

Mathematik II/B (WI/ET)

Blatt 5

WT 2024

Kurvendiskussion, Taylorpolynom

---

Einführende Bemerkungen

- Vermeiden Sie die Verwendung von Taschenrechnern oder Online-Ressourcen.
- 

Aufgabe 5.1: Taylor-Entwicklung

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \ln(x).$$

- a) Bestimmen Sie das Taylor-Polynom der Ordnung zwei,  $T_2(x)$ , von  $f(x)$  an der Stelle  $x = 1$ .
- b) Bestimmen Sie das Restglied  $R_2(x; 1)$  und schätzen Sie

$$\max_{x \in [1, 2]} |R(x; 1)|.$$

Lösung 5.1:

- a) Die Ableitungen der Funktion sind

$$f'(x) = \frac{1}{x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad f'''(x) = \frac{2}{x^3}.$$

Das Taylor-Polynom ist

$$f(x) = f(1) + f'(x)(x-1) + \frac{1}{2}f''(x)(x-1)^2 + R_2(x; 1),$$

und das Taylor-Polynom der zweiten Ordnung an der Stelle  $x = 1$  ist

$$T_2(x) = 0 + 1(x-1) + \frac{1}{2}(-1)(x-1)^2 = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{2}$$

- b) Das Restglied ist

$$R(x; 1) = f'''(\xi) \frac{(x-1)^3}{3!}, \quad \xi \in [1, 2].$$

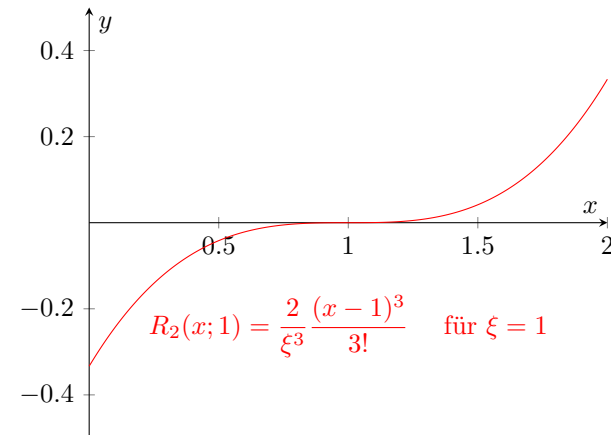
Es ist

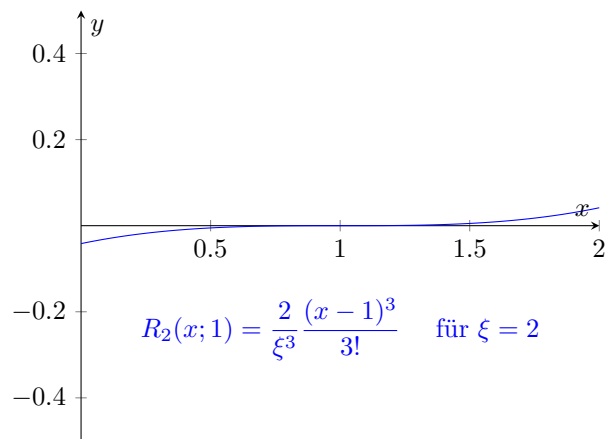
$$R(x; 1) = \frac{2}{\xi^3} \frac{(x-1)^3}{3!}, \quad \xi \in [1, 2].$$

Eine obere Schranke für die Funktion  $R(x; 1)$  für  $\xi$  und  $x$  im Intervall  $[1, 2]$  wird durch Minimieren des Nenners und Maximieren des Zählers gefunden. Das Minimum des Nenners liegt bei  $\xi = 1$  und das Maximum des Zählers ist bei  $x = 2$ . Dies liegt daran, dass die kubische Funktion monoton steigend ist, da ihre Ableitung immer positiv ist. Wir haben also die Schätzung

$$R(x; 1) \leq \frac{2}{1^3} \frac{(2-1)^3}{3!} = \frac{1}{3}.$$

Im Folgenden wird die Funktion  $R_2(x; 1)$  für die beiden Werte  $\xi = 1$  und  $\xi = 2$  skizziert:





### Aufgabe 5.2: Taylor-Entwicklung

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \sin(x) \ln(x).$$

- a) Bestimmen Sie das Taylor-Polynom zweiter Ordnung  $T_2(x)$  von  $f(x)$  um den Punkt  $x = 1$ .
- b) Bestimmen Sie die Differenz zwischen dem Taylor-Polynom  $T_2(x)$  und der Funktion  $f(x)$  im Punkt  $x = 0$ , d.h. bestimmen Sie  $d(0)$ , wobei

$$d(x) := |T_2(x) - f(x)|.$$

Man beachte, dass die Funktion  $f(x)$  an der Stelle  $x = 0$  stetig fortgesetzt werden muss.

### Lösung 5.2:

- a) Die Ableitungen von  $f(x)$  sind:

$$f'(x) = \cos(x) \ln(x) + \frac{\sin(x)}{x},$$

$$f''(x) = -\sin(x) \ln(x) + 2\frac{\cos(x)}{x} - \frac{\sin(x)}{x^2}.$$

Das Taylor-Polynom ist

$$\begin{aligned} T_2(x; 1) &= f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{1}{2}f''(1)(x-1)^2 \\ &= \sin(1)(x-1) + \left(\cos(1) - \frac{\sin(1)}{2}\right)(x-1)^2 \end{aligned}$$

- b) Die Differenz ist

$$d(x) := |T_2(x) - f(x)| = |\sin(x) \ln(x) - \sin(1)(x-1) - \left(\cos(1) - \frac{\sin(1)}{2}\right)(x-1)^2|.$$

Wir müssen den Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow 0} d(x)$  berechnen, da die Funktion  $\sin(x) \ln(x)$  in 0 nicht definiert ist. Wenn der Grenzwert existiert, erweitern wir die Funktion um den Wert des Grenzwertes.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \sin(x) \ln(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{\sin x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{1}{x} \frac{\sin^2(x)}{\cos(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{\sin(x)}{x} \lim_{x \rightarrow 0} \sin(x) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos(x)} \\ &= -1 \cdot 0 \cdot 1 = 0. \end{aligned}$$

Wir erweitern die Funktion bei  $x = 0$  durch Kontinuität mit dem Grenzwert  $f(0) = 0$ . Die Differenz ist

$$d(0) = \left| \sin(1) + \frac{\sin(1)}{2} - \cos(1) \right| = \frac{3 \sin(1)}{2} - \cos(1).$$

---

### Aufgabe 5.3: Taylor-Polynom

- a) Geben Sie das Taylorpolynom  $n$ -ter Ordnung der folgenden Funktionen um den angegebenen Entwicklungspunkt  $x_0$  an:
- i)  $f(x) = \sin(x) \cdot \cos(x)$  um  $x_0 = 0, n = 4$
  - ii)  $g(x) = \cos(x)$  um  $x_0 = \pi/2, n = 4$
  - iii)  $h(x) = e^{1-x}(x^2 - 2x)$  um  $x_0 = 1, n = 2$
- b) Geben Sie die Nullstellen der Funktionen sowie der Taylor-Polynome im Intervall  $[0, 5]$  an.
- c) Skizzieren Sie die Funktionen und deren Taylor-Polynome.

### Lösung 5.3:

- a) i) Zunächst werden die ersten vier Ableitungen ermittelt:

$$f(x) = \sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin(2x), \quad f'(x) = \cos(2x), \quad f''(x) = -2 \sin(2x)$$

$$f'''(x) = -4 \cos(2x), \quad f^{(4)}(x) = 8 \sin(2x)$$

Damit ist das Taylorpolynom

$$T_4(x) = \sum_{k=0}^4 \frac{f^{(k)}(0)}{k!} (x-0)^k$$

$$= 0 + \frac{1}{1!}x - 0 - \frac{4}{3!}x^3 + 0 = x - \frac{2}{3}x^3.$$

- ii) Die Ableitungen von  $g(x)$  sind:

$$g(x) = \cos x, \quad g'(x) = -\sin x, \quad g''(x) = -\cos x$$

$$g'''(x) = \sin x, \quad g^{(4)}(x) = \cos x$$

Damit hat man dann

$$T_4(x) = \sum_{k=0}^4 \frac{g^{(k)}(\pi/2)}{k!} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^k$$

$$= 0 - \frac{1}{1} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 0 + \frac{1}{6} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3 + 0$$

$$= -\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{6} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3.$$

- iii) Es ist

$$h(x) = e^{1-x}(x^2 - 2x)$$

$$h'(x) = e^{1-x}(-x^2 + 2x + 2x - 2) = e^{1-x}(-x^2 + 4x - 2)$$

$$h''(x) = e^{1-x}(x^2 - 4x + 2 - 2x + 4) = e^{1-x}(x^2 - 6x + 6),$$

und damit

$$T_2(x) = -1 + (x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2.$$

- b) i) Die Nullstellen im Intervall  $[0, 5]$  liegen bei:

$$f(x) = 0 \text{ für } x \in \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi\right\}$$

$$T_4(x) = 0 \text{ für } x \in \left\{0, \sqrt{\frac{3}{2}}\right\}$$

- ii)

$$g(x) = 0 \text{ für } x \in \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right\}$$

$$T_4(x) = 0 \text{ für } x \in \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + \sqrt{6}\right\}$$

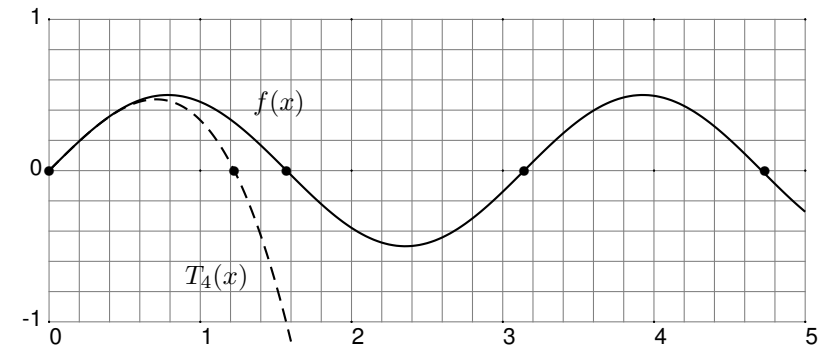
- iii)

$$h(x) = 0 \text{ für } x \in \{0, 2\}$$

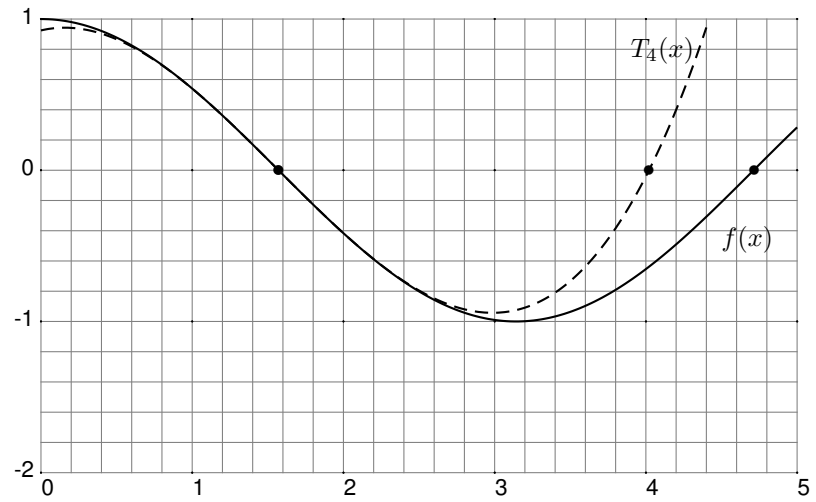
$$T_2(x) = 0 \text{ für } x \in \{\sqrt{3}\}.$$

- c)

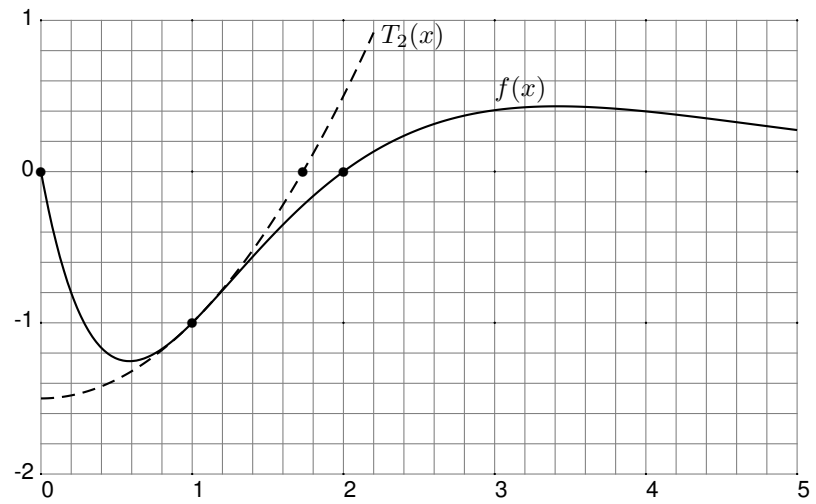
- i)



ii)



iii)



#### Aufgabe 5.4: Asymptoten

Man bestimme die (waagerechten bzw. senkrechten bzw. schrägen) Asymptoten der folgenden Funktionen:

- a)  $f(x) = \frac{x}{4-x^2}$
- b)  $g(x) = e^{-x^2}$
- c)  $h(x) = \frac{x^2-3x}{2x-2}$
- d)  $l(x) = x^2 e^{-x}$

#### Lösung 5.4:

- a) Um die senkrechten Asymptoten zu finden, bestimmen wir zunächst die Nullstellen des Nenners. Die Nullstellen liegen bei  $x_1 = -2$  und  $x_2 = 2$ .

An diesen untersuchen wir das Verhalten der Funktion:

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x}{4-x^2} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x}{4-x^2} = \infty$$

und

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x}{4-x^2} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x}{4-x^2} = -\infty$$

Das bedeutet es gibt eine senkrechte Asymptote bei  $x = -2$  und  $x = 2$ .

Um die waagerechten Asymptoten zu finden, untersuchen wir das Verhalten im Unendlichen.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{4-x^2} = 0$$

und

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{4-x^2} = 0.$$

Das heißt, es gibt eine waagerechte Asymptote bei  $y = 0$ .

- b) Die Funktion  $g(x) = e^{-x^2}$  hat keine Definitionslücke. Es gibt also keine senkrechten Asymptoten.

Für die waagerechten Asymptoten untersuchen wir das Verhalten im Unendlichen. Es gilt:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x^2} = 0$$

und

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x^2} = 0.$$

Es gibt also eine waagerechte Asymptote bei  $y = 0$ .

- c) Die Funktion  $h(x) = \frac{x^2-3x}{2x-2}$  hat eine Definitionslücke bei  $x = 1$ . Es gilt:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2-3x}{2x-2} = \infty$$

und

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2-3x}{2x-2} = -\infty.$$

Da der Zähler von  $h(x)$  genau einen Polynomgrad höher ist als der des Nenners, gibt es eine schräge Asymptote.

Durch Polynomdivision erhalten wir:

$$(x^2-3x) : (2x-2) = \left(\frac{1}{2}x - 1\right) + \frac{-2}{2x-2}.$$

Es gibt also eine schräge Asymptote bei  $y = \frac{1}{2}x - 1$ .

- d) Die Funktion  $l(x) = x^2 e^{-x}$  hat keine Definitionslücke. Daher hat sie keine senkrechte Asymptote. Wir untersuchen das Verhalten im Unendlichen mit Hilfe der Regel von L'Hospital, um die waagerechten Asymptoten zu finden:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^{-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -2x e^{-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2e^{-x} = \infty.$$

und

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} -2x e^{-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} 2e^{-x} = 0.$$

Es gibt also eine waagerechte Asymptote bei  $y = 0$ .

---

### Aufgabe 5.5: Kurvendiskussion

Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich, die Symmetrie, alle Nullstellen, sowie Art und Lage der kritischen Punkte und Wendepunkte der reellen Funktion

$$f(x) = x\sqrt{16 - x^2}.$$

#### Lösung 5.5:

i) Der maximale Definitionsbereich ist  $D = [-4, 4]$ .

ii) Die Funktion  $f$  ist ungerade bzw. punktsymmetrisch zum Ursprung:

$$f(x) = x\sqrt{16 - x^2} = -(-x)\sqrt{16 - (-x)^2} = -f(-x).$$

iii) Die Nullstellen sind

$$\begin{aligned} 0 &= x\sqrt{16 - x^2} \\ \Leftrightarrow x &= 0 \text{ oder } 16 = x^2 \\ \Leftrightarrow x &\in \{0, 4, -4\} \end{aligned}$$

iv) Kritische Punkte liegen bei  $x \in D$  mit:

$$\begin{aligned} 0 &= f'(x) = \sqrt{16 - x^2} - \frac{x \cdot x}{\sqrt{16 - x^2}} = \frac{16 - 2x^2}{\sqrt{16 - x^2}} \\ \Leftrightarrow \pm 4 &= \sqrt{2}x \quad \Leftrightarrow x = \pm 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

Die Funktion  $f$  selbst hat an den Grenzen des Definitionsbereiches  $D$  sowie im Ursprung den Wert  $f(0) = f(\pm 4) = 0$ . Für alle anderen  $x > 0$  ist  $f(x) > 0$ . Also muss im Punkt  $x = +2\sqrt{2}$  das absolute (und damit auch ein relatives) Maximum  $f(2\sqrt{2}) = 8$  der Funktion liegen.

Mit der Symmetrie der Funktion folgt, dass in  $x = -2\sqrt{2}$  ein Minimum  $f(-2\sqrt{2}) = -8$  liegt.

v) Wendepunkte und Konvexität:

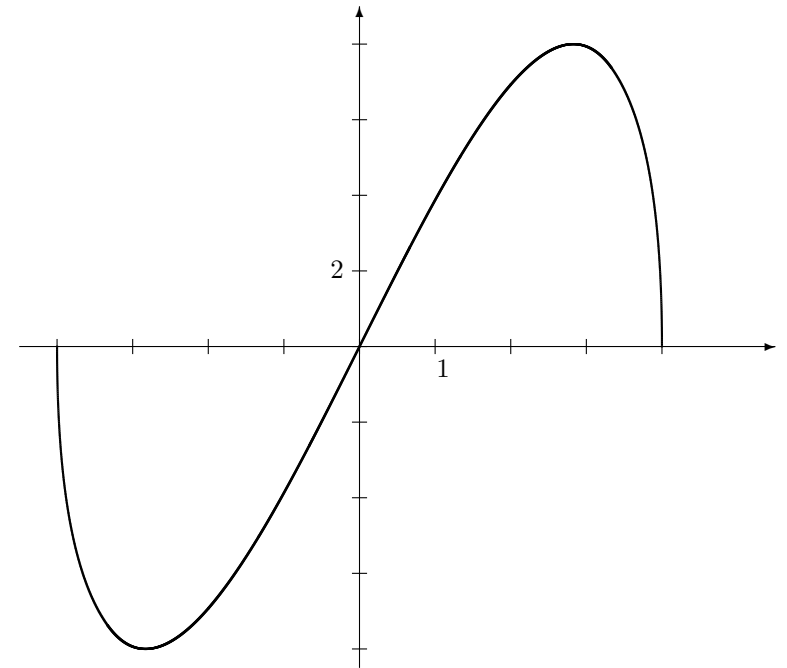
Zunächst ist

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{-4x\sqrt{16 - x^2} - (16 - 2x^2) \cdot (-2x) \frac{1}{2}(16 - x^2)^{-1/2}}{16 - x^2} \\ &= \frac{-4x(16 - x^2) + x(16 - 2x^2)}{(16 - x^2)^{3/2}} \\ &= \frac{2x^3 - 48x}{(16 - x^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

Die einzige reelle Nullstelle des Zählers im Definitionsbereich  $] -4, 4[$  ist  $x = 0$  und es gilt

$$f''(x) = \begin{cases} > 0 & \text{für } x \in ] -4, 0[ \\ < 0 & \text{für } x \in ] 0, 4[ \end{cases}$$

Also liegt in  $(0, 0)$  ein Wendepunkt, links davon ist  $f$  konvex und rechts davon konkav.



### Aufgabe 5.6: Kurvendiskussion

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x}{1 - x}.$$

- i) Geben Sie den maximalen Definitionsbereich der Funktion  $f$  an.
- ii) Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion.
- iii) Bestimmen Sie die kritischen Punkte der Funktion und deren Funktionswerte. Klassifizieren Sie alle kritischen Punkte als Minimum, Maximum oder Wendepunkt.
- iv) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten der Funktion.
- v) Bestimmen Sie alle Asymptoten der Funktion.
- vi) Bestimmen Sie den Wertebereich der Funktion.
- vii) Skizzieren Sie die Funktion.

### Lösung 5.6:

- a) i) Der maximale Definitionsbereich ist  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ .
- ii) Die Nullstellen der Funktion sind  $x_{N_1} = -3$  und  $x_{N_2} = 0$ .
- iii) Die kritischen Punkte sind die Nullstellen der ersten Ableitung. Aus

$$f'(x) = \frac{(2x+3)(1-x) + (x^2+3x)}{(1-x)^2} = \frac{-x^2+2x+3}{(1-x)^2} = 0$$

folgt

$$x_{K_1} = -1 \text{ mit } f(-1) = -1 \text{ und } x_{K_2} = 3 \text{ mit } f(3) = -9.$$

Die zweite Ableitung ist:

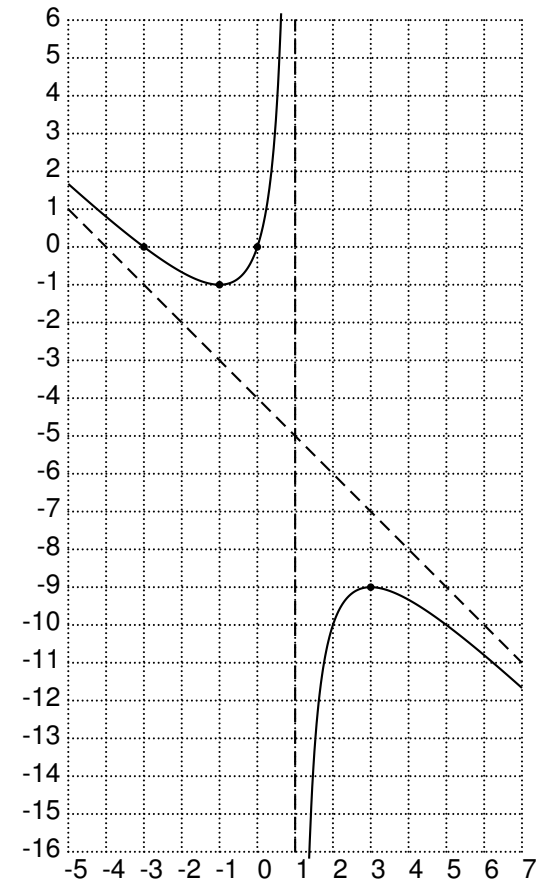
$$f''(x) = \frac{8}{(1-x)^3}.$$

Für  $x_{K_1} = -1$  ist  $f''(-1) = 1 > 0$ . Es handelt sich also um ein Minimum.  
Für  $x_{K_2} = 3$  ist  $f''(3) = -1 < 0$ . Es handelt sich also um ein Maximum.

- iv) Aus den stationären Punkten und der Definitionslücke ergeben sich die Monotonieintervalle. In  $(-\infty, -1)$  und  $(3, \infty)$  ist die Funktion monoton fallend. In  $(-1, 1)$  und  $(1, 3)$  ist die Funktion monoton steigend.
- v) Aus  $f(x) = -x - 4 + \frac{4}{1-x}$  folgt, dass  $g(x) = -x - 4$  die Asymptote ist. Wegen  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \infty$  und  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$  gibt es eine senkrechte Asymptote bei  $x = 1$ .

vi) Der Wertebereich ist  $\mathcal{W} = (-\infty, 3] \cup [1, \infty)$ .

vii)



Bei  $(-1, -1)$  handelt es sich also um ein (lokales) Minimum, bei  $(3, -9)$  um ein Maximum.