Helmut-Schmidt-Universität
Universität der Bundeswehr Hamburg
Fakultät für Maschinenbau und Bauingenieurwesen

Prof. Dr. Thomas Carraro
M.Sc Janna Puderbach

Mathematik II/B (WI/ET) — Blatt 8

WT 2024 — Integration, partielle Ableitungen

Einführende Bemerkungen

- Vermeiden Sie die Verwendung von Taschenrechnern oder Online-Ressourcen.

Aufgabe 8.1: Uneigentliche Integrale

Überprüfen Sie, ob die folgenden uneigentlichen Integrale existieren (d. h. einen endlichen Wert annehmen). Berechnen Sie für das dritte Beispiel den Wert des Integrals.

$$I_1 = \int_1^\infty \frac{\sin\frac{1}{x^2}}{x^2}\mathrm{d}x$$

$$I_2 = \int_0^1 \frac{\cos x^2}{1-x}\mathrm{d}x$$

$$I_3 = \int_0^\infty \frac{\arctan x}{x^2+1}\mathrm{d}x$$

Aufgabe 8.2: Uneigentliche Integrale

Welche der folgenden uneigentlichen Integrale besitzen einen endlichen Wert? Bestimmen Sie den Wert dieser Integrale.

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^{1/4}}\,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_0^{1/\pi} \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ d) $\displaystyle\int_0^\infty 2x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$

Aufgabe 8.3: Äquipotentialfläche und Tangentialebene

Gegeben seien die Funktion $f(x, y, z) = y^2 - xz$ und der Punkt $\boldsymbol{p}_0 = (1, -2, 3)^\top$.

a) Bestimmen Sie die Äquipotentialfläche der Funktion f durch den Punkt $\boldsymbol{p}_0$:

$$\boldsymbol{F} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 | \quad f(x, y, z) = f(\boldsymbol{p}_0)\}.$$

Skizzieren Sie die Schnitte der Fläche $\boldsymbol{F}$ mit zur xy-Ebene parallelen Ebenen, d. h. für konstante z-Werte. (z. B. $z = 0\pm, 1\pm, 2\pm, 3\pm$ und $z \to \infty$)

b) Bestimmen Sie $\nabla f(\boldsymbol{p}_0)$.

c) Bestimmen Sie die Hessesche Normalform der Tangentialebene $\boldsymbol{E}$ an $\boldsymbol{F}$ im Punkt $\boldsymbol{p}_0$.

d) Bestimmen Sie den Abstand der Tangentialebene $\boldsymbol{E}$ zum kritischen Punkt der Funktion f.

Aufgabe 8.4: Partielle Ableitungen

Gegeben sei die Funktion

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Berechnen Sie $f_{xy}(x, y)$ für alle $(x, y)^\top \in \mathbb{R}^2$ und untersuchen Sie, wo

$$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$$

gilt.
Sind die zweiten Ableitungen von f stetig in $(0, 0)^\top$?
Hinweis: Berechnen Sie die Ableitungen im Ursprung $(0, 0)^\top$ über die Grenzwert-Definition.

Aufgabe 8.5: Richtungsableitungen

a) Gegeben seien die skalarwertigen Funktionen

$$f(x,y,z) = y^2 - xz \qquad \text{und} \qquad g(x,y,z) = x^2\sin(y) + \cos(z).$$

Berechnen Sie die Richtungsableitung beider Funktionen in Richtung $\boldsymbol{h} := (-2,3,4)^\top$.

Aufgabe 8.6: Partielle Ableitungen

Bestimmen Sie zu jeder der folgenden Funktionen $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die ersten und zweiten Ableitungen

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_n} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_n\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_n\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

$$f(x,y) = e^{2xy^2} \qquad g(x,y) = x^2\sin(2x+y)$$
$$h(x,y) = \sin(2x)\cos(3y) \qquad k(x,y,z) = xy^2z^3$$
$$l(x,y) = \frac{xy}{xy-1}$$

Aufgabe 8.7: Partielle Ableitungen

Bestimmen Sie alle ersten und zweiten partiellen Ableitungen der folgenden reellen Funktionen und geben Sie jeweils die ersten und zweiten Ableitungen in Matrixschreibweise an:

i) $f(x,y) = e^{2\,xy^2}$ **ii)** $g(x,y) = x^2\,\sin(2x+y)$

iii) $h(x,y) = \sin(2x)\,\cos(3y)$ **iv)** $k(x,y,z) = x\,y^2\,z^3$

v) $j(u,v) = \dfrac{uv}{uv-1}$

Ergebnisse zu Aufgabe 8.1:

$I_3 = \lim_{b\to\infty} F(b) - F(0) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - 0 = \frac{\pi^2}{8}$

Ergebnisse zu Aufgabe 8.3:

a) $\boldsymbol{F} = \{(x,y,z)^\top \in \mathbb{R}^3 |\, y^2 - xz = 1\}$, b) $(-3,\,-4,\,-1)^\top$

Ergebnisse zu Aufgabe 8.5:

$\frac{-4x+6y+2z}{\sqrt{29}}$, $\frac{-4x\sin y + 3x^2\cos y - 4\sin z}{\sqrt{29}}$

Ergebnisse zu Aufgabe 8.6:

$$\begin{aligned}
\nabla f(x,y) &= (2y^2e^{2xy^2},\ 4xye^{2xy^2})^\top \\
\nabla g(x,y) &= (2x\sin(2x+y) + 2x^2\cos(2x+y),\ x^2\cos(2x+y))^\top \\
\nabla h(x,y) &= (2\cos(2x)\cos(3y),\ -3\sin(2x)\sin(3y))^\top \\
\nabla k(x,y,z) &= (y^2z^3,\ 2xyz^3,\ 3xy^2z^2)^\top \\
\nabla l(x,y) &= = \left(\frac{-y}{(xy-1)^2}, \frac{-x}{(xy-1)^2}\right)^\top
\end{aligned}$$