Helmut-Schmidt-Universität
Universität der Bundeswehr Hamburg
Fakultät für Maschinenbau und Bauingenieurwesen

Prof. Dr. Thomas Carraro
Dr. Ulrike Kochan-Eilers

Mathematik II/B (WI/ET) — Blatt 3

WT 2025 — Grenzwerte, Stetigkeit, Ableitungen

Einführende Bemerkungen

- Vermeiden Sie die Verwendung von Taschenrechnern oder Online-Ressourcen.

Aufgabe 3.1: Differenzieren

Bestimmen Sie jeweils die n-te Ableitung der folgenden Funktionen:

a) $n = 4, f(x) = 5\sin(x) + 3\cos(x)$

b) $n = 3, f(x) = 2\sinh(2x) + 3\cosh(x)$

c) $n = 2, f(x) = x^2 \sin(2x)$

d) $n = 1, f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 3}{x^2 + 2x - 3}$

e) $n = 3, f(x) = x^5 \ln(x)$

f) $n = 3, f(x) = \sin^3(x)$

g) $n = 3, f(x) = e^x \sin(x)$

h) $n = 2, f(x) = e^{\tan(x)}$

i) $n = 2, f(x) = \dfrac{\tan(x)}{x}$

j) $n = 2, f(x) = \dfrac{x^2}{\sin(x)}$

Lösung 3.1:

a)

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5\cos(x) - 3\sin(x) \\ f''(x) &= -5\sin(x) - 3\cos(x) \\ f'''(x) &= -5\cos(x) + 3\sin(x) \\ f''''(x) &= 5\sin(x) + 3\cos(x) \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4\cosh(2x) + 3\sinh(x) \\ f''(x) &= 8\sinh(2x) + 3\cosh(x) \\ f'''(x) &= 16\cosh(2x) + 3\sinh(x) \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x\sin(2x) + 2x^2\cos(2x) \\ &= 2x(\sin(2x) + x\cos(2x)) \\ f''(x) &= 2(\sin(2x) + x\cos(2x)) + 2x(2\cos(2x) + \cos(2x) - 2x\sin(2x)) \\ &= 2\sin(2x) + 8x\cos(2x) - 4x^2\sin(2x) \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x-2)(x^2+2x-3) - (x^2-2x+3)(2x+2)}{(x^2+2x-3)^2} \\ &= \frac{8x^2 - 12x - 4x^2}{(x^2+2x-3)^2} \\ &= \frac{4x^2 - 12x}{(x^2+2x-3)^2} \end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5x^4\ln(x) + x^5\frac{1}{x} \\ &= 5x^4\ln(x) + x^4 \\ f''(x) &= 20x^3\ln(x) + 5x^4\frac{1}{x} + 4x^3 \\ &= 20x^3\ln(x) + 9x^3 \\ f'''(x) &= 60x^2\ln(x) + 20x^3\frac{1}{x} + 27x^2 \\ &= 60x^2\ln(x) + 47x^2 \end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3\sin^2(x)\cos(x) \\ f''(x) &= 6\sin(x)\cos(x)\cos(x) - 3\sin^3(x) \\ &= 6\sin(x)\cos^2(x) - 3\sin^3(x) \\ f'''(x) &= 6\cos^3(x) - 6\sin(x)2\cos(x)\sin(x) - 9\sin^2(x)\cos(x) \\ &= 6\cos^3(x) - 21\sin^2(x)\cos(x) \end{aligned}$$

g)

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= e^x \sin(x) + e^x \cos(x) \\
&= e^x(\sin(x) + \cos(x)) \\
f''(x) &= e^x(\sin(x) + \cos(x) + \cos(x) - \sin(x)) \\
&= 2e^x \cos(x) \\
f'''(x) &= e^x 2\cos(x) - e^x 2\sin(x) \\
&= 2e^x(\cos(x) - \sin(x))
\end{aligned}
$$

h)

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= e^{\tan(x)} \frac{1}{\cos^2(x)} \\
f''(x) &= e^{\tan(x)} \frac{1}{\cos^2(x)} \frac{1}{\cos^2(x)} + 2e^{\tan(x)} \frac{\sin(x)\cos(x)}{\cos^4(x)} \\
&= e^{\tan(x)} \frac{1}{\cos^4(x)} + e^{\tan(x)} 2\tan(x) \frac{1}{\cos^2(x)}
\end{aligned}
$$

i)

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{x/\cos^2(x) - \tan(x)}{x^2} \\
&= \frac{1}{x\cos^2(x)} - \frac{\tan(x)}{x^2} \\
f''(x) &= \frac{-\cos^2(x) + 2x\cos(x)\sin(x)}{x^2\cos^4(x)} - \frac{x^2\cos^2(x) - 2x\tan(x)}{x^4} \\
&= -\frac{2}{x^2\cos^2(x)} + \frac{2\sin(x)}{x\cos^3(x)} + \frac{2\tan(x)}{x^3} \\
&= -\frac{2}{x^2\cos^2(x)} + \frac{2\tan(x)}{x\cos^2(x)} + \frac{2\tan(x)}{x^3}
\end{aligned}
$$

j)

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{2x\sin(x) - x^2\cos(x)}{\sin^2(x)} \\
&= \frac{2x}{\sin(x)} - \frac{x^2\cos(x)}{\sin^2(x)} \\
f''(x) &= \frac{2\sin(x) - 2x\cos(x)}{\sin^2(x)} - \frac{(2x\cos(x) - x^2\sin(x))\sin^2(x) - (x^2\cos(x)2\sin(x)\cos}{\sin^4(x)} \\
&= \frac{2}{\sin(x)} - \frac{2x\cos(x)}{\sin^2(x)} - \frac{2x\cos(x)}{\sin^2(x)} + \frac{x^2}{\sin(x)} + \frac{2x^2\cos^2(x)}{\sin^3(x)} \\
&= \frac{2}{\sin(x)} - \frac{4x\cos(x)}{\sin^2(x)} + \frac{x^2}{\sin(x)} + \frac{2x^2\cos^2(x)}{\sin^3(x)}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3.2: Grenzwerte monotoner Folgen

Es seien $a_1 = \sqrt{2}$ und $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$. Zeigen Sie,

a) dass (a_n) beschränkt ist,

b) dass (a_n) monoton wächst und

c) gegen die größte Lösung der Gleichung $x^2 - x - 2 = 0$ konvergiert.

Lösung 3.2:

a) Null ist sicher eine untere Schranke für alle $a_n > 0$. Eine obere Schranke ist 2. Wir untersuchen dazu das Quadrat der Folge und rechnen nach, dass $a_n^2 \leq 4$ für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$a_{n+1}^2 = 2 + a_n \overset{!}{\leq} 4$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn bereits $a_n \leq 2$ ist. Das ist für $a_1 = \sqrt{2}$ der Fall und damit auch für alle folgenden a_n.

b) Es ist zu zeigen, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n \leq a_{n+1}$.
Äquivalent dazu ist $\dfrac{a_{n+1}^2}{a_n^2} \geq 1$:

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}^2}{a_n^2} &\geq \frac{2 + a_n}{2a_n} \qquad \text{(wegen } a_n \leq 2\text{)} \\ &= \frac{1}{a_n} + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \qquad \text{(wegen } a_n \leq 2\text{)} \end{aligned}$$

c) Da a_n beschränkt und monoton ist, muss die Folge einen Grenzwert

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1}$$

besitzen. Mit diesem Grenzwert ist

$$\begin{aligned} a^2 - a - 2 &= \lim_{n\to\infty} a_{n+1}^2 - \lim_{n\to\infty} a_n - 2 \\ &= \lim_{n\to\infty} (\sqrt{2 + a_n}^2 - a_n) - 2 \\ &= \lim_{n\to\infty} 2 - 2 = 0 \end{aligned}$$

Damit muss a eine Nullstelle des Polynoms $p(x) = x^2 - x - 2$ sein.
$p(x)$ ist ein Polynom zweiten Grades, besitzt also zwei Nullstellen. Negative Werte nimmt $p(x)$ nur zwischen den beiden Nullstellen an. Da

$$p(a_1) = p(\sqrt{2}) = -\sqrt{2} < 0$$

ist, liegt a_1 zwischen den beiden Nullstellen. Wegen der Monotonie von (a_n) muss es sich bei a also um die größere der beiden Nullstellen handeln.

Aufgabe 3.3: Divergenz von Folgen

Betrachten Sie die Folge:

$$a_n = \frac{n!}{\sqrt{n}}.$$

Zeigen Sie, dass die Folge (a_n) gegen ∞ strebt, indem Sie die Definition 1.10 des Skriptes nutzen. Zeigen Sie dazu, dass für jedes $M > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, sodass:

$$a_n > M \quad \text{für alle } n > N.$$

Hinweis: Verwenden Sie die Stirling-Approximation für $n!$:

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

um das asymptotische Verhalten von a_n zu bestimmen, und verwenden Sie die Abschätzung $n(\ln n - 1) > n$ für $n > 8$, um ein geeignetes N für ein gegebenes $M > 0$ zu finden.

Lösung 3.3:

Mit der Stirling-Approximation:

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

ergibt sich:

$$a_n = \frac{n!}{\sqrt{n}} \sim \frac{\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n}{\sqrt{n}} = \sqrt{2\pi} \cdot \frac{n^n}{e^n}.$$

Definition der Divergenz:
Wir zeigen, dass $a_n \to \infty$, indem wir für jedes $M > 0$ ein N finden, sodass:

$$a_n > M.$$

Da $a_n \sim \sqrt{2\pi} \cdot \frac{n^n}{e^n}$, genügt es zu zeigen, dass:

$$\frac{n^n}{e^n} > \frac{M}{\sqrt{2\pi}}.$$

Nehmen wir den Logarithmus:

$$n \ln n - n > \ln\left(\frac{M}{\sqrt{2\pi}}\right).$$

Abschätzung für n:
Für $n > 8$ gilt die Ungleichung:

$$n(\ln n - 1) > n.$$

Daher genügt es, ein n zu finden, sodass:

$$n > \ln\left(\frac{M}{\sqrt{2\pi}}\right).$$

Beispiel: Für $M = 1000$ ergibt sich:

$$\ln\left(\frac{1000}{\sqrt{2\pi}}\right) \approx \ln(398.94) \approx 5.99.$$

Also muss $n > 5.99$. Wählen wir $N = 8$, dann gilt für alle $n > N$:

$$a_n > 1000.$$

Somit gilt allgemein:

$$n > \max(8, \ln(M)/\sqrt{2\pi}).$$

Die Folge $a_n = \frac{n!}{\sqrt{n}}$ strebt nach ∞.

Aufgabe 3.4: Funktionenlimes

a) Gegeben sei die Funktion

$$f(x) := \frac{x^3 + |x+1| + \operatorname{sign}(x+1)}{\operatorname{sign} x}, \quad x \in D(f) := \mathbb{R}\,.$$

Bestimmen Sie $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to(-1)+} f(x)$ und $\lim\limits_{x\to(-1)-} f(x)$.

b) Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \frac{\sinh x}{\cosh(ax)}\,, \qquad a \in \mathbb{R}\,.$$

Bestimmen Sie $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$.

Hinweise:

- Mit der zunächst als bekannt vorausgesetzten Exponentialfunktion e^x gilt

$$\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \text{und} \qquad \cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

- Die Signum-Funktion liefert das Vorzeichen des Argumentes:

$$\operatorname{sign}(z) = \begin{cases} +1 & , z \geq 0 \\ -1 & , z < 0 \end{cases}$$

Lösung 3.4:

a) **i)** Für $x > 0$ gilt $\operatorname{sign}(x) = \operatorname{sign}(1+x) = 1$ sowie $|x+1| = x+1$, damit gilt

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} (x^3 + x + 1 + 1) = 2.$$

ii) Für $-1 < x < 0$ gilt $\operatorname{sign}(x) - 1$, $\operatorname{sign}(1+x) = 1$ sowie $|x+1| = x+1$, damit gilt

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} \frac{x^3 + x + 1 + 1}{-1} = -2.$$

iii) Für $-1 < x < 0$ gilt $\operatorname{sign}(x) = -1$, $\operatorname{sign}(1+x) = 1$ sowie $|x+1| = x+1$, damit gilt

$$\lim_{x\to(-1)+} f(x) = \lim_{x\to(-1)+} \frac{x^3 + x + 1 + 1}{-1} = 0.$$

iv) Für $x < -1$ gilt $\operatorname{sign}(x) = \operatorname{sign}(1+x) = -1$ sowie $|x+1| = -(x+1)$, damit gilt

$$\lim_{x\to(-1)-} f(x) = \lim_{x\to(-1)-} \frac{x^3 - x - 1 - 1}{-1} = 2.$$

b) Die Funktion $f(x)$ ist eine ungerade Funktion:

$$f(-x) = \frac{\sinh(-x)}{\cosh(ax)} = \frac{\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-(-x)}}{\mathrm{e}^{-ax} + \mathrm{e}^{-(-ax)}} = -\frac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{ax} + \mathrm{e}^{-ax}} = -f(x)$$

Daher ist $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ und es genügt einen der beiden Grenzwerte zu berechnen.
Es wird vorausgesetzt, dass e^x stetig ist und dass gilt $\lim\limits_{x\to\infty} \mathrm{e}^x = \infty$, somit kann man den Funktionsgrenzwert durch die Substitution $z = \mathrm{e}^x$ bestimmen:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{ax} + \mathrm{e}^{-ax}} = \lim_{z\to\infty} \frac{z - \frac{1}{z}}{z^a + \frac{1}{z^a}} \\ &= \lim_{z\to\infty} \left(\frac{z}{z^a} \cdot \frac{1 - \frac{1}{z^2}}{1 + \frac{1}{z^{2a}}} \right)\end{aligned}$$

Der Grenzwert des ersten Bruches ist

$$\lim_{z\to\infty} \frac{z}{z^a} = \lim_{z\to\infty} z^{1-a} = \begin{cases} \infty, & a < 1 \\ 1, & a = 1 \\ 0, & a > 1 \end{cases}.$$

Für den zweiten Bruch hat man

$$\lim_{z\to\infty} \frac{1 - \frac{1}{z^2}}{1 + \frac{1}{z^{2a}}} = \begin{cases} 0, & a < 0 \\ \frac{1}{2}, & a = 0 \\ 1, & a > 0 \end{cases}.$$

Insgesamt ergibt sich daraus:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \begin{cases} \infty, & 0 \leq a < 1 \\ 1, & a = 1 \\ 0, & a > 1 \end{cases}$$

Für $a < 0$ hat man

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{z\to\infty} \left(\frac{z}{z^a z^{-2a}} \cdot \frac{1 - \frac{1}{z^2}}{z^{2a} + 1} \right) \\ &= \lim_{z\to\infty} \left(\frac{z}{z^{-a}} \cdot \frac{1 - \frac{1}{z^2}}{z^{2a} + 1} \right) = \begin{cases} 0, & a < -1 \\ 1, & a = -1 \\ \infty, & -1 < a < 0 \end{cases}.\end{aligned}$$

Aufgabe 3.5: Stetige Fortsetzung

a) Untersuchen Sie, ob die folgenden reellen Funktionen im Punkt $x = 0$ stetig sind oder stetig fortgesetzt werden können.

$$f_1(x) = |x|, \qquad f_2(x) = \frac{x}{|x|}, \qquad f_3(x) = \frac{x^3}{|x|}, \qquad f_4(x) = \frac{x^2}{|x|^2}$$

b) Bestimmen Sie die Definitionslücken der Funktion

$$g(x) = \frac{2x^3 - 12x^2 + 18x}{x^3 - 9x}$$

In welchen dieser Lücken ist die Funktion stetig fortsetzbar?

Lösung 3.5:

a) **i)** Sei also x_n eine beliebige Nullfolge, dann ist gemäß Funktionsdefinition

$$\lim_{n\to\infty} |f_1(x_n) - f(0)| = \lim_{n\to\infty} |x_n - 0| = 0$$

und damit auch

$$\underset{x\to 0 1}{f}(x) = f_1(0).$$

Also ist f_1 in $x = 0$ stetig.

ii) Die Funktion f_2 ist in $x = 0$ nicht definiert. Um sie stetig fortzusetzen, müsste die Folge $f_2(x_n)$ für eine beliebige Nullfolge x_n konvergieren. Um dies zu widerlegen, wählen wir die Nullfolge $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$. Damit gilt:

$$f_2(x_n) = \frac{x_n}{|x_n|} = \frac{(-1)^n \cdot 1/n}{1/n} = (-1)^n.$$

Diese Folge $f_2(x_n)$ konvergiert sicher nicht. Damit ist f_2 nicht stetig fortsetzbar in $x = 0$.

iii) Die Funktion f_3 ist ebenfalls in $x = 0$ nicht definiert, sie lässt sich jedoch durch

$$f_3(0) := 0$$

stetig fortsetzen. Sei dafür eine beliebige Nullfolge x_n. Damit gilt dann:

$$|f_3(x_n) - f_3(0)| = \left|\frac{x_n^3}{|x_n|} - 0\right| = \frac{|x_n|^3}{|x_n|} = |x_n|^2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Also konvergiert die Folge $f_3(x_n)$ gegen $f_3(0)$ und die Funktion ist stetig.

iv) Die Funktion f_4 ist nicht definiert für $x = 0$. Setzt man jedoch $f_4(0) = 1$, so erhält man $f_4(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Also hat man f_4 stetig fortgesetzt.

In den beiden Fällen f_3 und f_4 wurden die Definitionsbereiche der Funktionen durch das stetige Fortsetzen im Nullpunkt erweitert. Damit erhält man formal eine neue Funktion.

b) Die Definitionslücken der Funktion g sind gegeben durch die Nullstellen des Nenners:

$$x^3 - 9x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 0 \vee x_2 = 3 \vee x_3 = -3.$$

Der Zähler lässt sich schreiben als

$$2x^3 - 12x^2 + 18x = 2 \cdot (x - 0) \cdot (x - 3)^2.$$

Damit hat man dann

$$g(x) = \frac{2 \cdot (x-0) \cdot (x-3)^2}{(x-0)(x-3)(x-(-3))} = \frac{2(x-3)}{x+3}.$$

Man kann also die Definitionslücken $x_1 = 0$ und $x_2 = 3$ durch

$$g(0) = -2 \text{ und } g(3) = 0$$

beheben. Bei $x_3 = -3$ hat man einerseits für $y_j^- = -3 - 1/j \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} -3$:

$$g(y_j^-) = \frac{2\,(-3 - 1/j - 3)}{-3 - 1/j + 3} = 2\frac{6 + 1/j}{1/j} = 12j + 2 > 2$$

und andererseits für $y_j^+ = -3 + 1/j \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} -3$:

$$g(y_j^+) = \frac{2\,(-3 + 1/j - 3)}{-3 + 1/j + 3} = 2\frac{-6 + 1/j}{1/j} = -12j + 2 < -10.$$

Wenn jede einzelne dieser Folgen einen Grenzwert hätte, so würden diese wegen der Schranken 2 und -10 jedenfalls nicht übereinstimmen. Also kann man g im Punkt $x = -3$ nicht stetig fortsetzen.

Aufgabe 3.6: Kurven im $\mathbb{R}^n$

Ein Satellit bewege sich auf der Bahn

$$\boldsymbol{r}(t) = \left(\sqrt{1+t^2},\, 3t\right)^\top$$

.

a) Berechnen Sie die Geschwindigkeit $\dot{\boldsymbol{r}}(t)$ des Satelliten.

b) Geben Sie die Grenzwerte (für $t \to +\infty$ und für $t \to -\infty$) der Bahnrichtung r_2/r_1 und Geschwindigkeit $\dot{\boldsymbol{r}}$ des Satelliten an.

Lösung 3.6:

a) Die Geschwindigkeit ist

$$\dot{\boldsymbol{r}}(t) = \left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, 3\right)^\top .$$

b) Es ist

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\pm\infty} \frac{r_2}{r_1} &= \lim_{t\to\pm\infty} \frac{3t}{\sqrt{1+t^2}} \\ &= \lim_{t\to\pm\infty} \frac{3\,\mathrm{sign}(t)}{\sqrt{\frac{1}{|t|^2}+1}} = \pm 3\end{aligned}$$

Die Bahn verläuft also asymptotisch in Richtung der beiden Geraden $\mathrm{span}\{(1, \pm 3)^\top\}$. Für die Geschwindigkeit gilt passend dazu

$$\lim_{t\to\pm\infty} \dot{\boldsymbol{r}}(t) = (\pm 1, 3)^\top .$$

Der Graph zeigt die Bahnkurve des Satelliten sowie deren Asymptoten.