

Mathematik II/B (WI/ET)

Blatt 8

WT 2024

Integration, partielle Ableitungen

---

Einführende Bemerkungen

- Vermeiden Sie die Verwendung von Taschenrechnern oder Online-Ressourcen.
- 

**Aufgabe 8.1: Uneigentliche Integrale**

Überprüfen Sie, ob die folgenden uneigentlichen Integrale existieren (d. h. einen endlichen Wert annehmen). Berechnen Sie für das dritte Beispiel den Wert des Integrals.

$$I_1 = \int_1^{\infty} \frac{\sin \frac{1}{x^2}}{x^2} dx$$

$$I_2 = \int_0^1 \frac{\cos x^2}{1-x} dx$$

$$I_3 = \int_0^{\infty} \frac{\arctan x}{x^2 + 1} dx$$

**Lösung 8.1:**

- Das erste Integral hat einen endlichen Wert, man kann seinen Wert nach oben abschätzen, indem man den Integranden durch eine größere Funktion ersetzt:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_1^{\infty} \frac{\sin \frac{1}{x^2}}{x^2} dx \leq \int_1^{\infty} \left| \frac{\sin \frac{1}{x^2}}{x^2} \right| dx \\ &\leq \int_1^{\infty} \left| \frac{1}{x^2} \right| dx \quad (\text{weil } |\sin(1/x^2)| \leq 1) \\ &= \left[ -\frac{1}{x} \right]_1^{\infty} = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{-1}{b} - \frac{-1}{1} = 1 \end{aligned}$$

Damit hat  $I_1$  einen endlichen Wert, der an dieser Stelle jedoch nicht berechnet werden soll.

- Das zweite Integral wird nach unten abgeschätzt, indem man die Integrandenfunktion durch eine geringere Funktion abschätzt:

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^1 \frac{\cos x^2}{1-x} dx \\ &\geq \int_0^1 \frac{\cos 1}{1-x} dx \quad (\text{weil } \cos \text{ auf dem Intervall } [0, 1] \text{ monoton fällt}) \\ &= \cos 1 \left[ -\ln |1-x| \right]_0^1 = \cos 1 \cdot \left( -\lim_{b \rightarrow 1} \ln |1-b| - (-\ln |1-0|) \right) = \infty \end{aligned}$$

Damit hat auch das Integral  $I_2$  keinen endlichen Wert.

- Für den Integranden  $f(x) = \frac{\arctan x}{1+x^2}$  des dritten Integrals kann man mittels par-

tieller Integration eine Stammfunktion ermittelt werden:

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \int_0^x f(t) dt = \int_0^x \underbrace{\arctan t}_{u(t)} \underbrace{\frac{1}{1+t^2}}_{v'(t)} dt \\
 &= \underbrace{\arctan t}_{u(t)} \underbrace{\arctan t}_{v(t)} \Big|_0^x - \int_0^x \underbrace{\frac{1}{1+t^2}}_{u'(t)} \underbrace{\arctan t}_{v(t)} dt \\
 &= \arctan^2 x - F(x) \\
 \Rightarrow \quad 2F(x) &= \arctan^2 x \\
 \Rightarrow \quad F(x) &= \frac{\arctan^2 x}{2}
 \end{aligned}$$

Den Wert des Integrals  $I_3$  erhält man dann durch den Grenzübergang:

$$I_3 = \lim_{b \rightarrow \infty} F(b) - F(0) = \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{2} \right)^2 - 0 = \frac{\pi^2}{8}.$$


---

### Aufgabe 8.2: Uneigentliche Integrale

Welche der folgenden uneigentlichen Integrale besitzen einen endlichen Wert? Bestimmen Sie den Wert dieser Integrale.

a)  $\int_0^1 \frac{1}{x^{1/4}} dx$

b)  $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$

c)  $\int_0^{1/\pi} \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx$

d)  $\int_0^\infty 2xe^{-x^2} dx$

### Lösung 8.2:

a) Dieses Integral existiert:

$$\int_0^1 x^{-\frac{1}{4}} dx = \lim_{a \rightarrow 0} \int_a^1 x^{-\frac{1}{4}} dx = \lim_{a \rightarrow 0} \left( \frac{4}{3} x^{\frac{3}{4}} \Big|_a^1 \right) = \frac{4}{3} \lim_{a \rightarrow 0} (1 - a^{3/4}) = \frac{4}{3}.$$

b) Dieses Integral existiert nicht:

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{a \rightarrow 0} \int_a^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{a \rightarrow 0} \left( \ln |x| \Big|_a^1 \right) = \lim_{a \rightarrow 0} (\ln 1 - \ln a) = +\infty.$$

c) Hier ist

$$\int_0^{1/\pi} \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx = \lim_{a \rightarrow 0} \int_a^{1/\pi} \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx = \lim_{a \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x} \Big|_a^{1/\pi} = \lim_{a \rightarrow 0} \left( \cos(\pi) - \cos \frac{1}{a} \right).$$

Der Grenzwert existiert nicht, da  $\cos(1/a)$  für  $a \rightarrow 0$  immer wieder alle Werte zwischen  $-1$  und  $+1$  annimmt. Also existiert auch kein Wert für das Integral.

d) Dieses Integral existiert:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty 2xe^{-x^2} dx &= \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a 2xe^{-x^2} dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \left( -e^{-x^2} \Big|_0^a \right) \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \left( -e^{-a^2} + e^0 \right) = 0 + 1 = 1. \end{aligned}$$

---

### Aufgabe 8.3: Äquipotentialfläche und Tangentialebene

Gegeben seien die Funktion  $f(x, y, z) = y^2 - xz$  und der Punkt  $\mathbf{p}_0 = (1, -2, 3)^\top$ .

- a) Bestimmen Sie die Äquipotentialfläche der Funktion  $f$  durch den Punkt  $\mathbf{p}_0$ :

$$\mathbf{F} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = f(\mathbf{p}_0)\}.$$

Skizzieren Sie die Schnitte der Fläche  $\mathbf{F}$  mit zur  $xy$ -Ebene parallelen Ebenen, d. h. für konstante  $z$ -Werte. (z. B.  $z = 0 \pm, 1 \pm, 2 \pm, 3 \pm$  und  $z \rightarrow \infty$ )

- b) Bestimmen Sie  $\nabla f(\mathbf{p}_0)$ .
- c) Bestimmen Sie die Hessesche Normalform der Tangentialebene  $\mathbf{E}$  an  $\mathbf{F}$  im Punkt  $\mathbf{p}_0$ .
- d) Bestimmen Sie den Abstand der Tangentialebene  $\mathbf{E}$  zum kritischen Punkt der Funktion  $f$ .

### Lösung 8.3:

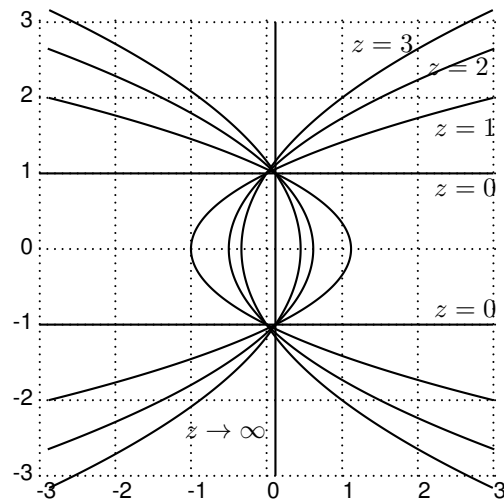
- a) Mit  $f(\mathbf{p}_0) = 1$  ergibt sich die Äquipotentialfläche zu

$$\mathbf{F} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid y^2 - xz = 1\}.$$

Für konstante  $z$ -Werte ergeben sich für die Schnittkurven Parabeln ( $z \neq 0$ ):

$$x = \frac{y^2 - 1}{z},$$

während sich für  $z = 0$  die Geraden  $y = \pm 1$  ergeben:



- b) Es ist

$$\nabla f(x, y, z) = (-z, 2y, -x)^\top \text{ und damit } \nabla f(\mathbf{p}_0) = (-3, -4, -1)^\top.$$

- c) Die Ebene  $\mathbf{E}$  hat den Normalenvektor  $\nabla f(\mathbf{p}_0)$ , dessen Normierung

$$\mathbf{n}_0 = \frac{1}{\sqrt{26}} \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ergibt und enthält den Punkt  $\mathbf{p}_0$ . Ihre Hessesche Normalform ist also

$$\mathbf{E} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \langle \mathbf{x} - \mathbf{p}_0, \mathbf{n}_0 \rangle = 0\} \\ = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \left\langle \begin{pmatrix} x-1 \\ y+2 \\ z-3 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{26}} \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \right\}.$$

- d) Ein kritischer Punkt erfüllt die Bedingung  $\nabla f(\mathbf{x}) = 0$ . Damit ist  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  der einzige kritische Punkt. Der Abstand ergibt sich aus dem Skalarprodukt der Hesseschen Normalform:

$$d = |\langle \mathbf{0} - \mathbf{p}_0, \mathbf{n}_0 \rangle| = \frac{1}{\sqrt{26}} |-2| = \sqrt{\frac{2}{13}}.$$

#### Aufgabe 8.4: Partielle Ableitungen

Gegeben sei die Funktion

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \cdot \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Berechnen Sie  $f_{xy}(x, y)$  für alle  $(x, y)^\top \in \mathbb{R}^2$  und untersuchen Sie, wo

$$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$$

gilt.

Sind die zweiten Ableitungen von  $f$  stetig in  $(0, 0)^\top$ ?

Hinweis: Berechnen Sie die Ableitungen im Ursprung  $(0, 0)^\top$  über die Grenzwert-Definition.

#### Lösung 8.4:

Für  $(x, y)^\top \neq (0, 0)^\top$  gilt

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= \frac{(3x^2y - y^3)(x^2 + y^2) - 2x(x^3y - y^3x)}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= \frac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2}. \end{aligned}$$

Wegen  $f(x, y) = -f(y, x)$  gilt

$$f_y(x, y) = -\partial_1 f(y, x) = \frac{x^5 - 4y^2x^3 - y^4x}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} f_{xy}(x, y) &= \frac{(x^4 + 12x^2y^2 - 5y^4) \cdot (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 + y^2) \cdot 2y \cdot (x^4y + 4x^2y^3 - y^5)}{(x^2 + y^2)^4} \\ &= \frac{x^6 + 9x^4y^2 - 9x^2y^4 - y^6}{(x^2 + y^2)^3} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} f_{yx}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} (f_y(x, y)) = \frac{\partial}{\partial x} (-\partial_1 f(y, x)) \\ &= -\partial_2 \partial_1 f(y, x) = \partial_2 \partial_1 f(x, y) = f_{xy}(x, y). \end{aligned}$$

Die zweiten Ableitungen sind für  $(x, y)^\top \neq (0, 0)^\top$  stetig, deswegen gilt auch

$$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y).$$

Im Ursprung hat man zunächst

$$\begin{aligned} f_x(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h(h^2 + 0)} = 0 \\ f_y(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h(0 + h^2)} = 0. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für die zweite Ableitung

$$\begin{aligned} f_{xy}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_x(0, h) - f_x(0, 0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{1}{h} \left( \frac{-h^5}{h^4} - 0 \right) \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h^5}{h^5} = -1. \end{aligned}$$

Vertauscht man die Reihenfolge der Ableitungen, ergibt sich

$$\begin{aligned} f_{yx}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_y(h, 0) - f_y(0, 0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{1}{h} \left( \frac{h^5}{h^4} - 0 \right) \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^5}{h^5} = 1. \end{aligned}$$

Also gilt im Ursprung

$$f_{xy}(0, 0) \neq f_{yx}(0, 0).$$

Die Ableitungen können also nicht stetig sein, da die Reihenfolge gemäß Satz von Schwarz sonst egal wäre.

---

### Aufgabe 8.5: Richtungsableitungen

a) Gegeben seien die skalarwertigen Funktionen

$$f(x, y, z) = y^2 - xz \quad \text{und} \quad g(x, y, z) = x^2 \sin(y) + \cos(z).$$

Berechnen Sie die Richtungsableitung beider Funktionen in Richtung  $\mathbf{h} := (-2, 3, 4)^\top$ .

### Lösung 8.5:

a) Zunächst berechnen wir die Gradienten der beiden Funktionen:

$$\begin{aligned}\nabla f(x, y, z) &= (-z, 2y, -x)^\top \\ \nabla g(x, y, z) &= (2x \sin(y), x^2 \cos(y), -\sin(z))^\top.\end{aligned}$$

Desweiteren benötigen wir den Normalenvektor in Richtung  $\mathbf{h}$ :

$$\hat{\mathbf{h}} = \frac{1}{\sqrt{4+9+16}}(-2, 3, 4)^\top = \frac{1}{\sqrt{29}}(-2, 3, 4)^\top.$$

Damit ergeben sich dann die Richtungsableitungen:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \hat{\mathbf{h}}}(x, y, z) &= \left\langle \hat{\mathbf{h}}, \nabla f(x, y, z) \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{29}}(2z + 6y - 4x) \\ \frac{\partial g}{\partial \hat{\mathbf{h}}}(x, y, z) &= \left\langle \hat{\mathbf{h}}, \nabla g(x, y, z) \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{29}}(-4x \sin(y) + 3x^2 \cos(y) - 4 \sin(z)).\end{aligned}$$

---

### Aufgabe 8.6: Partielle Ableitungen

Bestimmen Sie zu jeder der folgenden Funktionen  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  die ersten und zweiten Ableitungen

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix}.$$

$$f(x, y) = e^{2xy^2} \qquad g(x, y) = x^2 \sin(2x + y)$$

$$h(x, y) = \sin(2x) \cos(3y) \qquad k(x, y, z) = xy^2 z^3$$

$$l(x, y) = \frac{xy}{xy - 1}$$

### Lösung 8.6:

$$\nabla f(x, y) = (2y^2 e^{2xy^2}, 4xy e^{2xy^2})^\top$$

$$\left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right) = \begin{pmatrix} 4y^4 e^{2xy^2} & (4y + 8xy^3) e^{2xy^2} \\ (4y + 8xy^3) e^{2xy^2} & (4x + 16x^2 y^2) e^{2xy^2} \end{pmatrix}$$

$$\nabla g(x, y) = (2x \sin(2x + y) + 2x^2 \cos(2x + y), x^2 \cos(2x + y))^\top$$

$$\left( \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j} \right) = \begin{pmatrix} 2 \sin(2x + y) + 8x \cos(2x + y) - 4x^2 \sin(2x + y) & \cdots \\ 2x \cos(2x + y) - 2x^2 \sin(2x + y) & \cdots \\ \cdots & 2x \cos(2x + y) - 2x^2 \sin(2x + y) \\ \cdots & -x^2 \sin(2x + y) \end{pmatrix}$$

$$\nabla h(x, y) = (2 \cos(2x) \cos(3y), -3 \sin(2x) \sin(3y))^\top$$

$$\left( \frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j} \right) = \begin{pmatrix} -4 \sin(2x) \cos(3y) & -6 \cos(2x) \sin(3y) \\ -6 \cos(2x) \sin(3y) & -9 \sin(2x) \cos(3y) \end{pmatrix}$$

$$\nabla k(x, y, z) = (y^2 z^3, 2xyz^3, 3xy^2 z^2)^\top$$

$$\left( \frac{\partial^2 k}{\partial x_i \partial x_j} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 2yz^3 & 3y^2 z^2 \\ 2yz^3 & 2xz^3 & 6xyz^2 \\ 3y^2 z^2 & 6xyz^2 & 6xy^2 z \end{pmatrix}$$

$$\nabla l(x, y) = \left( \frac{y(xy - 1) - y \cdot xy}{(xy - 1)^2}, \frac{x(xy - 1) - x \cdot xy}{(xy - 1)^2} \right)^\top = \left( \frac{-y}{(xy - 1)^2}, \frac{-x}{(xy - 1)^2} \right)^\top$$

$$\left( \frac{\partial^2 l}{\partial x_i \partial x_j} \right) = \begin{pmatrix} \frac{2y^2}{(xy-1)^3} & \frac{-(xy-1)^2 - (-y) \cdot 2(xy-1) \cdot x}{(xy-1)^4} \\ \frac{1+xy}{(xy-1)^3} & \frac{2x^2}{(xy-1)^3} \end{pmatrix} = \frac{1}{(xy-1)^3} \begin{pmatrix} 2y^2 & 1+xy \\ 1+xy & 2x^2 \end{pmatrix}$$

### Aufgabe 8.7: Partielle Ableitungen

Bestimmen Sie alle ersten und zweiten partiellen Ableitungen der folgenden reellen Funktionen und geben Sie jeweils die ersten und zweiten Ableitungen in Matrixschreibweise an:

$$\begin{array}{ll} \text{i)} & f(x, y) = e^{2xy^2} \\ \text{ii)} & g(x, y) = x^2 \sin(2x + y) \\ \text{iii)} & h(x, y) = \sin(2x) \cos(3y) \\ \text{iv)} & k(x, y, z) = x y^2 z^3 \\ \text{v)} & j(u, v) = \frac{uv}{uv - 1} \end{array}$$

### Lösung 8.7:

#### Anmerkungen:

1. Die Ableitung (Gradient) einer Funktion mehrerer Variablen ist ein Vektor (Spaltenvektor):

$$\begin{aligned} f(x, y, \dots) \Rightarrow f'(x, y, \dots) &= (\partial_x f, \partial_y f, \dots) = (\nabla f(x, y, \dots))^\top \\ \Rightarrow f''(x, y, \dots) &= \mathbf{H}(x, y, \dots) = \begin{pmatrix} \partial_{xx} f & \partial_{xy} f & \dots \\ \partial_{yx} f & \partial_{yy} f & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Wenn die 2. partiellen Ableitungen **stetig** sind, dann ist die Hesse-Matrix  $\mathbf{H}(x, y, \dots)$  symmetrisch.

i)

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y) &= (2y^2 e^{2xy^2}, 4xy e^{2xy^2})^\top \\ \mathbf{H}_f(x, y) &= \begin{pmatrix} 4y^4 e^{2xy^2} & (4y + 8xy^3) e^{2xy^2} \\ (4y + 8xy^3) e^{2xy^2} & (4x + 16x^2 y^2) e^{2xy^2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} \nabla g(x, y) &= (2x \sin(2x + y) + 2x^2 \cos(2x + y), x^2 \cos(2x + y))^\top \\ \mathbf{H}_g(x, y) &= \begin{pmatrix} (2 - 4x^2) \sin(2x + y) + 8x \cos(2x + y) & 2x \cos(2x + y) - 2x^2 \sin(2x + y) \\ 2x \cos(2x + y) - 2x^2 \sin(2x + y) & -x^2 \sin(2x + y) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned} \nabla h(x, y) &= (2 \cos(2x) \cos(3y), -3 \sin(2x) \sin(3y))^\top \\ \mathbf{H}_h(x, y) &= \begin{pmatrix} -4 \sin(2x) \cos(3y) & -6 \cos(2x) \sin(3y) \\ -6 \cos(2x) \sin(3y) & -9 \sin(2x) \cos(3y) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

iv)

$$\begin{aligned} \nabla k(x, y, z) &= (y^2 z^3, 2xy z^3, 3xy^2 z^2)^\top \\ \mathbf{H}_k(x, y, z) &= \begin{pmatrix} 0 & 2yz^3 & 3y^2 z^2 \\ 2yz^3 & 2xz^3 & 6xyz^2 \\ 3y^2 z^2 & 6xyz^2 & 6xy^2 z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

v)

$$\begin{aligned} \nabla j(u, v) &= \frac{1}{(uv - 1)^2} \cdot (-v, -u)^\top, \\ \mathbf{H}_j(u, v) &= \frac{1}{(uv - 1)^3} \cdot \begin{pmatrix} 2v^2 & uv + 1 \\ uv + 1 & 2u^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$


---