

Mathematik II/B (WI/ET)

Blatt 1

WT 2025

Funktionsgraphen, Grenzwerte, Folgen, Differenzieren

Einführende Bemerkungen

- Vermeiden Sie die Verwendung von Taschenrechnern oder Online-Ressourcen.

Aufgabe 1.1:

Stellen Sie jede der folgenden Funktionen einzeln in einem Koordinatensystem dar, beschriften Sie die Datenachsen und heben Sie signifikante Werte hervor (z.B. Maxima/Minima, Nullstellen, usw.).

- a) $p_1(x) = 2x - 1$
- b) $p_2(x) = (x - 2)^2 - 1$
- c) $p_3(x) = x^3$
- d) $p_4(x) = -x^3$
- e) $f_1(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$
- f) $f_2(x) = -\cos(x)$
- g) $f_3(x) = \sin(x)$
- h) $f_4(x) = \tan x$
- i) $g_1(x) = \sqrt{x}$
- j) $g_2(x) = \frac{1}{x}$
- k) $g_3(x) = \frac{1}{x^2}$

- l) $h_1(x) = \ln x$
- m) $h_2(x) = \ln x + 1$
- n) $h_3(x) = \ln(x + 1)$
- o) $i_1(x) = \exp(x)$
- p) $i_2(x) = \exp(-x)$

Aufgabe 1.2: Grenzwertdefinition

Bestimmen Sie zu den unten angegebenen Folgen (a_n) mit dem Grenzwert a und den angegebenen Werten für k jeweils ein N so, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > N$ gilt

$$|a_n - a| < 10^{-k}.$$

- a) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}, a = 0, k = 2$
- b) $a_n = \frac{3n+1}{n+1}, a = 3, k = 4$
- c) $a_n = \frac{(-1)^n}{n!} + 1, a = 1, k = 3$

Aufgabe 1.3:

- a) Zeigen Sie anhand der Definition der Konvergenz, dass gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + n - 12}{n^2 - 8} = 2.$$

- b) Zeigen Sie: Konvergiert $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ gegen a , so konvergiert auch $\{|a_n|\}_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $|a|$.
- c) Gilt die Umkehrung von b)? Begründen Sie Ihre Aussage mit einem Beweis oder einem Gegenbeispiel.

Aufgabe 1.4: Differenzieren (Schulstoff)

Bestimmen Sie jeweils die erste Ableitung der folgenden Funktionen:

$$\begin{aligned} f_1(t) &= -\frac{1}{2}t^2 - 2t + 6, & f_2(t) &= \sqrt[3]{t} + 1, & f_3(t) &= \sin\left(\frac{t}{4\pi}\right), \\ f_4(t) &= e^{t^2}, & f_5(t) &= (\ln(t))^2, & f_6(t) &= \ln(e^t), \\ f_7(t) &= t^3 \ln(t) - \frac{1}{2}t^2, & f_8(t) &= \ln(\sqrt{t}), & f_9(t) &= \sin(t) \cdot t^2, \\ f_{10}(t) &= \frac{1}{2}(t^2 - 2)^2. \end{aligned}$$

Aufgabe 1.5: Differenzieren (Schulstoff)

Bestimmen Sie jeweils die erste Ableitung. Zur Kontrolle sind die Werte der Ableitung an Kontrollpunkten angegeben. (Eventuell notwendige Beschränkungen des Definitionsbereiches sind nicht angegeben.)

$$\begin{array}{lll} f_1(t) = 3t^4 - 4t + 7, & f_2(t) = (2t - 3)^4, & f_3(t) = t^3(t + 3)^4, \\ f_4(t) = 3 \cos(2t), & f_5(t) = \sin^2(3t), & f_6(t) = \tan(2 - t/2), \\ f_7(t) = \frac{2t - 3}{(t + 2)^3}, & f_8(t) = \frac{4t \sin(t)}{\cos(2t)}, & f_9(t) = t^2 e^{\sqrt{t}}, \\ f_{10}(t) = \sqrt{t \sqrt{t \sqrt{t}}}, & f_{11}(t) = e^{\frac{1}{1+t^2}}, & f_{12}(t) = \tan(t), \\ f_{13}(t) = \frac{t + \cos(t) \sin(t)}{2}, & f_{14}(t) = \frac{t^2 - t + 2}{2t + 3}, & f_{15}(t) = \frac{\sin^2(t)}{\cos(t)}. \end{array}$$

Ergebnisse zu Aufgabe 1.2:

a) $N = 10000$, b) $N = 19999$, c) $N = 6$

Ergebnisse zu Aufgabe 1.3:

c) Betrachten Sie $a_n = (-1)^n$.

Ergebnisse zu Aufgabe 1.4:

$$\begin{array}{lll} f'_1(t) = -(t + 2), & f'_2(t) = \frac{1}{3} t^{-\frac{2}{3}}, & f'_3(t) = \frac{1}{4\pi} \cdot \cos\left(\frac{t}{4\pi}\right), \\ f'_4(t) = 2te^{t^2}, & f'_5(t) = \frac{2 \ln(t)}{t}, & f'_6(t) = 1, \\ f'_7(t) = t^2(3 \ln(t) + 1) - t, & f'_8(t) = \frac{1}{2t}, & f'_9(t) = t(2 \sin(t) + t \cos(t)), \\ f'_{10}(t) = 2t(t^2 - 2). \end{array}$$

Ergebnisse zu Aufgabe 1.5:

$$\begin{array}{lll} f'_1(2) = 92, & f'_2(2) = 8, & f'_3(2) = 11500, \\ f'_4(\pi/3) = -3\sqrt{3}, & f'_5(\pi/3) = 0, & f'_6(4 + 2\pi) = -1/2, \\ f'_7(2) = 5/256, & f'_8(\pi/3) = \frac{20\pi}{3} - 4\sqrt{3}, & f'_9(4) = 12e^2, \\ f'_{10}(256) = \frac{7}{16}, & f'_{11}(2) = -\frac{4e^{1/5}}{25}, & f'_{12}(\pi/3) = 4, \\ f'_{13}(\pi/3) = \frac{1}{4}, & f'_{14}(2) = \frac{13}{49}, & f'_{15}(\pi/3) = \frac{5\sqrt{3}}{2} \end{array}$$