Helmut-Schmidt-Universität
Universität der Bundeswehr Hamburg
Fakultät für Maschinenbau und Bauingenieurwesen

Prof. Dr. Thomas Carraro
Dr. Ulrike Kochan-Eilers

Mathematik II/B (WI/ET) **Blatt 1**

WT 2025 Grenzwerte, Folgen

Einführende Bemerkungen

- Vermeiden Sie die Verwendung von Taschenrechnern oder Online-Ressourcen.

Aufgabe 1.1:

Stellen Sie jede der folgenden Funktionen einzeln in einem Koordinatensystem dar, beschriften Sie die Datenachsen und heben Sie signifikante Werte hervor (z.B. Maxima/Minima, Nullstellen, usw.).

a) $p_1(x) = 2x - 1$

b) $p_2(x) = (x-2)^2 - 1$

c) $p_3(x) = x^3$

d) $p_4(x) = -x^3$

e) $f_1(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$

f) $f_2(x) = -\cos(x)$

g) $f_3(x) = \sin(x)$

h) $f_4(x) = \tan x$

i) $g_1(x) = \sqrt{x}$

j) $g_2(x) = \dfrac{1}{x}$

k) $g_3(x) = \dfrac{1}{x^2}$

l) $h_1(x) = \ln x$

m) $h_2(x) = \ln x + 1$

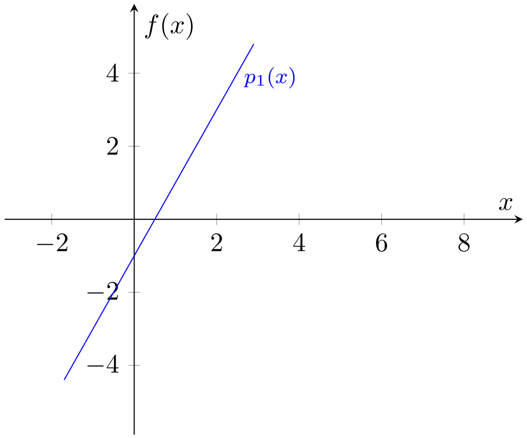
n) $h_3(x) = \ln(x+1)$

o) $i_1(x) = \exp(x)$

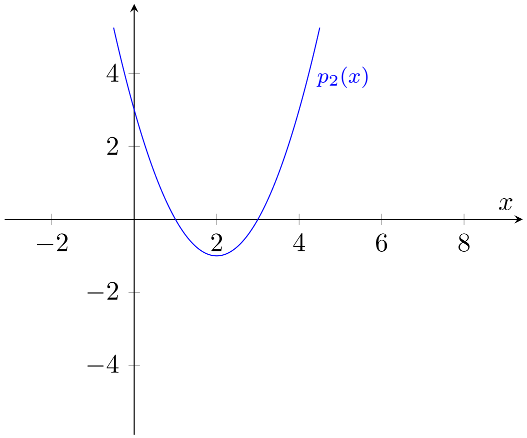
p) $i_2(x) = \exp(-x)$

Lösung 1.1:

a) $p_1(x) = 2x - 1$

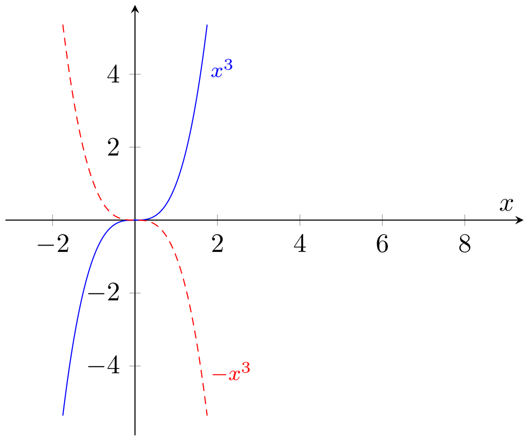


b) $p_2(x) = (x-2)^2 - 1$



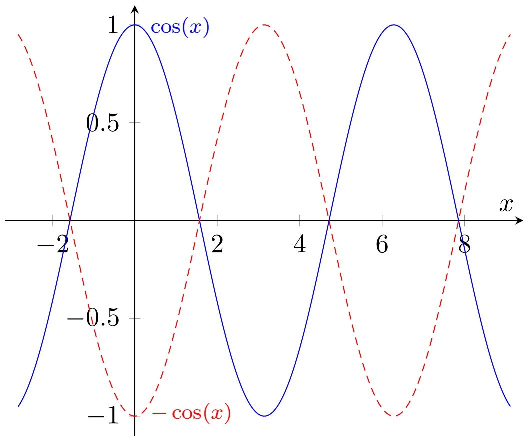
c) $p_3(x) = x^3$

d) $p_4(x) = -x^3$

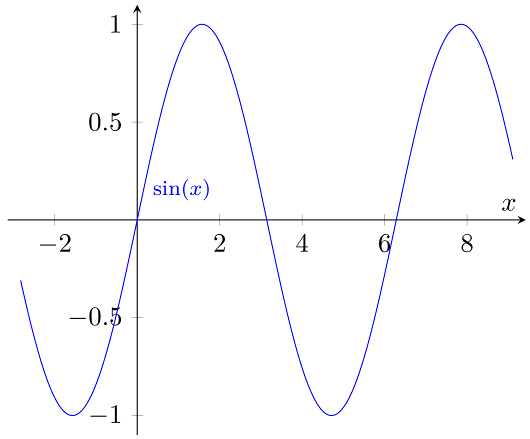


e) $f_1(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x)$

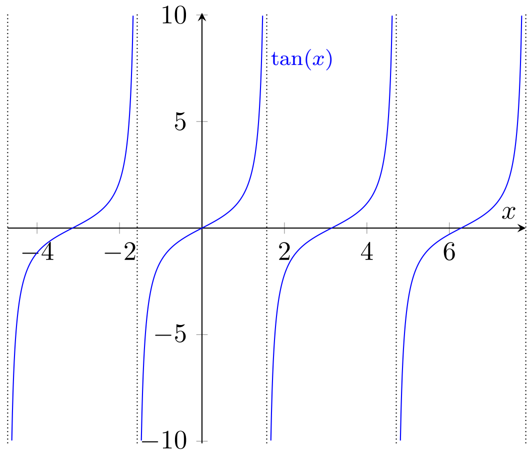
f) $f_2(x) = -\cos(x)$



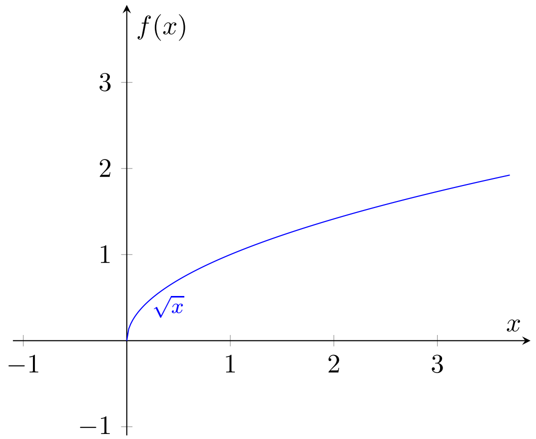
g) $f_3(x) = \sin(x)$



h) $f_4(x) = \tan x$

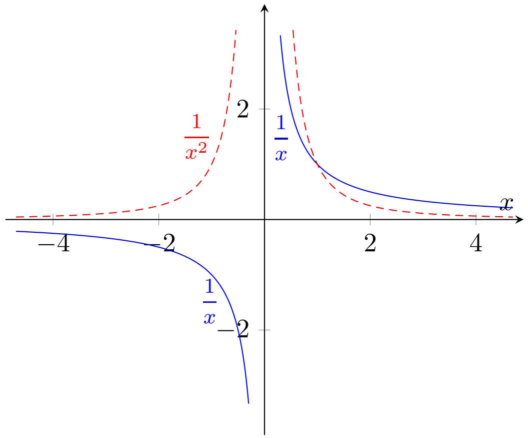


i) $g_1(x) = \sqrt{x}$

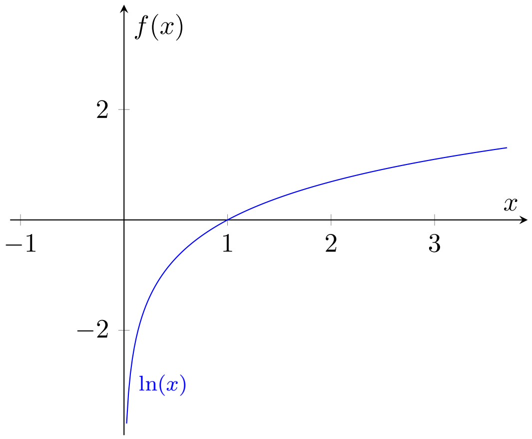


j) $g_2(x) = \dfrac{1}{x}$

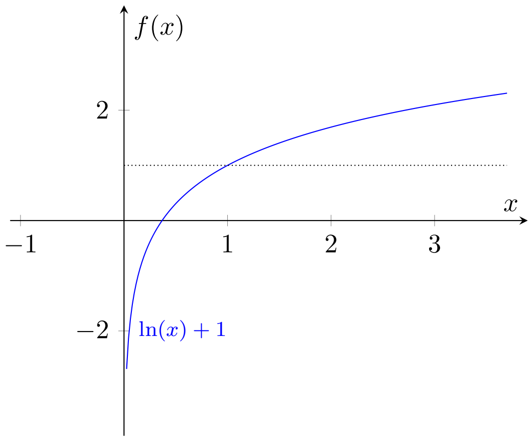
k) $g_3(x) = \dfrac{1}{x^2}$



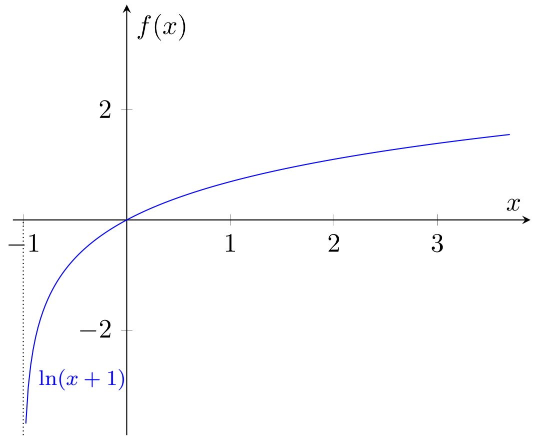
l) $h_1(x) = \ln x$



m) $h_2(x) = \ln x + 1$

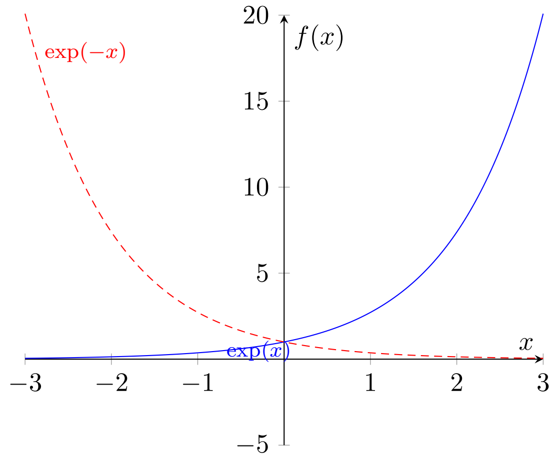


n) $h_3(x) = \ln(x+1)$



o) $i_1(x) = \exp(x)$

p) $i_2(x) = \exp(-x)$



Aufgabe 1.2: Grenzwertdefinition

Bestimmen Sie zu den unten angegebenen Folgen (a_n) mit dem Grenzwert a und den angegebenen Werten für k jeweils ein N so, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > N$ gilt

$$|a_n - a| < 10^{-k}.$$

a) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, $a = 0$, $k = 2$

b) $a_n = \frac{3n+1}{n+1}$, $a = 3$, $k = 4$

c) $a_n = \frac{(-1)^n}{n!} + 1$, $a = 1$, $k = 3$

Lösung 1.2:

a) Es soll gelten $|a_n - a| = \frac{1}{\sqrt{n}} \overset{!}{<} 10^{-2}$. Dies lässt sich umstellen zu:

$$n > \left(\frac{1}{10^{-2}}\right)^2 = 10^4 = 10000 = N.$$

b) Hier ergibt sich

$$\begin{aligned} & |a_n - a| < 10^{-4} \\ \Leftrightarrow \quad & 10^{-4} > \left|\frac{3n+1}{n+1} - 3\right| = \frac{|-2|}{n+1} \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{n+1}{2} > 10^4 \\ \Leftrightarrow \quad & n > 20000 - 1 = 19999 = N. \end{aligned}$$

c) Für diese Folge ist $|a_n - a| = \left|\frac{(-1)^n}{n!}\right| = \frac{1}{n!}$ Mit $k = 3$ soll also gelten:

$$\frac{1}{n!} < 10^{-3} \quad \Leftrightarrow \quad n! > 1000.$$

Das ist beispielsweise erfüllt für $n > 1000 = N$. Ein kleinstmögliches N kann man durch die Untersuchung von $n!$ ermitteln. Es ist $6! = 720 < 1000$ und $7! = 7 \cdot 6! = 5040 > 1000$. Die Bedingung ist also bereits für $n > 6$ erfüllt.

Aufgabe 1.3:

a) Zeigen Sie anhand der Definition der Konvergenz, dass gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+n-12}{n^2-8} = 2\,.$$

b) Zeigen Sie: Konvergiert $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a, so konvergiert auch $\{|a_n|\}_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $|a|$.

c) Gilt die Umkehrung von b)? Begründen Sie Ihre Aussage mit einem Beweis oder einem Gegenbeispiel.

Lösung 1.3:

Lösung

Zu a) Die Aussage „a_n konvergiert gegen a" bedeutet: Für jedes $k \in \mathbb{N} > 0$ existiert ein $N = N(k) \in \mathbb{R}$, so dass für alle $n > N$ gilt, dass $|a_n - a| < 10^{-k}$. Für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$a_n := \frac{2n^2+n-12}{n^2-8} = \frac{2(n^2-8)+(n+4)}{n^2-8} = 2 + \frac{n+4}{n^2-8}\,.$$

Damit folgt

$$|a_n - 2| = \left|\frac{n+4}{n^2-8}\right| \overset{\text{für } n\geq 3}{=} \frac{n+4}{n^2-8} = \frac{n+4}{n^2-16+8}$$

$$\overset{\text{für } n\geq 5}{<} \frac{n+4}{n^2-16} = \frac{n+4}{(n+4)(n-4)} = \frac{1}{n-4}\,.$$

Sei nun $k \in \mathbb{N}$ vorgegeben. Es gilt

$$\frac{1}{n-4} = 10^{-k} \qquad \Longleftrightarrow \qquad n = 10^k + 4\,.$$

Ist $N(k) := 4 + 10^k$, dann gilt insbesondere für alle $n > N(k)$:

$$|a_n - 2| < 10^{-k}\,.$$

Damit ist ist Behauptung bewiesen.

Zu b) Die Aussage „a_n konvergiert gegen a" bedeutet: Für jedes $k \in \mathbb{N}$ gibt es ein $N(k) \in \mathbb{R}$, so dass für alle $n > N$ gilt, dass $|a_n - a| < 10^{-k}$. Wegen

$$||a_n| - |a|| \leq |a_n - a|\,,$$

gilt für jedes $k \in \mathbb{N}$, dass das dazugehörige $N(k)$ und jedes $n > N$ auch

$$||a_n| - |a|| < 10^{-k}$$

erfüllt, d.h. $|a_n|$ konvergiert gegen $|a|$.

Zu c) Die Umkehrung gilt nicht, zum Beispiel gilt für $a_n = (-1)^n$ sicher $|a_n| = 1 \to 1$, aber $(-1)^n$ ist nicht konvergent.

Ergebnisse zu Aufgabe 1.2:

a) $N = 10000$, **b)** $N = 19999$, **c)** $N = 6$

Ergebnisse zu Aufgabe 1.3:

c) Betrachten Sie $a_n = (-1)^n$.