Helmut-Schmidt-Universität
Universität der Bundeswehr Hamburg
Fakultät für Maschinenbau

Prof. Dr. Thomas Carraro
Dr. Frank Gimbel

HELMUT SCHMIDT UNIVERSITÄT
Universität der Bundeswehr Hamburg

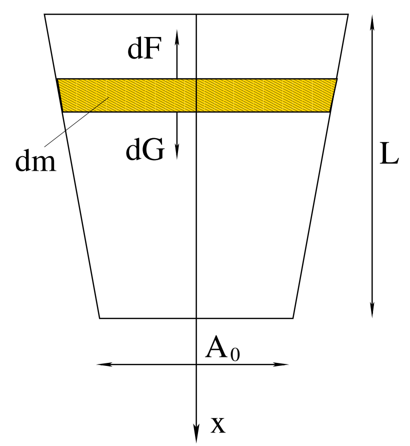
ISA: Ing. Studienkompetenzen **Blatt 3**

WT 2022

Aufgabe 3.1: Dimensionierung eines Zugstabes

Die Querschnittsfläche eines Zugstabes soll dimensioniert werden. Diese soll als positionsabhängige Funktion $A(x)$ bestimmt werden, siehe Abbildung.
Der Zugstab ist am oberen Ende fixiert und am unteren Ende mit einer konstanten Kraft $F_0\,[N]$ belastet.
Wie muss die Querschnittsfläche $A, [m^2]$ in Abhängigkeit von der Koordinate $x, [m]$ gewählt werden, damit die Zugspannung $\sigma\,[Pa]$ an jeder Schnittstelle den gleichen Wert $\sigma_c\,[Pa]$ hat?

- $L = 10\,[cm]$: Länge des Zugstabes,
- $A_0 = 0.002\,[m^2]$: Querschnittsfläche am unteren Ende,
- $\rho = 7.85\,[g/cm^3]$: Dichte des Zugstabes als Funktion der Position x,
- $g = 9.81\,[m/s^2]$: Gravitationsbeschleunigung,
- $F_0 = 15\,[N]$: Konstante Belastung.



Lösungsansatz:

Auf das gelbe Massenelement in der Abbildung $\mathrm{d}m = \rho \mathrm{d}V = \rho A \mathrm{d}x$ wirken die folgenden Kraftelemente ein

- Zugkraft: $\mathrm{d}F = \mathrm{d}(\sigma(x)\mathrm{d}A) = \sigma_c \mathrm{d}A$, die über das Flächenelement $\mathrm{d}A$ mit einer konstanten Zugspannung σ_c wirkt,
- Gewichtskraft: $\mathrm{d}G = \rho g A \mathrm{d}x$, die über das Volumenelement $\mathrm{d}V = A\mathrm{d}x$ wirkt.

Die Terme $\mathrm{d}F$, $\mathrm{d}A$ und $\mathrm{d}x$ heißen Differentiale. Das Massenelement befindet sich im Gleichgewicht, wenn die Zugkraft die Gewichtskraft in ihrer Wirkung ausgleicht. Somit gilt

$$\mathrm{d}F + \mathrm{d}G = 0,$$

oder

$$\sigma_c \mathrm{d}A + \rho g A \mathrm{d}x = 0,$$

Wir schreiben die Gleichung so um, dass die Variablen, A und x, und ihre Differentiale getrennt sind

$$\frac{\mathrm{d}A}{A} = -\frac{\rho g}{\sigma_c}\mathrm{d}x.$$

und integrieren beide Seiten.

Hinweis: Man beachte die Einheiten!

Lösung 3.1:

Durch Integrieren erhält man

$$\int \frac{1}{A} \mathrm{d}A = -\frac{g}{\sigma_c}\rho \int 1 \, \mathrm{d}x.$$

Um die Fläche A als Funktion von x zu bestimmen muss man beide Seiten integrieren und anschließend die Integrationskonstante durch die Vorgabe $A(L) = A_0$ bestimmen. Die so bestimmte ortsabhängige Fläche erfüllt die Anforderung, dass die Spannung σ konstant über x ist.

Integriert man beide Seiten, erhält man

$$\ln(A) + C_1 = -\frac{g}{\sigma_c}\rho x + C_2.$$

Man kann beide Konstanten vereinigen und in mit Hilfe des Logarithmus darstellen als $\ln C = C_2 - C_1$:

$$\ln(A) = -\frac{g}{\sigma_c}\,\rho x + \ln(C).$$

Man erhält

$$\begin{aligned} \ln(A) - \ln(C) &= -\frac{g}{\sigma_c}\rho x, \\ \ln(A/C) &= -\frac{g}{\sigma_c}\rho x, \\ A &= C\,\mathrm{e}^{-\frac{g}{\sigma_c}\rho x}\,. \end{aligned}$$

Um die Konstante C zu bestimmen, setzt man $x = L$ und $A = A_0$ in die Formel

$$A_0 = C\,\mathrm{e}^{-\frac{g}{\sigma_c}\rho L}$$

und erhält

$$C = A_0\,\mathrm{e}^{\frac{g}{\sigma_c}\rho L}\,.$$

Die Querschnittsfläche ist dann

$$\begin{aligned} A &= A_0\,\mathrm{e}^{\frac{g}{\sigma_c}\rho L}\,\mathrm{e}^{-\frac{g}{\sigma_c}\rho x}, \\ &= A_0\,\mathrm{e}^{\frac{g}{\sigma_c}\rho (L-x)}\,. \end{aligned}$$

Die Spannung σ_c kann mit F_0 und A_0 bestimmt werden:

$$\sigma_c = \frac{F_0}{A_0} = 7500\ [N/m^2].$$

Durch Umrechnen der Einheiten erhält man $L = 0.1$ $[m]$ und $\rho = 7850$ $[kg/m^3]$ und

$$A(x) = 0.002\,\mathrm{e}^{10.27\,(0.1-x)}\,.$$

In dieser Gleichung wurden keine Einheiten angegeben, da zuvor alle Werte in SI-Einheiten umgerechnet werden. Somit liefert sie auch ein Ergebnis in SI-Einheiten (hier m^2).
Die Querschnittsfläche ist 0.002 m^2 (oder 20 cm^2) in $x = L$ und 0.0056 m^2 (oder 56 cm^2) in $x = 0$.

Aufgabe 3.2: Dimensionierung eines Behälters

Ein oben offener Behälter mit rechteckigem Querschnitt soll ein Fassungsvermögen von $10\,m^3$ haben und aus dünnem Blech hergestellt werden. Berechnen Sie die Abmessungen des Behälters, wenn so wenig Metall wie möglich verwendet werden soll.

Lösung 3.2:

A sei die Gesamtfläche des Metalls, das für die Herstellung des Behälters verwendet wird, und x und y seien die Länge und Breite und z die Höhe. Dann ist

$$A = \underbrace{2xz + 2yz}_{\text{4 Seitenflächen}} + \underbrace{xy}_{\text{Bodenfläche}} \quad .$$

Außerdem gilt

$$xyz = 10$$

weil das Volumen 10 m^3 beträgt. Daraus folgt, dass

$$z = \frac{10}{xy}.$$

Setzt man dies in die Formel für A ein, ergibt sich A als Funktion von x und y:

$$\begin{aligned} A(x,y) &= 2x\frac{10}{xy} + 2y\frac{10}{xy} + xy \\ &= \frac{20}{y} + \frac{20}{x} + xy. \end{aligned}$$

Um die Fläche zu minimieren, finden wir die Minima der Funktion A. Dazu berechnen wir den Gradienten von A und finden seine Nullstellen, die die kritischen Punkte der Funktion $A(x,y)$ sind

$$\begin{aligned} A'_x(x,y) &= -\frac{20}{x^2} + y, \\ A'_y(x,y) &= -\frac{20}{y^2} + x. \end{aligned}$$

Die kritischen Punkte sind die Punkte $\boldsymbol{P} = (x,y)^\top$, welche das nichtlineare System

$$\begin{aligned} -\frac{20}{x^2} + y = 0, \\ -\frac{20}{y^2} + x = 0 \end{aligned}$$

erfüllen. Aus der zweiten Gleichung ergibt sich

$$x = \frac{20}{y^2},$$

was nach Einsetzen in die erste Gleichung ergibt

$$y - \frac{20}{(20/y^2)^2} = 0$$

oder

$$y(1 - \frac{y^3}{20}) = 0.$$

Da die Nullstelle $y = 0$ offensichtlich nicht mit einem Volumen von $10\,m^3$ vereinbar ist, verwerfen wir $y = 0$ und schließen, dass $y = 20^{1/3} = 2.714$ $[m]$. Aus $x = 20/y^2$ ergibt sich $x = 2.714$ $[m]$. Um z zu finden, verwenden wir $z = 10/xy$, so dass $z = 1.357$ $[m]$ ist.
Wir müssen nun zeigen, dass diese Werte tatsächlich ein Minimum ergeben.
Die Charakterisierung des kritischen Punktes wird anhand der Diskriminante gemacht.
Wir berechnen die zweiten Ableitungen:

$$\begin{aligned} A''_{xx}(x,y) &= \frac{40}{x^3}, \\ A''_{xy}(x,y) &= 1, \\ A''_{yy}(x,y) &= \frac{40}{y^3} \end{aligned}$$

und die Diskriminante im Punkt $\boldsymbol{P} = (2.714, 2.714)^\top$

$$\Delta(\boldsymbol{P}) = A''_{xx}(\boldsymbol{P})\,A''_{yy}(\boldsymbol{P}) - (A''_{xy}(\boldsymbol{P}))^2 = 3 > 0.$$

Da auch $A''_{xx}(\boldsymbol{P}) > 0$ gilt, ist der Punkt $\boldsymbol{P}$ ein Minimum.
Der Behälter hat eine Länge von 2.714 m, eine Breite von 2.714 m und eine Höhe von 1.357 m. Die tatsächliche Fläche des verwendeten Metalls beträgt dann 22.1 m^2.

Ergebnisse zu Aufgabe 3.2:

$A(x) = A_0\,\mathrm{e}^{\frac{g}{\sigma_c}\rho(L-x)}$.
$A(x) = 0.002\,\mathrm{e}^{10.27\,(0.1-x)} \quad [m^2]$.

Ergebnisse zu Aufgabe 3.2:

Der Behälter hat eine Länge von 2.714 m, eine Breite von 2.714 m und eine Höhe von 1.357 m. Die tatsächliche Fläche des verwendeten Metalls beträgt dann 22.1 m^2.