

Mathematik II/B (WI/ET)

Blatt 3

WT 2024

Grenzwerte, Stetigkeit, Ableitungen

Einführende Bemerkungen

- Vermeiden Sie die Verwendung von Taschenrechnern oder Online-Ressourcen.
-

Aufgabe 3.1: Ableitungen

Man berechne die erste Ableitung der folgenden Funktionen

- a) $f(x) = x^x$
- b) $g(x) = x^{3^x}$
- c) $h(x) = x^{\cos(x)}$

Aufgabe 3.2: Stetige Fortsetzung

- a) Untersuchen Sie, ob die folgenden reellen Funktionen im Punkt $x = 0$ stetig sind oder stetig fortgesetzt werden können.

$$f_1(x) = |x|, \quad f_2(x) = \frac{x}{|x|}, \quad f_3(x) = \frac{x^3}{|x|}, \quad f_4(x) = \frac{x^2}{|x|^2}$$

- b) Bestimmen Sie die Definitionslücken der Funktionen

$$g(x) = \frac{2x^3 - 12x^2 + 18x}{x^3 - 9x}$$

In welchen dieser Lücken ist die Funktion stetig fortsetzbar?

Aufgabe 3.3: Differenzieren

Bestimmen Sie jeweils die erste Ableitung. Zur Kontrolle sind die Werte der Ableitung an Kontrollpunkten angegeben. (Eventuell notwendige Beschränkungen des Definitionsbereiches sind nicht angegeben.)

$f_1(t) = 3t^4 - 4t + 7,$	$f_2(t) = (2t - 3)^4,$	$f_3(t) = t^3(t + 3)^4$
$f_4(t) = 3 \cos(2t),$	$f_5(t) = \sin^2(3t),$	$f_6(t) = \tan(2 - t/2)$
$f_7(t) = \frac{2t - 3}{(t + 2)^3},$	$f_8(t) = \frac{4t \sin(t)}{\cos(2t)},$	$f_9(t) = t^2 e^{\sqrt{t}}$
$f_{10}(t) = \sqrt{t \sqrt{t \sqrt{t}}},$	$f_{11}(t) = e^{\frac{1}{1+t^2}},$	$f_{12}(t) = \tan(t)$
$f_{13}(t) = \frac{t + \cos(t) \sin(t)}{2},$	$f_{14}(t) = \frac{t^2 - t + 2}{2t + 3},$	$f_{15}(t) = \frac{\sin^2(t)}{\cos(t)}$

Aufgabe 3.4: Differentiation

- a) Geben Sie Konstanten $b, c, d \in \mathbb{R}$ an, damit die Funktion

$$g(x) = \begin{cases} bx^3 + cx^2 + d & \text{für } x \leq 1 \\ \ln x & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

auf \mathbb{R} zweimal differenzierbar ist.

Ist $g(x)$ für diese Wahl auch dreimal differenzierbar?

- b) Überprüfen Sie, dass die Funktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x \sin(1/x) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

in $x = 0$ stetig ist, aber *nicht* differenzierbar.

Hinweis: Betrachten Sie zur Untersuchung der Differenzierbarkeit die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n = \frac{1}{n\pi + \pi/2}$.

Aufgabe 3.5: Kurven im \mathbb{R}^n

Ein Satellit bewege sich auf der Bahn

$$\mathbf{r}(t) = (\sqrt{1+t^2}, 3t)^\top$$

- a) Berechnen Sie die Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{r}}(t)$ des Satelliten.
 - b) Geben Sie die Grenzwerte (für $t \rightarrow +\infty$ und für $t \rightarrow -\infty$) der Bahnrichtung r_2/r_1 und Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{r}}$ des Satelliten an.
-

Ergebnisse zu Aufgabe 3.1:

- $f'(x) = x^x (\ln(x) + 1)$
- $g'(x) = x^{3^x} \left(\ln(3) 3^x \ln(x) + \frac{3^x}{x} \right)$
- $h'(x) = x^{\cos(x)} \left(\frac{\cos(x)}{x} - \ln(x) \sin(x) \right)$

Ergebnisse zu Aufgabe 3.2:

- a) stetig, nicht stetig fortsetzbar, stetig fortsetzbar, stetig fortsetzbar
- b) g ist stetig fortsetzbar in 0 und +3 und nicht stetig fortsetzbar in -3.

Ergebnisse zu Aufgabe 3.3:

$f'_1(2) = 92,$	$f'_2(2) = 8,$	$f'_3(2) = 11500,$
$f'_4(\pi/3) = -3\sqrt{3},$	$f'_5(\pi/3) = 0,$	$f'_6(4+2\pi) = -1/2,$
$f'_7(2) = 5/256,$	$f'_8(\pi/3) = \frac{20\pi}{3} - 4\sqrt{3},$	$f'_9(4) = 12e^2,$
$f'_{10}(256) = \frac{7}{16},$	$f'_{11}(2) = -\frac{4e^{1/5}}{25},$	$f'_{12}(\pi/3) = 4,$
$f'_{13}(\pi/3) = \frac{1}{4},$	$f'_{14}(2) = \frac{13}{49},$	$f'_{15}(\pi/3) = \frac{5\sqrt{3}}{2}$

Ergebnisse zu Aufgabe 3.5:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{r_2(t)}{r_1(t)} = 3, \quad \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \dot{\mathbf{r}}(t) = (\pm 1, 3)^\top$$