Helmut-Schmidt-Universität
Universität der Bundeswehr Hamburg
Fakultät für Maschinenbau und Bauingenieurwesen

Prof. Dr. Thomas Carraro
M. Sc. Janna Puderbach

Mathematik II/B (WI/ET) — Blatt 2

WT 2025 — Grenzwerte, Stetigkeit, Ableitungen

Einführende Bemerkungen

- Vermeiden Sie die Verwendung von Taschenrechnern oder Online-Ressourcen.

Aufgabe 2.1: Grenzwert Analyse - Definition

a) Notieren Sie die Definition des Grenzwertes und zeigen Sie, dass die Folge $a_n = \frac{1}{n}$ gegen den Grenzwert $a = 0$ konvergiert.
(Dies ist gleichbedeutend mit dem Nachweis, dass $\forall k \in \mathbb{N}$ eine Zahl $N \in \mathbb{R}$ existiert, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > N$ gilt: $|a_n - a| < 10^{-k}$).

b) Berechnen Sie den Grenzwert $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ der untenstehenden Folgen und dokumentieren Sie die Rechenregel, die Sie zur Berechnung des Grenzwertes verwendet haben (Produktregel, Einschließungssatz, Produkt beschränkter Folgen, Produkt von Nullfolgen etc).

i) $a_n = \dfrac{n^2+5n}{3n^2+1}$ **ii)** $a_n = \log_{10}(10n^2 - 2n) - \log_{10}(n^2+1)$

iii) $a_n = \dfrac{(n+1)!}{n! - (n+1)!}$ **iv)** $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{3n}$

v) $a_n = \dfrac{\cos n}{n}$ **vi)** $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

vii) $a_n = \dfrac{2^n}{n!}$

Aufgabe 2.2: Folgenkonvergenz

Untersuchen Sie die nachfolgenden Folgen auf Konvergenz und bestimmten Sie, wenn möglich, den Grenzwert:

$$a_n = \frac{2n^2+3n}{2n^2+7} \qquad b_n = \frac{2n^3-2}{5n^2-1}$$

$$c_n = \frac{2n^2+7n+(-1)^n}{5n+2} - \frac{2n^3-2}{5n^2-1}, \qquad d_n = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$$

$$e_n = n\left(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}\right) \qquad f_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \text{ (mit ganzzahligem } x)$$

$$g_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n+1}$$

Hinweise:
- Setzen Sie voraus, dass f_n konvergiert und ermitteln Sie den Grenzwert.
- Benutzen Sie zur Untersuchung von g_n das Ergebnis für f_n.

Aufgabe 2.3: Ableitungen

Berechnen Sie die erste Ableitung der folgenden Funktionen

a) $f(x) = x^x$

b) $g(x) = x^{3^x}$

c) $h(x) = x^{\cos(x)}$

Aufgabe 2.4: Differenzieren

Bestimmen Sie jeweils die erste Ableitung. (Eventuell notwendige Beschränkungen des Definitionsgebietes sind nicht angegeben.)

$$f_{11}(t) = t^2\,\mathrm{e}^{-2t}\,\sin(3t), \qquad f_{12}(t) = \sqrt{t}\,\mathrm{e}^{2t},$$
$$f_{13}(t) = \sin^3\left(\mathrm{e}^{2t^2} + t^5\right), \qquad f_{14}(t) = \sqrt{2\,t^2 + 1},$$
$$f_{15}(t) = \ln(t) - \ln(5t), \qquad f_{16}(t) = \ln(t^2) - \ln(t^5).$$

Aufgabe 2.5: Differenzieren

Bestimmen Sie die n–te Ableitung folgender Funktionen.

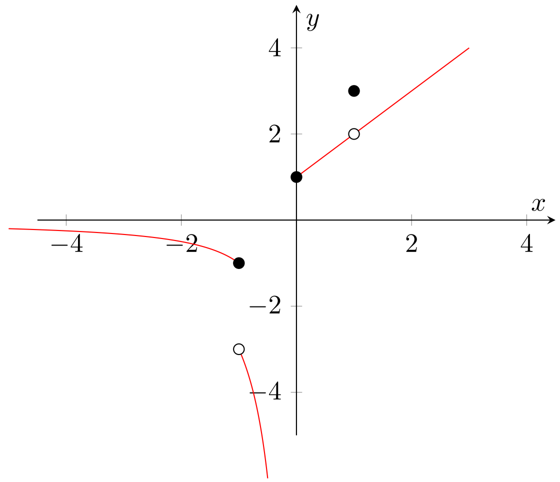
$$f_{21}(t) = \sin(3t), \qquad f_{22}(t) = t\,\mathrm{e}^{2t}$$
$$f_{23}(t) = t \cdot \cos(t), \qquad f_{24}(t) = t\,\ln(2t)$$

Aufgabe 2.6: Stetigkeit

Betrachten Sie die Funktion $y = f(x)$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{für } x \in (-\infty, -1], \\ \frac{3}{x} & \text{für } x \in (-1, 0), \\ \frac{x^2-1}{x-1} & \text{für } x \in [0, 1) \cup (1, \infty), \\ 3 & \text{für } x = 1. \end{cases}$$

und deren Graphen



a) Finden Sie alle Werte an denen die Funktion unstetig ist.

b) Begründen Sie für jeden dieser Werte, weshalb die formale Definition der Stetigkeit verletzt ist.

c) Klassifizieren Sie jede der Untetigkeitsstellen als **Sprungstelle**, **hebbare Unstetigkeit** oder **Polstelle**.

Ergebnisse zu Aufgabe 2.1:

b)

i) $a = \frac{1}{3}$

ii) $a = 1$

iii) $a = -1$

iv) $a = \mathrm{e}^3$

v) $a = 0$

vi) $a = 0$

vii) $a = 0$

Ergebnisse zu Aufgabe 2.2:

$a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$, $b_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, $c_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{31}{25}$, $d_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, $e_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$, $f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^x$,

Ergebnisse zu Aufgabe 2.3:

- $f'(x) = x^x\left(\ln(x) + 1\right)$
- $g'(x) = x^{3^x}\left(\ln(3)\,3^x \ln(x) + \dfrac{3^x}{x}\right)$
- $h'(x) = x^{\cos(x)}\left(\dfrac{\cos(x)}{x} - \ln(x)\sin(x)\right)$

Ergebnisse zu Aufgabe 2.5:

$f_{11}'(2) \approx 0.2315$, $f_{12}'(2) \approx 173.73$, $f_{13}'(2) \approx -2039.7$,
$f_{14}'(2) = 4/3$, $f_{15}'(2) = 0$, $f_{16}'(2) = -3/2$

Ergebnisse zu Aufgabe 2.5:

$f_{22}^{(n)}(t) = (n + 2t)2^{n-1}\mathrm{e}^{2t}$, $f_{24}^{(n)}(t) = (-1)^n(n-2)!t^{-(n-1)}$.