HELMUT SCHMIDT UNIVERSITÄT

Universität der Bundeswehr Hamburg

Aufgabensammlung Mathematik III/B

für WI/ET

Prof. Dr. Thomas Carraro

Frühjahrstrimester 2025

Inhaltsverzeichnis

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Eine gewöhnliche Differentialgleichung (Dgl.) ist eine Gleichung, die aus einer unbekannten Funktion $y(x)$ und ihren Ableitungen $y'(x)$, $y''(x)$,..., $y^m(x)$ besteht, wobei die Funktion y nur von einer Variablen x abhängt und nur nach dieser abgeleitet wird. Es wird zwischen einer **impliziten** Darstellung der Differentialgleichung **n-ter Ordnung**

$$F(x, y'(x), y''(x), ..., y^n(x)) = 0$$

und einer **expliziten** Darstellung der Differentialgleichung n-ter Ordnung

$$y^n(x) = f(x, y'(x), y''(x), ..., y^{n-1}(x))$$

unterschieden. Die Differentialgleichung heißt **autonom**, wenn F bzw. f nicht explizit von x abhängt.

Eine Differentialgleichung ist **linear**, wenn sie die Form

$$a_n(x)\, y^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y = f(x)$$

besitzt, wobei $a_n(x)$ **variable Koeffizienten** sind. Hängen die Koeffizienten nicht von x ab, so handelt es sich um **konstante Koeffizienten**. Man spricht von einer **homogene** Dgl., wenn $f(x)$=0 ist. Gilt $f(x) \neq 0$, dann handelt es sich um eine **inhomogene** Differentialgleichung.

Eine Differentialgleichung zusammen mit einer Anfangsbedingung heißt **Anfangswertproblem** (AWP) und hat z.B. die Form

$$y'(x) = f(x, y(x)),\ y(x_0) = y_0,$$

wobei x_0 und y_0 gegebene Werte sind.

Beispiele für **nichtlineare** Differentialgleichungen sind:

$$\begin{aligned} y' &= y^2, \\ y'' + y\, y' &= 0, \\ y' &= \sin(y). \end{aligned}$$

Explizite Differentialgleichung 1. Ordnung

Eine explizite Dgl. 1. Ordnung besitzt die Form

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} := y' = f(x, y),$$

wobei f im Allgemeinen eine nichtlineare Funktion ist.

Typ A: Differentialgleichungen mit getrennten Veränderlichen
Liegt die Differentialgleichung in der Form

$$y' = f(x) \cdot g(y)$$

vor, wobei f und g stetige Funktionen sind, so kann das Lösungeverfahren der **Trennung der Veränderlichen** (TdV) angewendet werden. Die Lösung ist dann gegeben durch

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(x)\,\mathrm{d}x + C.$$

Beispiel:

$$\begin{aligned} y' - x^2 y &= 0 \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= x^2 y \\ \int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y &= \int x^2\,\mathrm{d}x \\ \ln(|y|) &= \frac{1}{3}x^3 + C \\ y &= e^{\frac{1}{3}x^3 + C} = e^{\frac{1}{3}x^3}\, C \end{aligned}$$

Typ B: Homogene Differentialgleichung
Ist eine Differentialgleichung der Form

$$y' = g\left(\frac{y}{x}\right),\ x \neq 0$$

gegeben, so kann die Dgl. mit der Substitution $u(x) = y(x)/x$ in eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen für $u(x)$ transformiert werden.

Beispiel:

$$y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{y}{x}$$

Mit $u(x) = y(x)/x$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} y &= u(x)\, x \\ y' &= u'\, x + u \end{aligned}$$

Einsetzen in die Dgl. ergibt:

$$\begin{aligned} u'x + u &= u^2 + u \\ u'x &= u^2 \\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= \frac{u^2}{x} \\ \int \frac{1}{u^2}\,\mathrm{d}u &= \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ -\frac{1}{u} &= \ln(|x|) + C \\ u &= -\frac{1}{\ln(|x| + C)} \\ y &= -\frac{x}{\ln(|x| + C)} \end{aligned}$$

Typ C: $y' = f(ax + by + c)$
Ist die Differentialgleichung in der Form

$$y' = f(ax + by + c), \text{ mit } a, b, c \in \mathbb{R},\ b \neq 0$$

gegeben, so kann die Dgl. mit dem Ansatz $u(x) := ax + by + c$ in eine Dgl. mit getrennten Variablen

$$u' = a + bf(u)$$

transformiert werden. Diese Dgl. kann mit dem Verfahren der Trennung der Veränderlichen gelöst werden.

Typ D: Lineare Differentialgleichung 1. Ordnung
Handelt es sich um eine lineare Differentialgleichung 1. Ordnung

$$L_1 y := y' + p(x)y = q(x),$$

so besteht die allgemeine Lösung der Dgl. aus der Lösung $y_{\mathrm{h}}(x)$ der homogenen Differentialgleichung

$$L_1 y := y' + p(x)y = 0$$

und einer partikulären Lösung y_p der inhomogenen Dgl., sodass

$$\mathcal{L}(\text{Dgl.}) = y_\mathrm{p}(x) + y_\mathrm{h}(x)$$

gilt. Die partikuläre Lösung kann mit dem Verfahren der Variation der Konstanten bestimmt werden.

Beispiel:
Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y' - 3y = 6.$$

Zunächst wird die hom. Dgl. $y' - 3y = 0$ mit Trennung der Variablen gelöst:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= 3x \\ \int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y &= \int 3\,\mathrm{d}x \\ \ln(|y|) &= 3x + C \\ y &= e^{3x}\,C. \end{aligned}$$

Damit lautet die Lösung der hom. Dgl. $y_\mathrm{h}(x) = e^{3x}\,C$. Für die Lösung der inhomogenen Dgl. wird das Verfahren der Variation der Konstanten angewendet. Damit lautet der Ansatz für die partikuläre Lösung:

$$\begin{aligned} y_\mathrm{p} &= C(x)e^{3x} \\ y_\mathrm{p}' &= C'e^{3x} + 3Ce^{3x}. \end{aligned}$$

Einsetzen in die Dgl. ergibt:

$$\begin{aligned} C'e^{3x} + 3Ce^{3x} - 3Ce^{3x} &= 6 \\ C'e^{3x} &= 6 \\ \Rightarrow C' &= 6e^{-3x}. \end{aligned}$$

Eine Integration liefert:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}x} &= 6e^{-3x} \\ \int \mathrm{d}C &= \int 6e^{-3x}\,\mathrm{d}x \\ C &= -2e^{-3x} + C' \end{aligned}$$

Damit gilt:

$$y_{\mathrm{p}}(x) = C(x)e^{3x} = -2 + C'e^{3x}.$$

Damit gilt für die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} y(x) &= y_{\mathrm{h}}(x) + y_{\mathrm{p}}(x) \\ &= Ce^{3x} - 2. \end{aligned}$$

Typ E: Bernoulli-Differentialgleichung

Ist eine Differentialgleichung der Form

$$y' + p(x)y = q(x)y^r$$

gegeben, so spricht man von der Bernoulli-Differentialgleichung. Diese kann mit $z(x) := y^{1-r}(x)$ in eine lineare Dgl. 1. Ordnung

$$z' + (1-r)p(x)z = (1-r)q(x)$$

transformiert werden.

Typ F: Riccati-Differentialgleichung

Abgesehen von dem Spezialfall $r = 0$ (Bernoulli-Dgl.) hat die Riccati-Dgl. im Allgemeinen nicht geschlossen lösbar. In einigen Fällen kann eine partikuläre Lösung geraten werden, sodass eine allgemeine Lösung angegeben werden kann.

Lineare Differentialgleichung höherer Ordnung

Eine lineare Differentialgleichung besitzt die Form

$$L_n y := a_n(x)\, y^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y = f(x),$$

wobei L_n ein linearer gewöhnlicher Differentialoperator n-ter Ordnung ist.

Homogene lineare Differentialgleichung

Ist $f(x) = 0$, so handelt es sich um eine homogene Differentialgleichung. Die allgemeine Lösung der homogenen Dgl. lautet dann

$$y_{\mathrm{h}}(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + ... + C_n y_n(x).$$

Für eine homogene Dgl. mit konstanten Koeffizienten wird als der Exponentialansatz $y(x) = e^{\lambda x}$ gewählt. Der gesuchte Exponent wird ermittelt, indem die Nullstellen λ_i des charakteristischen Polynoms $P(\lambda)$ bestimmt werden. Liegen nur einfach Nullstellen vor, so ist die allgemeine Lösung

$$y_{\mathrm{h}}(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + ... + C_n e^{\lambda_n x},$$

wobei $y_1(x)$, $y_2(x)$,..., $y_n(x)$ ein sogenanntes **Fundamentalsystem** bilden.
Liegen mehrfache Nullstellen λ_i mit Vielfachheiten k_i vor, so sieht das charakteristische Polynom wie folgt aus:

$$P(\lambda) = a_n(\lambda - \lambda_1)^{k_1}(\lambda - \lambda_2)^{k_2}...(\lambda - \lambda_n)^{k_n}.$$

Dann bilden die Funktionen

$$\begin{aligned} &x^{k_1-1}e^{\lambda_1 x}, ..., xe^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_1 x} \\ &x^{k_2-1}e^{\lambda_2 x}, ..., xe^{\lambda_2 x}, e^{\lambda_2 x} \\ &x^{k_n-1}e^{\lambda_n x}, ..., xe^{\lambda_n x}, e^{\lambda_n x} \end{aligned}$$

ein Fundamentalsystem.

Beispiel für einfache Nullstellen von $P(\lambda)$:
Gegeben ist die homogene lineare Differentialgleichung 3. Ordnung

$$y''' - 2y'' - 5y' + 6y = 0.$$

Das charakteristische Polynom ergibt sich durch Einsetzen des Exponentialansatz $y(x) = e^{\lambda x}$ in die Dgl. und lautet:

$$P(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0.$$

Die Nullstellen von $P(\lambda)$ sind $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$ und $\lambda_3 = 3$. Damit ergeben sich n linear unabhängige Lösungen

$$y_1(x) = e^x,\ y_2(x) = e^{-2x},\ y_3(x) = e^{3x}.$$

Damit lautet die allgemeine Lösung der homogen Dgl.

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + C_3 e^{3x}.$$

Beispiel für Nullstellen von $P(\lambda)$ mit Vielfachheit $\neq 1$:
Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''' + 3y'' + 3y' + y = 0.$$

Das charakteristische Polynom ist

$$P(\lambda) = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = (\lambda + 1)^3.$$

Damit liegt eine dreifache Nullstelle $\lambda_{1,2,3} = -1$ vor. Es ergeben sich die unabhängigen Lösungen

$$y_1(x) = e^{-x},\ y_2(x) = xe^{-x},\ y_3(x) = x^2 e^{-x}.$$

Damit lautet die allgemeine Lösung der homogen Dgl.

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + C_3 x^2 e^{-x}.$$

Inhomogene lineare Differentialgleichung

Um die inhomogenen linearen Differentialgleichung $L_n y = f(x)$ zu lösen, wird zunächst die homogene Lösung bestimmt. Im Anschluss wird die inhomogene Dgl. betrachtet und ein geeigneter Ansatz für die partikuläre Lösung bestimmt, welcher der Störfunktion $f(x)$ ähnlich ist. Nach Einsetzen des Ansatzes in die Dgl. und Bestimmung der der Koeffizienten, ergibt sich die allgemeine Lösung:

$$y(x) = y_\mathrm{p}(x) + C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \ldots + C_n e^{\lambda_n x}.$$

Beispiel:
Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''' + y'' = x.$$

Zunächst wird die hom. Dgl. $y''' + y'' = 0$ gelöst. Das charakteristische Polynom $P(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2$ besitzt die Nullstellen $\lambda_{1,2} = 0$ und $\lambda_3 = -1$. Es liegt also eine doppelte Nullstelle vor, sodass die allgemeine Lösung der hom. Dgl.

$$y_{\mathrm{h}}(x) = C_1 e^{0x} + C_2 x e^{0x} + C_3 e^{-x} = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-x}$$

lautet. Als Ansatz für die partikuläre Lösung wird ein Polynom verwendet:

$$y_{\mathrm{p}}(x) = A_1 + A_2 x.$$

Hier liegt jedoch eine zweifache Resonanz vor, sodass der Ansatz modifiziert wird:

$$\begin{aligned} y_{\mathrm{p}}(x) &= A_1 x^2 + A_2 x^3, \\ y_{\mathrm{p}}'(x) &= 2A_1 x + 3A_2 x^2, \\ y_{\mathrm{p}}''(x) &= 2A_1 + 6A_2 x, \\ y_{\mathrm{p}}'''(x) &= 6A_2. \end{aligned}$$

Einsetzen in die Dgl. ergibt:

$$6A_2 + 2A_1 + 6A_2 x = x.$$

Durchführen eines Koeffizientenvergleiches:

$$\begin{aligned} 6A_2 = 1 &\Rightarrow A_2 = \frac{1}{6} \\ 6A_2 + 2A_1 = 0 &\Rightarrow A_1 = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Damit lautet die partikuläre Lösung

$$y_{\mathrm{p}}(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3.$$

Somit ist die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$y(x) = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-x} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3.$$

Aufgaben zu gewöhnlichen Differentialgleichungen

Aufgabe 1: Anfangswertproblem

Gegeben ist die Dgl.

$$y'(x) = \frac{1}{y\sqrt{x}},\ x > 0,\ y \neq 0$$

mit der allgemeinen Lösung

$$y(x) = \pm\sqrt{4\sqrt{x} + C},\ C \geq 0.$$

a) Geben Sie, falls möglich, die Lösung der Dgl. an, die die Anfangswertbedingung $y(1) = 3$ erfüllt.

b) Geben Sie, falls möglich, die Lösung der Dgl. an, die die Anfangswertbedingung $y(1) = -4$ erfüllt.

c) Geben Sie, falls möglich, die Lösung der Dgl. an, die die Anfangswertbedingung $y(-1) = 3$ erfüllt.

Aufgabe 2: Zum Lösungsbegriff von Dgl.

a) Gegeben seien die beiden Differentialgleichungen

i) $y'(x) = y(x)\cos(x) + \sin(x)\cos(x)$

ii) $y''(x) + y'(x) = 0$

Welcher der folgenden Funktionen ist Lösung einer der Differentialgleichungen?

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \cos(x), & y_2(x) &= 8, \\ y_3(x) &= e^x, & y_4(x) &= \sin(x) - 1, \\ y_5(x) &= e^{-\sin(x)}, & y_6(x) &= y_4 + y_5 = \sin(x) - 1 + e^{-\sin(x)}. \end{aligned}$$

b) Für welche Werte der Konstanten A, ω und φ_0 ist

$$u(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$$

Lösung der Schwingungs-Differentialgleichung

$$u''(t) + 25u(t) = 0.$$

Aufgabe 3: Definitionsbereich der Lösung einer Dgl.

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'(x) = 2\,x\,y^2$$

und die spezielle Lösung für den Anfangswert $y(0) = 4$.

Wie groß ist der maximale Definitionsbereich dieser Lösung ?

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$\cos(x) \cdot y'(x) = \sin(x) \cdot y(x).$$

Aufgabe 4: Anfangswertproblem

Gegeben sei das Anfangswertproblem:

$$y' = \sqrt{y}, \quad y(0) = 0.$$

a) Bestimmen sie eine Lösung des gegebenen Anfangswertproblems.

b) Hat das Anfangswertproblem eine eindeutige Lösung?

Aufgabe 5: Logistisches Wachstum

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(t) = \lambda(k - y(t))y(t) \quad , \quad y(0) = y_0$$

wobei $k, \lambda \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 6: Gewöhnliche Dgl.

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Dgl.

$$y'(x) = \frac{(y-x)e^{y/x} - x}{xe^{y/x}}, \; x \neq 0.$$

Aufgabe 7: Differentialgleichungen erster Ordnung

a) Klassifizieren Sie die Differentialgleichung 1. Ordnung

$$u'(t) = \frac{-2\,u(t)}{t} + 5\,t^2\ , \quad t > 0\ ,$$

und bestimmen Sie dann alle Lösungen der Differentialgleichung.

b) Lösen Sie das Anfangswertproblem für $t > 0$

$$u'(t) = \left(\frac{2\,u(t)}{t}\right)^2 + \frac{u(t)}{t}\ , \quad u(1) = -2\ .$$

Aufgabe 8: Differentialgleichungen 1. Ordnung

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung folgender Differentialgleichungen:

i) $y'(x) = (2\,x + 3\,y + 4)^{-4} - \dfrac{2}{3}$

ii) $u'(t) = \sqrt{\dfrac{t}{u}} + \dfrac{u}{t}, \quad t > 0$

iii) $w'(s) = \dfrac{2}{s}\,w + 15\,s^4$

Hinweis:
Zu a) Nutzen Sie die Substitution $z = ax + by + c$.
Zu b) Nutzen Sie die Substitution $z = \frac{u}{t}$.
Zu c) Es handelt sich hier um eine lineare Differentialgleichung. Lösen Sie zuerst die homogene Differentialgleichung. Bestimmen Sie anschließend die partikuläre Lösung.

Aufgabe 9: Bernoulli'sche Differentialgleichung

Eine Differentialgleichung der Form

$$u'(x) = f(x)\cdot u(x) + g(x)\cdot\Big(u(x)\Big)^n$$

heißt **Bernoulli'sche Differentialgleichung**. Sie läßt sich mit Hilfe der Substitution

$$z(x) = \Big(u(x)\Big)^{1-n}$$

in eine lineare Differentialgleichung für $z(x)$ überführen.
Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung für $y(x)$

$$y' = \frac{-2}{x}\cdot y + x^2\cdot y^2\ .$$

Aufgabe 10: Anfangswertproblem

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$y'(x) = x^2 y.$$

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Dgl..

b) Wie lauten die speziellen Lösungen des AWP für die Anfangswerte

- **i)** $y(0) = 1$,
- **ii)** $y(1) = -1$,
- **iii)** $y(1) = 0$.

c) Wie lautet die allgemeine Lösung für den beliebigen Anfangswert $y(x_0) = y_0$?

Aufgabe 11: Substitution: Homogene Differentilagleichung erster Ordnung

Berechnen Sie die Lösung des folgenden Anfangswertproblems

a) $x\,y\,y' + 4x^2 + y^2 = 0, \quad y(2) = 0, \quad x > 0.$

b) $x\,y' = y\,(\ln x - \ln y)\,, \quad y(1) = 4, \quad x > 0.$

Aufgabe 12: Trennung der Variablen

Lösen die folgenden Anfangswertprobleme und bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich der Lösung

a) $y'(x) = 6y^2(x)x, \quad y(1) = \dfrac{1}{6}.$

b) $y'(x) = \dfrac{3x^2 + 4x - 4}{2y(x) - 4}, \quad y(1) = 3.$

c) $y'(x) = \mathrm{e}^{-y(x)}\,(2x - 4)\,, \quad y(5) = 0.$

d) $y'(x) = \dfrac{1}{x^2}, \quad y(x_0) = 0.$

e) $y'(x) = x^2, \quad y(0) = y_0.$

Aufgabe 13: LR-Kreis

Ein Stromkreis habe einen Widerstand von $R = 0.8$ Ohm und eine Selbstinduktion von $L = 4$ Henry. Bis zur Zeit $t_0 = 0$ fließe kein Strom. Dann wird eine Spannung von $U = 5$ Volt angelegt. Nach 5 Sekunden wird die Spannung abgeschaltet. Berechnen Sie den Stromverlauf $I(t)$ für $0 \le t \le 5$ und $t > 5$.

Hinweis: In diesem Stromkreis gilt $L\dot{I}(t) + RI(t) = U(t)$.

Aufgabe 14: Anfangswertproblem

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$y'(x) + y(x)\sin(x) = \sin(2x).$$

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung.

b) Bestimmen Sie die Lösung für den Anfangswert $y(0) = 1$.

Aufgabe 15: Gewöhnliche Dgl.

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Dgl.

$$\cos(x)y'(x) = \sin(x)y(x) + \cos^2(x).$$

Aufgabe 16: Nichtlineare Differentialgleichung erster Ordnung

1) Klassifizieren Sie die folgenden Differentialgleichungen erster Ordnung als

1. Homogene Differentialgleichung: $y' = g(y/x)$ mit Substitution $u = y/x$.
2. Differentialgleichung mit bilinearen Argumenten: $y' = f(ax + by + c)$ mit Substitution $u = ax + by + c$.

a) $y'(x^2 + xy) = y^2 - xy$,

b) $y' = \dfrac{x^2 y}{x^3 + y^3}$,

c) $y' = \dfrac{1}{x + y}$,

d) $y' = -\sin^2(x + y + 1)$,

e) $x^2 y' = y^2 + xy - x^2$,

f) $y' = \dfrac{y + e^{-\frac{y}{x}}}{x}$

2) Verwenden Sie eine angemessene Substitution und formulieren Sie die Gleichungen in Termen von u und u' um ohne sie zu lösen.

Aufgabe 17: Differentialgleichungen erster Ordnung

1) Klassifizieren Sie die follgenden gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung als

  a) Linear oder nicht-linear.

  b) In dem Fall einer linearen Differentialgleichung klassifizieren Sie die Gleichung zusätzlich als

  - homogen oder inhomogen.
  - Differentialgleichung mit konstanten oder nicht-konstanten Koeffizienten.

  c) Nutzen Sie die Vorlesungsunterlagen, um die Differentialgleichung als einen der folgenden Typen zu klassifizieren:

  (a) $y' = f(x) \cdot g(y)$, zu lösen mittels Trennung der Variablen,

  (b) $y' = g(y/x)$, homogen, zu lösen mittels Substitution mit $u = y/x$,

  (c) $y' = f(ax + by + c)$, rechte Seite mit bilinearen Argumenten, zu lösen mit der Substitution $u = ax + by + c$,

  (d) $y' + p(x) \cdot y = q(x)$, lineare Differentialgleichung.

i) $y' + 2y = 3x$.

ii) $y'y + x = 0$.

iii) $y' = \frac{x^2+y^2}{xy}$.

iv) $y' = (x + y + 1)^2$.

v) $x^2y' = xy + 2y^2$.

vi) $y' = \frac{y(x-y)}{x^2}$.

vii) $y' = \frac{x-y}{x+y}$.

viii) $y' = \ln(y + 2x + 1)^2$.

2) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Gleichungen **i)** bis **iv)**.

Aufgabe 18: Differentialgleichungen erster Ordnung

Klassifizieren Sie die folgenden Differentialgleichungen erster Ordnung:

1. $x^2y' = 2y + 1$.
2. $y' = \cos(x)y$.
3. $x^2y' + y^2 = xy$.
4. $y' = \sin(y + 1)$.
5. $y' = (4x - y + 1)^2$.
6. $y' + 3y + 2 = \mathrm{e}^{2x}$.

a) Klassifizieren Sie diese als linear oder nicht linear. In dem Fall einer linearen Differentialgleichung klassifizieren Sie die zusätzlich als

- **i**) homogen oder inhomogen.
- **ii**) mit konstanten oder nicht-konstanten Koeffizienten.

b) Klassifizieren Sie die Differentialgleichung als einen der folgenden Typen:

- **i**) $y' = f(x) \cdot g(y)$ zu Lösen mit Trennung der Variablen.
- **ii**) $y' = g(y/x)$ zu Lösen mit der Substitution $u = y/x$.
- **iii**) $y' = f(ax + by + c)$ zu Lösen mit der Substitution $u = ax + by + c$.
- **iv**) $y' + p(x) \cdot y = q(x)$.

c) Berechnen Sie die allgemeine Lösung aller Differentialgleichungen.

Aufgabe 19: Anfangswertproblem

Klassifizieren die folgende Differentialgleichung und bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems mit $y(0) = 0$ und $y'(0) = 6$:

$$y''(x) - 2y'(x) - 3y(x) = 0.$$

Aufgabe 20: Homogene lineare Differentialgleichungen

Bestimmen Sie die allgemeinen reellen Lösungen folgender homogener linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten mit Hilfe geeigneter Ansätze für $u(t)$:

i) $u'' - 7\,u' + 10\,u = 0\ .$ **ii**) $7\,u'' + 28\,u' + 91\,u = 0\ .$

iii) $u''' - 3\,u'' = 0\ .$ **iv**) $u'''' + 8\,u'' + 16\,u = 0\ .$

Aufgabe 21: Komplexe Nullstellen des charakteristischen Polynoms

Bestimmen Sie die Lösung der folgenden Differentialgleichung:

$$y'' + 4y' + 5y = 0$$

Aufgabe 22: Lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung

Bestimmen Sie die allgemeinen Lösungen der folgenden Differentialgleichungen:

a) $y^{(4)} + 4y = 0,$

b) $y^{(4)} - 18y'' + 81y = 0.$

Aufgabe 23: homogene lineare Dgl. höherer Ordnung

Lösen Sie die homogenen Differentialgleichungen mit Hilfe des Exponentialansatzes

$$y(t) = ce^{\lambda t},\ c, \lambda = \text{const.}.$$

a) $y'' - 3y' + 2y = 0$

b) $y'' + 4y = 0$

c) $y'' + 2y' + 2y = 0$

d) $y^{(4)} - y = 0$

Aufgabe 24: Harmonischer Oszillator

Man betrachte die Differentialgleichung

$$y'' + 2\rho y' + \omega^2 y = 0, \quad \text{mit } \rho, \omega \in \mathbb{R}_+$$

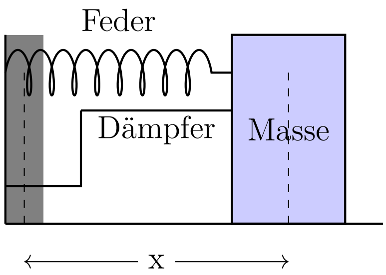
Die gegebene Differentialgleichung, ist eine klassische Form einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Aus physikalischer Sicht beschreibt diese Gleichung typischerweise gedämpfte harmonische Bewegungen, wobei:

- $y(t)$ die Verschiebung des Systems vom Gleichgewicht über die Zeit darstellt.
- ρ (der Koeffizient der ersten Ableitung y') repräsentiert den Dämpfungsfaktor, der beeinflusst, wie schnell das System Energie durch Reibung oder andere resistive Kräfte verliert.

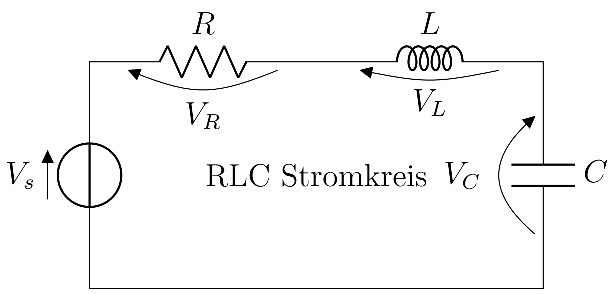
- ω^2 (der Koeffizient von y) steht im Zusammenhang mit der Steifigkeit des Systems oder der Kraft, die es ins Gleichgewicht zurückführt. Der Parameter ω selbst wird oft als natürliche Frequenz des ungedämpften Systems betrachtet.

Physikalische Interpretationen

1. **Mechanische Systeme:** In der Mechanik kann diese Gleichung ein Masse-Feder-Dämpfer-System modellieren, bei dem eine Masse an einer Feder und möglicherweise einem Dämpfungselement (wie einem Stoßdämpfer) befestigt ist. Die Masse oszilliert um eine Gleichgewichtsposition, wobei die Feder eine rückstellende Kraft proportional zur Verschiebung liefert und der Dämpfer eine Kraft proportional zur Geschwindigkeit bereitstellt, die der Bewegung entgegenwirkt.



2. **Elektrische Schaltkreise:** In der Elektrotechnik kann die Gleichung einen RLC-Schaltkreis (einen Schaltkreis, der einen Widerstand R, eine Induktivität L, und einen Kondensator C enthält) beschreiben. Hier könnte $y(t)$ die elektrische Ladung oder den Strom darstellen, $2\rho = R/L$ und $\omega^2 = 1/(LC)$. Das Verhalten des Schaltkreises — ob er oszilliert oder schnell stabilisiert wird — hängt von den Werten dieser Komponenten ab.



Diese Gleichung ist allgemein bekannt als *"Gedämpfter harmonischer Oszillator"* oder einfach als *"Gedämpfter Oszillator"*. Sie umfasst drei spezifische Szenarien basierend auf dem Wert von ρ im Vergleich zu ω:

1. **Überdämpft ($\rho > \omega$):** Das System kehrt ohne Oszillation langsam zum Gleichgewicht zurück.

2. **Kritisch gedämpft ($\rho = \omega$):** Das System kehrt so schnell wie möglich ohne Oszillation zum Gleichgewicht zurück.
3. **Untergedämpft ($\rho < \omega$):** Das System oszilliert mit einer Amplitude, die allmählich auf null abnimmt.

Aufgabe: Bestimmen Sie die Lösung der DGl für alle drei Fälle: überdämpft, kritisch gedämpft und untergedämpft.

Hinweis: Bestimmen Sie das charakteristische Polynom und seine Nullstellen und verwenden Sie den Exponentialansatz. Man betrachte alle drei Fälle, in denen die Nullstellen einfach, doppelt oder komplex konjiugiert sind.

Aufgabe 25: Lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung

Bestimmen Sie die allgemeinen Lösungen der folgenden Differentialgleichungen:

a) $y^{(4)} + 2y''' + y'' = 12x$,

b) $y'' + 4y' + 5y = 8 \sin t$,

c) $y'' - 4y' + 4y = \mathrm{e}^{2x}$.

Aufgabe 26: Lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung ohne Resonanz

Bestimmen Sie die allgemeinen Lösungen der folgenden Differentialgleichungen. Falls Anfangswerte gegeben sind, ermitteln Sie auch die Lösung des Anfangswertproblems.

a) $y'' + 6y' + 8y = 0$,

b) $y'' + 2y' + 5y = 17\,\sin(2x)$.

c) $y''(x) - 2y'(x) - 3y(x) = 4\mathrm{e}^{x}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 6$,

d) $y''(x) + 5y'(x) + 6y(t) = 3\mathrm{e}^{3x}$,

e) $y''(x) - y'(x) - 2y(x) = 4x\mathrm{e}^{x}$.

f) $y''' + y'' - y' - y = 3\mathrm{e}^{-2x}$,

Aufgabe 27: Inhomogene lineare Differentialgleichungen

Bestimmen Sie von folgenden inhomogenen linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten jeweils die allgemeine reelle Lösung, indem Sie zunächst die zugehörige homogene lineare Differentialgleichung allgemein lösen und eine spezielle (partikuläre) Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung mit Hilfe von geeigneten Ansätzen bestimmen.

a) $y''(x) - 5\,y'(x) + 6\,y(x) = r_k(x)$ mit

$$\textbf{i)}\ r_1 = 108\,x^2\,, \qquad \textbf{ii)}\ r_2 = 7\,\mathrm{e}^{3x}\,, \qquad \textbf{iii)}\ r_3 = 18 + 14\,\mathrm{e}^{3x}\,.$$

b) $y'''(x) + 25\,y'(x) = s_k(x)$ mit

i)	$s_1 = 150\,x$,	**ii)**	$s_2 = \sin(x)$,
iii)	$s_3 = \sin(5x) - 200\,x$,	**iv)**	$s_4 = 6\,\sin(3x)\,\cos(2x)$.

Hinweis: Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt $\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$.

c) $y''(x) - 2\,y'(x) = t_k(x)$ mit

$$\textbf{i)}\ t_1 = 4\,\mathrm{e}^{2x}\,, \qquad \textbf{ii)}\ t_2 = \cosh(2x)\,.$$

Aufgabe 28: Lineare Differentialgleichungen mit Resonanz

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden linearen Differentialgleichungen

a) $y'' - y = 1$,

b) $y''' + y'' = 1$,

c) $y'' + y' - 2y = e^x$,

d) $y'' + y = \cos(x)$.

Aufgabe 29: Harmonischer Oszillator mit Resonanz

Man betrachte die Differentialgleichung des harmonischen Oszillators

$$y'' + 2\rho y' + \omega^2 y = r(t), \quad \text{mit } \rho, \omega \in \mathbb{R}_+$$

mit den drei Fällen

1. **Überdämpft ($\rho > \omega$):** Das System kehrt ohne Oszillation langsam zum Gleichgewicht zurück.
$$r(t) = \mathrm{e}^{(-\rho+\sqrt{\rho^2-\omega^2})t}$$

2. **Kritisch gedämpft ($\rho = \omega$):** Das System kehrt so schnell wie möglich ohne Oszillation zum Gleichgewicht zurück mit

$$r(t) = \mathrm{e}^{-\omega t}$$

3. **Untergedämpft ($\rho < \omega$):** Das System oszilliert mit einer Amplitude, die allmählich auf null abnimmt.

$$r(t) = \mathrm{e}^{-\rho t} \cos(\sqrt{\omega^2 - \rho^2} t)$$

Bestimmen Sie die Lösung der Dgl. für die Fälle überdämpft, kritisch gedämpft und untergedämpft.

Ergebnisse

Ergebnisse zu Aufgabe 1:

a) $y(x) = \sqrt{4\sqrt{x} + 5}$, $x \geq 0$

b) $y(x) = -\sqrt{4\sqrt{x} + 12}$, $x \geq 0$

c) keine Lösung, da Dgl. nicht bei $x = -1$ definiert ist

Ergebnisse zu Aufgabe 2:

a) $y_4(x), y_6(x)$ Lösung von Dgl. i), $y_1(x), y_2(x), y_4(x)$ Lösung von Dgl. ii)

b) $\omega = \pm 5$, $A, \varphi \in \mathbb{R}$

Ergebnisse zu Aufgabe 3:

a) $y_{\text{AWP}}(x) = \frac{-1}{x^2 - \frac{1}{4}}$, **b)** $y(x) = \frac{C}{\cos(x)}$

Ergebnisse zu Aufgabe 4:

a) $y(x) = \frac{1}{4}x^2$

b) Das Problem hat unendlich viele Lösungen.

Ergebnisse zu Aufgabe 5:

die spezielle Lösung lautet: $y = \dfrac{y_0 k}{y_0 + (k - y_0)\,\mathrm{e}^{-\lambda k t}}$.

Ergebnisse zu Aufgabe 15:

$y(x) = x \ln\left(\frac{C}{|x|} - 1\right)$, $C > |x| > 0$.

Ergebnisse zu Aufgabe 7:

a) $u(t) = t^3 + \frac{C}{t^2}$, **b)** $u(t) = \frac{-t}{4\,\ln(t) + C}$

Ergebnisse zu Aufgabe 8:

a) $y(x) = \frac{(15\,x + C)^{1/5} - 2x - 4}{3}$

b) $u(t) = t \cdot \left(\dfrac{3\,\ln(t)}{2} + C\right)^{2/3}$

c) $w(s) = C\,s^2 + 5\,s^5$

Ergebnisse zu Aufgabe 9:

Es gilt $(1-n)u'(x) = u(x)^n \cdot z'(x)$. Damit ist die Lösung $y(x) = \frac{1}{C \cdot x^2 - x^3}$.

Ergebnisse zu Aufgabe 10:

a) $y(x) = Ce^{x^3/3}$

b) i) $y(x) = e^{x^3/3}$, ii) $y(x) = -e^{-1/3}e^{x^3/3}$, iii) $y(x) = 0$

c) $y(x) = y_0 e^{-x_0^3/3} e^{x^3/3}$

Ergebnisse zu Aufgabe 11:

a) $y(x) = \pm\frac{1}{x}\sqrt{32 - 2x^4}$

b) $y(x) = x\,\mathrm{e}^{\frac{\ln(4)+1}{x} - 1}$

Ergebnisse zu Aufgabe 12:

a) $y(x) = \dfrac{1}{9 - 3x^2}$ mit $-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$

b) $y(x) = 2 \pm \sqrt{x^3 + 2x^2 - 4x + 2}$ mit $x \geq \bar{x} \approx -3.36$

c) $y(x) = \ln(x^2 - 4x - 4)$ mit $2 + 2\sqrt{2} < x < \infty$

d) $y(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x_0}$ mit $0 < x < \infty$ falls $x_0 > 0$ und $-\infty < x < 0$ falls $x_0 < 0$

e) $y(x) = \frac{x^3}{3} + y_0$ mit $x \in \mathbb{R}$

Ergebnisse zu Aufgabe 13:

$$I(t) = \begin{cases} 6.25\left(1 - e^{-0.2t}\right) & \text{für } 0 < t < 5 \\ 6.25\left(1 - e^{-1}\right)e^{-0.2(t-5)} & \text{für } t > 5 \end{cases}$$

Ergebnisse zu Aufgabe 14:

a) $y(x) = Ce^{\cos(x)} + 2\cos(x) + 2$

b) $y(x) = -3e^{\cos(x)-1} + 2\cos(x) + 2$

Ergebnisse zu Aufgabe 15:

$$y(x) = \frac{1}{\cos(x)}\left(\tfrac{x}{2} + \tfrac{1}{4}\sin(2x) + C\right)$$

Ergebnisse zu Aufgabe 16:

i) $yx\,\mathrm{e}^{\frac{y}{x}} = C$

ii) $u' = -\frac{1}{x}\left(\frac{u^4}{1+u^3}\right)$

iii) $u' = \frac{1+u}{u}$

iv) $u' = \cos^2(u)$

v) $u' = \frac{u^2-1}{x}$

vi) $u' = \frac{1}{x^2}\,\mathrm{e}^{-u}$

Ergebnisse zu Aufgabe 17:

i) $y = C\,\mathrm{e}^{-2x} + \frac{3}{2}x - \frac{3}{4}$

ii) $y = \pm\sqrt{C - x^2}$

iii) $y = \pm x\sqrt{2\ln|x| + C}$

iv) $y = \tan(x + C) - x - 1$

Ergebnisse zu Aufgabe 18:

i) $y(x) = Ce^{\frac{-2}{x}} - \frac{1}{2}$

ii) $y(x) = Ce^{\sin(x)}$

iii) $y(x) = \frac{x}{\ln(x)+C}$

iv) $y(x) = 2\arctan(Ce^x) - 1$

v) $y(x) = 4x + \frac{3+Ce^{4x}}{1-Ce^{4x}}$

vi) $y(x) = Ce^{-3x} + \frac{1}{5}e^{2x} - \frac{2}{3}$

Ergebnisse zu Aufgabe 19:

$y(x) = -\frac{3}{2}\,\mathrm{e}^{-x} + \frac{3}{2}\,\mathrm{e}^{3x}$

Ergebnisse zu Aufgabe 20:

i) $u(t) = a\,\mathrm{e}^{2\,t} + b\,\mathrm{e}^{5\,t}$

ii) $u(t) = \mathrm{e}^{-2\,t}\Big(a\,\cos(3t) + b\,\sin(3t)\Big)$

iii) $u(t) = a + b\,t + c\,\mathrm{e}^{3\,t}$

iv) $u(t) = (a + b\,t)\cdot\cos(2t) + (c + d\,t)\cdot\sin(2t)$

Ergebnisse zu Aufgabe 21:

$y(x) = \mathrm{e}^{-2t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t)$

Ergebnisse zu Aufgabe 22:

a) $y(x) = c_1 e^x \cos x + c_2 e^x \sin x + c_3 \mathrm{e}^{-x} \cos x + c_4 \mathrm{e}^{-x} \sin x$

b) $y(x) = (c_1 + c_2 x)e^{-3x} + (c_3 + c_4 x)e^{3x}$

Ergebnisse zu Aufgabe 23:

a) $y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$ mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

b) $y(x) = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x)$ mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

c) $y(x) = (c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x))e^{-x}$ mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

d) $y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \cos(x) + c_4 \sin(x)$ mit $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$

Ergebnisse zu Aufgabe 24:

Fall 1: $y(t) = Ae^{(-\rho+\sqrt{\rho^2-\omega^2})t} + Be^{(-\rho-\sqrt{\rho^2-\omega^2})t}$,
Fall 2: $y(t) = (A + Bt)e^{-\omega t}$,
Fall 3: $y(t) = e^{-\rho t}(A\cos(\sqrt{\omega^2 - \rho^2}t) + B\sin(\sqrt{\omega^2 - \rho^2}t))$.

Ergebnisse zu Aufgabe 25:

Allgemeine Lösungen: a) $y(x) = c_1 + c_2 x + c_3 \mathrm{e}^{-x} + c_4 x \mathrm{e}^{-x} - 12x^2 + 2x^3$, b) $y(t) = \mathrm{e}^{-2t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t) + \sin t - \cos t$, c) $y(x) = \left(c_1 + c_2 x + \frac{1}{2}x^2\right) \mathrm{e}^{2x}$

Ergebnisse zu Aufgabe 26:

a) $y(x) = c_1 \mathrm{e}^{-2x} + c_2 \mathrm{e}^{-4x}$

b) $y(x) = \sin(2x) - 4\cos(2x) + c_1 \mathrm{e}^{-x} \cos(2x) + c_2 \mathrm{e}^{-x} \sin(2x)$

c) $y_{AWP}(x) = -e^x - \mathrm{e}^{-x} + 2\mathrm{e}^{3x}$

d) $y(x) = c_1 \mathrm{e}^{-2x} + c_2 \mathrm{e}^{-3x} + \frac{1}{10}\mathrm{e}^{3x}$

e) $y(x) = c_1 \mathrm{e}^{2x} + c_2 \mathrm{e}^{-x} - (2x + 1)e^x$

f) $y(x) = -\mathrm{e}^{-2x} + c_1 \mathrm{e}^x + c_2 \mathrm{e}^{-x} + c_3 x \mathrm{e}^{-x}$

Ergebnisse zu Aufgabe 27:

Lösungen der homogenen Gleichungen: a) $a\mathrm{e}^{2x} + b\mathrm{e}^{3x}$, b) $a\cos(5x) + b\sin(5x) + c$, c) $a + b\mathrm{e}^{2x}$.

Ergebnisse zu Aufgabe 28:

a) $y(x) = c_1 \,\mathrm{e}^{x} + c_2 \,\mathrm{e}^{-x} - 1$

b) $y(x) = (c_1 + c_2 x) + c_3 \,\mathrm{e}^{-x} + \frac{x^2}{2}$

c) $y(x) = c_1 \,\mathrm{e}^{-2x} + c_2 \,\mathrm{e}^{x} + \frac{x\,\mathrm{e}^{x}}{3}$

d) $y(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x) + x\frac{1}{2}\sin(x)$

Ergebnisse zu Aufgabe 29:

Fall 1: $y(t) = A\,\mathrm{e}^{(-\rho+\sqrt{\rho^2-\omega^2})t} + B\,\mathrm{e}^{(-\rho-\sqrt{\rho^2-\omega^2})t} + \frac{1}{2\sqrt{\rho^2-\omega^2}} t\,\mathrm{e}^{(-\rho+\sqrt{\rho^2-\omega^2})t}$,
Fall 2: $y(t) = (A + Bt)\,\mathrm{e}^{-\omega t} + \frac{1}{2}t^2\,\mathrm{e}^{-\omega t}$,
Fall 3: $y(t) = \mathrm{e}^{-\rho t}(A\cos(\sqrt{\omega^2-\rho^2}t) + B\sin(\sqrt{\omega^2-\rho^2}t)) + \frac{1}{2}t\,\mathrm{e}^{-\rho t}\sin((\sqrt{\omega^2-\rho^2})t)$.