Helmut-Schmidt-Universität
Universität der Bundeswehr Hamburg
Fakultät für Maschinenbau und Bauingenieurwesen

Prof. Dr. Thomas Carraro
M.Sc Janna Puderbach

Mathematik II/B (WI/ET) — Blatt 10

WT 2024 — Stationäre Punkte, Newton-Verfahren, Richtungsableitung

Einführende Bemerkungen

- Vermeiden Sie die Verwendung von Taschenrechnern oder Online-Ressourcen.

Aufgabe 10.1: Mehrdimensionale Kettenregel

Berechnen Sie mit Hilfe der Kettenregel die Jacobi-Matrix der Funktion

$$\boldsymbol{h}(x,y,z) = \boldsymbol{h}_2(\boldsymbol{h}_1(x,y,z))$$

mit

$$\boldsymbol{h}_1(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3xz + 2y \\ 4y^2 + \frac{1}{3}x^3 z \end{pmatrix} \text{ und } \boldsymbol{h}_2(u,v) = \begin{pmatrix} \cos(2u-3v) \\ \frac{1}{2}u + \frac{3}{2}v^2 \\ 4v + u \end{pmatrix}.$$

Lösung 10.1:

Wir berechnen zunächst die Jacobi-Matrizen der einzelnen Funktionen:

$$\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{h}_1}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3z & 2 & 3x \\ zx^2 & 8y & \frac{1}{3}x^3 \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{h}_2}(u,v) = \begin{pmatrix} -2\sin(2u-3v) & 3\sin(2u-3v) \\ \frac{1}{2} & 3v \\ 1 & 4 \end{pmatrix},$$

und daraus mit Hilfe der Kettenregel die Ableitung der Funktion $\boldsymbol{h}$:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{h}}(x,y,z) &= \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{h}_2}(\boldsymbol{h}_1)\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{h}_1}(x,y,z) \\ &= \begin{pmatrix} -2\sin(a) & 3\sin(a) \\ \frac{1}{2} & 12y^2 + x^3 z \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3z & 2 & 3x \\ zx^2 & 8y & \frac{1}{3}x^3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (x^2-2)3z\sin(a) & (6y-1)4\sin(a) & (x^2-6)x\sin(a) \\ \frac{3}{2}z + 12x^2y^2z + x^5z^2 & 1 + 96y^3 + 8x^3yz & \frac{3}{2}x + 4x^3y^2 + \frac{1}{3}x^6 z \\ z(3+4x^2) & 32y + 2 & x(3 + \frac{4}{3}x^2) \end{pmatrix},\end{aligned}$$

mit $a := 6xz + 4y - 12y^2 - x^3 z$.

Aufgabe 10.2: Richtungsableitungen

Gegeben sei die folgende vektorwertige Funktion

$$\boldsymbol{f}(x,y) = (\mathrm{e}^{xy}, x^2 + y^3)^\top.$$

i) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix von $\boldsymbol{f}$ in dem Punkt $\boldsymbol{P}_1 = (1,2)^\top$.

ii) Berechnen Sie die Richtungsableitung von $\boldsymbol{f}$ in Richtung $\boldsymbol{v} = (1,0)^\top$ in dem Punkt $\boldsymbol{P}_2 = (1,1)^\top$.

Lösung 10.2:

i) Die Jacobi-Matrix ist

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} f_{1,x} & f_{1,y} \\ f_{2,x} & f_{2,y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y\,\mathrm{e}^{xy} & x\,\mathrm{e}^{xy} \\ 2x & 3y^2 \end{pmatrix}$$

Die Jacobi-Matrix ausgewertet in dem Punkt $\boldsymbol{P}_1 = (1,2)^\top$ ist

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{P}_1) = \begin{pmatrix} 2\,\mathrm{e}^2 & \mathrm{e}^2 \\ 2 & 12 \end{pmatrix}$$

ii) Um die Richtungsableitung zu bestimmen, benötigen wir einen Einheitsvektor. Da der gegebene Vektor $\boldsymbol{v}$ bereits Einheitslänge hat, kann die Richtungsableitung berechnet werden durch

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{h}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{J}(x)\boldsymbol{v} = (y\,\mathrm{e}^{xy}, 2x)^\top$$

Die Richtungsableitung ausgewertet in dem Punkt $\boldsymbol{P}_2$ ist

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{h}}(\boldsymbol{P}_2) = (\mathrm{e}, 2)^\top.$$

Aufgabe 10.3: Newton-Verfahren (alte Klausuraufgabe)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x, y, z) = z \cdot \cos(\pi \cdot (x + y)) + z^2 + y^4.$$

Gesucht sind die stationären Punkte dieser Funktion.

a) Geben Sie an, welche Bedingung ein stationärer Punkt $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ erfüllen muss.

b) Um eine Näherung für einen solchen Punkt zu berechnen, soll das dreidimensionale Newton-Verfahren angewendet werden. Auf welche Funktion wird das Newton-Verfahren angewendet?
Geben Sie die Iterationsvorschrift an.

c) Führen Sie für den Startvektor $\boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ einen Iterationsschritt durch.

d) Geben Sie ein geeignetes Abbruchkriterium des Newton-Verfahrens an. (Dieses Kriteriums ist **nicht** auszuwerten.)

Lösung 10.3:

a) In einem stationären Punkt muss der Gradient der Funktion f verschwinden:

$$\boldsymbol{0} \stackrel{!}{=} \nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} -\pi z \sin(\pi(x + y)) \\ -\pi z \sin(\pi(x + y)) + 4y^3 \\ \cos(\pi(x + y)) + 2z \end{pmatrix}$$

b) Das Newton-Verfahren wird auf die Funktion $\boldsymbol{F}(x, y, z) = \nabla f(x, y, z)$ angewendet. Die Ableitung dieser Funktion ist

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{F}'(x, y, z)\Big(= H_f(x, y, z)\Big) \\ &= \begin{pmatrix} -\pi^2 z \cos(\pi(x + y)) & -\pi^2 z \cos(\pi(x + y)) & -\pi \sin(\pi(x + y)) \\ -\pi^2 z \cos(\pi(x + y)) & -\pi^2 z \cos(\pi(x + y)) + 12y^2 & -\pi \sin(\pi(x + y)) \\ -\pi \sin(\pi(x + y)) & -\pi \sin(\pi(x + y)) & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Zu gegebenem Startwert $\boldsymbol{x}_0$ wird die folgende Iteration durchgeführt:
Für $j = 0, 1, 2, \ldots$:

i) Löse das lineare Gleichungssystem $\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{x}_j)\Delta\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_j)$ nach $\Delta\boldsymbol{x}$ auf.

ii) Berechne nächste Iteration $\boldsymbol{x}_{j+1} = \boldsymbol{x}_j + \Delta\boldsymbol{x}$.

c) Für den gegebenen Startvektor $\boldsymbol{x}_0 = \left(\frac{1}{2}, 1, 0\right)^\top$ ergibt sich zunächst

$$\boldsymbol{F}\left(\frac{1}{2}, 1, 0\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und } \boldsymbol{F}'\left(\frac{1}{2}, 1, 0\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \pi \\ 0 & 12 & \pi \\ \pi & \pi & 2 \end{pmatrix}.$$

Die Lösung des Gleichungssystems $\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{x}_0)\Delta\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0)$ ergibt

$$\Delta\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

und als nächsten Iterationsschritt

$$\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_0 + \Delta\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} \\ \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

d) Geeignete Abbruchkriterien sind etwa $\|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_k)\| < \varepsilon$ oder $\|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}_{k-1}\| < \varepsilon$ mit fest vorgegebenem $\varepsilon > 0$.
Desweiteren empfiehlt es sich, die Iteration nach N Schritten (z. B. $N = 1000$) abzubrechen, auch wenn das Abbruchkriterium nicht erfüllt ist.

Aufgabe 10.4: lokale Extrema in 3 Dimensionen

Gegeben sei die Funktion

$$f\,:\,\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\,:\,(x,y,z) \to \frac{2\,y^3}{3} + x^2 - 2\,xy + xz - x - z + 1\ .$$

Bestimmen Sie die stationären (kritischen) Punkte der Funktion und bestimmen Sie deren Charakteristik.
Hinweis: Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind praktisch nur numerisch zu bestimmen. Die Vorzeichen der Eigenwerte erhält man aber sehr leicht aus einer einfachen Kurvendiskussion oder Skizze.

Lösung 10.4:

Die stationären Punkte sind die Nullstellen des Gradienten

$$\mathbf{grad}\,f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x-2y+z-1 \\ 2y^2-2x \\ x-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aus der dritten Komponente folgt $x = 1$ und damit aus der zweiten $y = \pm 1$ und aus der ersten die zugehörigen z–Werte. Die stationären Punkte sind

$$\boldsymbol{p}_1 = (1,1,1)^\top \text{ und } \boldsymbol{p}_2 = (1,-1,-3)^\top\ .$$

Die Hesse–Matrix der Funktion f ist

$$\mathbf{H}_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 4\,y & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Für den Punkt $\boldsymbol{p}_1$ erhält man das charaketristische Polynom

$$P(\lambda) = \det\big(\mathbf{H}_f(1,1,1) - \lambda\boldsymbol{E}\big) = \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & -2 & 1 \\ -2 & 4-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + 6\,\lambda^2 - 3\,\lambda - 4\ .$$

Dies Polynom hat keine glatten Nullstellen. Eine exakte Bestimmung könnte zum Beispiel mit dem Newton–Verfahren erfolgen.
Für die Frage nach der Charakteristik des stationären Punktes benötigt man aber nur die Vorzeichen, die leicht aus einer sehr groben Kurvendiskussion zu entnehmen sind. Mit

$$P(-1) = 6\ ,\quad P(0) = -4\ ,\quad P(2) = 6 \text{ und } P(t) \to -\infty \text{ für } t \to \infty$$

erhält man nach dem Zwischenwertsatz einen negativen und zwei positive Nullstellen, d. h. es handelt sich um einen Sattelpunkt.

Entsprechend erhält man für den zweiten stationären Punkt $\boldsymbol{p}_2$ das charakteristische Polynom

$$P(\lambda) = -\lambda^3 - 2\,\lambda^2 + 13\,\lambda + 4$$

Seine stationären Punkte liegen bei λ mit

$$0 \stackrel{!}{=} P'(\lambda) = -3\lambda^2 - 4\lambda + 13 \Leftrightarrow \lambda_\pm = \frac{-2 \pm \sqrt{43}}{3}.$$

Da gilt $\lim_{\lambda\to\infty} P(\lambda) = -\infty$ liegt bei $\lambda_+ > 0$ ein Maximum vor, dessen Wert wegen $P(0) = 4 > 0$ größer Null ist: $P(\lambda_+) > 0$. Rechts davon liegt eine Nullstelle des Polynoms. Aufgrund der Monotonie von P im Intervall $[\lambda_-, \lambda_+]$ liegen die weiteren Nullstellen im Negativen. Es handelt sich bei dem stationären Punkt also auch um einen Sattelpunkt.

Aufgabe 10.5: Stationäre Punkte

Gegeben sei die Funktion

$$f(x, y) = ax^2 + 2xy + ay^2 - ax - ay$$

Bestimmen Sie diejenigen $a \in \mathbb{R}$, für welche die Funktion f relative Maxima, relative Minima und Sattelpunkte besitzt und geben Sie diese an.

Lösung 10.5:

In stationären Punkten muss der Gradient der Funktion Null werden:

$$\mathbf{0} = \nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2ax + 2y - a \\ 2x + 2ay - a \end{pmatrix}$$

$2a$	2	a	
2	$2a$	a	wir vertauschen die 1. und 2. Zeile
2	$2a$	a	
$2a$	2	a	$-a \cdot$ 1. Zeile
2	$2a$	a	$: 2$
0	$2 - 2a^2$	a	$: (2 - 2a^2)$, für $a^2 \neq 1$
1	a	$\frac{a}{2}$	
0	1	$\frac{a(1-a)}{2(1-a^2)}$	

Dann ist

$$y = \frac{a(1-a)}{2(1+a)(1-a)} = \frac{a}{2(1+a)}$$
$$x = \frac{a}{2} - a \cdot \frac{a}{2(1+a)} = \frac{a(1+a-a)}{2(1+a)} = \frac{a}{2(1+a)} .$$

Für $a \neq \pm 1$ liegt der einzige kritische Punkt der Funktion also bei

$$\boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} \frac{a}{2(1+a)} \\ \frac{a}{2(1+a)} \end{pmatrix} .$$

Für $a = +1$ hat das obige Gleichungssystem die Lösung $(t, \frac{1}{2} - t)$ $(t \in \mathbb{R})$.
Für $a = -1$ hat das Gleichungssystem keine Lösung und damit f keinen stationären Punkt.
Zur Charakterisierung der stationären Punkte benötigen wir die Hesse-Matrix:

$$\boldsymbol{H}_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2a & 2 \\ 2 & 2a \end{pmatrix} .$$

Ihre Determinante ist $\det(\boldsymbol{H}_f) = 4(a^2 - 1)$. Wir unterscheiden zunächst die drei Fälle:

i) $-1 < a < 1$: Für die Determinante gilt $\det(\boldsymbol{H}_f) < 0$. Da die Determinante aus dem Produkt der Eigenwerte berechnet wird, folgt daraus, dass die Eigenwerte verschiedene Vorzeichen haben. $\boldsymbol{H}_f$ ist indefinit und $\boldsymbol{x}_0$ ist ein Sattelpunkt.

ii) $a < -1$: Für die Determinante gilt $\det(\boldsymbol{H}_f) > 0$. Daraus folgt, dass die Eigenwerte gleiches Vorzeichen haben. Da die Spur $\mathrm{Sp}(\boldsymbol{H}_f) = 4a$ in diesem Fall negativ ist, sind die beiden Eigenwerte negativ. Also ist $\boldsymbol{H}_f$ negativ definit und die Funktion f hat ein Maximum in $\boldsymbol{x}_0$.

iii) $1 < a$: Sowohl die Determinante, als auch die Spur sind positiv. Deswegen sind beide Eigenwerte positiv und bei $\boldsymbol{x}_0$ ist ein Minimum.

Für $a = 1$ gilt $\det(\boldsymbol{H}_f) = 0$, also ist mindestens ein Eigenwert gleich Null. In diesem Fall gilt

$$f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2 - x - y = (x + y)^2 - (x + y) = \left(x + y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} .$$

In allen stationäre Punkten $(t, \frac{1}{2} - t)^\top$ ist der quadratische Term $(x + y - \frac{1}{2})^2$ gleich Null, aber in allen anderen Punkten ist er positiv. Deshalb liegt in diesen stationären Punkten ein Minimum vor. Diese Punkte befinden sich auf einer Geraden, auf der f konstant ist.
Insgesamt besitzt die Funktion f also

- für $a < -1$ ein Maximum in $\boldsymbol{x}_0 = \frac{a}{2(1+a)}(1, 1)^\top$.
- für $a = -1$ keinen stationären Punkt.
- für $-1 < a < 1$ einen Sattelpunkt in $\boldsymbol{x}_0 = \frac{a}{2(1+a)}(1, 1)^\top$.
- für $a = 1$ die Minimalstellen $(t, \frac{1}{2} - t)^\top$, $t \in \mathbb{R}$.
- für $1 < a$ ein Minimum in $\boldsymbol{x}_0 = \frac{a}{2(1+a)}(1, 1)^\top$.

Aufgabe 10.6:

a) Entwickeln Sie die Funktion

$$f(x,y,z) = \cosh(x) + \mathrm{e}^{2\,xy} - \ln(-yz) + \frac{1}{y} + \frac{z}{2}$$

nach der Taylor'schen Formel um den Punkt $P = (0\,,\,-1\,,\,2)$ bis zu einschließlich zweiter Ordnung (ohne Restglied).

Lösung 10.6:

Lösung:

Zu a) Mit $\boldsymbol{x}_0 = (0\,,\,-1\,,\,2)^\top$ gilt:

$$\begin{aligned}
f &= \cosh(x) + \mathrm{e}^{2\,xy} - \ln(-yz) + \frac{1}{y} + \frac{z}{2} &\Rightarrow\quad f(\boldsymbol{x}_0) &= 2 - \ln(2)\,.\\
f_x &= \sinh(x) + 2y\,\mathrm{e}^{2\,xy} &\Rightarrow\quad f_x(\boldsymbol{x}_0) &= -2\,,\\
f_y &= 2x\,\mathrm{e}^{2\,xy} - \frac{1}{y} - \frac{1}{y^2} &\Rightarrow\quad f_y(\boldsymbol{x}_0) &= 0\,,\\
f_z &= -\frac{1}{z} + \frac{1}{2} &\Rightarrow\quad f_z(\boldsymbol{x}_0) &= 0\,,\\
f_{xx} &= \cosh(x) + 4\,y^2\,\mathrm{e}^{2\,xy} &\Rightarrow\quad f_{xx}(\boldsymbol{x}_0) &= 5\,,\\
f_{xy} &= 4\,xy\,\mathrm{e}^{2\,xy} + 2\mathrm{e}^{2\,xy} &\Rightarrow\quad f_{xy}(\boldsymbol{x}_0) &= 2\,,\\
f_{xz} &= 0 &\Rightarrow\quad f_{xz}(\boldsymbol{x}_0) &= 0\,,\\
f_{yy} &= 4\,x^2\,\mathrm{e}^{2\,xy} + \frac{1}{y^2} + \frac{2}{y^3} &\Rightarrow\quad f_{yy}(\boldsymbol{x}_0) &= -1\,,\\
f_{yz} &= 0 &\Rightarrow\quad f_{yz}(\boldsymbol{x}_0) &= 0\,,\\
f_{zz} &= \frac{1}{z^2} &\Rightarrow\quad f_{yz}(\boldsymbol{x}_0) &= \frac{1}{4}\,.
\end{aligned}$$

Damit lautet das Taylor–Polynom 2. Grades

$$\begin{aligned}
T_2(x,y,z) =& 2 - \ln(2) - 2\,x + \frac{5}{2}\,x^2 + 2x(y+1)\\
&- \frac{1}{2}(y+1)^2 + \frac{1}{8}\,(z-2)^2\;.
\end{aligned}$$

Zu b) Mit

$$g^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) = 1\,,\,(g^{-1})'\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{1}{g'(1)} = \frac{1}{2}$$

und

$$(g^{-1})''\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{-g''(1)}{(g'(1))^3} = -\frac{1}{4}$$

folgt

$$T_2\left(y;\frac{4}{3}\right) = 1 + \frac{1}{2}\left(y - \frac{4}{3}\right) - \frac{1}{8}\left(y - \frac{4}{3}\right)^2\,.$$

Zu c) Für $\boldsymbol{F}(x,y) = (y - \mathrm{e}^{-x^2}, y + (x-1)^2 - 2)^\top$ gilt

$$\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{F}}(x,y) = \begin{pmatrix} 2x\mathrm{e}^{-x^2} & 1\\ 2(x-1) & 1\end{pmatrix}\,,\quad \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{F}}(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1\\ -2 & 1\end{pmatrix}.$$

Das Newton-Verfahren liefert damit für den Iterationsschritt

$$\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{\Delta x}$$

mit der Lösung $\boldsymbol{\Delta x}$ des linearen Gleichungssystems $\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{F}}(0,0)\boldsymbol{\Delta x} = -\boldsymbol{F}(0,0)$:

$$\begin{array}{rr|r|} 0 & 1 & 1\\ -2 & 1 & 1 \end{array}$$

die Schrittweite

$$\boldsymbol{\Delta x} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

und damit

$$\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{\Delta x} = \boxed{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}}.$$