Helmut-Schmidt-Universität
Universität der Bundeswehr Hamburg
Fakultät für Maschinenbau und Bauingenieurwesen

Prof. Dr. Thomas Carraro
M.Sc Janna Puderbach

Mathematik II/B (WI/ET) — Blatt 6

WT 2024 — Kurvendiskussion, Taylorpolynom, Newton-Verfahren

Einführende Bemerkungen

- Vermeiden Sie die Verwendung von Taschenrechnern oder Online-Ressourcen.

Aufgabe 6.1: Ableitung der Umkehrfunktion

a) Leiten Sie die Formel für die Ableitung der Umkehrfunktion her.

b) Leiten Sie eine Formel für die zweiten Ableitung der Umkehrfunktion her.

c) Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \mathrm{e}^x + 2x.$$

- **i)** Zeigen Sie, dass $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ umkehrbar ist.
- **ii)** Bestimmen Sie die Ableitungen $g'(1)$ und $g''(1)$ der Umkehrfunktion

$$g = f^{-1}.$$

Aufgabe 6.2: Taylor-Entwicklung in einer Variablen

Bestimmen Sie die Taylor-Entwicklung zweiter Ordnung der Exponentialfunktion e^x um den Punkt $x_0 = 0$ in dem Intervall $0 \leq x \leq 1$ einschließlich des Restgliedtermes. Zeigen Sie damit die Abschätzung:

$$\mathrm{e} \leq 3.$$

Aufgabe 6.3: Kurvendiskussion, Taylorentwicklung

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x^2/2}(2x - 3).$$

a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich von f.

b) Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion f.

c) Bestimmen Sie die Asymptoten von f.

d) Bestimmen Sie die kritischen Punkte der Funktion f und charakterisieren Sie diese **ohne** Berechnung der zweiten Ableitung.

e) Geben Sie die Taylorentwicklung in den Extrempunkten bis zum Grad 2 an.

f) Skizzieren Sie die Funktion, die Asymptote, sowie die Taylorapproximationen.

Aufgabe 6.4: Kurvendiskussion

Führen Sie eine Kurvendiskussion für die Funktion

$$f(x) = \ln(3x^2 + 2x + 1)$$

durch. Bestimmen Sie dazu:

a) den maximalen Definitionsbereich von f,

b) die Symmetrieachsen von f, d. h. Werte $\alpha \in \mathbb{R}$, so dass $f(\alpha + x) = f(\alpha - x)$,

c) das Verhalten von f im Unendlichen,

d) die Nullstellen von f,

e) die Extrema und das Monotonieverhalten von f,

f) sowie die Wendepunkte und das Krümmungsverhalten von f.

g) Skizzieren Sie den Graphen von f.

Aufgabe 6.5: Newton-Verfahren

a) Gegeben seien die Funktionen

$$f(x) = \frac{x}{3} \quad \text{und} \quad g(x) = \sin(x^2).$$

- **i)** Skizzieren Sie die Funktionen und bestimmen Sie Näherungen für die Schnittstelle der beiden Funktionsgraphen.
- **ii)** Bestimmen Sie die kleinste positive Schnittstelle mit dem Newton-Verfahren auf fünf Nachkommastellen genau.

b) Führen Sie das Verfahren ebenso für die Funktionen

$$f(x) = x^3 \quad \text{und} \quad g(x) = \cos(2\pi x)$$

und die betragskleinste Schnittstelle durch.

Aufgabe 6.6: Taylor-Polynom

a) Geben Sie das Taylorpolynom n-ter Ordnung der folgenden Funktionen um den angegebenen Entwicklungspunkt x_0 an:

i) $f(x) = \sin(x) \cdot \cos(x)$ um $x_0 = 0,\ n = 4$

ii) $g(x) = \cos(x)$ um $x_0 = \pi/2,\ n = 4$

iii) $h(x) = \mathrm{e}^{1-x}(x^2 - 2x)$ um $x_0 = 1,\ n = 2$

b) Geben Sie die Nullstellen der Funktionen sowie der Taylor-Polynome im Intervall $[0, 5]$ an.

c) Skizzieren Sie die Funktionen und deren Taylor-Polynome.

Ergebnisse zu Aufgabe 6.3:

zu **e)**: $T_{2;2}(x) = \mathrm{e}^{-2}\left(1 - \frac{5}{2}(x-2)^2\right)$
$T_{2;-1/2}(x) = \mathrm{e}^{-1/8}\left(-4 + \frac{5}{2}\left(x + \frac{1}{2}\right)^2\right)$

Ergebnisse zu Aufgabe 6.4:

b) $\alpha = -1/3$, **d)** $0,\ -2/3$, **e)** Minimum bei $-1/3$, **f)** Wendepunkte bei $-1/3 \pm \sqrt{2}/3$

Ergebnisse zu Aufgabe 6.5:

Die gesuchten Schnittpunkte liegen bei a) $z \approx 0.33403$ und b) $z \approx 0.24759$

Ergebnisse zu Aufgabe 6.6:

i) $T_4(x) = x - 2x^3/3$, **ii)** $T_4(x) = -(x - \pi/2) + 1/6 \cdot (x - \pi/2)^3$
iii) $T_2(x) = -1 + (x-1) + 1/2 \cdot (x-1)^2$

Temporary page!

LaTeX was unable to guess the total number of pages correctly. As there was some unprocessed data that should have been added to the final page this extra page has been added to receive it.

If you rerun the document (without altering it) this surplus page will go away, because LaTeX now knows how many pages to expect for this document.