Helmut-Schmidt-Universität
Universität der Bundeswehr Hamburg
Fakultät für Maschinenbau und Bauingenieurwesen

Prof. Dr. Thomas Carraro
M.Sc Janna Puderbach

Mathematik II/B (WI/ET) — Blatt 8

WT 2024 — Integration, partielle Ableitungen

Einführende Bemerkungen

- Vermeiden Sie die Verwendung von Taschenrechnern oder Online-Ressourcen.

Aufgabe 8.1: Uneigentliche Integrale

Überprüfen Sie, ob die folgenden uneigentlichen Integrale existieren (d. h. einen endlichen Wert annehmen). Berechnen Sie für das dritte Beispiel den Wert des Integrals.

$$I_1 = \int_1^\infty \frac{\sin\frac{1}{x^2}}{x^2}\mathrm{d}x$$

$$I_2 = \int_0^1 \frac{\cos x^2}{1-x}\mathrm{d}x$$

$$I_3 = \int_0^\infty \frac{\arctan x}{x^2+1}\mathrm{d}x$$

Lösung 8.1:

- Das erste Integral hat einen endlichen Wert, man kann seinen Wert nach oben abschätzen, indem man den Integranden durch eine größere Funktion ersetzt:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_1^\infty \frac{\sin\frac{1}{x^2}}{x^2}\mathrm{d}x \le \int_1^\infty \left|\frac{\sin\frac{1}{x^2}}{x^2}\right|\mathrm{d}x \\ &\le \int_1^\infty \left|\frac{1}{x^2}\right|\mathrm{d}x \qquad (\text{weil } |\sin(1/x^2)| \le 1) \\ &= \left[\frac{-1}{x}\right]_1^\infty = \lim_{b\to\infty}\frac{-1}{b} - \frac{-1}{1} = 1 \end{aligned}$$

  Damit hat I_1 einen endlichen Wert, der an dieser Stelle jedoch nicht berechnet werden soll.

- Das zweite Integral wird nach unten abgeschätzt, indem man die Integrandenfunktion durch eine geringere Funktion abschätzt:

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^1 \frac{\cos x^2}{1-x}\mathrm{d}x \\ &\ge \int_0^1 \frac{\cos 1}{1-x}\mathrm{d}x \qquad (\text{weil cos auf dem Intervall } [0,1] \text{ monoton fällt}) \\ &= \cos 1\Big[-\ln|1-x|\Big]_0^1 = \cos 1 \cdot \Big(-\lim_{b\to 1}\ln|1-b| - (-\ln|1-0|)\Big) = \infty \end{aligned}$$

  Damit hat auch das Integral I_2 keinen endlichen Wert.

- Für den Integranden $f(x) = \frac{\arctan x}{1+x^2}$ des dritten Integrals kann man mittels partieller Integration eine Stammfunktion ermittelt werden:

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int\limits_0^x f(t)\mathrm{d}t = \int\limits_0^x \underbrace{\arctan t}_{u(t)} \underbrace{\frac{1}{1+t^2}}_{v'(t)} \,\mathrm{d}t \\
&= \underbrace{\arctan t}_{u(t)} \underbrace{\arctan t}_{v(t)} \Big|_0^x - \int\limits_0^x \underbrace{\frac{1}{1+t^2}}_{u'(t)} \underbrace{\arctan t}_{v(t)} \,\mathrm{d}t \\
&= \arctan^2 x - F(x) \\
\Rightarrow \qquad 2F(x) &= \arctan^2 x \\
\Rightarrow \qquad F(x) &= \frac{\arctan^2 x}{2}
\end{aligned}$$

Den Wert des Integrals I_3 erhält man dann durch den Grenzübergang:

$$I_3 = \lim_{b\to\infty} F(b) - F(0) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - 0 = \frac{\pi^2}{8}.$$

Aufgabe 8.2: Uneigentliche Integrale

Welche der folgenden uneigentlichen Integrale besitzen einen endlichen Wert? Bestimmen Sie den Wert dieser Integrale.

a) $$\int_0^1 \frac{1}{x^{1/4}}\,\mathrm{d}x$$

b) $$\int_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

c) $$\int_0^{1/\pi} \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

d) $$\int_0^{\infty} 2x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

Lösung 8.2:

a) Dieses Integral existiert:

$$\int_0^1 x^{-\frac{1}{4}}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to 0}\int_a^1 x^{-\frac{1}{4}}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to 0}\left(\frac{4}{3}\,x^{\frac{3}{4}}\Big|_a^1\right) = \frac{4}{3}\lim_{a\to 0}(1-a^{3/4}) = \frac{4}{3}.$$

b) Dieses Integral existiert nicht:

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to 0}\int_a^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to 0}\left(\ln|x|\Big|_a^1\right) = \lim_{a\to 0}(\ln 1 - \ln a) = +\infty.$$

c) Hier ist

$$\int_0^{1/\pi} \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to 0}\int_a^{1/\pi} \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to 0}\cos\frac{1}{x}\Big|_a^{1/\pi} = \lim_{a\to 0}\left(\cos(\pi) - \cos\frac{1}{a}\right).$$

Der Grenzwert existiert nicht, da $\cos(1/a)$ für $a\to 0$ immer wieder alle Werte zwischen -1 und $+1$ annimmt. Also existiert auch kein Wert für das Integral.

d) Dieses Integral existiert:

$$\int_0^{\infty} 2x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to\infty}\int_0^{a} 2x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to\infty}\left(-\mathrm{e}^{-x^2}\Big|_0^a\right)$$
$$= \lim_{a\to\infty}\left(-\mathrm{e}^{-a^2}+\mathrm{e}^0\right) = 0+1 = 1.$$

Aufgabe 8.3: Äquipotentialfläche und Tangentialebene

Gegeben seien die Funktion $f(x,y,z) = y^2 - xz$ und der Punkt $\boldsymbol{p}_0 = (1,\,-2,\,3)^\top$.

a) Bestimmen Sie die Äquipotentialfläche der Funktion f durch den Punkt $\boldsymbol{p}_0$:

$$\boldsymbol{F} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 | \quad f(x,y,z) = f(\boldsymbol{p}_0)\}.$$

Skizzieren Sie die Schnitte der Fläche $\boldsymbol{F}$ mit zur xy-Ebene parallelen Ebenen, d. h. für konstante z-Werte. (z. B. $z = 0\pm,\ 1\pm,\ 2\pm,\ 3\pm$ und $z \to \infty$)

b) Bestimmen Sie $\nabla f(\boldsymbol{p}_0)$.

c) Bestimmen Sie die Hessesche Normalform der Tangentialebene $\boldsymbol{E}$ an $\boldsymbol{F}$ im Punkt $\boldsymbol{p}_0$.

d) Bestimmen Sie den Abstand der Tangentialebene $\boldsymbol{E}$ zum kritischen Punkt der Funktion f.

Lösung 8.3:

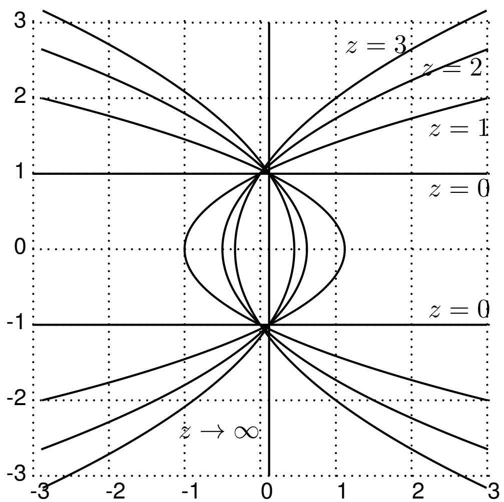
a) Mit $f(\boldsymbol{p}_0) = 1$ ergibt sich die Äquipotentialfläche zu

$$\boldsymbol{F} = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \quad y^2 - xz = 1\right\}.$$

Für konstante z-Werte ergeben sich für die Schnittkurven Parabeln ($z \neq 0$):

$$x = \frac{y^2 - 1}{z},$$

während sich für $z = 0$ die Geraden $y = \pm 1$ ergeben:



b) Es ist

$$\nabla f(x,y,z) = (-z, 2y, -x)^\top \text{ und damit } \nabla f(\boldsymbol{p}_0) = (-3,\,-4,\,-1)^\top.$$

c) Die Ebene $\boldsymbol{E}$ hat den Normalenvektor $\nabla f(\boldsymbol{p}_0)$, dessen Normierung

$$\boldsymbol{n}_0 = \frac{1}{\sqrt{26}}\begin{pmatrix}-3\\-4\\-1\end{pmatrix}$$

ergibt und enthält den Punkt $\boldsymbol{p}_0$. Ihre Hessesche Normalform ist also

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E} =& \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 | \ \langle \boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}_0,\, \boldsymbol{n}_0\rangle = 0\}\\ =& \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \left\langle \begin{pmatrix}x-1\\y+2\\z-3\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{26}}\begin{pmatrix}-3\\-4\\-1\end{pmatrix}\right\rangle = 0\right\}.\end{aligned}$$

d) Ein kritischer Punkt erfüllt die Bedingung $\nabla f(\boldsymbol{x}) = 0$. Damit ist $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ der einzige kritische Punkt. Der Abstand ergibt sich aus dem Skalarprodukt der Hesseschen Normalform:

$$d = |\langle \boldsymbol{0} - \boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{n}_0\rangle| = \frac{1}{\sqrt{26}}|-2| = \sqrt{\frac{2}{13}}.$$

Aufgabe 8.4: Partielle Ableitungen

Gegeben sei die Funktion

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

Berechnen Sie $f_{xy}(x,y)$ für alle $(x,y)^\top \in \mathbb{R}^2$ und untersuchen Sie, wo

$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y)$$

gilt.
Sind die zweiten Ableitungen von f stetig in $(0,0)^\top$?
Hinweis: Berechnen Sie die Ableitungen im Ursprung $(0,0)^\top$ über die Grenzwert-Definition.

Lösung 8.4:

Für $(x,y)^\top \neq (0,0)^\top$ gilt

$$\begin{aligned} f_x(x,y) =& \frac{(3x^2y - y^3)(x^2+y^2) - 2x(x^3y - y^3x)}{(x^2+y^2)^2} \\ =& \frac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2+y^2)^2} . \end{aligned}$$

Wegen $f(x,y) = -f(y,x)$ gilt

$$f_y(x,y) = -\partial_1 f(y,x) = \frac{x^5 - 4y^2x^3 - y^4x}{(x^2+y^2)^2} .$$

Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} f_{xy}(x,y) =& \frac{(x^4 + 12x^2y^2 - 5y^4) \cdot (x^2+y^2)^2 - 2(x^2+y^2) \cdot 2y \cdot (x^4y + 4x^2y^3 - y^5)}{(x^2+y^2)^4} \\ =& \frac{x^6 + 9x^4y^2 - 9x^2y^4 - y^6}{(x^2+y^2)^3} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} f_{yx}(x,y) =& \frac{\partial}{\partial x}\Big(f_y(x,y)\Big) = \frac{\partial}{\partial x}\Big(-\partial_1 f(y,x)\Big) \\ =& -\partial_2\partial_1 f(y,x) = \partial_2\partial_1 f(x,y) = f_{xy}(x,y). \end{aligned}$$

Die zweiten Ableitungen sind für $(x,y)^\top \neq (0,0)^\top$ stetig, deswegen gilt auch

$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y).$$

Im Ursprung hat man zunächst

$$\begin{aligned} f_x(0,0) =& \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h(h^2+0)} = 0 \\ f_y(0,0) =& \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h(0+h^2)} = 0. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für die zweite Ableitung

$$\begin{aligned} f_{xy}(0,0) =& \lim_{h\to 0} \frac{f_x(0,h) - f_x(0,0)}{h} \\ =& \lim_{h\to 0} \left(\frac{1}{h}\left(\frac{-h^5}{h^4} - 0\right)\right) = \lim_{h\to 0} \frac{-h^5}{h^5} = -1. \end{aligned}$$

Vertauscht man die Reihenfolge der Ableitungen, ergibt sich

$$\begin{aligned} f_{yx}(0,0) =& \lim_{h\to 0} \frac{f_y(h,0) - f_y(0,0)}{h} \\ =& \lim_{h\to 0} \left(\frac{1}{h}\left(\frac{h^5}{h^4} - 0\right)\right) = \lim_{h\to 0} \frac{h^5}{h^5} = 1. \end{aligned}$$

Also gilt im Ursprung

$$f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0).$$

Die Ableitungen können also nicht stetig sein, da die Reihenfolge gemäß Satz von Schwarz sonst egal wäre.

Aufgabe 8.5: Richtungsableitungen

a) Gegeben seien die skalarwertigen Funktionen

$$f(x,y,z) = y^2 - xz \qquad \text{und} \qquad g(x,y,z) = x^2\sin(y) + \cos(z).$$

Berechnen Sie die Richtungsableitung beider Funktionen in Richtung $\boldsymbol{h} := (-2,3,4)^\top$.

Lösung 8.5:

a) Zunächst berechnen wir die Gradienten der beiden Funktionen:

$$\begin{aligned}\nabla f(x,y,z) =& (-z,\ 2y,\ -x)^\top \\ \nabla g(x,y,z) =& (2x\sin(y),\ x^2\cos(y),\ -\sin(z))^\top .\end{aligned}$$

Desweiteren benötigen wir den Normalenvektor in Richtung $\boldsymbol{h}$:

$$\hat{\boldsymbol{h}} = \frac{1}{\sqrt{4+9+16}}(-2,\ 3,\ 4)^\top = \frac{1}{\sqrt{29}}(-2,\ 3,\ 4)^\top .$$

Damit ergeben sich dann die Richtungsableitungen:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \hat{\boldsymbol{h}}}(x,y,z) &= \left\langle \hat{\boldsymbol{h}},\ \nabla f(x,y,z)\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{29}}\left(2z + 6y - 4x\right) \\ \frac{\partial g}{\partial \hat{\boldsymbol{h}}}(x,y,z) &= \left\langle \hat{\boldsymbol{h}},\ \nabla g(x,y,z)\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{29}}\left(-4x\sin(y) + 3x^2\cos(y) - 4\sin(z)\right) .\end{aligned}$$

Aufgabe 8.6: Partielle Ableitungen

Bestimmen Sie zu jeder der folgenden Funktionen $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die ersten und zweiten Ableitungen

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix}.$$

$$f(x,y) = \mathrm{e}^{2xy^2} \qquad g(x,y) = x^2 \sin(2x+y)$$
$$h(x,y) = \sin(2x)\cos(3y) \qquad k(x,y,z) = xy^2z^3$$
$$l(x,y) = \frac{xy}{xy-1}$$

Lösung 8.6:

$$\nabla f(x,y) = (2y^2\mathrm{e}^{2xy^2},\, 4xy\mathrm{e}^{2xy^2})^\top$$
$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right) = \begin{pmatrix} 4y^4\mathrm{e}^{2xy^2} & (4y+8xy^3)\mathrm{e}^{2xy^2} \\ (4y+8xy^3)\mathrm{e}^{2xy^2} & (4x+16x^2y^2)\mathrm{e}^{2xy^2} \end{pmatrix}$$
$$\nabla g(x,y) = (2x\sin(2x+y) + 2x^2\cos(2x+y),\, x^2\cos(2x+y))^\top$$
$$\left(\frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}\right) = \begin{pmatrix} 2\sin(2x+y) + 8x\cos(2x+y) - 4x^2\sin(2x+y) & \dots \\ 2x\cos(2x+y) - 2x^2\sin(2x+y) & \dots \end{pmatrix}$$
$$\begin{matrix} \dots & 2x\cos(2x+y) - 2x^2\sin(2x+y) \\ \dots & -x^2\sin(2x+y) \end{matrix}\Bigg)$$
$$\nabla h(x,y) = (2\cos(2x)\cos(3y),\, -3\sin(2x)\sin(3y))^\top$$
$$\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j}\right) = \begin{pmatrix} -4\sin(2x)\cos(3y) & -6\cos(2x)\sin(3y) \\ -6\cos(2x)\sin(3y) & -9\sin(2x)\cos(3y) \end{pmatrix}$$
$$\nabla k(x,y,z) = (y^2z^3,\, 2xyz^3,\, 3xy^2z^2)^\top$$
$$\left(\frac{\partial^2 k}{\partial x_i \partial x_j}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 2yz^3 & 3y^2z^2 \\ 2yz^3 & 2xz^3 & 6xyz^2 \\ 3y^2z^2 & 6xyz^2 & 6xy^2z \end{pmatrix}$$
$$\nabla l(x,y) = \left(\frac{y(xy-1) - y\cdot xy}{(xy-1)^2},\, \frac{x(xy-1) - x\cdot xy}{(xy-1)^2}\right)^\top = \left(\frac{-y}{(xy-1)^2},\, \frac{-x}{(xy-1)^2}\right)^\top$$
$$\left(\frac{\partial^2 l}{\partial x_i \partial x_j}\right) = \begin{pmatrix} \frac{2y^2}{(xy-1)^3} & \frac{-(xy-1)^2-(-y)\cdot 2(xy-1)\cdot x}{(xy-1)^4} \\ \frac{1+xy}{(xy-1)^3} & \frac{2x^2}{(xy-1)^3} \end{pmatrix} = \frac{1}{(xy-1)^3}\begin{pmatrix} 2y^2 & 1+xy \\ 1+xy & 2x^2 \end{pmatrix}$$