm{e}^{5t} + (1-12t)\mathrm{e}^{t}) \\ \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{5t} + 3\mathrm{e}^{t}) \end{pmatrix} = \frac{\mathrm{e}^{5t}}{8} \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{\mathrm{e}^{t}}{8} \begin{pmatrix} 1-12t \\ 1-12t \\ 12 \end{pmatrix}$$

c) Mit der Formel

$$\boldsymbol{y}_{AWP}(t) = \boldsymbol{Y}(t)\boldsymbol{Y}(0)^{-1}\boldsymbol{y}_0 + \int\limits_0^t \boldsymbol{Y}(t-s)\boldsymbol{Y}(0)^{-1}\boldsymbol{f}(s)\mathrm{d}s$$

ergibt sich mit

$$\boldsymbol{Y}(0)^{-1}\boldsymbol{y}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sowie

$$\boldsymbol{Y}(0)^{-1}\boldsymbol{f}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{5s} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{5s}$$

die Lösung des Anfangswertproblems:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{y}_{AWP}(t) &= \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t & \mathrm{e}^t t & 0 \\ \mathrm{e}^t & \mathrm{e}^t t & \mathrm{e}^{2t} \\ 0 & -\mathrm{e}^t & \mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{t-s} & \mathrm{e}^{t-s}(t-s) & 0 \\ \mathrm{e}^{t-s} & \mathrm{e}^{t-s}(t-s) & \mathrm{e}^{2(t-s)} \\ 0 & -\mathrm{e}^{t-s} & \mathrm{e}^{2(t-s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{5s} \mathrm{d}s \\
&= \begin{pmatrix} -\mathrm{e}^t t \\ -\mathrm{e}^t t + \mathrm{e}^{2t} \\ \mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{t-s}(-1+2t-2s) \\ \mathrm{e}^{t-s}(-1+2t-2s) + 3\mathrm{e}^{2(t-s)} \\ -2\mathrm{e}^{t-s} + 3\mathrm{e}^{2(t-s)} \end{pmatrix} \mathrm{e}^{5s} \mathrm{d}s \\
&= \begin{pmatrix} -\mathrm{e}^t t \\ -\mathrm{e}^t t + \mathrm{e}^{2t} \\ \mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{t+4s}(-1+2t-2s) \\ \mathrm{e}^{t+4s}(-1+2t-2s) + 3\mathrm{e}^{2t+3s} \\ -2\mathrm{e}^{t+4s} + 3\mathrm{e}^{2t+3s} \end{pmatrix} \mathrm{e}^{5s} \mathrm{d}s \\
&= \begin{pmatrix} -\mathrm{e}^t t \\ -\mathrm{e}^t t + \mathrm{e}^{2t} \\ \mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\mathrm{e}^{t+4s} \begin{pmatrix} -1+2t-2s \\ -1+2t-2s \\ -2 \end{pmatrix} \Bigg|_{s=0}^{t} - \frac{1}{4}\int_0^t \mathrm{e}^{t+4s} \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}s + \frac{1}{3}\mathrm{e}^{2t+3s} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \Bigg|_{s=0}^{t} \\
&= \begin{pmatrix} -\mathrm{e}^t t \\ -\mathrm{e}^t t + \mathrm{e}^{2t} \\ \mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\mathrm{e}^{5t} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} - \frac{1}{4}\mathrm{e}^t \begin{pmatrix} -1+2t \\ -1+2t \\ -2 \end{pmatrix} - \frac{1}{16}(\mathrm{e}^{5t} - \mathrm{e}^t) \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}(\mathrm{e}^{5t} - \mathrm{e}^{2t}) \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \\
&= \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} -t + \frac{1}{4} - \frac{t}{2} - \frac{1}{8} \\ -t + \frac{1}{4} - \frac{t}{2} - \frac{1}{8} \\ 1 + \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \mathrm{e}^{5t} \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} + \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + 1 \\ -\frac{1}{2} + 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{\mathrm{e}^t}{8} \begin{pmatrix} 1 - 12t \\ 1 - 12t \\ 12 \end{pmatrix} + \frac{\mathrm{e}^{5t}}{8} \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Aufgabe 41: Systeme homogener linearer Differentialgleichungen

Bestimmen Sie die allgemeinen reellen Lösungen und gegebenenfalls auch die Lösungen des Anfangswertproblems der folgenden Systeme von homogenen linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Benutzen Sie dazu die Matrizenschreibweise.

i) $$\begin{cases} x'(t) &= 4\,x(t) + 5\,y(t) \quad , \quad x(0) = 3\ , \\ y'(t) &= -x(t) - 2\,y(t) \quad , \quad y(0) = 1 \end{cases}$$

ii) $$\begin{cases} x'(t) &= 3\,x(t) - 5\,y(t) \quad , \quad x(0) = -20\ , \\ y'(t) &= 5\,x(t) - 3\,y(t) \quad , \quad y(0) = -24 \end{cases}$$

iii) $$\begin{cases} x'(t) &= 2\,x(t) - 5\,y(t)\ , \\ y'(t) &= x(t) + 4\,y(t)\ . \end{cases}$$

Lösung 41:

i) Das Differentialgleichungssystem: $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ hat die charakteristische Gleichung

$$\det \begin{pmatrix} 4-\lambda & 5 \\ -1 & -2-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 2\,\lambda - 3 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_1 = -1\ ,\quad \lambda_2 = 3\ .$$

Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = -1$:

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; v_1 = -v_2 \quad \text{also z. B.} \quad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\ .$$

Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_2 = 3$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; w_1 = -5w_2 \quad \text{also z. B.} \quad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}\ .$$

Damit lautet die allgemeine Lösung

$$\underline{\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-t} + b \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{3t}\ ,\quad a, b \in \mathbb{R}}\ .$$

Einsetzen der Anfangswerte $x(0) = 3$ und $y(0) = 1$:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; a = 2\ ,\quad b = -1\ .$$

Lösung des Anfangswertproblems:

$$\underline{\underline{\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}_{\text{AWP}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-t} + \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{3t}}} \quad .$$

ii) Das Dgl.–System: $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ hat die charakteristische Gleichung

$$\det \begin{pmatrix} 3-\lambda & -5 \\ 5 & -3-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 16 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 4\,\mathrm{i}\ .$$

Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = 4\ \mathrm{i}$:

$$\begin{pmatrix} 3-4\,\mathrm{i} & -5 \\ 5 & -3-4\,\mathrm{i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{z. B.} \quad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} \mathrm{i}\ .$$

Der Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$ ist $\boldsymbol{w} = \overline{\boldsymbol{v}}$, somit ist die Menge aller komplexen Lösungen wie folgt beschrieben:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 \mathrm{e}^{4it} \boldsymbol{v} + c_2 \mathrm{e}^{-4it} \boldsymbol{w}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}$$

Eine komplexe Lösung ist

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} &= \left[\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} \mathrm{i} \right] \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,4t} \\ &= \left[\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} \mathrm{i} \right] \cdot \left[\cos(4t) + \ \mathrm{i}\ \sin(4t) \right] \\ &= \left[\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \cos(4t) - \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} \sin(4t) \right] + \ \mathrm{i}\ \left[\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \sin(4t) + \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} \cos(4t) \right] \ . \end{aligned}$$

Da der Real– und Imaginärteil unabhängige Lösungen des Dgl.–Systems sind, lautet die allgemeine (reelle) Lösung

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} &= a \cdot \left[\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \cos(4t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \sin(4t) \right] + b \cdot \left[\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \sin(4t) + \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} \cos(4t) \right] \\ &= \begin{pmatrix} 5a \\ 3a - 4b \end{pmatrix} \cos(4t) + \begin{pmatrix} 5b \\ 4a + 3b \end{pmatrix} \sin(4t)\ , \quad a, b \in \mathbb{R}\ . \end{aligned}$$

Aus den Anfangswerten $x(0) = -20$, $y(0) = -24$ folgt $a = -4$ und $b = 3$.

Lösung des Anfangswertproblems:

$$\underline{\underline{\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}_{\text{AWP}} = \begin{pmatrix} -20 \\ -24 \end{pmatrix} \cos(4t) + \begin{pmatrix} 15 \\ -7 \end{pmatrix} \sin(4t)}} \ .$$

iii) Das Dgl.–System: $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ hat die Eigenwerte und Vektoren

$$\lambda_{1,2} = 3 \pm 2\,\mathrm{i} \ , \quad \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \mathrm{i} \ , \quad \boldsymbol{v}_2 = \overline{\boldsymbol{v}}_1 \ .$$

Analog zu ii) ergibt sich damit

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \\ &= \left[\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \mathrm{i} \right] \mathrm{e}^{(3+2\,\mathrm{i})t} \\ &= \left[\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \mathrm{i} \right] \mathrm{e}^{3t} (\cos(2t) + \,\mathrm{i} \sin(2t)) \\ &= \begin{pmatrix} -5\cos(2t) \\ \cos(2t) - 2\sin(2t) \end{pmatrix} \mathrm{e}^{3t} + \begin{pmatrix} -5\sin(2t) \\ \sin(2t) + 2\cos(2t) \end{pmatrix} \mathrm{e}^{3t}\ \mathrm{i} \end{aligned}$$

und daraus als Linearkombination von Real- und Imaginärteil die allgemeine Lösung:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{3t} \cdot \left[\begin{pmatrix} -5a \\ a + 2b \end{pmatrix} \cos(2t) + \begin{pmatrix} -5b \\ -2a + b \end{pmatrix} \sin(2t) \right] \ , \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Alternativ kann man die Eigenvektoren als

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 + 2i \\ 1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{v}_2 = \overline{\boldsymbol{v}}_1 \ .$$

wählen. Die allgemeine komplexe Lösung lautet dann

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} &= c_1 \begin{pmatrix} -1+2\,\mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{(3+2\,\mathrm{i})t} + c_2 \begin{pmatrix} -1-2\,\mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{(3-2\,\mathrm{i})t} \\
&= \begin{pmatrix} -c_1 + 2\,\mathrm{i}c_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{3t}(\cos(2t) + \,\mathrm{i}\sin(2t)) + \begin{pmatrix} -c_2 - 2\,\mathrm{i}c_2 \\ c_2 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{3t}(\cos(2t) - \,\mathrm{i}\sin(2t)) \\
&= \mathrm{e}^{3t} \left(\cos(2t) \begin{pmatrix} -(c_1+c_2) + 2\,\mathrm{i}(c_1-c_2) \\ c_1 + c_2 \end{pmatrix} + \sin(2t) \begin{pmatrix} -\,\mathrm{i}(c_1-c_2) - 2(c_1+c_2) \\ \mathrm{i}(c_1-c_2) \end{pmatrix} \right)
\end{aligned}
$$

Mit $a = c_1 + c_2$ und $b = i(c_1 - c_2)$ folgt für $c_1 = \overline{c_2}$ $a, b \in \mathbb{R}$. Somit erhät man eine andere Form für die allgemeine Lösung des DGL Systems:

$$
\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{3t} \left(\cos(2t) \begin{pmatrix} -a + 2b \\ a \end{pmatrix} + \sin(2t) \begin{pmatrix} -b - 2a \\ b \end{pmatrix} \right)
$$

Aufgabe 42: Lineare DGl-Systeme 1. Ordnung

Die symmetrische Matrix $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{3,3}$ erfülle $\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_1 = 3\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_2$, $\det \boldsymbol{A} = 6$ mit $\boldsymbol{v}_1 = (1,0,1)^\top$, $\boldsymbol{v}_2 = (-1,0,1)^\top$.

a) Zeigen Sie, dass $\lambda = 2$ ein Eigenwert von $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{v}_3 = (0,1,0)^\top$ ein zugehöriger Eigenvektor ist. Geben Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren von $\boldsymbol{A}$ an.

Hinweis: Für eine symmetrische Matrix sind die Eigenvektoren orthogonal zueinander.

b) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t), \quad \boldsymbol{x}(0) = (1,1,1)^\top .$$

Lösung 42:

a) Aus $\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_1 = 3\boldsymbol{v}_1$ folgt dass $\boldsymbol{v}_1$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = 3$ und aus $\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_2 = 1\boldsymbol{v}_2$, dass $\boldsymbol{v}_2$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_2 = 1$ ist. Der dritte Eigenwert λ_3 ergibt sich aus

$$\det \boldsymbol{A} = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = 6 ,$$

zu $\lambda_3 = 2$.

Da $\boldsymbol{A}$ symmetrisch ist, ist der Eigenraum zu λ_3 orthogonal zu $\boldsymbol{v}_1$ und $\boldsymbol{v}_2$, dies ist etwa für $\boldsymbol{v}_3 = (0,1,0)^\top$ erfüllt.

b) Die allgemeine Lösung ist

$$\boldsymbol{x}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{3t} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{t} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{2t} .$$

mit $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

Einsetzen in die Anfangsbedingung liefert

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Mit dem Gauss–Algorithmus folgt

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

und damit $c_3 = 1$, $c_2 = 0$ und $c_1 = 1$.

Damit folgt

$$\boldsymbol{x}_{\text{AWP}}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{3t} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{2t} \; .$$

Aufgabe 43: Systeme linearer Differentialgleichungen

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Systems von Differentialgleichungen

$$\boldsymbol{y}'(x) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -3 & 5 & 1 \\ -10 & -2 & 10 \end{pmatrix} \boldsymbol{y}(x).$$

Lösung 43:

Das charakteristische Polynom der Matrix $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -3 & 5 & 1 \\ -10 & -2 & 10 \end{pmatrix}$ ist

$$\begin{aligned} p_{\boldsymbol{A}}(\lambda) = \det &\begin{pmatrix} -1-\lambda & -1 & 3 \\ -3 & 5-\lambda & 1 \\ -10 & -2 & 10-\lambda \end{pmatrix} \\ =&(-1-\lambda)\Big((5-\lambda)(10-\lambda)+2\Big) - (-1)\Big(-3(10-\lambda) - 1\cdot(-10)\Big) + 3\Big(-3\cdot(-2) - (5-\lambda)\cdot(-10 \\ =&(-1-\lambda)\Big(\lambda^2 - 15\lambda + 52\Big) + \Big(3\lambda - 20\Big) + 3\Big(-10\lambda + 56\Big) = -\lambda^3 + 14\lambda^2 - 64\lambda + 96 \end{aligned}$$

Eine Nullstelle dieses Polynoms ist $\lambda_1 = 4$:

	-1	14	-64	96
$x = 4$	$\backslash$	-4	40	-96
	-1	10	-24	0

und das Restpolynom ist $q(\lambda) = -\lambda^2 + 10\lambda - 24$. Dessen Nullstellen sind

$$\lambda_{2/3} = 5 \pm \sqrt{25-24} = \begin{cases} 4 \\ 6 \end{cases}.$$

Damit hat die Matrix den doppelten Eigenwert $\lambda_1 = \lambda_2 = 4$ und den einfachen Eigenwert $\lambda_3 = 6$. Eigenvektoren zu $\lambda_1 = 4$ ergeben sich aus dem charakteristischen

Gleichungssystem (rechte Seite Null)

$$
\begin{array}{rrr|l|r|l}
-1-4 & -1 & 3 & 0 & 1 & \mathrm{II} \\
-3 & 5-4 & 1 & 0 & 1 & \mathrm{I} - 3 \times \mathrm{II} \\
-10 & -2 & 10-4 & 0 & 2 & \mathrm{III} - 6 \times \mathrm{II} \\
\hline
-3 & 1 & 1 & 0 & 1 & \mathrm{I} + \frac{1}{4} \times \mathrm{II} \\
4 & -4 & 0 & 0 & -2 & \times 1/4 \\
8 & -8 & 0 & 0 & -4 & \mathrm{III} - 2 \times \mathrm{II} \\
\hline
-2 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & \\
1 & -1 & 0 & 0 & -1/2 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 &
\end{array}
$$

Der einzige linear unabhängige Eigenvektor ist

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ein Hauptvektor ergibt sich aus dem obigen Gleichungssystem mit rechter Seite $\boldsymbol{v}_1$. Es müssen nur die Gauß-Schritte für die neue rechte Seite nachgeholt werden und ein möglicher Hauptvektor ist

$$\boldsymbol{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

Ein Eigenvektor zu $\lambda_3 = 6$ ergibt sich aus dem charakteristischen Gleichungssystem $(\boldsymbol{A} - 6\boldsymbol{E}_3)\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{0}$

$$
\begin{array}{rrr|l|l}
-7 & -1 & 3 & 0 & \mathrm{II} \\
-3 & -1 & 1 & 0 & \mathrm{I} - 3 \times \mathrm{II} \\
-10 & -2 & 4 & 0 & \mathrm{III} - 4 \times \mathrm{II} \\
\hline
-3 & -1 & 1 & 0 & \\
2 & 2 & 0 & 0 & \\
2 & 2 & 0 & 0 & \mathrm{III} - \mathrm{II} \\
\hline
-3 & -1 & 1 & 0 & \\
2 & 2 & 0 & 0 & \\
0 & 0 & 0 & 0 &
\end{array}
$$

zu $\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Die allgemeine Lösung des DGL.-Sytems ist schließlich

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{y}(x) &= \mathrm{e}^{\lambda_1 x}\left\{c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\Big[\boldsymbol{w}_2 + x\boldsymbol{v}_1\Big]\right\} + c_3\mathrm{e}^{\lambda_3 x}\boldsymbol{v}_3 \\
&= \mathrm{e}^{4x}\left\{c_1\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} + c_2\left[\begin{pmatrix}0\\1/2\\1/2\end{pmatrix} + x\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right]\right\} + c_3\mathrm{e}^{6x}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}\mathrm{e}^{4x} & x\mathrm{e}^{4x} & \mathrm{e}^{6x}\\ \mathrm{e}^{4x} & \frac{1+2x}{2}\mathrm{e}^{4x} & -\mathrm{e}^{6x}\\ 2\mathrm{e}^{4x} & \frac{1+4x}{2}\mathrm{e}^{4x} & 2\mathrm{e}^{6x}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

mit Parametern c_1, c_2, $c_3 \in \mathbb{R}$ und der Fundamentalmatrix

$$
\boldsymbol{Y}(x) = \begin{pmatrix}\mathrm{e}^{4x} & x\mathrm{e}^{4x} & \mathrm{e}^{6x}\\ \mathrm{e}^{4x} & \frac{1+2x}{2}\mathrm{e}^{4x} & -\mathrm{e}^{6x}\\ 2\mathrm{e}^{4x} & \frac{1+4x}{2}\mathrm{e}^{4x} & 2\mathrm{e}^{6x}\end{pmatrix}.
$$

Ergebnisse

Ergebnisse zu Aufgabe 1:

Es gilt $(1-n)u'(x) = u(x)^n \cdot z'(x)$.

Ergebnisse zu Aufgabe 2:

a) $y_{\text{AWP}}(x) = \frac{-1}{x^2-\frac{1}{4}}$, **b)** $y(x) = \frac{C}{\cos(x)}$

Ergebnisse zu Aufgabe 3:

a) $\frac{(15\,x+C)^{1/5}-2x-4}{3}$

b) $\left(\frac{3\,\ln|t|}{2}+C\right)^{2/3} \Rightarrow u(t) = t \cdot \left(\frac{3\,\ln(t)}{2}+C\right)^{2/3}$

c) $C\,s^2 + 5\,s^5$

Ergebnisse zu Aufgabe 6:

Lösungen der homogenen Gleichungen: a) $a\mathrm{e}^{2x} + b\mathrm{e}^{3x}$, b) $a\cos(5x) + b\sin(5x) + c$, c) $a + b\mathrm{e}^{2x}$.

Ergebnisse zu Aufgabe 7:

a) $u(t) = t^3 + \frac{C}{t^2}$, **b)** $u(t) = \frac{-t}{4\,\ln(t)+C}$

Ergebnisse zu Aufgabe 8:

Partikuläre Lösungen: a) 0, b) $-12x^2 + 2x^3$, c) $\sin t - \cos t$, d) $\frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{2x}$

Ergebnisse zu Aufgabe 10:

a) $y(x) = c_1\mathrm{e}^{2x} + c_2\mathrm{e}^{-x}$

Ergebnisse zu Aufgabe 11:

b) $y(x) = \sin(2x) - 4\cos(2x) + c_1\mathrm{e}^{-x}\cos(2x) + c_2\mathrm{e}^{-x}\sin(2x)$ c) $y_{AWP}(x) = -e^x - \mathrm{e}^{-x} + 2\mathrm{e}^{3x}$
d) $y(x) = c_1\mathrm{e}^{-2x} + c_2\mathrm{e}^{-3x} + \frac{1}{10}\mathrm{e}^{3x}$ e) $y(x) = c_1\mathrm{e}^{2x} + c_2\mathrm{e}^{-x} - (2x+1)e^x$ f) $y(x) = -\mathrm{e}^{-2x} + c_1\mathrm{e}^x + c_2\mathrm{e}^{-x} + c_3x\mathrm{e}^{-x}$

Ergebnisse zu Aufgabe 12:

$$I(t) = \begin{cases} 6.25\left(1 - e^{-0.2t}\right) & \text{für } 0 < t < 5 \\ 6.25\left(1 - e^{-1}\right)e^{-0.2(t-5)} & \text{für } t > 5 \end{cases}$$

Ergebnisse zu Aufgabe 22:

a) $y(t) = -e^t - \mathrm{e}^{-t} + 2\mathrm{e}^{3t}$
b) $y(t) = \left(2t^2 + 2t + 1\right)\mathrm{e}^{-2t}$

Ergebnisse zu Aufgabe 22:

a) $y(t) = -e^t - \mathrm{e}^{-t} + 2\mathrm{e}^{3t}$
b) $y(t) = \left(2t^2 + 2t + 1\right)\mathrm{e}^{-2t}$

Ergebnisse zu Aufgabe 23:

$w_P(x) = -\frac{F}{6EJ}(x-l)^3 \cdot h(x-l)$, $x_{\min} = \sqrt{\frac{8}{27}}L$

Ergebnisse zu Aufgabe 1.24:

i) $\dfrac{-1}{1+\pi^2}$, ii) 0.

Ergebnisse zu Aufgabe 25:

a) $u_{\text{AWP}}(t) = 2\,\mathrm{e}^{-t} \cdot \cos(2t)$, **b)** $t_0 = \pi/4$, **c)** $\alpha = 4\,\mathrm{e}^{-\pi/4}$.

Ergebnisse zu Aufgabe 26:

$y(t) = t^2 + t^4/12.$

Ergebnisse zu Aufgabe 27:

$$4 + 2\,\mathrm{e}^{-3\,t} - 6\,\mathrm{e}^{-t} - h(t-2) \cdot \left(4 + 2\,\mathrm{e}^{-3\,(t-2)} - 6\,\mathrm{e}^{-(t-2)}\right)$$

Ergebnisse zu Aufgabe 28:

$F(s) = \sqrt{\frac{\pi}{4s^3}}$.

Ergebnisse zu Aufgabe 32:

a) $\frac{\pi}{2} - \arctan s$, **b)** $\frac{\pi/2 - \arctan s}{s}$, **c)** $\frac{\pi}{2}$, **d)** $\frac{\pi}{2} - \arctan(s+1)$,

Ergebnisse zu Aufgabe 30:

a) $\frac{A}{s} - \frac{2A\mathrm{e}^{-st_0}}{s^2+2s}$, **b)** $\frac{A(\mathrm{e}^{-as} - \mathrm{e}^{-bs}}{s}$, **c)** $\frac{1-\mathrm{e}^{-3s}}{s^2}$, **d)** $\frac{1+\mathrm{e}^{-s\pi}}{1+s^2}$

Ergebnisse zu Aufgabe 31:

a)

i) $\dfrac{1}{s}$,

ii) $\dfrac{1}{s^2}$,

iii) $\dfrac{2}{s^3}$,

iv) $\dfrac{3!}{t^4}$,

v) $\frac{1}{s+a}$,

vi) $\dfrac{1}{(s+a)^2}$,

vii) $sG(s) - g(0)$,

viii) $s^2G(s) - sg(0) - g'(0)$.

b) $F(s) = \sqrt{\frac{\pi}{4s^3}}$.

Ergebnisse zu Aufgabe 32:

a) $\frac{\pi}{2} - \arctan s$, **b)** $\frac{\pi/2 - \arctan s}{s}$, **c)** $\frac{\pi}{2}$, **d)** $\frac{\pi}{2} - \arctan(s+1)$,

Ergebnisse zu Aufgabe 33:

$\left(\frac{2}{s^3} + \frac{4}{s^2} + \frac{4}{s}\right) \cdot \mathrm{e}^{-2\,s}$

Ergebnisse zu Aufgabe 34:

$$\boldsymbol{x}_{\text{hom}}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{e}^{2\,t} + c_3 \begin{pmatrix} t \\ 1+2t \\ 4+4t \end{pmatrix} \cdot \mathrm{e}^{2\,t}$$

Ergebnisse zu Aufgabe 39:

$\lambda_1 = 4,\ \lambda_2 = 2$

Ergebnisse zu Aufgabe 40:

$$\boldsymbol{Y}(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t & \mathrm{e}^t t & 0 \\ \mathrm{e}^t & \mathrm{e}^t t & \mathrm{e}^{2t} \\ 0 & -\mathrm{e}^t & \mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix}$$

Ergebnisse zu Aufgabe 41:

i) $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-t} + b \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{3t}$, **ii)** $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a \\ 3a-4b \end{pmatrix} \cos(4t) + \begin{pmatrix} 5b \\ 4a+3b \end{pmatrix} \sin(4t)$,
iii) $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{3t} \cdot \left[\begin{pmatrix} -5a \\ a+2b \end{pmatrix} \cos(2t) + \begin{pmatrix} -5b \\ -2a+b \end{pmatrix} \sin(2t) \right]$

Ergebnisse zu Aufgabe 42:

b) $\boldsymbol{x} = (\mathrm{e}^{3t}, \mathrm{e}^{2t}, \mathrm{e}^{3t})^\top$

Ergebnisse zu Aufgabe 43: