Helmut-Schmidt-Universität
Universität der Bundeswehr Hamburg
Fakultät für Maschinenbau und Bauingenieurwesen

Prof. Dr. Thomas Carraro
M.Sc Janna Puderbach

Mathematik II/B (WI/ET) — Blatt 5

WT 2024 — Kurvendiskussion, Taylor,

Einführende Bemerkungen

- Vermeiden Sie die Verwendung von Taschenrechnern oder Online-Ressourcen.

Aufgabe 5.1: Taylor-Entwicklung in einer Variablen

Bestimmen Sie die Taylor-Entwicklung zweiter Ordnung der Exponentialfunktion e^x um den Punkt $x_0 = 0$ in dem Intervall $0 \le x \le 1$ einschließlich des Restgliedtermes. Zeigen Sie damit die Abschätzung:

$$\mathrm{e} \le 3.$$

Aufgabe 5.2: Asymptoten

Man bestimme die (waagerechten bzw. senkrekten bzw.ß schrägen) Asymptoten der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = \frac{x}{4+x^2}$

b) $g(x) = e^{-x^2}$

c) $h(x) = \frac{x^2-3x}{2x-2}$

d) $l(x) = x^2 e^{-x}$

Aufgabe 5.3: Kurvendiskussion, Taylorentwicklung

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x^2/2}(2x-3).$$

a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich von f.

b) Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion f.

c) Bestimmen Sie eine Asymptote von f, also eine Gerade $g(x) = a + bx$ mit

$$\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - g(x)) = 0.$$

d) Bestimmen Sie die kritischen Punkte der Funktion f und charakterisieren Sie diese **ohne** Berechnung der zweiten Ableitung.

e) Geben Sie die Taylorentwicklung in den Extrempunkten bis zum Grad 2 an.

f) Skizzieren Sie die Funktion, die Asymptote, sowie die Taylorapproximationen.

Aufgabe 5.4:

a) Gegeben sei die Funktion $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\sin x\right)$.

- **i)** Bestimmen Sie den Definitionsbereich und den Wertebereich von f.
- **ii)** Zeigen Sie, dass die Funktion f die Periodizität π besitzt, d.h. zeigen Sie, dass $f(x+\pi) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.
- **iii)** Bestimmen Sie alle Nullstellen von f.
  Hinweis: Beachten Sie die Periodizität von f.
- **iv)** Bestimmen Sie alle Extrema von f und charakterisieren Sie diese.
  Hinweis: Beachten Sie die Periodizität von f.
- **v)** Skizzieren Sie den Graphen von f im Intervall $[-\pi, 2\pi]$.

b) Bestimmen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x\to\infty} (x+3)\left(\mathrm{e}^{2/x} - 1\right).$$

Aufgabe 5.5: Kurvendiskussion

Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich, die Symmetrie, alle Nullstellen, sowie Art und Lage der kritischen Punkte und Wendepunkte der rellen Funktion

$$f(x) = x\sqrt{16 - x^2}.$$

Aufgabe 5.6: Kurvendiskussion

a) Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 + 3\,x}{1 - x}.$$

- **i)** Geben Sie den maximalen Definitionsbereich der Funktion f an.

ii) Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion.

iii) Bestimmen Sie die kritischen Punkte für die Extrema der Funktion und deren Funktionswerte.

iv) Bestimmen Sie die (nicht vertikale) Asymptote der Funktion, d. h. diejenige Gerade $g(x) = a + b\,x$ für die

$$\lim_{x\to\pm\infty} \big(f(x) - g(x)\big) = 0$$

ist.

v) Skizzieren Sie die Funktion.

b) Gegeben sei die Funktion

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to \left(x^2 - 4\right)^2 \cdot \mathrm{e}^{-x}.$$

Bestimmen Sie alle relativen Minima und Maxima der Funktion g **ohne** die zweite Ableitung zu berechnen.

Aufgabe 5.7: Kurvendiskussion

Führen Sie eine Kurvendiskussion für die Funktion

$$f(x) = \ln(3x^2 + 2x + 1)$$

durch. Bestimmen Sie dazu:

a) den maximalen Definitionsbereich von f,

b) die Symmetrieachsen von f, d. h. Werte $\alpha \in \mathbb{R}$, so dass $f(\alpha + x) = f(\alpha - x)$,

c) das Verhalten von f im Unendlichen,

d) die Nullstellen von f,

e) die Extrema und das Monotonieverhalten von f,

f) sowie die Wendepunkte und das Krümmungsverhalten von f.

g) Skizzieren Sie den Graphen von f.

Aufgabe 5.8: Kurvendiskussion

a) Gegeben sei die reelle Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 + 7\,x + 10}{x + 1}\ .$$

i) Geben Sie den maximalen Definitionsbereich der Funktion an.

ii) Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion.

iii) Bestimmen Sie die kritischen Punkte für die Extrema der Funktion und deren Funktionswerte.

iv) Bestimmen Sie die (nicht vertikale) Asymptote der Funktion, d. h. diejenige Gerade $g(x) = a + bx$, für die

$$\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - g(x)) = 0$$

gilt.

v) Skizzieren Sie die Funktion.

b) Gegeben sei die Funktion

$$g\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ :\ x \mapsto x^8 \cdot \mathrm{e}^x\ .$$

Bestimmen Sie alle relativen Minima und Maxima der Funktion g.

Aufgabe 5.9: Taylor-Entwicklung

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \sin(x)\ln(x).$$

a) Bestimmen Sie das Taylor-Polynom zweiter Ordnung $T_2(x)$ von $f(x)$ um den Punkt $x = 1$.

b) Bestimmen Sie die Differenz zwischen dem Taylor-Polynom $T_2(x)$ und der Funktion $f(x)$ im Punkt $x = 0$, d.h. bestimmen Sie $d(0)$, wobei

$$d(x) := |T_2(x) - f(x)|.$$

Man beachte, dass die Funktion $f(x)$ an der Stelle $x = 0$ stetig fortgesetzt werden muss.

Aufgabe 5.10: Taylor-Entwicklung

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \ln(x).$$

a) Bestimmen Sie das Taylor-Polynom der Ordnung zwei, $T_2(x)$, von $f(x)$ an der Stelle $x = 1$.

b) Bestimmen Sie das Restglied $R_2(x;1)$ und schätzen Sie

$$\max_{x\in[1,2]} |R(x;1)|.$$

Aufgabe 5.11: Taylor-Polynom

a) Geben Sie das Taylorpolynom n-ter Ordnung der folgenden Funktionen um den angegebenen Entwicklungspunkt x_0 an:

i) $f(x) = \sin(x) \cdot \cos(x)$ um $x_0 = 0$, $n = 4$

ii) $g(x) = \cos(x)$ um $x_0 = \pi/2$, $n = 4$

iii) $h(x) = \mathrm{e}^{1-x}(x^2 - 2x)$ um $x_0 = 1$, $n = 2$

b) Geben Sie die Nullstellen der Funktionen sowie der Taylor-Polynome im Intervall $[0, 5]$ an.

c) Skizzieren Sie die Funktionen und deren Taylor-Polynome.

Aufgabe 5.12: Taylor–Entwicklung

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) := x \cdot \arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1 + x^2)\,.$$

a) Berechnen Sie das Taylorpolynom $T_2(x)$ zweiten Grades im Entwicklungspunkt $x_0 = 1\,$.
b) Berechnen Sie das zugehörige Restglied und geben Sie den Fehler $|f(x) - T_2(x)|$ im Intervall $|x - 1| \le 0.1$ an.

Ergebnisse zu Aufgabe 5.2:

Ergebnisse zu Aufgabe 5.3:

zu **e)**: $T_{2;2}(x) = \mathrm{e}^{-2}\left(1 - \frac{5}{2}(x-2)^2\right)$
$T_{2;-1/2}(x) = \mathrm{e}^{-1/8}\left(-4 + \frac{5}{2}\left(x + \frac{1}{2}\right)^2\right)$

Ergebnisse zu Aufgabe 5.5:

$D(f) = [-4, 4]$, f ist ungerade, Nullstellen: $x = 0, \pm 4$, Extrema bei $x = \pm 2\sqrt{2}$, Wendepunkt bei $x = 0$

Ergebnisse zu Aufgabe 5.6:

a)ii) $0,\ -3$, **iii)** -1, 3, **iv)** $g(x) = -x - 4$

Ergebnisse zu Aufgabe 5.7:

b) $\alpha = -1/3$, **d)** $0,\ -2/3$, **e)** Minimum bei $-1/3$, **f)** Wendepunkte bei $-1/3 \pm \sqrt{2}/3$

Ergebnisse zu Aufgabe 5.9:

Die Differenz ist

$$d(0) = \frac{3\sin(1)}{2} - \cos(1).$$

Ergebnisse zu Aufgabe 5.10:

Eine Abschätzung des Restglieds ist

$$R(x; 1) \le \frac{1}{3}.$$

Ergebnisse zu Aufgabe 5.11:

i) $T_4(x) = x - 2x^3/3$, **ii)** $T_4(x) = -(x - \pi/2) + 1/6 \cdot (x - \pi/2)^3$
iii) $T_2(x) = -1 + (x-1) + 1/2 \cdot (x-1)^2$

Ergebnisse zu Aufgabe 5.12:

$T_2(x) = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2\right) + \frac{\pi}{4} \cdot (x-1) + \frac{1}{4} \cdot (x-1)^2$