Aufgabe 1: Ableitungen

Man berechne die erste Ableitung der folgenden Funktionen

a) $f(x) = x^x$

b) $g(x) = x^{3^x}$

c) $h(x) = x^{\cos(x)}$

Lösung 1:

Wir nutzen die folgende Identität:

$$a^b = \mathrm{e}^{b\ln(a)}\,.$$

a) Wir schreiben zunächst:
$f(x) = \mathrm{e}^{x\ln(x)}$
Mit der Ketten- und der Produktregel erhalten wir die Ableitung
$f'(x) = x^x\left(\ln(x) + 1\right)$

b) Wir schreiben $g(x)$ als:
$g(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{x\ln(3)}\ln(x)}$
Mit der Ketten- und der Produktregel erhalten wir die Ableitung
$g'(x) = x^{3^x}\left(\ln(3)\,3^x\ln(x) + \dfrac{3^x}{x}\right)$

c) Wir schreiben $h(x)$ als:
$h(x) = \mathrm{e}^{\cos(x)\ln(x)}$
Mit der Ketten- und Produktregel erhalten wir die Ableitung
$h'(x) = x^{\cos(x)}\left(\dfrac{\cos(x)}{x} - \ln(x)\sin(x)\right)$

Aufgabe 2: Bewegung

Ein Elektron bewegt sich mit der Geschwindigkeit

$$v(t) = e^{-\cosh(3t^2+2t+1)},$$

wobei t in Sekunden gegeben ist.

a) Wie hoch ist seine Beschleunigung nach $t = 10$ Sekunden?

b) Kommt das Elektron jemals zur Ruhe? Man begründe die Antwort.

Lösung 2:

Die Beschleunigung ist

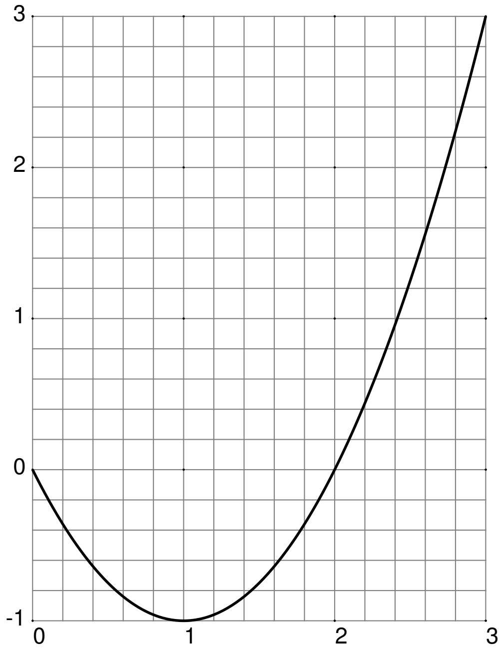
$$a(t) = -(6t+2)\sinh(3t^2+2t+1)e^{-\cosh(3t^2+2t+1)}$$

Nach 10 Sekunden hat das Elektron dann eine Beschleunigung von

$$a(10) = 10^{10^{138,75}}$$

Aufgabe 3: Sekantensteigung

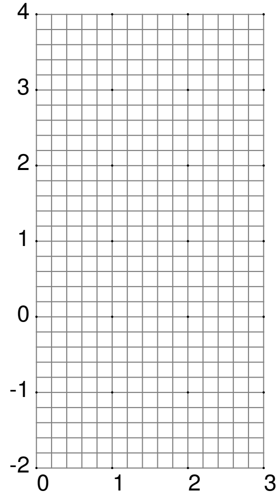
a) Gegeben ist der Funktionsgraph der Funktion f.



Zeichnen Sie an den Punkten

$$(x_j, y_j) \text{ mit } x_j = j,\ y_j = f(x_j) \text{ für } j = 0, 1, 2, 3$$

Steigungsdreiecke mit $\Delta x = 1$ an den Funktionsgraphen und berechnen Sie aus x- und y-Achsenabschnitt die Sekantensteigung $s(x_j)$.
Wiederholen Sie dies für $\Delta x = \frac{1}{2}$ und für $\Delta x = \frac{1}{4}$. Skizzieren Sie die so berechneten Steigungswerte im zweiten Graphen.

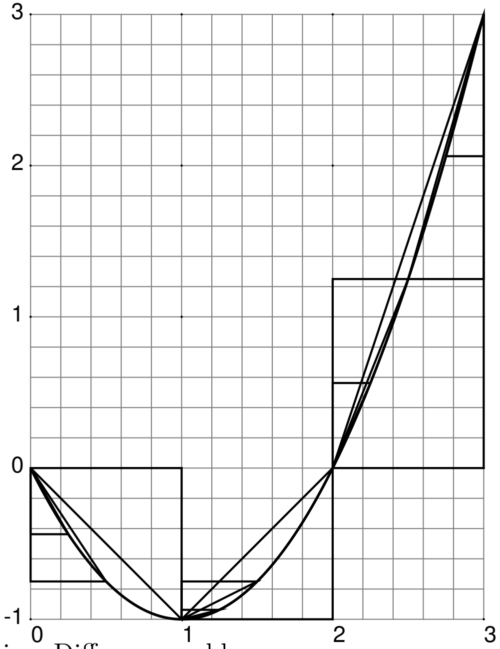


b) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $f(x) = x^2 - 2x$ anhand der Definition als Grenzwert eines Differenzenquotienten. Skizzieren Sie auch diese im zweiten Graphen.

Lösung 3:

a) Zunächst werden die Steigungsdreiecke eingezeichnet. Dabei ist zu beachten, dass für $x = 3$ das Steigungsdreieck nach links gezeichnet wird, da rechts des Punktes der Funktionsverlauf nicht gegeben ist. Daher stimmen für $\Delta x = 1$ die Steigungsdreiecke in den Punkten x_2 und x_3 überein.

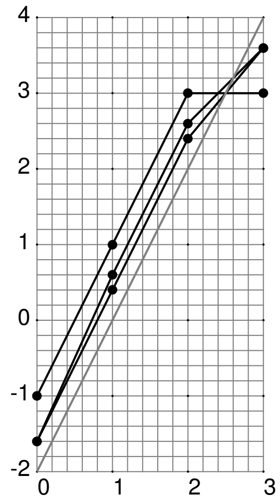
b)



Daraus lassen sich die y-Differenzen ablesen:

c)

	$\Delta x = 1$		$\Delta x = \frac{1}{2}$		$\Delta x = \frac{1}{4}$	
x_j	Δy_j	$s(x_j)$	Δy_j	$s(x_j)$	Δy_j	$s(x_j)$
0	-1.0	-1.0	-0.8	-1.6	-0.4	-1.6
1	1.0	1.0	0.3	0.6	0.1	0.4
2	3.0	3.0	1.3	2.6	0.6	2.4
3	3.0	3.0	1.8	3.6	0.9	3.6



d) Die Ableitung von $f(x)$ ergibt sich zu:

$$f'(x) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} = \lim_{t\to x} \frac{(x+t)^2 - 2(x+t) - (x^2 - 2x)}{t}$$
$$= \lim_{t\to x} \frac{2xt + t^2 - 2t}{t} = \lim_{t\to x} (2x + t - 2) = 2x - 2$$

Diese Funktion ist oben in grau eingezeichnet.

Aufgabe 4: Taylor-Entwicklung in einer Variablen

Bestimmen Sie die Taylor-Entwicklung zweiter Ordnung der Exponentialfunktion e^x um den Punkt $x_0 = 0$ in dem Intervall $0 \leq x \leq 1$ einschließlich des Restgliedtermes. Zeigen Sie damit die Abschätzung:

$$\mathrm{e} \leq 3.$$

Lösung 4:

Wir beginnen mit der Taylor-Entwicklung der Exponentialfunktion in dem Intervall $0 \leq x \leq 1$:

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{\mathrm{e}^\xi}{3!}x^3,$$

mit $0 \leq \xi \leq 1$.
Da die Exponentialfunktion monoton steigend ist und $\xi \leq 1$, gilt $\mathrm{e}^\xi \leq \mathrm{e}^1$. Daher gilt die folgende Abschätzung

$$\mathrm{e}^x \leq 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{\mathrm{e}}{3!}x^3,$$

für $0 \leq x \leq 1$. Der obige Ausdruck an der Stelle $x = 1$ ausgewertet führt zu

$$\begin{aligned} \mathrm{e} &\leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{\mathrm{e}}{6}, \\ \frac{5}{6}\,\mathrm{e} &\leq \frac{5}{2}, \\ \mathrm{e} &\leq 3. \end{aligned}$$

Aufgabe 5: Asymptoten

Man bestimme die (waagerechten bzw. senkrekten bzw.ß schrägen) Asymptoten der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = \frac{x}{4+x^2}$

b) $g(x) = e^{-x^2}$

c) $h(x) = \frac{x^2-3x}{2x-2}$

d) $l(x) = x^2 e^{-x}$

Lösung 5:

Aufgabe 6: Partielle Ableitungen

Bestimmen Sie zu jeder der folgenden Funktionen $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die ersten und zweiten Ableitungen

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_n} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_n\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_n\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \mathrm{e}^{2xy^2} & g(x,y) &= x^2\sin(2x+y) \\ h(x,y) &= \sin(2x)\cos(3y) & k(x,y,z) &= xy^2z^3 \\ l(x,y) &= \frac{xy}{xy-1} \end{aligned}$$

Lösung 6:

$$\begin{aligned}
\nabla f(x,y) &= (2y^2\mathrm{e}^{2xy^2},\, 4xy\mathrm{e}^{2xy^2})^\top \\
\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}\right) &= \begin{pmatrix} 4y^4\mathrm{e}^{2xy^2} & (4y+8xy^3)\mathrm{e}^{2xy^2} \\ (4y+8xy^3)\mathrm{e}^{2xy^2} & (4x+16x^2y^2)\mathrm{e}^{2xy^2} \end{pmatrix} \\
\nabla g(x,y) &= (2x\sin(2x+y)+2x^2\cos(2x+y),\, x^2\cos(2x+y))^\top \\
\left(\frac{\partial^2 g}{\partial x_i\partial x_j}\right) &= \begin{pmatrix} 2\sin(2x+y)+8x\cos(2x+y)-4x^2\sin(2x+y) & \ldots \\ 2x\cos(2x+y)-2x^2\sin(2x+y) & \ldots \end{pmatrix. \\
&\qquad \begin{matrix} \ldots & 2x\cos(2x+y)-2x^2\sin(2x+y) \\ \ldots & -x^2\sin(2x+y) \end{matrix}\Bigg) \\
\nabla h(x,y) &= (2\cos(2x)\cos(3y),\, -3\sin(2x)\sin(3y))^\top \\
\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x_i\partial x_j}\right) &= \begin{pmatrix} -4\sin(2x)\cos(3y) & -6\cos(2x)\sin(3y) \\ -6\cos(2x)\sin(3y) & -9\sin(2x)\cos(3y) \end{pmatrix} \\
\nabla k(x,y,z) &= (y^2z^3,\, 2xyz^3,\, 3xy^2z^2)^\top \\
\left(\frac{\partial^2 k}{\partial x_i\partial x_j}\right) &= \begin{pmatrix} 0 & 2yz^3 & 3y^2z^2 \\ 2yz^3 & 2xz^3 & 6xyz^2 \\ 3y^2z^2 & 6xyz^2 & 6xy^2z \end{pmatrix} \\
\nabla l(x,y) &= \left(\frac{y(xy-1)-y\cdot xy}{(xy-1)^2},\, \frac{x(xy-1)-x\cdot xy}{(xy-1)^2}\right)^\top = \left(\frac{-y}{(xy-1)^2},\, \frac{-x}{(xy-1)^2}\right)^\top \\
\left(\frac{\partial^2 l}{\partial x_i\partial x_j}\right) &= \begin{pmatrix} \frac{2y^2}{(xy-1)^3} & \frac{-(xy-1)^2-(-y)\cdot 2(xy-1)\cdot x}{(xy-1)^4} \\ \frac{1+xy}{(xy-1)^3} & \frac{2x^2}{(xy-1)^3} \end{pmatrix} = \frac{1}{(xy-1)^3}\begin{pmatrix} 2y^2 & 1+xy \\ 1+xy & 2x^2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Aufgabe 7: alte Klausuraufgabe

Gegeben sei die Funktion

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad \text{mit } g(x,y) = (y - x^2)(y - 2x^2).$$

a) Zeigen Sie, dass die Funktion $g(x,y)$ auf allen Geraden durch den Ursprung $(0,0)$ lokale Minima hat.

b) Hat die Funktion $g(x,y)$ im Ursprung ein lokales Minimum?
Hinweis: Untersuchen Sie die Funktion längs der Kurve $\boldsymbol{q}(t) = (t, 3t^2/2)^\top$.

c) Berechnen Sie das Taylor-Polynom zweiten Grades der Funktion $g(x,y)$ im Punkt $(1,1)$.

Lösung 7:

a) Eine Gerade durch den Ursprung kann durch $\boldsymbol{k}(t) = (at, bt)^\top, \quad t \in \mathbb{R}$ parametrisiert werden. Der Funktionsverlauf längs dieser Geraden ist dann

$$\varphi(t) = g(\boldsymbol{k}(t)) = (bt - a^2t^2)(bt - 2a^2x^2) = 2a^4t^4 - 3a^2bt^3 + b^2t^2$$

mit $\varphi'(t) = 8a^4t^3 - 9a^2bt^2 + 2b^2t$ und $\varphi''(t) = 24a^4t^2 - 18a^2b^2t + 2b^2$.
Wegen $\varphi'(0) = 0$ und $\varphi''(0) = 2b^2 > 0$ liegt für $b \neq 0$ ein Minimum der Funktion im Ursprung vor.
Falls $b = 0$ und $a \neq 0$ ist, hat man $\varphi(t) = 2a^4t^4$. Auch diese Funktion hat im Ursprung ihr Minimum.

b) Nähert man sich dem Ursprung auf der Kurve $\boldsymbol{q}(t) = (t, 3t^2/2)^\top, \qquad t \in \mathbb{R}$, hat man

$$\psi(t) = g(\boldsymbol{q}(t)) = \left(\frac{3t^2}{2} - t^2\right)\left(\frac{3t^2}{2} - 2t^2\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) t^4 = -\frac{t^4}{4} < 0 \text{ für } t > 0.$$

In jeder Umgebung von $(0,0)^\top$ hat man also auch Funktionswerte $g(x,y) < 0$. Im Ursprung kann also kein Minimum vorliegen.

c) Wir benötigen die ersten beiden Ableitungen von $g(x,y)$:

$$\begin{aligned}
g(x,y) &= (y - x^2)(y - 2x^2) && \Rightarrow \quad g(1,1) = 0 \\
\nabla g(x,y) &= \begin{pmatrix} -2x(y - 2x^2) - 4x(y - x^2) \\ (y - 2x^2) + (y - x^2) \end{pmatrix} && \Rightarrow \quad \nabla g(1,1) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \\
\boldsymbol{H}_g(x,y) &= \begin{pmatrix} -2y + 12x^2 - 4y + 12x^2 & -6x \\ -6x & 2 \end{pmatrix} && \Rightarrow \quad \boldsymbol{H}_g(1,1) = \begin{pmatrix} 18 & -6 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

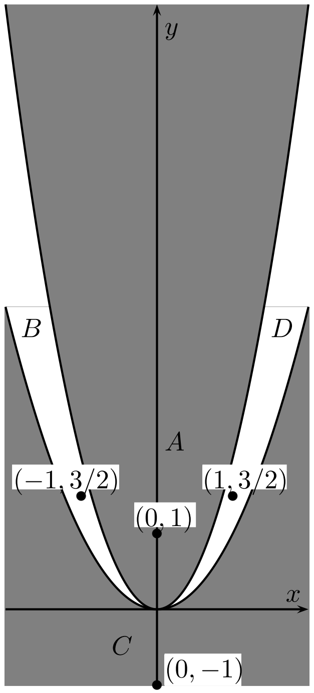
Das Taylorpolynom ist damit

$$\begin{aligned}
T_2(x,y) =& g(1,1) + \nabla g(1,1) \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(x-1, y-1)\boldsymbol{H}_g(1,1)\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} \\
=& 2(x-1) - (y-1) + 9(x-1)^2 + (y-1)^2 - 6(x-1)(y-1).
\end{aligned}$$

Zusatzüberlegungen zum Sattelpunkt $(0,0)$: Es werden die Äquipotentiallinien $f(x,y) = 0$ betrachtet:

$$\begin{aligned}
& f(x,y) = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & 0 = (y - x^2)(y - 2x^2) \\
\Leftrightarrow \quad & y = x^2 \text{ oder } y = 2x^2
\end{aligned}$$

Diese teilen die Ebene in vier Bereiche A, B, C, D. (siehe Skizze)



Da $f(x,y)$ stetig ist, ist die Funktion in jedem dieser Bereiche jeweils überall größer oder überall kleiner Null. Wir prüfen die Vorzeichen an einzelnen Punkten nach:

$$\begin{aligned}
A: \quad && f(0,1) =& 1 > 0 \\
B: \quad && f(-1,3/2) =& -\frac{1}{4} < 0 \\
C: \quad && f(0,-1) =& 1 > 0 \\
D: \quad && f(1,3/2) =& -\frac{1}{4} < 0
\end{aligned}$$

Da nun jede Umgebung U des Punktes $(0,0)^\top$ Teile aller vier Mengen A, B, C und D enthält, nimmt die Funktion $f(x,y)$ auch in U stets beide Vorzeichen an. Dies entspricht aber genau der Definition eines Sattelpunktes.

Aufgabe 8: alte Klausuraufgabe

Gegeben sei die Funktion

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad \text{mit } g(x,y) = (y-x^2)(y-2x^2).$$

a) Zeigen Sie, dass die Funktion $g(x,y)$ auf allen Geraden durch den Ursprung $(0,0)$ lokale Minima hat.

b) Hat die Funktion $g(x,y)$ im Ursprung ein lokales Minimum?
Hinweis: Untersuchen Sie die Funktion längs der Kurve $\boldsymbol{q}(t) = (t, 3t^2/2)^\top$.

Lösung 8:

a) Eine Gerade durch den Ursprung kann durch $\boldsymbol{k}(t) = (at, bt)^\top, \quad t \in \mathbb{R}$ parametrisiert werden. Der Funktionsverlauf längs dieser Geraden ist dann

$$\varphi(t) = g(\boldsymbol{k}(t)) = (bt - a^2t^2)(bt - 2a^2x^2) = 2a^4t^4 - 3a^2bt^3 + b^2t^2$$

mit $\varphi'(t) = 8a^4t^3 - 9a^2bt^2 + 2b^2t$ und $\varphi''(t) = 24a^4t^2 - 18a^2b^2t + 2b^2$.
Wegen $\varphi'(0) = 0$ und $\varphi''(0) = 2b^2 > 0$ liegt für $b \neq 0$ ein Minimum der Funktion im Ursprung vor.
Falls $b = 0$ und $a \neq 0$ ist, hat man $\varphi(t) = 2a^4x^4$. Auch diese Funktion hat im Ursprung ihr Minimum.

b) Nähert man sich dem Ursprung auf der Kurve $\boldsymbol{q}(t) = (t, 3t^2/2)^\top, \qquad t \in \mathbb{R}$, hat man

$$\psi(t) = g(\boldsymbol{q}(t)) = \left(\frac{3t^2}{2} - t^2\right)\left(\frac{3t^2}{2} - 2t^2\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) t^4 = -\frac{t^4}{4} < 0 \text{ für } t > 0.$$

In jeder Umgebung von $(0,0)^\top$ hat man also auch Funktionswerte $g(x,y) < 0$. Im Ursprung kann also kein Minimum vorliegen.

Aufgabe 9:

Bestimmen und klassifizieren Sie alle stationären Punkte der Funktion

$$g(x,y) = 3x^2 - 2xy - \frac{y^3}{6}.$$

Lösung 9:

Die ersten beiden Ableitungen von g sind gegeben durch

$$\nabla g(x,y) = \begin{pmatrix} 6x - 2y \\ -2x - y^2/2 \end{pmatrix} \text{ und } \boldsymbol{H}_g(x,y) = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & -y \end{pmatrix}.$$

An den stationären Punkten gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{0} =& \nabla g(x,y) = \begin{pmatrix} 6x - 2y \\ -2x - y^2/2 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \qquad y =& 3x,\ 9x^2 + 4x = 0 \\ \Leftrightarrow \qquad (x,y) =& (0,0) \text{ oder } (x,y) = \left(-\frac{4}{9}, -\frac{4}{3}\right) \end{aligned}$$

Um die Punkte zu charakterisieren wird dort die Hessematrix berechnet. Im ersten Punkt ist

$$\boldsymbol{H}_g(0,0) = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix ist indefinit, denn die Eigenwerte sind:

$$\lambda_1 = 3 + \sqrt{13} > 0 \quad \text{ und } \quad \lambda_2 = 3 - \sqrt{13} < 0.$$

Alternativ kann man die Indefinitheit zeigen durch

$$(1,0)\boldsymbol{H}_g(0,0)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 6 > 0$$

und andererseits

$$(1,2)\boldsymbol{H}_g(0,0)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -2 < 0.$$

Im Ursprung liegt also ein Sattelpunkt.
Im zweiten Punkt ist

$$\boldsymbol{H}_g(-4/9, -4/3) = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix ist diagonaldominant mit positiven Diagonalelementen, also positiv definit, somit liegt im Punkt $(-4/9, -4/3)$ ein Minimum. Die positive Definitheit kann auch über die Eigenwerte gezeigt werden. Die Eigenwerte sind:

$$\lambda_1 = \frac{1}{3}(11 + \sqrt{85}) > 0 \quad \text{ und } \quad \lambda_2 = \frac{1}{3}(11 - \sqrt{85}) > 0.$$

Aufgabe 10: Differentiation

a) Geben Sie Konstanten b, c, $d \in \mathbb{R}$ an, damit die Funktion

$$g(x) = \begin{cases} bx^3 + cx^2 + d & \text{für } x \le 1 \\ \ln x & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

auf $\mathbb{R}$ zweimal differenzierbar ist.
Ist $g(x)$ für diese Wahl auch dreimal differenzierbar?

b) Überprüfen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x \sin(1/x) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

in $x = 0$ stetig ist, aber *nicht* differenzierbar.
Hinweis: Betrachten Sie zur Untersuchung der Differenzierbarkeit die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n = \frac{1}{n\pi+\pi/2}$.

c) Die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

ist in $x = 0$ differenzierbar. Ist die Ableitung dort stetig? Hinweis: Betrachten Sie die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n = \frac{1}{2n\pi}$.

Lösung 10:

a) Außerhalb des kritischen Punktes $x = 1$ hat man

$$g'(x) = \begin{cases} 3bx^2 + 2cx & \text{für } x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

sowie

$$g''(x) = \begin{cases} 6bx + 2c & \text{für } x < 1 \\ -\frac{1}{x^2} & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

Da die Funktion zweimal differenzierbar sein soll, müssen $g(x)$ und $g'(x)$ stetig sein, im Punkt $x = 1$ muss also gelten:

$$g(1) = b + c + d = \ln 1 = 0 \text{ und } g'(1) = 3b + 2c = \frac{1}{1} = 1.$$

Aus der zweiten Relation erhält man $c = \frac{1-3b}{2}$.
Die linksseitige zweite Ableitung im Punkt $x = 1$ ist

$$\begin{aligned} g''_-(1) &= \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \frac{g'(x) - g'(1)}{x - 1} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \frac{3bx^2 + 2cx - 1}{x - 1} \\ &= \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \frac{3bx^2 + (1 - 3b)x - 1}{x - 1} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \frac{3b(x^2 - x) + x - 1}{x - 1} \\ &= \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} (3bx + 1) = 3b + 1 \end{aligned}$$

und die rechtsseitige zweite Ableitung:

$$\begin{aligned} g''_+(1) &= \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \frac{g'(x) - g'(1)}{x - 1} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \frac{\frac{1}{x} - 1}{x - 1} \\ &= \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \frac{1 - x}{x(x - 1)} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \left(-\frac{1}{x}\right) = -1 \end{aligned}$$

Beide Grenzwerte müssen übereinstimmen, damit $g''(1)$ sinnvoll definiert ist, also gilt

$$b = \frac{-2}{3} \Rightarrow c = \frac{3}{2} \Rightarrow d = -b - c = \frac{-5}{6}.$$

Man hat dann

$$g''(x) = \begin{cases} -4x + 3 & \text{für } x < 1 \\ -1 & \text{für } x = 1 \\ -\frac{1}{x^2} & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

Die linksseitige Ableitung dieser Funktion im Punkt $x = 1$ ist

$$\begin{aligned} g'''_-(1) &= \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \frac{g''(x) - g''(1)}{x - 1} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \frac{-4x + 3 - (-1)}{x - 1} \\ &= \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \frac{-4x + 4}{x - 1} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \left(-4\frac{x - 1}{x - 1}\right) = -4 \end{aligned}$$

und die rechtsseitige Ableitung:

$$\begin{aligned} g'''_+(1) &= \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \frac{g''(x) - g''(1)}{x - 1} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \frac{-\frac{1}{x^2} - (-1)}{x - 1} \\ &= \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \frac{x^2 - 1}{x^2(x - 1)} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \frac{x + 1}{x^2} = 2 \end{aligned}$$

Da die beiden Werte nicht übereinstimmen ($-4 \neq 2$), ist g'' im Punkt $x = 1$ nicht differenzierbar.

b) Die Funktion ist stetig in $x = 0$, denn $|\sin(1/x)| \leq 1$ und somit ist $|f(x) - f(0)| = |f(x)| \leq |x| \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$.
Der Differenzenquotient in $x_0 = 0$ ist

$$Q(x) := \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{x} f(x) = \sin(1/x).$$

Dieser Ausdruck konvergiert **nicht** f"ur $x \to 0$. Setzt man zum Beispiel $x_n = \frac{1}{n\pi + \pi/2}$, dann gilt $x_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$ und

$$Q(x_n) = \sin(n\pi + \pi/2) = \begin{cases} +1, & \text{für gerade } n \\ -1, & \text{für ungerade } n \end{cases}$$

c) Der Differenzenquotient in $x_0 = 0$ ist

$$Q(x) := \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{x} f(x) = x \sin(1/x).$$

Dies konvergiert f"ur $x \to 0$ gegen 0, wie schon in Teil a) gezeigt wurde. Damit ist f in $x_0 = 0$ differenzierbar und $f'(0) = 0$. Die Ableitung f"ur $x \neq 0$ ist

$$f'(x) = 2x \sin(1/x) + x^2 \cos(1/x) \left(-\frac{1}{x^2} \right) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x).$$

Sie konvergiert nicht in $x = 0$. Sei dazu $x_n = \frac{1}{2n\pi} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$. Damit gilt

$$f'(x_n) = \frac{1}{2n\pi} \sin(2n\pi) - \cos(2n\pi) = 1 \neq f'(0),$$

also ist f' nicht stetig in Null.

Aufgabe 11: Differentiation

a) Geben Sie Konstanten b, c, $d \in \mathbb{R}$ an, damit die Funktion

$$g(x) = \begin{cases} bx^3 + cx^2 + d & \text{für } x \leq 1 \\ \ln x & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

auf $\mathbb{R}$ zweimal differenzierbar ist.
Ist $g(x)$ für diese Wahl auch dreimal differenzierbar?

b) Überprüfen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x \sin(1/x) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

in $x = 0$ stetig ist, aber *nicht* differenzierbar.
Hinweis: Betrachten Sie zur Untersuchung der Differenzierbarkeit die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n = \frac{1}{n\pi+\pi/2}$.

Lösung 11:

a) Außerhalb des kritischen Punktes $x = 1$ hat man

$$g'(x) = \begin{cases} 3bx^2 + 2cx & \text{für } x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

sowie

$$g''(x) = \begin{cases} 6bx + 2c & \text{für } x < 1 \\ -\frac{1}{x^2} & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

Da die Funktion zweimal differenzierbar sein soll, müssen $g(x)$ und $g'(x)$ stetig sein, im Punkt $x = 1$ muss also gelten:

$$g(1) = b + c + d = \ln 1 = 0 \text{ und } g'(1) = 3b + 2c = \frac{1}{1} = 1.$$

Aus der zweiten Relation erhält man $c = \frac{1-3b}{2}$.
Die linksseitige zweite Ableitung im Punkt $x = 1$ ist

$$\begin{aligned} g''_-(1) &= \lim_{\substack{x\to1\\x<1}} \frac{g'(x)-g'(1)}{x-1} = \lim_{\substack{x\to1\\x<1}} \frac{3bx^2+2cx-1}{x-1} \\ &= \lim_{\substack{x\to1\\x<1}} \frac{3bx^2+(1-3b)x-1}{x-1} = \lim_{\substack{x\to1\\x<1}} \frac{3b(x^2-x)+x-1}{x-1} \\ &= \lim_{\substack{x\to1\\x<1}} (3bx+1) = 3b+1 \end{aligned}$$

und die rechtsseitige zweite Ableitung:

$$\begin{aligned} g''_+(1) &= \lim_{\substack{x\to1\\x>1}} \frac{g'(x)-g'(1)}{x-1} = \lim_{\substack{x\to1\\x>1}} \frac{\frac{1}{x}-1}{x-1} \\ &= \lim_{\substack{x\to1\\x>1}} \frac{1-x}{x(x-1)} = \lim_{\substack{x\to1\\x>1}} \left(-\frac{1}{x}\right) = -1 \end{aligned}$$

Beide Grenzwerte müssen übereinstimmen, damit $g''(1)$ sinnvoll definiert ist, also gilt

$$b = \frac{-2}{3} \Rightarrow c = \frac{3}{2} \Rightarrow d = -b - c = \frac{-5}{6}.$$

Man hat dann

$$g''(x) = \begin{cases} -4x+3 & \text{für } x < 1 \\ -1 & \text{für } x = 1 \\ -\frac{1}{x^2} & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

Die linksseitige Ableitung dieser Funktion im Punkt $x = 1$ ist

$$\begin{aligned} g'''_-(1) &= \lim_{\substack{x\to1\\x<1}} \frac{g''(x)-g''(1)}{x-1} = \lim_{\substack{x\to1\\x<1}} \frac{-4x+3-(-1)}{x-1} \\ &= \lim_{\substack{x\to1\\x<1}} \frac{-4x+4}{x-1} = \lim_{\substack{x\to1\\x<1}} \left(-4\frac{x-1}{x-1}\right) = -4 \end{aligned}$$

und die rechtsseitige Ableitung:

$$\begin{aligned} g'''_+(1) &= \lim_{\substack{x\to1\\x>1}} \frac{g''(x)-g''(1)}{x-1} = \lim_{\substack{x\to1\\x>1}} \frac{-\frac{1}{x^2}-(-1)}{x-1} \\ &= \lim_{\substack{x\to1\\x>1}} \frac{x^2-1}{x^2(x-1)} = \lim_{\substack{x\to1\\x>1}} \frac{x+1}{x^2} = 2 \end{aligned}$$

Da die beiden Werte nicht übereinstimmen ($-4 \neq 2$), ist g'' im Punkt $x = 1$ nicht differenzierbar.

b) Die Funktion ist stetig in $x = 0$, denn $|\sin(1/x)| \leq 1$ und somit ist $|f(x) - f(0)| = |f(x)| \leq |x| \underset{x\to0}{\longrightarrow} 0$.
Der Differenzenquotient in $x_0 = 0$ ist

$$Q(x) := \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{1}{x}f(x) = \sin(1/x).$$

Dieser Ausdruck konvergiert **nicht** für $x \to 0$. Setzt man zum Beispiel $x_n = \dfrac{1}{n\pi+\pi/2}$, dann gilt $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ und

$$Q(x_n) = \sin(n\pi + \pi/2) = \begin{cases} +1, & \text{für gerade } n \\ -1, & \text{für ungerade } n \end{cases}$$

Aufgabe 12: Differentiation

a) Geben Sie Konstanten b, c, $d \in \mathbb{R}$ an, damit die Funktion

$$g(x) = \begin{cases} bx^3 + cx^2 + d & \text{für } x \le 1 \\ \ln x & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

auf $\mathbb{R}$ zweimal differenzierbar ist.
Ist $g(x)$ für diese Wahl auch dreimal differenzierbar?

b) Überprüfen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x \sin(1/x) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

in $x = 0$ stetig ist, aber *nicht* differenzierbar.
Hinweis: Betrachten Sie zur Untersuchung der Differenzierbarkeit die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n = \frac{1}{n\pi+\pi/2}$.

Lösung 12:

a) Außerhalb des kritischen Punktes $x = 1$ hat man

$$g'(x) = \begin{cases} 3bx^2 + 2cx & \text{für } x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

sowie

$$g''(x) = \begin{cases} 6bx + 2c & \text{für } x < 1 \\ -\frac{1}{x^2} & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

Da die Funktion zweimal differenzierbar sein soll, müssen $g(x)$ und $g'(x)$ stetig sein, im Punkt $x = 1$ muss also gelten:

$$g(1) = b + c + d = \ln 1 = 0 \text{ und } g'(1) = 3b + 2c = \frac{1}{1} = 1.$$

Aus der zweiten Relation erhält man $c = \frac{1-3b}{2}$.
Die linksseitige zweite Ableitung im Punkt $x = 1$ ist

$$\begin{aligned} g''_-(1) &= \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{g'(x) - g'(1)}{x-1} = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{3bx^2 + 2cx - 1}{x-1} \\ &= \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{3bx^2 + (1-3b)x - 1}{x-1} = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{3b(x^2 - x) + x - 1}{x-1} \\ &= \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} (3bx + 1) = 3b + 1 \end{aligned}$$

und die rechtsseitige zweite Ableitung:

$$\begin{aligned} g''_+(1) &= \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{g'(x) - g'(1)}{x-1} = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{\frac{1}{x} - 1}{x-1} \\ &= \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{1-x}{x(x-1)} = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \left(-\frac{1}{x}\right) = -1 \end{aligned}$$

Beide Grenzwerte müssen übereinstimmen, damit $g''(1)$ sinnvoll definiert ist, also gilt

$$b = \frac{-2}{3} \Rightarrow c = \frac{3}{2} \Rightarrow d = -b - c = \frac{-5}{6}.$$

Man hat dann

$$g''(x) = \begin{cases} -4x + 3 & \text{für } x < 1 \\ -1 & \text{für } x = 1 \\ -\frac{1}{x^2} & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

Die linksseitige Ableitung dieser Funktion im Punkt $x = 1$ ist

$$\begin{aligned} g'''_-(1) &= \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{g''(x) - g''(1)}{x-1} = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{-4x + 3 - (-1)}{x-1} \\ &= \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{-4x + 4}{x-1} = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \left(-4\frac{x-1}{x-1}\right) = -4 \end{aligned}$$

und die rechtsseitige Ableitung:

$$\begin{aligned} g'''_+(1) &= \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{g''(x) - g''(1)}{x-1} = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{-\frac{1}{x^2} - (-1)}{x-1} \\ &= \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{x^2 - 1}{x^2(x-1)} = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{x+1}{x^2} = 2 \end{aligned}$$

Da die beiden Werte nicht übereinstimmen ($-4 \neq 2$), ist g'' im Punkt $x = 1$ nicht differenzierbar.

b) Die Funktion ist stetig in $x = 0$, denn $|\sin(1/x)| \le 1$ und somit ist $|f(x) - f(0)| = |f(x)| \le |x| \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.
Der Differenzenquotient in $x_0 = 0$ ist

$$Q(x) := \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{x} f(x) = \sin(1/x).$$

Dieser Ausdruck konvergiert **nicht** für $x \to 0$. Setzt man zum Beispiel $x_n = \dfrac{1}{n\pi + \pi/2}$, dann gilt $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ und

$$Q(x_n) = \sin(n\pi + \pi/2) = \begin{cases} +1, & \text{für gerade } n \\ -1, & \text{für ungerade } n \end{cases}$$

Aufgabe 13: Differenzieren

a) Bestimmen Sie jeweils die erste Ableitung. (Eventuell notwendige Beschränkungen des Definitionsgebietes sind nicht angegeben.)

$$\begin{aligned} f_9(t) &= \sinh(t) - \cosh(2t), & f_{10}(t) &= (t-3)^4 \sinh(t), \\ f_{11}(t) &= t^2\, \mathrm{e}^{-2t} \sin(3t), & f_{12}(t) &= \sqrt{t}\, \mathrm{e}^{2t}, \\ f_{13}(t) &= \sin^3\left(\mathrm{e}^{2t^2} + t^5\right), & f_{14}(t) &= \sqrt{2\,t^2+1}, \\ f_{15}(t) &= \ln(t) - \ln(5t), & f_{16}(t) &= \ln(t^2) - \ln(t^5). \end{aligned}$$

b) Bestimmen Sie die n–te Ableitung folgender Funktionen.

$$\begin{aligned} f_{21}(t) &= \sin(3t), & f_{22}(t) &= t\, \mathrm{e}^{2t} \\ f_{23}(t) &= t \cdot \cos(t), & f_{24}(t) &= t\, \ln(2t) \end{aligned}$$

Lösung 13:

a)

$$\begin{aligned} f_9'(t) &= \cosh(t) - 2\sinh(2t) \\ f_{10}'(t) &= 4(t-3)^3 \sinh(t) + (t-3)^4 \cosh(t) \\ f_{11}'(t) &= 2t\mathrm{e}^{-2t} \sin(3t) + t^2(-2\mathrm{e}^{-2t}) \sin(3t) + t^2\mathrm{e}^{-2t} \cdot 3\cos(3t) \\ &= t\mathrm{e}^{-2t}\big(2(1-t)\sin(3t) + 3t\cos(3t)\big) \\ f_{12}'(t) &= \frac{1}{2\sqrt{t}}\mathrm{e}^{2t} + \sqrt{t} \cdot 2\mathrm{e}^{2t} = \frac{1+4t}{2\sqrt{t}}\mathrm{e}^{2t} \\ f_{13}'(t) &= 3\sin^2\left(\mathrm{e}^{2t^2} + t^5\right) \cdot \cos\left(\mathrm{e}^{2t^2} + t^5\right) \cdot \left(4t\mathrm{e}^{2t^2} + 5t^4\right) \\ f_{14}'(t) &= \frac{4t}{2\sqrt{2t^2+1}} \\ f_{15}'(t) &= \frac{1}{t} - \frac{5}{5t} = 0 \\ f_{16}'(t) &= \frac{d}{dt}(\ln(t^2) - \ln(t^5)) = \frac{d}{dt}(2\ln t - 5\ln t) = \frac{-3}{t} \end{aligned}$$

b) **i)** Jedes Ableiten der Funktion f_{21} führt wegen der inneren Ableitung aus der Kettenregel zu einem Faktor 3. Außerdem ergibt jedes zweite Ableiten der äußeren Funktion (immer die Ableitung einer cos-Funktion) einen weiteren Faktor (-1). Die äußere Funktion wird nach gradzahligem Ableiten zu einem Sinus, bei ungradzahligen Ableitungen zu einem Kosinus. Insgesamt ergibt sich also:

$$f_{21}^{(n)}(t) = \begin{cases} 3^n \sin(3t) & \text{für } n = 4k+0\ (k \in \mathbb{N}_0) \\ 3^n \cos(3t) & \text{für } n = 4k+1\ (k \in \mathbb{N}_0) \\ -3^n \sin(3t) & \text{für } n = 4k+2\ (k \in \mathbb{N}_0) \\ -3^n \cos(3t) & \text{für } n = 4k+3\ (k \in \mathbb{N}_0) \end{cases}$$

ii) Die erste Ableitung von f_{22} ist

$$f_{22}'(t) = \mathrm{e}^{2t} + 2t\mathrm{e}^{2t} = \mathrm{e}^{2t} + 2f_{22}(t).$$

Setzt man dies sukzessive fort, ergibt sich

$$\begin{aligned} f_{22}^{(n)}(t) &= n \cdot 2^{n-1}\mathrm{e}^{2t} + 2^n f_{22}(t) \\ &= \left(n \cdot 2^{n-1} + 2^n \cdot t\right)\mathrm{e}^{2t} = (n+2t)2^{n-1}\mathrm{e}^{2t} \end{aligned}$$

iii) Die ersten vier Ableitungen von f_{23} sind:

$$\begin{aligned} f_{23}(t) &= t \cdot \cos(t), & f_{23}'(t) &= \cos(t) - t\sin(t) \\ f_{23}''(t) &= -2\sin(t) - t\cos(t), & f_{23}'''(t) &= -3\cos(t) + t\sin(t), \\ f_{23}^{(4)}(t) &= 4\sin(t) + t\cos(t), & f_{23}^{(5)} &= 5\cos(t) - t\sin(t) \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich für $n \geq 1$:

$$f_{23}^{(n)} = \begin{cases} +n\cos(t) - t\sin(t) & \text{für } n = 4k+1\ (k \in \mathbb{N}_0) \\ -n\sin(t) - t\cos(t) & \text{für } n = 4k+2\ (k \in \mathbb{N}_0) \\ -n\cos(t) + t\sin(t) & \text{für } n = 4k+3\ (k \in \mathbb{N}_0) \\ +n\sin(t) + t\cos(t) & \text{für } n = 4k+4\ (k \in \mathbb{N}_0) \end{cases}.$$

iv) Die ersten beiden Ableitungen von f_{24} sind

$$\begin{aligned} f_{24}'(t) &= \ln(2t) + t \cdot \frac{2}{2t} = \ln(2t) + 1 \\ f_{24}''(t) &= \frac{1}{t}. \end{aligned}$$

Alle weiteren Ableitungen ($n = 2, 3, \ldots$) ergeben sich zu

$$f_{24}^{(n)}(t) = (-1) \cdot (-2) \cdot \ldots \cdot (-(n-2))t^{-(n-1)} = (-1)^n(n-2)!t^{-(n-1)}.$$

Aufgabe 14: Differenzieren

Bestimmen Sie jeweils die erste Ableitung. Zur Kontrolle sind die Werte der Ableitung an Kontrollpunkten angegeben. (Eventuell notwendige Beschränkungen des Definitionsgebietes sind nicht angegeben.)

$$f_1(t) = 3t^4 - 4t + 7\,, \qquad f_2(t) = (2t-3)^4\,, \qquad f_3(t) = t^3\,(t+3)^4$$
$$f_4(t) = 3\,\cos(2t)\,, \qquad f_5(t) = \sin^2(3t)\,, \qquad f_6(t) = \tan(2 - t/2)$$
$$f_7(t) = \frac{2t-3}{(t+2)^3}\,, \qquad f_8(t) = \frac{4t\,\sin(t)}{\cos(2t)}\,, \qquad f_9(t) = t^2 e^{\sqrt{t}}$$
$$f_{10}(t) = \sqrt{t\sqrt{t\sqrt{t}}}\,, \qquad f_{11}(t) = e^{\frac{1}{1+t^2}}\,, \qquad f_{12}(t) = \tan(t)$$
$$f_{13}(t) = \frac{t + \cos(t)\sin(t)}{2}\,, \qquad f_{14}(t) = \frac{t^2 - t + 2}{2t+3}\,, \qquad f_{15}(t) = \frac{\sin^2(t)}{\cos(t)}$$

Lösung 14:

$$f_1'(t) = 3 \cdot 4 \cdot t^3 - 4 = 12t^3 - 4\,,$$
$$f_2'(t) = 4 \cdot (2t-3)^3 \cdot 2 = 8(2t-3)^3\,,$$
$$\begin{aligned} f_3'(t) &= 3t^2 \cdot (t+3)^4 + t^3 \cdot 4(t+3)^3 \\ &= t^2(t+3)^3\big(3(t+3) + 4t\big) = t^2(t+3)^3(7t+9)\,, \end{aligned}$$
$$f_4'(t) = 3 \cdot 2 \cdot (-\sin(2t)) = -6\sin(2t)\,,$$
$$f_5'(t) = 2\sin(3t) \cdot 3\cos(3t) = 6\sin(3t)\cos(3t)\,,$$
$$f_6'(t) = \frac{1}{\cos^2(2-t/2)} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{-1}{2\cos^2(2-t/2)}\,,$$
$$f_7'(t) = \frac{2(t+2)^3 - (2t-3)\cdot 3(t+2)^2}{(t+2)^6} = \frac{13-4t}{(t+2)^4}\,,$$
$$\begin{aligned} f_8'(t) &= \frac{(4t\cos(t) + 4\sin(t))\cos(2t) - 4t\sin(t)\cdot 2(-\sin(2t))}{\cos^2(2t)} \\ &= \frac{4}{\cos^2(2t)} \cdot (t\cos(t)\cos(2t) + \sin(t)\cos(2t) + 2t\sin(t)\sin(2t)) \\ &= \frac{4}{\cos^2(2t)} \cdot \big(t\cos^3(t) - t\cos(t)\sin^2(t) + \cos^2(t)\sin(t) - \sin^3(t) + 4t\sin^2(t)\cos(t)\big) \\ &= \frac{4}{\cos^2(2t)} \cdot \big(t\cos^3(t) + 3t\cos(t)\sin^2(t) + \sin(t) - 3\sin^3(t)\big) \\ &= \frac{4}{\cos^2(2t)} \cdot \big(3t\cos(t) - 2t\cos^3(t) + \sin(t) - 3\sin^3(t)\big) \end{aligned}$$
$$f_9'(t) = 2te^{\sqrt{t}} + t^2\frac{1}{2\sqrt{t}}e^{\sqrt{t}}$$
$$f_{10}'(t) = \frac{d}{dt}\left(t^{7/8}\right) = \frac{7}{8}t^{-1/8} = \frac{7}{8\sqrt[8]{t}}$$
$$f_{11}'(t) = e^{\frac{1}{1+t^2}} \cdot \frac{-2t}{(1+t^2)^2}$$
$$f_{12}'(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\sin t}{\cos t}\right) = \frac{\cos t\cos t - (-\sin t)\sin t}{\cos^2 t} = \frac{1}{\cos^2 t}$$
$$f_{13}'(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(-\sin t\sin t + \cos t\cos t) = \frac{1}{2}\left(1 - \sin^2 t + \cos^2 t\right) = \cos^2 t$$

$$f'_{14}(t) = \frac{(2t-1)(2t+3) - 2 \cdot (t^2 - t + 2)}{(2t+3)^2} = \frac{2t^2 + 6t - 7}{(2t+3)^2}$$

$$f'_{15}(t) = \frac{d}{dt}\left(\tan t \cdot \sin t\right) = \frac{1}{\cos^2 t}\sin t + \tan t \cos t = \frac{\tan t}{\cos t} + \sin t$$

Aufgabe 15: Kurvendiskussion, Taylorentwicklung

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x^2/2}(2x-3).$$

a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich von f.

b) Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion f.

c) Bestimmen Sie eine Asymptote von f, also eine Gerade $g(x) = a + bx$ mit

$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - g(x)) = 0.$$

d) Bestimmen Sie die kritischen Punkte der Funktion f und charakterisieren Sie diese **ohne** Berechnung der zweiten Ableitung.

e) Geben Sie die Taylorentwicklung in den Extrempunkten bis zum Grad 2 an.

f) Skizzieren Sie die Funktion, die Asymptote, sowie die Taylorapproximationen.

Lösung 15:

a) Die Funktion f ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert.

b) Die einzige Nullstelle der Funktion ist $x_0 = \frac{3}{2}$.

c) Die Funktion $g(x) = 0$ ist Asymptote der Funktion $f(x)$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - g(x)) &= \lim_{x\to\pm\infty}(\mathrm{e}^{-x^2/2}(2x-3) - 0) \\
&= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x-3}{\mathrm{e}^{x^2/2}} \\
&= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{2}{x\mathrm{e}^{x^2/2}}, \qquad \text{(L'Hospital)} \\
&= 0
\end{aligned}$$

d) Kritische Punkte sind Nullstellen der ersten Ableitung von f:

$$\begin{aligned}
& 0 \overset{!}{=} f'(x) = \mathrm{e}^{-x^2/2}(-x(2x-3)+2) = \mathrm{e}^{-x^2/2}(-2x^2+3x+2) \\
\Leftrightarrow\quad & 0 = x^2 - \frac{3}{2}x - 1 \\
\Leftrightarrow\quad & x_{1,2} = \frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16}+1} = \begin{cases} 2 \\ -\frac{1}{2} \end{cases}
\end{aligned}$$

Da die Funktion $f(x)$ zwischen den beiden kritischen Punkten x_1 und x_2 bei x_0 eine Nullstelle hat und links davon negativ und rechts von x_0 positiv ist und sich asymptotisch der x-Achse annähert, muss in $x_1 = 2$ ein Maximum und in $x_2 = \frac{1}{2}$ ein Minimum liegen.

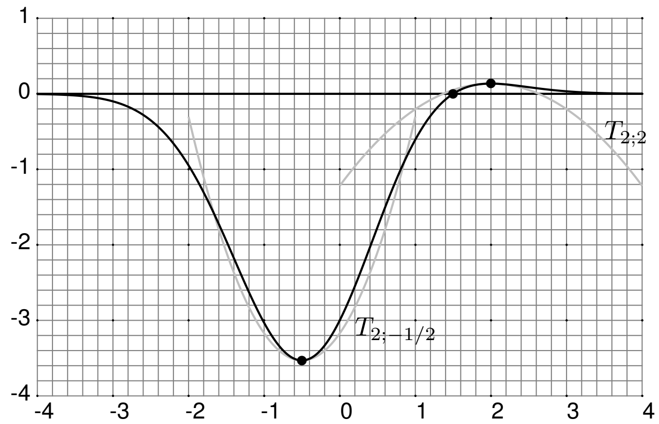
e) Zur Bestimmung der Taylorpolynome wird die zweite Ableitung von f benötigt:

$$f''(x) = \mathrm{e}^{-x^2/2}(2x^3 - 3x^2 - 2x - 4x + 3) = \mathrm{e}^{-x^2/2}(2x^3 - 3x^2 - 6x + 3)$$

Die Taylor-Polynome in den beiden Extrempunkten sind damit

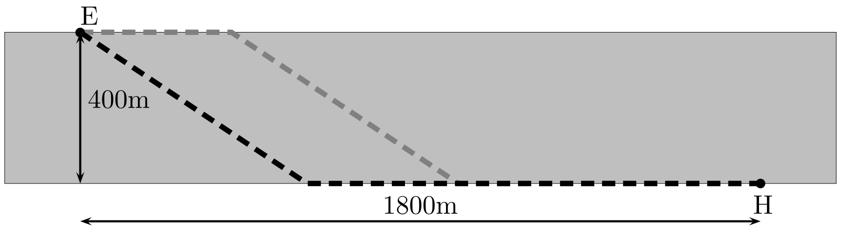
$$\begin{aligned}
\text{in } x_1 = 2: \quad T_{2;2}(x) &= f(x_1) + \frac{f'(x_1)}{1!}(x-x_1) + \frac{f''(x_1)}{2!}(x-x_1)^2 \\
&= \mathrm{e}^{-2} + 0 + \frac{\mathrm{e}^{-2}\cdot(-5)}{2}(x-2)^2 = \mathrm{e}^{-2}\left(1 - \frac{5}{2}(x-2)^2\right) \\
\text{in } x_2 = -1/2: \quad T_{2;-1/2}(x) &= f(x_2) + \frac{f'(x_2)}{1!}(x-x_2) + \frac{f''(x_2)}{2!}(x-x_2)^2 \\
&= \mathrm{e}^{-1/8}(-4) + 0 + 5\mathrm{e}^{-1/8}\frac{(x+\frac{1}{2})^2}{2} \\
&= \mathrm{e}^{-1/8}\left(-4 + \frac{5}{2}\left(x + \frac{1}{2}\right)^2\right)
\end{aligned}$$

f)



Aufgabe 16: Optimierungsaufgabe

Ein Elektrizitätswerk (E) liegt an einem 400 Meter breiten geradlinig verlaufenden Fluss. Es soll eine Leitung zu einem 1800 Meter flussabwärts auf der anderen Flussseite gelegenen Haus (H) verlegt werden.
Ein Meter Leitung zu Wasser kosten das dreifache eines Meters Leitung zu Land. Welche Leitungsführung verursacht die geringsten Kosten?



Lösung 16:

Der günstigse Weg der Leitung wird aus zwei geradlinigen Leiungsabschnitten bestehen, von denen einer längs des Flusses verläuft und einer den Fluss überquert. (Tatsächlich wird in diesem Modell auch eine Leitung aus drei Abschnitten, die nach einem geradlinigen Leitungsstück auf der Flussseite des E-Werkes den Fluss überquert und danach ein weiteres Stück auf der Uferseite des Hauses verläuft, dieselben Kosten verursachen.)
Die Kosten der zweigeteilten Leitungstrasse mit x Metern Strecke zu Land betragen:

$$K(x) = x + 3 \cdot \sqrt{400^2 + (1800 - x)^2}.$$

Diese Funktion muss minimiert werden, es soll also gelten:

$$\begin{aligned}
& 0 = K'(x) = 1 + \frac{-3(1800 - x)}{\sqrt{400^2 + (1800 - x)^2}} \\
\Leftrightarrow \quad & 9(1800 - x)^2 = 400^2 + (1800 - x)^2 \\
\Leftrightarrow \quad & x = 1800 - \frac{400}{\sqrt{8}} = 200(9 - \frac{1}{\sqrt{2}}) \approx 1660
\end{aligned}$$

Der günstigste Weg verläuft also zu etwa 1660 Metern an Land und zu 420 Metern zu Wasser.

Aufgabe 17: Optimierungsaufgabe

Die Abmessungen einer Konservendose (Höhe H Dezimeter und Durchmesser D Dezimeter) mit einem Liter Inhalt sollen so bestimmt werden, dass der Blechverbrauch minimal wird.

a) Stellen Sie eine Formel für die benötigte Fläche an Blech (in Quadratdezimetern) auf, nehmen Sie dabei als benötigte Fläche ...

i) ... die tatsächlich verarbeitete Blechfläche $A_t(D,H)$ an (ohne Verschnitt).

ii) ... die insgesamt verbrauchte Fläche $A_v(D,H)$ an (inklusive einem jeweils quadratischen Blech für Deckel und Boden).

b) Eliminieren Sie in den Funktionen $A_*(D,H)$ unter Ausnutzung der Volumenformel eine der beiden Größen.

c) Bestimmen Sie für beide Funktionen die Werte, die zu minimalem Blechverbrauch führen.

Lösung 17:

a) **i)** $A_t(D,H)$ besteht aus der rechteckigen Fläche des Zylindermantels $\pi D \cdot H$ und zwei Kreisen für Boden und Deckel der Dose $\pi D^2/4$, insgesamt ergibt sich also

$$A_t(D,H) = \pi DH + 2\pi\frac{D^2}{4} = \pi D\left(H + \frac{D}{2}\right).$$

ii) Statt der Kreise werden nun Quadrate der Fläche D^2 benötigt und man erhält

$$A_v(D,H) = \pi DH + 2D^2 = D(\pi H + 2D).$$

b) Das Volumen der Dose ergibt sich zu

$$1 = \pi\frac{D^2}{4} \cdot H$$

und damit weiter $H_D = \frac{4}{\pi D^2}$. Eingesetzt hat man damit

$$\begin{aligned} A_t(D,H_D) =& \pi D\left(\frac{4}{\pi D^2} + \frac{D}{2}\right) = \frac{4}{D} + \frac{\pi D^2}{2} \\ A_v(D,H_D) =& D\left(\frac{4}{D^2} + 2D\right) = \frac{4}{D} + 2D^2. \end{aligned}$$

c) Die Minima der beiden Funktionen befinden sich an den Nullstellen der ersten Ableitung:

$$\begin{aligned} 0 =& A_t'(D) = -\frac{4}{D^2} + \pi D \\ \Rightarrow \qquad D =& \left(\frac{4}{\pi}\right)^{1/3}, \quad H_D = \frac{4}{\pi D^2} = \frac{4^{1/3}}{\pi^{1/3}} = D \\ 0 =& A_v'(D) = -\frac{4}{D} + 4D \\ \Rightarrow \qquad D =& 1, \quad H_D = \frac{4}{\pi D^2} = \frac{4}{\pi} \end{aligned}$$

Aufgabe 18: Stationäre Punkte

Gegeben sei die Funktion

$$f(x,y) = x^3 + x^2y - y^2 - 4y.$$

Finde alle stationären Punkte und bestimme, ob sie lokale Minima, Maxima oder Sattelpunkte sind.

Lösung 18:

Die stationären Punkte sind die Lösungen des folgenden Gleichungssystems

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = 0 \qquad &\Rightarrow \qquad x(3x+2y) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = 0 \qquad &\Rightarrow \qquad x^2 - 2y - 4 = 0 \end{aligned}$$

Die erste Gleichung ist für $x = 0$ und für $3x + 2y = 0$ erfüllt, d.h. wenn $x = 0$ oder wenn $y = -\frac{3}{2}x$. In beiden Fällen wird der y-Wert durch die zweite Gleichung im System bestimmt.

1. Fall $x = 0$: Aus der zweiten Gleichung ergibt sich $0 - 2y - 4 = 0$, d.h. $y = -2$. Der erste kritische Punkt ist $\boldsymbol{P}_1 = (0, -2)$.

2. Fall $y = -\frac{3}{2}x$. Setzt man dies in die zweite Gleichung ein, erhält man $x^2 - 2(-\frac{3}{2}x) - 4 = 0$. Dies ergibt

   $$x^2 + 3x - 4 = 0 \longrightarrow (x-1)(x+4) = 0.$$

   Die Lösungen sind $x = 1$ und $x = -4$. Die beiden weiteren kritischen Punkte sind dann: $\boldsymbol{P}_2 = (1, -\frac{3}{2})$ und $\boldsymbol{P}_3 = (-4, 6)$.

Zusammengefasst lauten die drei kritischen Punkte

$$\boldsymbol{P}_1 = (0,-2), \qquad \boldsymbol{P}_2 = (0, -\frac{3}{2}), \qquad \boldsymbol{P}_3 = (-4, 6).$$

Die Hessische Matrix ist:

$$H = \begin{pmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{xy}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x+2y & 2x \\ 2x & -2 \end{pmatrix}.$$

Charakterisierung der stationären Punkte:

$$\boldsymbol{P}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad h_{11} < 0, \det(H) = 8 > 0 \to \text{Maximum}$$

$$\boldsymbol{P}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad h_{11} > 0, \det(H) = -10 < 0 \to \text{Sattelpunkt } \boldsymbol{P}_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -12 & -8 \\ -8 & -2 \end{pmatrix}, \quad h_{11} < 0, \det(H) = -40 < 0 \to \text{Sattelpunkt}$$

Aufgabe 19: Extremwerte

a) Ermitteln Sie die kritischen Punkte der Funktion

$$f(x,y) = (1+2x-y)^2 + (2-x+y)^2 + (1+x-y)^2$$

und bestimmen Sie, ob es sich um Maxima, Minima oder Sattelpunkte handelt.

b) Ermitteln Sie ebenso die kritischen Punkte der Funktionen

$$\begin{aligned} g(x,y,z) &= x^2 + xz + y^2 \\ h(x,y) &= (y^2 - x^2)\mathrm{e}^{\frac{x^2+y^2}{2}} \end{aligned}$$

und bestimmen Sie, ob es sich um Maxima, Minima oder Sattelpunkte handelt.

Lösung 19:

a) Die kritischen Punkte sind die Nullstellen des Gradienten der Funktion f:

$$\begin{aligned} 0 \overset{!}{=} \nabla f(x,y) &= \begin{pmatrix} 4(1+2x-y) - 2(2-x+y) + 2(1+x-y) \\ -2(1+2x-y) + 2(2-x+y) - 2(1+x-y) \end{pmatrix} \\ &= \left(2 + 12x - 8y,\ -8x + 6y\right)^\top \\ \Rightarrow \qquad x &= -\frac{3}{2},\ y = -2. \end{aligned}$$

Die Hesse-Matrix der Funktion in diesem Punkt ist

$$\boldsymbol{H}_f = \begin{pmatrix} 12 & -8 \\ -8 & 6 \end{pmatrix}.$$

Ihre Eigenwerte ergeben sich als Nullstellen des charakteristischen Polynoms:

$$0 = (12-\lambda)(6-\lambda) - 64 = \lambda^2 - 2\cdot 9\lambda + 8 \ \Rightarrow\ \lambda_\pm = 9 \pm \sqrt{73} > 0.$$

Sie sind beide positiv, also ist $\boldsymbol{H}_f$ positiv definit und im Punkt $(-3/2,\,-2)$ liegt ein lokales Minimum der Funktion f.

b) Gradient und Hesse-Matrix der Funktion g ergeben sich zu:

$$\begin{aligned} \nabla g(x,y,z) &= (2x+z,\ 2y,\ x)^\top \\ \boldsymbol{H}_g &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die einzige Nullstelle von ∇g liegt bei $(x,y,z)^\top = \mathbf{0}$.
Die Matrix $\boldsymbol{H}_g$ ist indefinit:

$$(1,0,0)\boldsymbol{H}_g \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2,\ (1,0,-2)\boldsymbol{H}_g \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = -2,$$

also hat die Funktion g im Ursprung einen Sattelpunkt.

Gradient und Hesse-Matrix der Funktion h sind

$$\begin{aligned} \nabla h(x,y) &= \mathrm{e}^{\frac{x^2+y^2}{2}} \begin{pmatrix} -2x + x(y^2-x^2) \\ 2y + y(y^2-x^2) \end{pmatrix} \\ \boldsymbol{H}_h &= \mathrm{e}^{\frac{x^2+y^2}{2}} \begin{pmatrix} -2 + y^2 - x^2 - 2x^2 - 2x^2 + x^2(y^2-x^2) & 2xy - 2xy + xy(y^2-x^2) \\ -2xy + 2xy + xy(y^2-x^2) & 2 + 3y^2 - x^2 + 2y^2 + y^2(y^2-x^2) \end{pmatrix} \\ &= \mathrm{e}^{\frac{x^2+y^2}{2}} \begin{pmatrix} -2 - 5x^2 + y^2 + x^2(y^2-x^2) & xy(y^2-x^2) \\ xy(y^2-x^2) & 2 + 5y^2 - x^2 + y^2(y^2-x^2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die kritischen Punkte sind Nullstellen von ∇h, für diese gilt:

$$\begin{aligned} & x(-2+y^2-x^2) = 0 \text{ und } y(2+y^2-x^2) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \left(x = 0 \text{ und } y = 0\right) \\ & \text{oder } \left(x = 0 \text{ und } 2 + y^2 - x^2 = 0\right) \\ & \text{oder } \left(-2 + y^2 - x^2 = 0 \text{ und } y = 0\right) \\ & \text{oder } \left(-2 + y^2 - x^2 = 0 \text{ und } 2 + y^2 - x^2 = 0\right) \\ \Leftrightarrow & (x,y)^\top = (0,0)^\top. \end{aligned}$$

Der einzige kritische Punkt ist also $(0,0)^\top$. Dort ist die Hesse-Matrix

$$H_h(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix ist indefinit, also handelt es sich um einen Sattelpunkt.

Aufgabe 20: lokale Extrema in 3 Dimensionen

Gegeben sei die Funktion

$$f \, : \, \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \, : \, (x,y,z) \to \frac{2\,y^3}{3} + x^2 - 2\,xy + xz - x - z + 1 \; .$$

Bestimmen Sie die stationären (kritischen) Punkte der Funktion und bestimmen Sie deren Charakteristik.
Hinweis: Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind praktisch nur numerisch zu bestimmen. Die Vorzeichen der Eigenwerte erhält man aber sehr leicht aus einer einfachen Kurvendiskussion oder Skizze.

Lösung 20:

Die stationären Punkte sind die Nullstellen des Gradienten

$$\mathbf{grad}\, f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x-2y+z-1 \\ 2y^2-2x \\ x-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Aus der dritten Komponente folgt $x = 1$ und damit aus der zweiten $y = \pm 1$ und aus der ersten die zugehörigen z–Werte. Die stationären Punkte sind

$$\boldsymbol{p}_1 = (1,1,1)^\top \text{ und } \boldsymbol{p}_2 = (1,-1,-3)^\top \; .$$

Die Hesse–Matrix der Funktion f ist

$$\mathbf{H}_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 4\,y & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Für den Punkt $\boldsymbol{p}_1$ erhält man das charaketristische Polynom

$$P(\lambda) = \det\big(\mathbf{H}_f(1,1,1) - \lambda \boldsymbol{E}\big) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -2 & 1 \\ -2 & 4-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + 6\,\lambda^2 - 3\,\lambda - 4 \; .$$

Dies Polynom hat keine glatten Nullstellen. Eine exakte Bestimmung könnte zum Beispiel mit dem Newton–Verfahren erfolgen.
Für die Frage nach der Charakteristik des stationären Punktes benötigt man aber nur die Vorzeichen, die leicht aus einer sehr groben Kurvendiskussion zu entnehmen sind. Mit

$$P(-1) = 6 \; , \quad P(0) = -4 \; , \quad P(2) = 6 \text{ und } P(t) \to -\infty \text{ für } t \to \infty$$

erhält man nach dem Zwischenwertsatz einen negativen und zwei positive Nullstellen, d. h. es handelt sich um einen Sattelpunkt.

Entsprechend erhält man für den zweiten stationären Punkt $\boldsymbol{p}_2$ das charakteristische Polynom

$$P(\lambda) = -\lambda^3 - 2\,\lambda^2 + 13\,\lambda + 4$$

Seine stationären Punkte liegen bei λ mit

$$0 \stackrel{!}{=} P'(\lambda) = -3\lambda^2 - 4\lambda + 13 \Leftrightarrow \lambda_\pm = \frac{-2 \pm \sqrt{43}}{3}.$$

Da gilt $\lim_{\lambda\to\infty} P(\lambda) = -\infty$ liegt bei $\lambda_+ > 0$ ein Maximum vor, dessen Wert wegen $P(0) = 4 > 0$ größer Null ist: $P(\lambda_+) > 0$. Rechts davon liegt eine Nullstelle des Polynoms. Aufgrund der Monotonie von P im Intervall $[\lambda_-, \lambda_+]$ liegen die weiteren Nullstellen im Negativen. Es handelt sich bei dem stationären Punkt also auch um einen Sattelpunkt.

Aufgabe 21: Stationäre Punkte

Gegeben sei die Funktion

$$f(x,y) = ax^2 + 2xy + ay^2 - ax - ay$$

Bestimmen Sie diejenigen $a \in \mathbb{R}$, für welche die Funktion f relative Maxima, relative Minima und Sattelpunkte besitzt und geben Sie diese an.

Lösung 21:

In stationären Punkten muss der Gradient der Funktion Null werden:

$$\mathbf{0} = \nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2ax + 2y - a \\ 2x + 2ay - a \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc|c|l}
2a & 2 & a & \\
2 & 2a & a & \text{wir vertauschen die 1. und 2. Zeile} \\ \hline
2 & 2a & a & \\
2a & 2 & a & -a \cdot \text{ 1. Zeile} \\ \hline
2 & 2a & a & : 2 \\
0 & 2-2a^2 & a & : (2-2a^2),\ \text{für } a^2 \neq 1 \\ \hline
1 & a & \frac{a}{2} & \\
0 & 1 & \frac{a(1-a)}{2(1-a^2)} &
\end{array}$$

Dann ist

$$y = \frac{a(1-a)}{2(1+a)(1-a)} = \frac{a}{2(1+a)}$$
$$x = \frac{a}{2} - a \cdot \frac{a}{2(1+a)} = \frac{a(1+a-a)}{2(1+a)} = \frac{a}{2(1+a)}.$$

Für $a \neq \pm 1$ liegt der einzige kritische Punkt der Funktion also bei

$$\boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} \frac{a}{2(1+a)} \\ \frac{a}{2(1+a)} \end{pmatrix}.$$

Für $a = +1$ hat das obige Gleichungssystem die Lösung $(t, \frac{1}{2} - t)$ $(t \in \mathbb{R})$.
Für $a = -1$ hat das Gleichungssystem keine Lösung und damit f keinen stationären Punkt.
Zur Charakterisierung der stationären Punkte benötigen wir die Hesse-Matrix:

$$\boldsymbol{H}_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2a & 2 \\ 2 & 2a \end{pmatrix}.$$

Ihre Determinante ist $\det(\boldsymbol{H}_f) = 4(a^2-1)$. Wir unterscheiden zunächst die drei Fälle:

i) $-1 < a < 1$: Für die Determinante gilt $\det(\boldsymbol{H}_f) < 0$. Da die Determinante aus dem Produkt der Eigenwerte berechnet wird, folgt daraus, dass die Eigenwerte verschiedene Vorzeichen haben. $\boldsymbol{H}_f$ ist indefinit und $\boldsymbol{x}_0$ ist ein Sattelpunkt.

ii) $a < -1$: Für die Determinante gilt $\det(\boldsymbol{H}_f) > 0$. Daraus folgt, dass die Eigenwerte gleiches Vorzeichen haben. Da die Spur $\mathrm{Sp}(\boldsymbol{H}_f) = 4a$ in diesem Fall negativ ist, sind die beiden Eigenwerte negativ. Also ist $\boldsymbol{H}_f$ negativ definit und die Funktion f hat ein Maximum in $\boldsymbol{x}_0$.

iii) $1 < a$: Sowohl die Determinante, als auch die Spur sind positiv. Deswegen sind beide Eigenwerte positiv und bei $\boldsymbol{x}_0$ ist ein Minimum.

Für $a = 1$ gilt $\det(\boldsymbol{H}_f) = 0$, also ist mindestens ein Eigenwert gleich Null. In diesem Fall gilt

$$f(x,y) = x^2 + 2xy + y^2 - x - y = (x+y)^2 - (x+y) = \left(x + y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}.$$

In allen stationäre Punkten $(t, \frac{1}{2} - t)^\top$ ist der quadratische Term $(x + y - \frac{1}{2})^2$ gleich Null, aber in allen anderen Punkten ist er positiv. Deshalb liegt in diesen stationären Punkten ein Minimum vor. Diese Punkte befinden sich auf einer Geraden, auf der f konstant ist.
Insgesamt besitzt die Funktion f also

- für $a < -1$ ein Maximum in $\boldsymbol{x}_0 = \frac{a}{2(1+a)}(1,1)^\top$.
- für $a = -1$ keinen stationären Punkt.
- für $-1 < a < 1$ einen Sattelpunkt in $\boldsymbol{x}_0 = \frac{a}{2(1+a)}(1,1)^\top$.
- für $a = 1$ die Minimalstellen $(t, \frac{1}{2} - t)^\top$, $t \in \mathbb{R}$.
- für $1 < a$ ein Minimum in $\boldsymbol{x}_0 = \frac{a}{2(1+a)}(1,1)^\top$.

Aufgabe 22: Folgenkonvergenz

Untersuchen Sie die nachfolgenden Folgen auf Konvergenz und bestimmten Sie – wenn möglich – den Grenzwert:

$$a_n = \frac{2n^2+3n}{2n^2+7} \qquad b_n = \frac{2n^3-2}{5n^2-1}$$

$$c_n = \frac{2n^2+7n+(-1)^n}{5n+2} - \frac{2n^3-2}{5n^2-1}, \qquad d_n = \left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$$

$$e_n = n\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}\right) \qquad f_n = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \text{ (mit ganzzahligem } x)$$

$$g_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n+1}$$

Hinweise:
- Setzen Sie voraus, dass f_n konvergiert und ermitteln Sie den Grenzwert.
- Benutzen Sie zur Untersuchung von g_n das Ergebnis für f_n.

Lösung 22:

a) Der Bruch wird zunächst mit dem Kehrwert der höchsten auftretenden n-Potenz $(1/n^2)$ erweitert:

$$a_n = \frac{2+\frac{3}{n}}{2+\frac{7}{n^2}}$$

Die beiden Ausdrücke $\frac{3}{n}$ und $\frac{7}{n^2}$, die noch von n abhängen, konvergieren beide gegen Null, damit konvergieren Zähler und Nenner jeweils gegen 2 und man hat insgesamt:

$$a_n = \frac{2+\frac{3}{n}}{2+\frac{7}{n^2}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{2+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n}}{2+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{7}{n^2}} = \frac{2+0}{2+0} = 1.$$

b) Da die n-Potenz des Zählers größer als die des Nenners ist, nehmen wir an, dass b_n divergiert. Um dies zu zeigen, schätzen wir ab:

$$b_n = \frac{2n^3-2}{5n^2-1} = \frac{\frac{2}{5}(5n^2-1)n+\frac{2}{5}\cdot n-2}{5n^2-1} = \frac{2}{5}n + \underbrace{\frac{2n-10}{25n^2-5}}_{\geq 0 \text{ für } n\geq 5}$$

$$\geq \frac{2}{5}n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

Also ist b_n größer als die divergente Folge $\frac{2}{5}n$ und divergiert ebenfalls.

c) Der Ausdruck für c_n wird zunächst auf einen Bruchstrich gebracht und dann mit dem Kehrwert der höchsten n-Potenz $(1/n^3)$ erweitert:

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{(2n^2+7n+(-1)^n)(5n^2-1)-(2n^3-2)(5n+2)}{(5n+2)(5n^2-1)} \\ &= \frac{31n^3+(5\cdot(-1)^n-2)n^2+3n-(-1)^n+4}{25n^3+10n^2-5n-2} \\ &= \frac{31+\frac{5\cdot(-1)^n-2}{n}+\frac{3}{n^2}+\frac{4-(-1)^n}{n^3}}{25+\frac{10}{n}-\frac{5}{n^2}-\frac{2}{n^3}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{31}{25} \end{aligned}$$

Alle Ausdrücke, die noch von n abhängen, haben die Form $\frac{z}{n^l}$, wobei z entweder konstant oder zumindest beschränkt ist, deswegen konvergieren diese Ausdrücke z/n^l gegen Null.
Bringt man beide Ausdrücke nicht auf einen Hauptnenner, kann man nichts weiter über die Konvergenzeigenschaften sagen, da die einzelnen Brüche divergieren. (siehe b_n)

d) Wir zeigen, dass d_n durch eine divergente Folge nach unten abgeschätzt werden kann und folgern die Divergenz von d_n: Für $n \geq 2$ gilt

$$\begin{aligned} d_n &= \left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n = \left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 \cdot \left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n-2} \\ &= \left(1+\frac{2}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n-3} \\ &= \left(1+\frac{2}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{2}{n}+\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n-3} \\ &= \left(1+\frac{3}{\sqrt{n}}+\ldots\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n-3} \\ &\geq 1+\frac{n}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

Die Ungleichung gilt, da die wegfallenden Summanden auf jeden Fall positiv sind, also kann man abschätzen:

$$d_n \geq 1+\frac{n}{\sqrt{n}} = 1+\sqrt{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

Damit muss auch für d_n gelten $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = \infty$.

e) Wir erweitern den Ausdruck für die Folge e_n mit $(\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1})$ um die dritte binomische Formel anzuwenden:

$$\begin{aligned} e_n =& \frac{n(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1})(\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1})}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}} = \frac{n(\sqrt{n^2+1}^2-\sqrt{n^2-1}^2)}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}} \\ =& \frac{n(n^2+1-n^2+1)}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}} = \frac{2n}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}} \end{aligned}$$

Erweitern mit dem Kehrwert der höchsten n-Potenz $\frac{1}{n}$ liefert nun

$$e_n = \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{2}{1+1} = 1.$$

f) Im ersten Schritt werden nur $x > 0$ zugelassen.
Der Vollständigkeit halber überprüfen wir zunächst als Ergänzung der Aufgabenstellung, dass die Folge f_n konvergiert, dies geschieht in zwei Schritten und unter Nutzung der Bernoulli-Ungleichung

$$(1+y)^m \geq 1+my \qquad \text{für } m \in \mathbb{N} \text{ und } y \geq -1$$

i) Die Folge f_n steigt monoton:

$$\begin{aligned} \frac{f_{n+1}}{f_n} =& \frac{\left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n} = \left(\frac{1+\frac{x}{n+1}}{1+\frac{x}{n}}\right)^{n+1}\left(1+\frac{x}{n}\right) \\ =& \left(1+\frac{-\frac{x}{n}+\frac{x}{n+1}}{1+\frac{x}{n}}\right)^{n+1}\left(1+\frac{x}{n}\right) = \left(1+\frac{-x}{(n+x)(n+1)}\right)^{n+1}\cdot\frac{n+x}{n} \\ \geq& \left(1+(n+1)\cdot\frac{-x}{(n+x)(n+1)}\right)\cdot\frac{n+x}{n} \qquad \text{(Bernoulli-Ungleichung)} \\ =& \frac{n+x-x}{n+x}\cdot\frac{n+x}{n} = 1 \\ \Rightarrow \quad f_{n+1} \geq& f_n \end{aligned}$$

ii) Die Folge f_n ist beschränkt:
Wegen der Monotonie muss lediglich gezeigt werden, dass f_n eine obere Schranke besitzt:

$$\begin{aligned} 1+\frac{x}{n} <& 1+\frac{2x}{n} \\ \leq& \left(1+\frac{1}{n}\right)^{2x} \qquad \text{(Bernoulli-Ungleichung)} \\ \Rightarrow \quad \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \leq& \left(1+\frac{1}{n}\right)^{2x\cdot n} \\ =& \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{2x} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{2x} \end{aligned}$$

Damit ist f_n begrenzt durch eine konvergente Folge und somit selbst auch beschränkt.

Als beschränkte, monotone Folge muss f_n auch konvergieren.

Für $x > 0$ lässt sich f_n umformen zu

$$f_n = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \left(\left(1+\frac{1}{n/x}\right)^{n/x}\right)^x$$

f_n hat mit $n_k = k \cdot x$ die konvergente Teilfolge

$$f_{n_k} = \left(\left(1+\frac{1}{k\cdot x/x}\right)^{kx/x}\right)^x = \left(\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\right)^x \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} e^x.$$

Wenn also f_n konvergiert muss der Grenzwert mit dem der Teilfolge übereinstimmen und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} f_n = e^x.$$

Der Fall negativer $x < 0$ lässt sich mit Hilfe des Falls $x > 0$ behandeln: Wir untersuchen dazu mit $y = -x > 0$ die Folge

$$h_n := f_n \cdot \left(1+\frac{y}{n}\right)^n = \left(\left(1-\frac{y}{n}\right)\left(1+\frac{y}{n}\right)\right)^n = \left(1-\frac{y^2}{n^2}\right)^n.$$

Es gilt einerseits $h_n < 1$. Andererseits liefert die Bernoulli-Ungleichung zumindest für $n > y$:

$$h_n \geq 1 - n\cdot\frac{y^2}{n^2} = 1-\frac{y^2}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Wegen dieser beiden Ungleichungen muss h_n konvergieren:

$$\lim_{n\to\infty} h_n = 1.$$

Nach Definition von h_n ist

$$f_n = \frac{h_n}{\left(1+\frac{y}{n}\right)^n}.$$

Zähler und Nenner dieses Ausdruckes konvergieren und somit konvergiert auch f_n:

$$\lim_{n\to\infty} f_n = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} h_n}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{y}{n}\right)^n} = \frac{1}{\mathrm{e}^y} = \mathrm{e}^{-y} = \mathrm{e}^x.$$

Für $x = 0$ hat man ohnehin

$$\lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} 1^n = 1 = \mathrm{e}^0.$$

Es gilt also für alle $x \in \mathbb{Z}$:

$$\lim_{n\to\infty} f_n = \mathrm{e}^x.$$

g) Es ist

$$g_n = \left(\frac{n+1-2}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{-2}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Also ist $g_n = f_{n+1}$ mit $x = -2$ und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} g_n = \lim_{n\to\infty} f_n = \mathrm{e}^{-2}.$$

Aufgabe 23: Funktionenlimes

a) Gegeben sei die Funktion

$$f(x) := \frac{x^3 + |x+1| + \operatorname{sign}(x+1)}{\operatorname{sign} x}, \ x \in D(f) := \mathbb{R}.$$

Bestimmen Sie $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to(-1)+} f(x)$ und $\lim\limits_{x\to(-1)-} f(x)$.

b) Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \frac{\sinh x}{\cosh(ax)}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Bestimmen Sie $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$.

Hinweise:

- Mit der zunächst als bekannt vorausgesetzten Exponentialfunktion e^x gilt

$$\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \text{und} \qquad \cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

- Die Signum-Funktion liefert das Vorzeichen des Argumentes:

$$\operatorname{sign}(z) = \begin{cases} +1 & , z \geq 0 \\ -1 & , z < 0 \end{cases}$$

Lösung 23:

a) **i)** Für $x > 0$ gilt $\operatorname{sign}(x) = \operatorname{sign}(1+x) = 1$ sowie $|x+1| = x+1$, damit gilt

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} (x^3 + x + 1 + 1) = 2.$$

ii) Für $-1 < x < 0$ gilt $\operatorname{sign}(x) - 1$, $\operatorname{sign}(1+x) = 1$ sowie $|x+1| = x+1$, damit gilt

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} \frac{x^3 + x + 1 + 1}{-1} = -2.$$

iii) Für $-1 < x < 0$ gilt $\operatorname{sign}(x) = -1$, $\operatorname{sign}(1+x) = 1$ sowie $|x+1| = x+1$, damit gilt

$$\lim_{x\to(-1)+} f(x) = \lim_{x\to(-1)+} \frac{x^3 + x + 1 + 1}{-1} = 0.$$

iv) Für $x < -1$ gilt $\operatorname{sign}(x) = \operatorname{sign}(1+x) = -1$ sowie $|x+1| = -(x+1)$, damit gilt

$$\lim_{x\to(-1)-} f(x) = \lim_{x\to(-1)-} \frac{x^3 - x - 1 - 1}{-1} = 2.$$

b) Die Funktion $f(x)$ ist eine ungerade Funktion:

$$f(-x) = \frac{\sinh(-x)}{\cosh(ax)} = \frac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{e^{-ax} + e^{-(-ax)}} = -\frac{e^x - e^{-x}}{e^{ax} + e^{-ax}} = -f(x)$$

Daher ist $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ und es genügt einen der beiden Grenzwerte zu berechnen.
Es wird vorausgesetzt, dass e^x stetig ist und dass gilt $\lim\limits_{x\to\infty} e^x = \infty$, somit kann man den Funktionsgrenzwert durch die Substitution $z = e^x$ bestimmen:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^{ax} + e^{-ax}} = \lim_{z\to\infty} \frac{z - \frac{1}{z}}{z^a + \frac{1}{z^a}} \\ &= \lim_{z\to\infty} \left(\frac{z}{z^a} \cdot \frac{1 - \frac{1}{z^2}}{1 + \frac{1}{z^{2a}}} \right)\end{aligned}$$

Der Grenzwert des ersten Bruches ist

$$\lim_{z\to\infty} \frac{z}{z^a} = \lim_{z\to\infty} z^{1-a} = \begin{cases} \infty, & a < 1 \\ 1, & a = 1 \\ 0, & a > 1 \end{cases}.$$

Für den zweiten Bruch hat man

$$\lim_{z\to\infty} \frac{1 - \frac{1}{z^2}}{1 + \frac{1}{z^{2a}}} = \begin{cases} 0, & a < 0 \\ \frac{1}{2}, & a = 0 \\ 1, & a > 0 \end{cases}.$$

Insgesamt ergibt sich daraus:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \begin{cases} \infty, & 0 \leq a < 1 \\ 1, & a = 1 \\ 0, & a > 1 \end{cases}$$

Für $a < 0$ hat man

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{z\to\infty} \left(\frac{z}{z^a z^{-2a}} \cdot \frac{1 - \frac{1}{z^2}}{z^{2a} + 1} \right) \\ &= \lim_{z\to\infty} \left(\frac{z}{z^{-a}} \cdot \frac{1 - \frac{1}{z^2}}{z^{2a} + 1} \right) = \begin{cases} 0, & a < -1 \\ 1, & a = -1 \\ \infty, & -1 < a < 0 \end{cases}.\end{aligned}$$

Aufgabe 24: Funktionenlimes

Man bestimme den Limes der folgenden Funktionen

a) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x}$

b) $\lim_{x \to \infty} \frac{\sin(x)}{x}$

c) $\lim_{x \to \infty} x \ln(x)$

Lösung 24:

Aufgabe 25: Grenzwertdefinition

Bestimmen Sie zu den unten angegebenen Folgen (a_n) mit dem Grenzwert a und die angegebenen Werte für k jeweils ein N so, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > N$ gilt

$$|a_n - a| < 10^{-k}.$$

a) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, $a = 0$, $k = 2$

b) $a_n = \dfrac{3n+1}{n+1}$, $a = 3$, $k = 4$

c) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n!} + 1$, $a = 1$, $k = 3$

Lösung 25:

a) Es soll gelten $|a_n - a| = \frac{1}{\sqrt{n}} \overset{!}{<} 10^{-2}$. Dies lässt sich umstellen zu:

$$n > \left(\frac{1}{10^{-2}}\right)^2 = 10^4 = 10000 = N.$$

b) Hier ergibt sich

$$\begin{aligned} & |a_n - a| < 10^{-4} \\ \Leftrightarrow \quad & 10^{-4} > \left|\frac{3n+1}{n+1} - 3\right| = \frac{|-2|}{n+1} \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{n+1}{2} > 10^4 \\ \Leftrightarrow \quad & n > 20000 - 1 = 19999 = N. \end{aligned}$$

c) Für diese Folge ist $|a_n - a| = \left|\frac{(-1)^n}{n!}\right| = \frac{1}{n!}$ Mit $k = 3$ soll also gelten:

$$\frac{1}{n!} < 10^{-3} \quad \Leftrightarrow \quad n! > 1000.$$

Das ist beispielsweise erfüllt für $n > 1000 = N$. Ein kleinstmögliches N kann man durch die Untersuchung von $n!$ ermitteln. Es ist $6! = 720 < 1000$ und $7! = 7 \cdot 6! = 5040 > 1000$. Die Bedingung ist also bereits für $n > 6$ erfüllt.

Aufgabe 26: Grenzwerte monotoner Folgen

Es seien $a_1 = \sqrt{2}$ und $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$. Überprüfen Sie,

a) dass (a_n) beschränkt ist,

b) dass (a_n) monoton wächst und

c) gegen die größte Lösung der Gleichung $x^2 - x - 2 = 0$ konvergiert.

Lösung 26:

a) Null ist sicher eine untere Schranke für alle $a_n > 0$. Eine obere Schranke ist 2. Wir untersuchen dazu das Quadrat der Folge und rechnen nach, dass $a_n^2 \le 4$ für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$a_{n+1}^2 = 2 + a_n \overset{!}{\le} 4$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn bereits $a_n \le 2$ ist. Das ist für $a_1 = \sqrt{2}$ der Fall und damit auch für alle folgenden a_n.

b) Es ist zu zeigen, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n \le a_{n+1}$.
Äquivalent dazu ist $\dfrac{a_{n+1}^2}{a_n^2} \ge 1$:

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}^2}{a_n^2} &\ge \frac{2 + a_n}{2a_n} && \text{(wegen } a_n \le 2\text{)}\\ &= \frac{1}{a_n} + \frac{1}{2} \ge \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 && \text{(wegen } a_n \le 2\text{)}\end{aligned}$$

c) Da a_n beschränkt und monoton ist, muss die Folge einen Grenzwert

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1}$$

besitzen. Mit diesem Grenzwert ist

$$\begin{aligned}a^2 - a - 2 &= \lim_{n\to\infty} a_{n+1}^2 - \lim_{n\to\infty} a_n - 2\\ &= \lim_{n\to\infty} (\sqrt{2 + a_n}^2 - a_n) - 2\\ &= \lim_{n\to\infty} 2 - 2 = 0\end{aligned}$$

Damit muss a eine Nullstelle des Polynoms $p(x) = x^2 - x - 2$ sein.
$p(x)$ ist ein Polynom zweiten Grades, besitzt also zwei Nullstellen. Negative Werte nimmt $p(x)$ nur zwischen den beiden Nullstellen an. Da

$$p(a_1) = p(\sqrt{2}) = -\sqrt{2} < 0$$

ist, liegt a_1 zwischen den beiden Nullstellen. Wegen der Monotonie von (a_n) muss es sich bei a also um die größere der beiden Nullstellen handeln.

Aufgabe 27: Grenzwert Analyse - Definition

a) Notieren Sie die Definition des Grenzwertes und zeigen Sie, dass die Folge $a_n = \dfrac{1}{n}$ gegen den Grenzwert $a = 0$ konvergiert.
(Dies ist gleichbedeutend mit dem Nachweis, dass $\forall k \in \mathbb{N}$ eine Zahl $N \in \mathbb{R}$ existiert, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > N$ gilt: $|a_n - a| < 10^{-k}$).

b) Berechnen Sie den Grenzwert $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ der untenstehenden Folgen und dokumentieren Sie die Rechenregel, die Sie zur Berechnung des Grenzwertes verwendet haben (Produktregel, Einschließungssatz, Produkt beschränkter Folgen, Produkt von Nullfolgen etc).

i) $a_n = \dfrac{n^2 + 5n}{3n^2 + 1}$ **ii)** $a_n = \log_{10}(10n^2 - 2n) - \log_{10}(n^2 + 1)$

iii) $a_n = \dfrac{(n+1)!}{n! - (n+1)!}$ **iv)** $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{3n}$

v) $a_n = \dfrac{\cos n}{n}$ **vi)** $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

vii) $a_n = \dfrac{2^n}{n!}$

Lösung 27:

a) Es ist zu zeigen: $\forall k \in \mathbb{N} : \exists N \in \mathbb{R} :$

$$|n^{-1} - 0| < 10^{-k}, \forall n > N.$$

Wählen Sie $N = 10^k$, um die Eigenschaft zu zeigen.

b) Im vorigen Aufgabenteil wurde gezeigt, dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Mit dem Ergebnis aus **a)** gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0, \text{ for all } \alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0.$$

Des Weiteren wird die Stetigkeit der Funktionen vorausgesetzt und ausgenutzt.

i) Teilen von Zähler und Nenner durch n^2 liefert

$$\frac{1 + \frac{5}{n}}{3 + \frac{1}{n^2}}$$

Der Grenzwert des Zählers ist 1, der Grenzwert des Nenners ist 3. Somit liefert die Quotientenregel für Grenzwerte das Ergebnis $a = \frac{1}{3}$.

ii)

$$\begin{aligned}\log_{10}(10n^2 - 2n) - \log_{10}(n^2 + 1) &= \log_{10} \frac{10n^2 - 2n}{n^2 + 1} \\ &= \log_{10} \frac{10 - \frac{2}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}}.\end{aligned}$$

Der Grenzwert des Arguments b des Logarithmus-Terms liefert

$$b = \lim_{n\to\infty} \frac{10 - \frac{2}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}} = 10.$$

Aufgrund der Stetigkeit der Logarithmus-Funktionen innerhalb ihres Definitionsbereichs auf $x > 0$, berechnet sich der Grenzwert zu

$$a = \lim_{n\to\infty} \log_{10} b_n = \log_{10} b = 1.$$

iii) Umformung des Bruchausdrucks liefert

$$\frac{(n+1)!}{n! - (n+1)!} = \frac{(n+1)n!}{n! - (n+1)n!} = \frac{(n+1)}{-n} = -(1 + \frac{1}{n}).$$

Unter Verwendung der Summenregel ergibt sich der Grenzwert

$$a = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n! - (n+1)!} = \lim_{n\to\infty} -(1 + \frac{1}{n}) = -1.$$

iv) Es gilt

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3n} = \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)^3$$

Der Grenzwert der Folge $b_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ ist genau die Eulersche Zahl e.

$$b = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}\,.$$

Die Produktregel liefert dann

$$\lim_{n\to\infty} b_n^3 = \lim_{n\to\infty} b_n \lim_{n\to\infty} b_n \lim_{n\to\infty} b_n = b^3 = \mathrm{e}^3\,.$$

Alternativ kann auch die Stetigkeit der Funktion x^3 ausgenutzt werden, um das Ergebnis zu erhalten.

v) Die Folge

$$a_n = \frac{\cos n}{n}$$

kann als Produkt $a_n = b_n c_n$ einer beschränkten Teilfolgen $b_n = \cos n \neq 0$ und einer Nullfolge $c_n = \frac{1}{n}$ aufgefasst werden. Entsprechend ist deren Produkt ebenfalls eine Nullfolge und der Grenzwert ist $a = 0$.

vi) Es gilt

$$\begin{aligned}\sqrt{n+1} - \sqrt{n} &= \frac{\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{\frac{1}{n}}}.\end{aligned}$$

Unter Verwendung der Produkt und Additionsregel erhalten wir den Grenzwert $a = 0$.

vii) Die Folge $a_n = \dfrac{2^n}{n!}$ kann für $n > 3$ nach oben und unten beschränkt werden

$$0 \leq \frac{2^n}{n!} = \frac{\overbrace{2\cdot 2\cdot 2\ldots 2}^{n}}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n} \leq \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{2}\cdot\underbrace{\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{4}\cdots\frac{2}{n-1}}_{\leq 1}\cdot\frac{2}{n} \leq \frac{4}{n}.$$

Da die Folge von oben und unten durch zwei Nullfolge beschränkt ist, erhält man mit dem Einschließungssatz den Grenzwert $a = 0$.

Aufgabe 28: Integration

a) Berechnen Sie folgende Integrale mittels partieller Integration:

$$\int x \cdot \sin x \, \mathrm{d}x, \qquad \int \sin^2(x)\, \mathrm{d}x, \qquad \int x^2 \mathrm{e}^{1-x}\, \mathrm{d}x$$

$$\int \frac{x}{\cos^2 x}\, \mathrm{d}x, \qquad \int_0^{\pi/4} \frac{x}{\cos^2 x}\, \mathrm{d}x$$

b) Berechnen Sie folgende Integrale mittels einer geeigneten Substitution:

$$\int_1^2 \frac{3x^2+7}{x^3+7x-2}\, \mathrm{d}x, \qquad \int_\pi^{3\pi/2} x^2 \cos(x^3+2)\, \mathrm{d}x, \qquad \int_1^2 \frac{1}{x}\mathrm{e}^{1+\ln x}\, \mathrm{d}x$$

$$\int_{1/4}^1 \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\, \mathrm{d}x, \qquad \int \cosh^2 x \sinh x \, \mathrm{d}x$$

Lösung 28:

a) **i)**

$$\int \underbrace{x}_{u} \underbrace{\sin x}_{v'} \, \mathrm{d}x = \underbrace{x}_{u} \underbrace{(-\cos x)}_{v} - \int \underbrace{1}_{u'} \cdot \underbrace{(-\cos x)}_{v}$$

$$= -x\cos x + \int \cos x = -x\cos x + \sin x + C$$

ii)

$$\int \underbrace{\sin x}_{u} \underbrace{\sin x}_{v'} \, \mathrm{d}x = \underbrace{\sin x}_{u} \underbrace{(-\cos x)}_{v} - \int \underbrace{\cos x}_{u'} \underbrace{(-\cos x)}_{v} \, \mathrm{d}x$$

$$= -\sin x \cos x + \int \underbrace{\cos x \cos x}_{=1-\sin^2 x} \, \mathrm{d}x$$

$$= -\sin x\cos x + \int 1 \, \mathrm{d}x - \int \sin^2 x \, \mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow \qquad 2\int \sin^2 x \, \mathrm{d}x = -\sin x \cos x + x + 2C$$

$$\Rightarrow \qquad \int \sin^2 x \, \mathrm{d}x = \frac{x - \sin x \cos x}{2} + C$$

Alternativ kann man die Beziehung $\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1-\cos(2x))$ (siehe Formelsammlung) nutzen. Damit bekommt man:

$$\int \sin^2(x)\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int (1-\cos(2x))\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\sin(2x)\right) + C$$

Dies lässt sich mithilfe von $\sin(x)\cos(x) = \frac{1}{2}\sin(x)$ in die andere Darstellung der Lösung umwandeln.

iii)

$$\int \underbrace{x^2}_{u} \underbrace{\mathrm{e}^{1-x}}_{v'} \, \mathrm{d}x = \underbrace{x^2}_{u} \underbrace{(-\mathrm{e}^{1-x})}_{v} - \int \underbrace{2x}_{u'=u_2} \underbrace{(-\mathrm{e}^{1-x})}_{v=v_2'} \, \mathrm{d}x$$

$$= -x^2\mathrm{e}^{1-x} - \underbrace{2x}_{u_2} \underbrace{\mathrm{e}^{1-x}}_{v_2} + \int \underbrace{2}_{u_2'} \underbrace{\mathrm{e}^{1-x}}_{v_2} \, \mathrm{d}x$$

$$= -(x^2+2x)\mathrm{e}^{1-x} - 2\mathrm{e}^{1-x} + C = -(x^2+2x+2)\mathrm{e}^{1-x} + C$$

iv)

$$\int \underbrace{x}_{u} \underbrace{\frac{1}{\cos^2 x}}_{v'} \, \mathrm{d}x = \underbrace{x}_{u} \underbrace{\tan x}_{v} - \int \underbrace{1}_{u'} \underbrace{\tan x}_{v} \, \mathrm{d}x$$

$$= x\tan x + \ln|\cos x| + C$$

v) $\left[x\tan x + \ln|\cos x|\right]_{x=0}^{\pi/4} = \frac{\pi}{4} + \ln\frac{1}{\sqrt{2}} - 0 = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$

b) **i)** Mit $y = x^3+7x-2$ und $\mathrm{d}y = (3x^2+7)\,\mathrm{d}x$ hat man:

$$\int_1^2 \frac{3x^2+7}{x^3+7x-2}\, \mathrm{d}x = \int_{y(1)}^{y(2)} \frac{1}{y}\, \mathrm{d}y = \Big[\ln|y|\Big]_6^{20} = \ln\frac{20}{6} = \ln\frac{10}{3}$$

ii) Hier wählt man $y = x^3+2$ und erhält daraus $\mathrm{d}y = 3x^2\,\mathrm{d}x$ und setzt ein:

$$\frac{1}{3}\int_\pi^{3\pi/2} 3x^2\cos(x^3+2)\, \mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int_{y(\pi)}^{y(3\pi/2)} \cos(y)\, \mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{3}\left(\sin\left(\left(\frac{3\pi}{2}\right)^3 + 2\right) - \sin(\pi^3+2)\right)$$

iii) Mit $y = 1 + \ln x$ und $\mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}x}{x}$ hat man

$$\int\limits_1^2 \frac{1}{x}\mathrm{e}^{1+\ln x}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{y(1)}^{y(2)} \mathrm{e}^y\,\mathrm{d}y = \mathrm{e}^{1+\ln 2} - \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$$

iv) Wir wählen $y = \sqrt{x}$. Damit folgt (für $x > 0$):

$$x = y^2 \;\Rightarrow\; \mathrm{d}x = 2y\,\mathrm{d}y$$

und schließlich

$$\begin{aligned}\int\limits_{1/4}^{1} \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{y(1/4)}^{y(1)} \mathrm{e}^y \cdot 2y\,\mathrm{d}y = 2\int\limits_{1/2}^{1} y\mathrm{e}^y\,\mathrm{d}y \\ =& \big[2y\mathrm{e}^y\big]_{1/2}^{1} - 2\int\limits_{1/2}^{1} \mathrm{e}^y\,\mathrm{d}y \text{ (partielle Integration)} \\ =& 2\mathrm{e} - \sqrt{\mathrm{e}} - 2(\mathrm{e} - \sqrt{\mathrm{e}}) = \sqrt{\mathrm{e}}\end{aligned}$$

v) Mit $y = \cosh x$ und $\mathrm{d}y = \sinh x\,\mathrm{d}x$ hat man

$$\int \cosh^2 x \sinh x\,\mathrm{d}x = \int y^2\,\mathrm{d}y = \frac{y^3}{3} + C = \frac{\cosh^3 x}{3} + C$$

Aufgabe 29: Frühere Klausuraufgabe

a) Berechnen Sie die Integrale

$$I = \int_0^{\pi} (\sin x) \cdot \mathrm{e}^{2\cos x} \mathrm{d}x \qquad \text{und} \qquad J = \int_1^2 (t^3 - 2t)\mathrm{e}^{3t^2}\,\mathrm{d}t.$$

b) Berechnen Sie das Integral $\int_B \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, wobei B der Kreisring in der $(x,y)-$Ebene mit Mittelpunkt $(0,0)^\top$, Innenradius a und Außenradius b (mit $0 < a < b$) ist.

c) Berechnen Sie das Integral

$$\iiint_D \mathrm{e}^{5z+3y+2x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

über dem Gebiet $D = \left\{ (x,y,z)^\top \middle| x,y,z \geq 0 \text{ und } 5z+3y+2x \leq 2 \right\}$.

Lösung 29:

a) Im ersten Integral substituieren wir

$$u(x) = 2\cos x, \qquad \mathrm{d}u = -2\sin x \mathrm{d}x.$$

Eingesetzt ergibt das

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi} \sin x \mathrm{e}^{2\cos x}\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{2}\int_{u(0)}^{u(\pi)} \mathrm{e}^u \mathrm{d}u = -\frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^u\right]_{u=2}^{-2} = \frac{\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^{-2}}{2} = \sinh(2). \end{aligned}$$

Zur Berechnung des zweiten Integrals integrieren wir partiell:

$$\begin{aligned} J &= \int_1^2 \underbrace{(t^2-2)}_{u}\underbrace{t\mathrm{e}^{3t^2}}_{v'} = \Big[\underbrace{(t^2-2)}_{u}\underbrace{\left(\frac{1}{6}\mathrm{e}^{3t^2}\right)}_{v}\Big]_1^2 - \int_1^2 \underbrace{2t}_{u'}\,\underbrace{\frac{1}{6}\mathrm{e}^{3t^2}}_{v}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{3}\mathrm{e}^{12} + \frac{1}{6}\mathrm{e}^3 - \frac{2}{36}\mathrm{e}^{3t^2}\Big|_1^2 = \frac{\mathrm{e}^3}{6}\left(2\mathrm{e}^9+1\right) + \frac{1}{18}\left(\mathrm{e}^3 - \mathrm{e}^{12}\right) \\ &= \frac{\mathrm{e}^3}{18}\left(5\mathrm{e}^9 + 4\right). \end{aligned}$$

b) Es bietet sich eine Berechnung in Polarkoordinaten an:

$$\int_B \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=a}^{b} r r \mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = 2\pi\frac{b^3-a^3}{3}.$$

c) Wir integrieren in kartesischen Koordinaten, wobei zu beachten ist, dass die Integrationsgrenzen für z von x und y abhängen und die für y von x. Deswegen ist die Integrationsreihenfolge – nachdem sie einmal gewählt wurde – festgelegt. Die oberen Integrationsgrenzen resultieren aus der Ebenengleichung $2x+3y+5z=2$:

$$\begin{aligned} \int_D \mathrm{e}^{5z+3y+2x}\mathrm{d}(x,y,z) &= \int_{x=0}^{1}\mathrm{e}^{2x}\int_{y=0}^{\frac{2-2x}{3}}\mathrm{e}^{3y}\int_{z=0}^{\frac{2-2x-3y}{5}}\mathrm{e}^{5z}\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\ &= \int_{x=0}^{1}\mathrm{e}^{2x}\int_{y=0}^{\frac{2-2x}{3}}\mathrm{e}^{3y}\left[\frac{\mathrm{e}^{5z}}{5}\right]_{z=0}^{\frac{2-2x-3y}{5}}\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{5}\int_{x=0}^{1}\mathrm{e}^{2x}\int_{y=0}^{\frac{2-2x}{3}}\mathrm{e}^{3y}\left(\mathrm{e}^{2-2x-3y}-1\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{5}\int_{x=0}^{1}\mathrm{e}^{2x}\left[\mathrm{e}^{2-2x}y - \frac{\mathrm{e}^{3y}}{3}\right]_{y=0}^{\frac{2-2x}{3}}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{15}\int_{x=0}^{1}\left(\mathrm{e}^2(2-2x) - \mathrm{e}^2 + \mathrm{e}^{2x}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{15}\left[\mathrm{e}^2(x-x^2) + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\right]_{x=0}^{1} = \frac{\mathrm{e}^2-1}{30} \end{aligned}$$

Aufgabe 30:

a) **zur partiellen Integration**

$$\int u(t)\cdot v'(t)\ \mathrm{d}t \ = \ u(t)\cdot v(t) - \int u'(t)\cdot v(t)\ \mathrm{d}t$$

Berechnen Sie Stammfunktionen der beiden Funktionen

i) $(2t-1)\ \cos(t)$, **ii)** $\big(t^2+t-5\big)\ \mathrm{e}^{t/2}$.

b) **zur Substitution**

$$\int f\big(g(t)\big)\cdot g'(t)\ \mathrm{d}t \ = \ \int f(z)\ \mathrm{d}z \text{ mit } z=g(t)\ ,\quad \mathrm{d}z = g'(t)\,\mathrm{d}t$$

Berechnen Sie Stammfunktionen von

i) $4\,t\,\mathrm{e}^{t^2}$ **ii)** $\dfrac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{e}^{\sqrt{t}}$.

Lösung 30:

a) i) Mit $u(t)=(2t-1)\,,\ u'(t)=2$ und $v'(t)=\cos(t)\,,\ v(t)=\sin(t)$ erhält man

$$\int (2t{-}1)\ \cos(t)\,\mathrm{d}t \ = \ (2t{-}1)\sin(t) - \int 2\sin(t)\ \mathrm{d}t \ = \ (2t{-}1)\sin(t)+2\cos(t)+C\ .$$

ii) Mit $u(t) = t^2+t-5\,,\ u'(t) = 2t+1$ und $v'(t) = \mathrm{e}^{t/2}\,,\ v(t) = 2\,\mathrm{e}^{t/2}$ für die erste partielle Integration und mit $u(t) = 4t+2\,,\ u'(t) = 4$ und $v'(t)=\mathrm{e}^{t/2}\,,\ v(t)=2\,\mathrm{e}^{t/2}$ für die zweite erhält man

$$\begin{aligned}
\textstyle\int \big(t^2+t-5\big)\,\mathrm{e}^{t/2}\ \mathrm{d}t \ &= \ \big(t^2+t-5\big)\,2\,\mathrm{e}^{t/2} - \textstyle\int (2t+1)\,2\,\mathrm{e}^{t/2}\ \mathrm{d}t\\
&= \ \big(2\,t^2+2\,t-10\big)\,\mathrm{e}^{t/2} - (4t+2)\,2\,\mathrm{e}^{t/2} + \textstyle\int 4\cdot 2\,\mathrm{e}^{t/2}\ \mathrm{d}t\\
&= \ \big(2\,t^2-6\,t-14\big)\,\mathrm{e}^{t/2} + 16\,\mathrm{e}^{t/2} + C\\
&= \ \big(2\,t^2-6\,t+2\big)\,\mathrm{e}^{t/2} + C\ .
\end{aligned}$$

b) i) Mit $z=t^2$ und $\mathrm{d}z = 2\,t\ \mathrm{d}t$ erhält man

$$\int 4\,t\,\mathrm{e}^{t^2}\ \mathrm{d}t \ = \ \int 2\,\mathrm{e}^{z}\ \mathrm{d}z \ = \ 2\,\mathrm{e}^{z}+C \ = \ 2\,\mathrm{e}^{t^2}+C\ .$$

ii) Mit $z=\sqrt{t}$ und $\mathrm{d}z = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ erhält man

$$\int \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{e}^{\sqrt{t}}\ \mathrm{d}t \ = \ 2\int \mathrm{e}^{z}\ \mathrm{d}z \ = \ 2\mathrm{e}^{z}+C \ = \ 2\mathrm{e}^{\sqrt{t}}+C\ .$$

Aufgabe 31:

a) Bestimmen Sie die folgenden Integrale

$$\int (x^2+3x-4)\mathrm{d}x \quad , \quad \int\limits_{x=-4}^{4} (x^3-x)\mathrm{d}x$$

$$\int\limits_{x=-1}^{3} \left(5x^4+\frac{x^3}{3}+2\right)\mathrm{d}x \quad , \quad \int \left(x^2+7x-\frac{x^5}{5}\right)\mathrm{d}x.$$

b) Bestimmen Sie desweiteren

$$\int \cos(x)\mathrm{d}x \quad , \quad \int\limits_{x=2}^{8} \frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

$$\int\limits_{x=0}^{2\pi} \sin(x)\mathrm{d}x \quad , \quad \int\limits_{x=0}^{\pi/2} \cos(x)\mathrm{d}x.$$

Lösung 31:

a)

$$\int \left(x^2+3x-4\right)\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}-4x+C$$

$$\int\limits_{x=-4}^{4} \left(x^3-x\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right]_{x=-4}^{4} = 0$$

(Dasselbe Ergebnis kann man auch ohne Rechnung begründen, da eine ungerade Funktion auf einem symmetrischen Intervall integriert wird.)

$$\begin{aligned}\int\limits_{x=-1}^{3} \left(5x^4+\frac{x^3}{3}+2\right)\mathrm{d}x &= \left[x^5+\frac{x^4}{12}+2x\right]_{x=-1}^{3} \\ &= 3^5+\frac{3^4}{12}+2\cdot 3-\left((-1)^5+\frac{(-1)^4}{12}+2\cdot(-1)\right) \\ &= 243+\frac{27}{4}+6+1-\frac{1}{12}+2 \\ &= 252+\frac{81-1}{12}=\frac{776}{3}\end{aligned}$$

$$\int \left(x^2+7x-\frac{x^5}{5}\right)\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}+\frac{7x^2}{2}-\frac{x^6}{30}+C$$

b)

$$\int \cos(x)\mathrm{d}x = \sin(x)+C$$

$$\int\limits_{x=2}^{8} \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x|\Big|_{x=2}^{8} = \ln(8)-\ln(2) = \ln\frac{8}{2} = \ln(4)$$

$$\int\limits_{x=0}^{2\pi} \sin(x)\mathrm{d}x = -\cos(x)\Big|_{x=0}^{2\pi} = -\cos(2\pi)+\cos(0) = 0$$

(Auch hier hätte man mit der Symmetrie der Sinusfunktion argumentieren können.)

$$\int\limits_{x=0}^{\pi/2} \cos(x)\mathrm{d}x = \sin(x)\Big|_{x=0}^{\pi/2} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)-\sin(0) = 1-0 = 1.$$

Aufgabe 32: Schwerpunkt und Trägheitsmoment einer Kreisscheibe

Gegeben sei die Kreisscheibe

$$K = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 | \quad \left\|\boldsymbol{x} - (0,2)^\top\right\|_2 \le 2\}$$

mit der Massendichte $\rho(x,y) = x^2 + 4$.

a) Berechnen Sie die Masse $M = \int\limits_K \rho(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ der Kreisscheibe. Führen Sie die Rechnung in kartesischen Koordinaten durch.

b) Berechnen Sie ebenso den Schwerpunkt

$$\boldsymbol{s} = \frac{1}{M}\int\limits_K \rho(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

Führen Sie die Rechnung in den verschobenen Polarkoordinaten $\boldsymbol{x}(r,\varphi) = (r\cos\varphi,\, 2 + r\sin\varphi)^\top$ aus.

c) Berechnen Sie das Trägheitsmoment bezüglich der x-Achse

$$\Theta_y = \int\limits_K \rho(x,y)y^2\mathrm{d}(x,y).$$

Lösung 32:

a) Das Integrationsgebiet wird definiert durch

$$2 \ge \left\|\boldsymbol{x} - (0,2)^\top\right\|_2 = \sqrt{x^2 + (y-2)^2}.$$

Wir stellen dies nach y um:

$$\begin{aligned}
& & 4 \ge& x^2 + (y-2)^2 \\
\Rightarrow & & 4 - x^2 \ge& (y-2)^2 \\
\Rightarrow & & \sqrt{4-x^2} \ge y-2 \text{ und } -\sqrt{4-x^2} &\le y-2 \\
\Rightarrow & & 2+\sqrt{4-x^2} \ge y \text{ und } 2-\sqrt{4-x^2} &\le y.
\end{aligned}$$

Die zulässigen x-Werte sind damit durch $-2 \le x \le 2$ gegeben. Das Integral für die Masse ist nun

$$\begin{aligned}
M = \int\limits_K \rho(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x &= \int\limits_{x=-2}^{2}\int\limits_{y=2-\sqrt{4-x^2}}^{2+\sqrt{4-x^2}} (x^2+4)\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&= \int\limits_{x=-2}^{2} (x^2+4)\left[2+\sqrt{4-x^2} - (2-\sqrt{4-x^2})\right]\mathrm{d}x \\
&= 2\int\limits_{x=-2}^{2} (x^2+4)\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Dieses Integral lässt sich durch die Substitution

$$x = 2\sin u,\ \mathrm{d}x = 2\cos u\mathrm{d}u,\ u \in [-\pi/2, \pi/2]$$

umformen zu

$$\begin{aligned}
M =& 2\int\limits_{u=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (4\sin^2 u + 4)\sqrt{4 - 4\sin^2 u}\cdot 2\cos u\mathrm{d}u \\
=& 32\int\limits_{u=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 u + 1)\cos u\cos u\mathrm{d}u = 32\int\limits_{u=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left((\sin u\cos u)^2 + \cos^2 u\right)\mathrm{d}u \\
=& 32\int\limits_{u=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\left(\frac{1}{2}\sin(2u)\right)^2 + \frac{1}{2}(\cos^2 u + 1 - \sin^2 u)\right)\mathrm{d}u \\
=& 32\int\limits_{u=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin^2(2u) + 1 - \cos^2(2u)}{8} + \frac{\cos(2u)+1}{2}\right)\mathrm{d}u \\
=& 32\int\limits_{u=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1-\cos(4u)}{8} + \frac{\cos(2u)+1}{2}\right)\mathrm{d}u = 32\cdot\left[\frac{5u}{8} - \frac{\sin(4u)}{32} + \frac{\sin(2u)}{4}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\
=& 20\pi
\end{aligned}$$

b) Die Rechnung in Polarkoordinaten ist einfacher. Wir belassen die Gleichung in ihrer vektoriellen Form:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{s} =& \frac{1}{M}\int\limits_K \rho(\boldsymbol{x})\begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ 2+r\sin\varphi \end{pmatrix}\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \frac{1}{M}\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi}\int\limits_{r=0}^{2}(r^2\cos^2\varphi+4)\begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ 2+r\sin\varphi \end{pmatrix} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi \\
=& \frac{1}{M}\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi}\left(\left(\frac{2^4}{4}\cos^2\varphi+4\frac{2^2}{2}\right)\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}+\left(\frac{2^5}{5}\cos^2\varphi+4\frac{2^3}{3}\right)\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}\right)\mathrm{d}\varphi \\
=& \frac{1}{M}(4\cdot\pi+8\cdot 2\pi)\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}+\frac{32}{5M}\int\limits_0^{2\pi}\begin{pmatrix} \cos^3\varphi \\ \cos^2\varphi\sin\varphi \end{pmatrix}\mathrm{d}\varphi \\
=& \frac{20\pi}{M}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}+\frac{32}{5M}\int\limits_0^{2\pi}\begin{pmatrix} \cos\varphi-\cos\varphi\sin^2\varphi \\ \cos^2\varphi\sin\varphi \end{pmatrix}\mathrm{d}\varphi \\
=& \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}+\frac{32}{5M}\left.\begin{pmatrix} \sin\varphi-\frac{\sin^3\varphi}{3} \\ -\frac{\cos^3\varphi}{3} \end{pmatrix}\right|_0^{2\pi} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Dieses Ergebnis war zu erwarten, da die Massendichte nicht von y abhängt und bezüglich x symmetrisch ist ($\rho(x)=\rho(-x)$).

c) Alternativ zur obigen Integrationsreihenfolge integrieren wir hier zuerst nach φ:

$$
\begin{aligned}
\Theta_y =& \int\limits_0^2\int\limits_0^{2\pi}(r^2\cos^2\varphi+4)(2+r\sin\varphi)^2 r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r \\
=& \int\limits_0^2\int\limits_0^{2\pi}\Big(4r^2\cos^2\varphi+4r^3\sin\varphi\cos^2\varphi+r^4\cos^2\varphi\sin^2\varphi+ \\
& \qquad +16+16r\sin\varphi+4r^2\sin^2\varphi\Big)\mathrm{d}\varphi r\mathrm{d}r \\
=& \int\limits_0^2\left(4r^2\pi+0+r^4\int\limits_0^{2\pi}\frac{1}{4}\sin^2(2\varphi)\mathrm{d}\varphi+16\cdot 2\pi+0+4r^2\pi\right)r\mathrm{d}r \\
=& \int\limits_0^2\left(8\pi r^3+\frac{1}{4}r^5\pi+32\pi r\right)\mathrm{d}r = 2\pi 2^4+\frac{\pi}{4}\cdot\frac{2^6}{6}+16\pi\cdot 2^2 \\
=& 96\pi+\frac{8}{3}\pi=\frac{296\pi}{3}.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 33: Bogenlänge

Die Bogenlänge des Graphen einer stetig differenzierbaren Funktion $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ auf dem Interval $[a,b]$ wird definiert als

$$L=\int\limits_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x.$$

Berechnen Sie die Bogenlänge der folgenden Funktionen:

a) $f_1(x)=\sqrt{4-x^2}$ auf $[-2,2]$

b) $f_2(x)=x^2$ auf $[0,b]$

Lösung 33:

a)

$$\begin{aligned}L_1&=\int\limits_{-2}^{2}\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}\right)^2}\,\mathrm{d}x=\int\limits_{-2}^{2}\sqrt{\frac{4-x^2+x^2}{4-x^2}}\,\mathrm{d}x\\&=\int\limits_{-2}^{2}\frac{2}{\sqrt{4-x^2}}\,\mathrm{d}x=2\lim_{a\to2}\int\limits_0^a\frac{2}{\sqrt{4-x^2}}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Wir behandeln dabei das uneigentliche Integral als Grenzwert und nutzen die Symmetrie aus.

Weiter berechnen wir das unbestimmte Integral $\int\frac{2}{\sqrt{4-x^2}}\,\mathrm{d}x$ mit der Substitution $x=2\sin\varphi$ für $-\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$, $\mathrm{d}x=2\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi$.

$$\begin{aligned}\int\frac{2}{\sqrt{4-4\sin^2\varphi}}2\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi&=\int\frac{1}{|\cos\varphi|}\cdot2\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi\\&=\int2\,\mathrm{d}\varphi\quad\left(\cos\varphi\ge0\text{ für }-\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}\right)\\&=2\varphi+C=2\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)+C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}L_1&=2\lim_{a\to2}\int\limits_0^a\frac{2}{\sqrt{4-x^2}}\,\mathrm{d}x=2\lim_{a\to2}2\left[\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\right]_0^a\\&=4\lim_{a\to2}\arcsin\left(\frac{a}{2}\right)=4\arcsin(1)=2\pi\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}L_2&=\int\limits_0^b\sqrt{1+(2x)^2}\,\mathrm{d}x\quad\left(\text{substituiere }2x=\sinh t,\ \mathrm{d}x=\frac{1}{2}\cosh t\,\mathrm{d}t\right)\\&=\int\limits_0^{t_0}\sqrt{1+\sinh^2t}\cdot\frac{1}{2}\cosh t\,\mathrm{d}t\quad(t_0=\operatorname{Arsinh}(2b))\\&=\frac{1}{2}\int\limits_0^{t_0}\cosh^2t\,\mathrm{d}t\overset{(*)}{=}\frac{1}{2}\cdot\left.\frac{t+\sinh t\cosh t}{2}\right|_0^{t_0}=\frac{t_0+\sinh t_0\cdot\sqrt{1+\sinh^2t_0}}{4}\\&=\frac{\operatorname{Arsinh}(2b)+2b\cdot\sqrt{1+4b^2}}{4}\end{aligned}$$

(*) wegen

$$\begin{aligned}\int\cosh^2(t)\,\mathrm{d}t&=\int\left(\frac{\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t}}{2}\right)^2\mathrm{d}t=\int\frac{\mathrm{e}^{2t}+2+\mathrm{e}^{-2t}}{4}\,\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{4}\left(\frac{\mathrm{e}^{2t}}{2}+\frac{\mathrm{e}^{-2t}}{2}+2t\right)+C=\frac{1}{2}\left(\frac{(\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{-t})\cdot(\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t})}{4}+t\right)+C\\&=\frac{1}{2}(\sinh(t)\cdot\cosh(t)+t)+C.\end{aligned}$$

Aufgabe 34: Integration in Kugelkoordinaten

Gegeben sei das Rotationsellipsoid

$$E = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, x^2 + 4y^2 + z^2 \leq 9 \right\}.$$

Man berechne das Integral $\int\limits_B (x^2+y+z^2)\mathrm{d}(x,y,z)$ unter Verwendung von

a) Zylinderkoordinaten

b) an das Ellipsoid angepasste Kugelkoordinaten:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi\cos\psi \\ \frac{r}{2}\sin\varphi\cos\psi \\ r\sin\psi \end{pmatrix}.$$

Hinweis(zu **a**)): Verwenden Sie um die $y-$Achse rotationssymmetrische Zylinderkoordinaten

$$\boldsymbol{x}(r,\varphi,y) = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ y \\ r\sin(\varphi) \end{pmatrix}.$$

Lösung 34:

a) Wir nutzen Zylinderkoordinaten der Form

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ y \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}, \ \mathrm{d}(x,y,z) = r\mathrm{d}(r,\varphi,y).$$

Damit hat man mit den Integrationsgrenzen für y

$$y_\pm = \pm\frac{1}{2}\sqrt{9-r^2}$$

das Integral

$$\begin{aligned}
I := \int\limits_B (x^2+y+z^2)\mathrm{d}(x,y,z) &= \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi}\int\limits_{r=0}^{3}\int\limits_{y=y_-}^{y_+} (r^2\cos^2\varphi + y + r^2\sin^2\varphi) r\mathrm{d}y\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi \\
&= \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi}\int\limits_{r=0}^{3} \left(r^3(y_+ - y_-) + r\frac{y_+^2 - y_-^2}{2} \right)\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi \\
&= \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi}\int\limits_{r=0}^{3} r^3\sqrt{9-r^2}\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi \\
&= 2\pi\left(-r^2\frac{(9-r^2)^{3/2}}{3}\Bigg|_{r=0}^{3} + \int\limits_0^3 2r\frac{(9-r^2)^{3/2}}{3}\mathrm{d}r \right) \\
&= 2\pi\cdot\frac{2}{3}\cdot\int\limits_0^3 r(9-r^2)^{3/2}\mathrm{d}r = 2\pi\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{-(9-r^2)^{5/2}}{5}\Bigg|_0^3 = \frac{4\cdot 3^4\pi}{5} = \frac{324\pi}{5}.
\end{aligned}$$

b) In den angepassten Kugelkoordinaten hat man

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(x,y,z) &= \left| \det\begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\psi & -r\sin\varphi\cos\psi & -r\cos\varphi\sin\psi \\ \frac{1}{2}\sin\varphi\cos\psi & \frac{r}{2}\cos\varphi\cos\psi & -\frac{r}{2}\sin\varphi\sin\psi \\ \sin\psi & 0 & r\cos\psi \end{pmatrix} \right| \\
&= \frac{1}{2}\left|\sin\psi r^2(\sin\psi\cos\psi) + r^2\cos\psi\cdot\cos^2\psi\right| \\
&= \frac{r^2}{2}\cos\psi > 0 \ (\text{wegen } -\pi/2 \leq \psi \leq \pi/2).
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$
\begin{aligned}
I = &\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{\psi=-\pi/2}^{\pi/2} \int\limits_{r=0}^{3} \left(r^2 \cos^2\varphi \cos^2\psi + \frac{r}{2} \sin\varphi \cos\psi + r^2 \sin^2\psi \right) \frac{r^2}{2} \cos\psi \mathrm{d}r \mathrm{d}\psi \mathrm{d}\varphi \\
=&\frac{1}{2} \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{\psi=-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{3^5}{5} \cos^2\varphi \cos^2\psi + \frac{3^4}{8} \sin\varphi \cos\psi + \frac{3^5}{5} \sin^2\psi \right) \cos\psi \mathrm{d}\psi \mathrm{d}\varphi \\
=&\frac{1}{2} \int\limits_{\psi=-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{3^5}{5} \cdot \pi \cos^2\psi + 0 + \frac{3^5}{5} \sin^2\psi \cdot 2\pi \right) \cos\psi \mathrm{d}\psi \\
=&\frac{3^5\pi}{10} \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + \sin^2\psi) \cos\psi \mathrm{d}\psi = \frac{3^5\pi}{10} \left[\sin\psi + \frac{1}{3} \sin^3\psi \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{4 \cdot 3^4 \pi}{5} \frac{324\pi}{5}.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 35: Integration in Kugelkoordinaten

Berechnen Sie

$$I = \iiint\limits_B \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \mathrm{d}(x,y,z),$$

wobei B das Innere der Kugel $x^2+y^2+z^2+2Ry=0$ ist.

Hinweis: Verwenden Sie die Kugelkoordinaten

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sin\varphi\sin\theta \\ r\cos\theta \\ r\cos\varphi\sin\theta \end{pmatrix}.$$

Lösung 35:

Zunächst wird der Rand des Bereiches B untersucht:

$$0 = x^2+y^2+z^2+2Ry = x^2+(y+R)^2+z^2-R^2.$$

B ist also eine Kugel mit Radius R um den Mittelpunkt $(0,-R,0)$. In den gegebenden Kugelkoordinaten hat man dann folgende Integrationsbereiche:

- $\varphi \in [0,2\pi]$, da die Kugel B rotationssymmetrisch bezüglich der y-Achse ist und φ einen Winkel um eben diese Achse beschreibt.
- $\theta \in [\frac{\pi}{2},\pi]$, da die Kugel B im negativen y-Bereich liegt.
- An den Grenzen für r soll gelten

$$\begin{aligned} 0 =& x^2+y^2+z^2+2Ry \\ =& r^2\sin^2\varphi\sin^2\theta + r^2\cos^2\theta + r^2\cos^2\varphi\sin^2\theta + 2Rr\cos\theta \\ =& r^2\sin^2\theta + r^2\cos^2\theta + 2Rr\cos\theta = r^2+2Rr\cos\theta \\ \Rightarrow \qquad r =& 0 \text{ oder } r = -2R\cos\theta (>0, \text{ da } \cos\theta<0) \end{aligned}$$

  Der Integrationsbereich ist also $r \in [0,\ -2R\cos\theta]$.

Das Integral berechnet sich damit zu

$$\begin{aligned} I =& \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{\theta=\pi/2}^{\pi} \int\limits_{r=0}^{-2R\cos\theta} \frac{1}{r} r^2 \sin\theta \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi \\ =& 2\pi \int\limits_{\theta=\pi/2}^{\pi} \frac{(-2R\cos\theta)^2}{2} \sin\theta\mathrm{d}\theta = 4\pi R^2 \left. \frac{-\cos^3\theta}{3} \right|_{\pi/2}^{\pi} = \frac{4\pi R^2}{3}. \end{aligned}$$

Aufgabe 36: Masse einer Halbkugel

Berechnen Sie die Masse einer Halbkugel mit Mittelpunkt $(0,0,0)^\top$, Radius $a > 0$ sowie $z \geq 0$ und der Massendichte

$$\rho(x,y,z) = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Hinweis: Die Masse M eines Körpers K mit Massendichte $\rho(\boldsymbol{x})$ ergibt sich aus

$$M = \int\limits_K \rho(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

Lösung 36:

Es bietet sich die Rechnung in Kugelkoordinaten an. Wegen der Bedingung $z \geq 0$ wird θ auf das Intervall $[0,\, \pi/2]$ eingeschränkt.

$$M = \int\limits_{\theta=0}^{\pi/2} \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{r=0}^{a} \rho \cdot r^2 \sin\theta \mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta = \int\limits_{\theta=0}^{\pi/2} \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{r=0}^{a} \frac{r\cos\theta}{r\sin\theta} r^2 \sin\theta \mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{a^3}{3} \cdot 2\pi \int\limits_{\theta=0}^{\pi/2} \cos\theta \mathrm{d}\theta = \frac{2\pi a^3}{3}.$$

Aufgabe 37: Bereichsintegrale

Berechnen Sie

a) $I := \int\limits_D x^2\, y + x \; \mathrm{d}\boldsymbol{x}$ mit $D := [-2, 2] \times [1, 3]$.

b) $J := \int\limits_G x \mathrm{d}(x, y)$ mit dem durch die Kurven

$$x = 0,\; y = 2x \text{ und } y = \frac{1}{a}\, x^2 + a \;,\; a > 0$$

berandeten Flächenstück G.

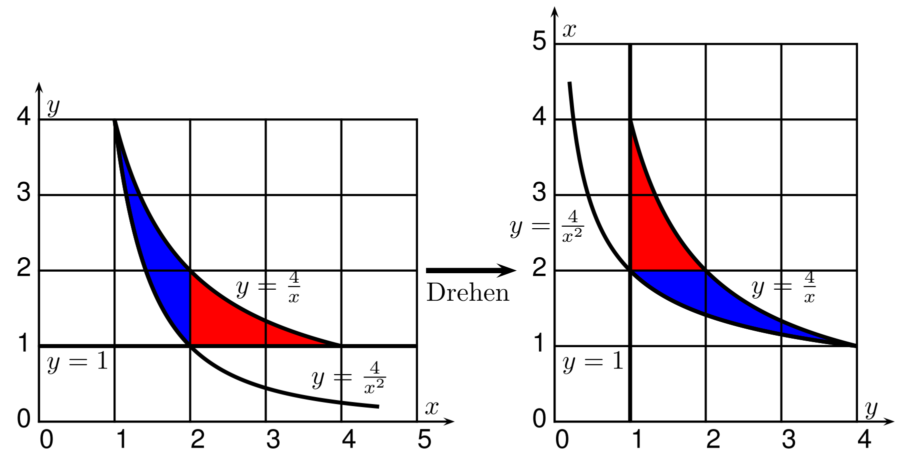
c) Betrachten Sie das zweifache Integral

$$I := \int_{x=1}^{2} \int_{y=4/x^2}^{4/x} xy^2 \mathrm{e}^{x^2y^2/4}\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x + \int_{x=2}^{4} \int_{y=1}^{4/x} xy^2 \mathrm{e}^{x^2y^2/4}\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x.$$

i) Skizzieren Sie den Integrationsbereich und vertauschen Sie die Integrationsreihenfolge.

ii) Berechnen Sie das Integral.

Hinweis: zu c) Die Integrationsbereiche B_1 und B_2 beider Einzelintegrale sind in folgender Skizze blau und rot markiert. Die y-Grenzen hängen von x ab und speziell die untere y-Grenze wird für beide Bereiche durch unterschiedliche Funktion beschrieben. ($y = \frac{4}{x^2}$ und $y = 1$)
Das Ändern der Integrationsreihenfolge entspricht dem Drehen der Skizze (rechts).
Nun werden die Ober und Untergrenzen für x in beiden Integrationsbereichen von der jeweils selben Funktion (y-abhängig) beschrieben. Daher kann man nun beide Integrale zusammenfassen.



Lösung 37:

Zu a)

$$I = \int\limits_1^3 \int\limits_{-2}^2 \left(x^2\, y + x\right) \mathrm{d}x\; \mathrm{d}y = \int\limits_1^3 \left[\frac{x^3}{3}\, y + \frac{x^2}{2}\right]_{x=-2}^{2} \mathrm{d}y$$

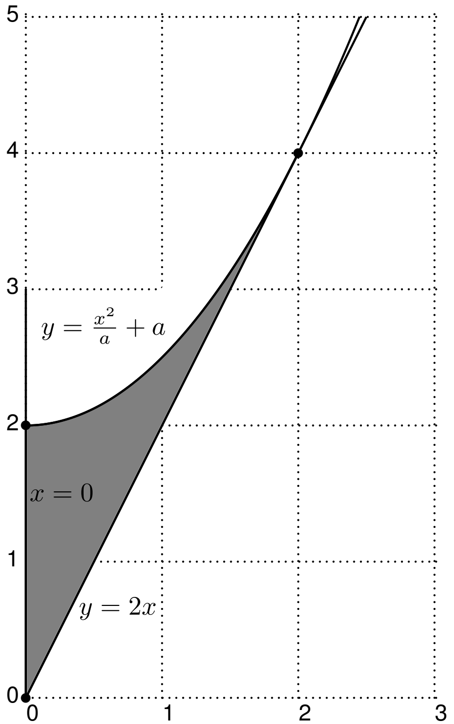
$$= \frac{16}{3} \cdot \int\limits_1^3 y\; \mathrm{d}y = \frac{16}{3} \cdot 4 = \boxed{\frac{64}{3}}\, .$$

Anmerkung: Man hätte den Summanden x gleich weglassen können, da eine ungerade Funktion über einen symmetrischen Bereich integriert immer Null ergibt.

Zu b) Es werden zunächst die Schnittpunkte der Parabel mit der Geraden bestimmt:

$$\frac{1}{a} x^2 + a = 2x \quad \Rightarrow \quad (x - a)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1/2} = a\, .$$

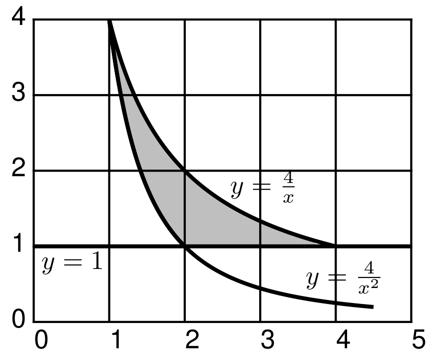
Die Kurven berühren sich somit im Punkt $P = (a, 2a)$.



Somit ergibt sich für den Integralwert:

$$
\begin{aligned}
J = & \iint_G x \mathrm{d}(x,y) = \int_{x=0}^{a} x \int_{y=2x}^{\frac{1}{a}x^2+a} \mathrm{d}\,y\mathrm{d}x \; = \int_{x=0}^{a} x\left(\frac{1}{a}x^2 + a - 2x\right)\mathrm{d}x \\
= & \int_{x=0}^{a}\left(\frac{1}{a}x^3 + ax - 2x^2\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{4a}x^4 + \frac{1}{2}ax^2 - \frac{2}{3}x^3\right]_0^a \\
= & \frac{1}{4}a^3 + \frac{1}{2}a^3 - \frac{2}{3}a^3 = \boxed{\frac{1}{12}a^3\,.}
\end{aligned}
$$

Zu c)



Mit $y = \dfrac{4}{x^2} \Rightarrow x = \dfrac{2}{\sqrt{y}}$ und $y = \dfrac{4}{x} \Rightarrow x = \dfrac{4}{y}$ erhält man den Integrationsbereich

$$
D = \left\{(x,y)\,|\,1 \le y \le 4, \frac{2}{\sqrt{y}} \le x \le \frac{4}{y}\right\}.
$$

Das Integral ist

$$
I = \int_1^4 \int_{2/\sqrt{y}}^{4/y} xy^2\,\mathrm{e}^{x^2y^2/4}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y
$$

mit dem Integralwert

$$
\begin{aligned}
I = & \int_1^4 \left[2\mathrm{e}^{x^2y^2/4}\right]_{x=2/\sqrt{y}}^{4/y} \mathrm{d}y = \int_1^4 \left[2\mathrm{e}^4 - 2\mathrm{e}^y\right]\mathrm{d}y \\
= & \, 6\mathrm{e}^4 - 2\mathrm{e}^4 + 2\mathrm{e} = 4\mathrm{e}^4 + 2\mathrm{e}.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 38: Flächeninhalt, Rotationskörper

a) Skizzieren Sie den Bereich $B \subset \mathbb{C}$ mit

$$B = \{|z+\bar{z}| + |z-\bar{z}| \leq 4\} \cap \{0 \leq \mathrm{Re}(z) \leq 1\}$$

in der Gauß'schen Ebene.

b) Interpretieren Sie B als Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ und berechnen Sie den Flächeninhalt.

c) Berechnen Sie ebenso den Schwerpunkt $\boldsymbol{x}_s$ des Bereichs B.

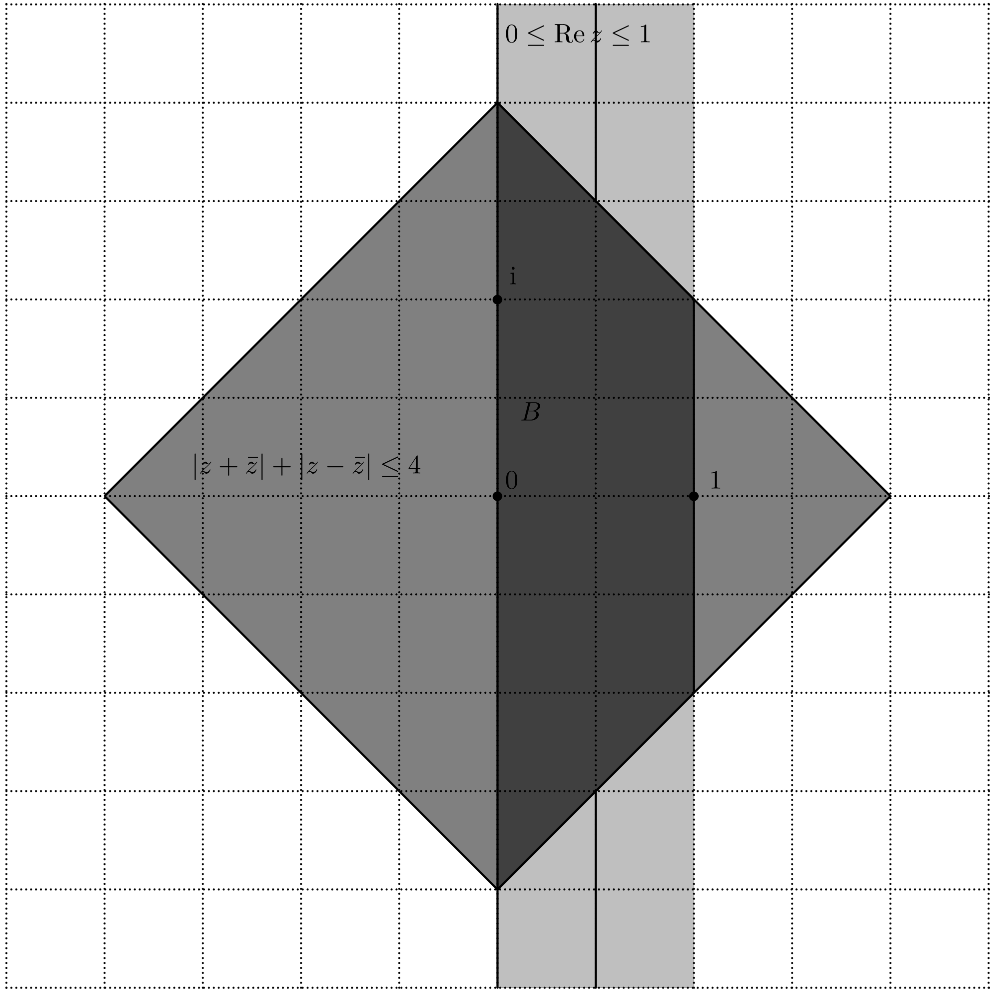
d) Berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers, der durch Rotation von B um die y-Achse entsteht.

Lösung 38:

a) Eine Zahl $z = x + \mathrm{i}y \in B$ muss zum einen in dem Streifen $0 \leq x \leq 1$ enthalten sein, zum anderen muss die folgende Ungleichung erfüllt sein:

$$4 \geq |z+\bar{z}| + |z-\bar{z}| = 2|x| + 2|y|.$$

Beide Bereiche sowie deren Schnittmenge B sind im folgenden skizziert:



b) Die Integrationsgrenzen für $B \subset \mathbb{R}^2$ sind

$$B = \{(x,y)^\top \in \mathbb{R}^2 |\, x-2 \leq y \leq 2-x \text{ und } 0 \leq x \leq 1\}.$$

Damit ist der Flächeninhalt

$$A = \int_B \mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^1 \int_{x-2}^{2-x} \mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^1 (4-2x)\mathrm{d}x = 4 - 1 = 3.$$

c) Der Schwerpunkt $(x_s,\, y_s)^\top$ ergibt sich zu

$$
\begin{aligned}
x_s =& \frac{1}{A} \cdot \int\limits_B x \mathrm{d}y \mathrm{d}x = \frac{1}{3} \int\limits_0^1 x \int\limits_{x-2}^{2-x} \mathrm{d}y \mathrm{d}x \\
=& \frac{1}{3} \int\limits_0^1 (4x - 2x^2) \mathrm{d}x = \frac{1}{3} \left[2x^2 - \frac{2}{3} x^3 \right]_0^1 \\
=& \frac{4}{9} \\
y_s =& \frac{1}{A} \cdot \int\limits_B y \mathrm{d}y \mathrm{d}x = \frac{1}{3} \int\limits_0^1 \int\limits_{x-2}^{2-x} y \mathrm{d}y \mathrm{d}x \\
=& \frac{1}{3} \int\limits_0^1 \left[\frac{y^2}{2} \right]_{x-2}^{2-x} \mathrm{d}x = \frac{1}{6} \int\limits_0^1 0 \mathrm{d}x = 0
\end{aligned}
$$

Der Schwerpunkt liegt also bei $\boldsymbol{x} = (4/9,\, 0)^\top$.

d) Das Volumen des Rotationskörpers um die y-Achse ergibt sich (in Zylinderkoordinaten) zu:

$$
\begin{aligned}
V =& \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{r=0}^{1} \int\limits_{z=r-2}^{2-r} 1 r \mathrm{d}z \mathrm{d}r \mathrm{d}\varphi \\
=& 2\pi \int\limits_{r=0}^{1} [(2-r) - (r-2)] r \mathrm{d}r = 2\pi \int\limits_{r=0}^{1} (4r - 2r^2) \mathrm{d}r \\
=& 2\pi \left[\frac{4r^2}{2} - \frac{2r^3}{3} \right]_{r=0}^{1} = \frac{8\pi}{3}.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 39: Bereichsintegrale

Gegeben sei das Doppelintegral

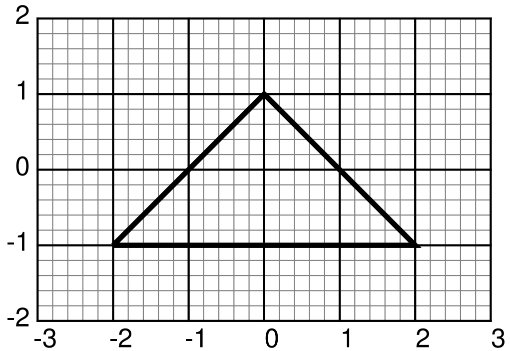
$$I := \int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{y-1}^{1-y} \frac{y+x^3}{4} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \ .$$

a) Skizzieren Sie den von den Grenzen beschriebenen Teilbereich der x-y–Ebene.

b) Berechnen Sie das Integral.

Lösung 39:

a) Der Bereich ist durch die Geraden $x = y-1 \Rightarrow y = x+1$ und $x = 1-y \Rightarrow y = x+1$, sowie durch die Geraden $y = -1$ und formal auch $y = 1$, eingeschlossen. Das ist ein Dreieck:



b)

$$I = \int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{y-1}^{1-y} \frac{y}{4} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y + \int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{y-1}^{1-y} \frac{x^3}{4} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \ .$$

Der zweite Summand ist Null, da eine in x ungerade Funktion über einen zur y–Achse symmetrischen Bereich integriert wird (aber auch ohne Beachtung der Symmetrie ist die Berechnung einfach!).

Damit ist

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_{-1}^{1} \frac{y}{4} \int\limits_{y-1}^{1-y} 1 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int\limits_{-1}^{1} \frac{y}{4} \cdot \Big[x\Big]_{x=y-1}^{1-y} \, \mathrm{d}x \\ &= \int\limits_{-1}^{1} \frac{y}{4} \cdot \Big((1-y) - (y-1)\Big) \, \mathrm{d}y \\ &= \int\limits_{-1}^{1} \frac{y-y^2}{2} \, \mathrm{d}y \ = \ -\frac{1}{3} \ . \end{aligned}$$

Aufgabe 40*: **Integration in** $\mathbb{R}^2$

Berechnen Sie den Wert des Integrals

$$\int\limits_B f_j(x,y)\mathrm{d}(x,y), \qquad j=1,\,2$$

auf dem Bereich $B=[0,\,\pi]\times[0,\,\mathrm{e}-1]$ für die beiden Funktionen

$$f_1(x,y)=\frac{\sin x}{1+y}, \qquad f_2(x,y)=x(y+1)^{x-1}.$$

Lösung 40:

$$\begin{aligned}
\int\limits_B f_1(x,y)\mathrm{d}(x,y) &= \int\limits_{x=0}^{\pi}\int\limits_{y=0}^{\mathrm{e}-1}\frac{\sin x}{1+y}\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int\limits_{x=0}^{\pi}\sin x \quad \ln|1+y|\Big|_{y=0}^{\mathrm{e}-1}\mathrm{d}x\\
&= \int\limits_{x=0}^{\pi}\sin x\mathrm{d}x(1-0)=2\\
\int\limits_B f_2(x,y)\mathrm{d}(x,y) &= \int\limits_{x=0}^{\pi}\int\limits_{y=0}^{\mathrm{e}-1} x(y+1)^{x-1}\mathrm{d}y\mathrm{d}x\\
&= \int\limits_{x=0}^{\pi}(y+1)^x\Big|_{y=0}^{\mathrm{e}-1}\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\pi}(\mathrm{e}^x-1)\mathrm{d}x\\
&=\mathrm{e}^{\pi}-\mathrm{e}^0-\pi=\mathrm{e}^{\pi}-1-\pi.
\end{aligned}$$

Aufgabe 41: Wiederholung: Schwerpunkt und Trägheitsmoment

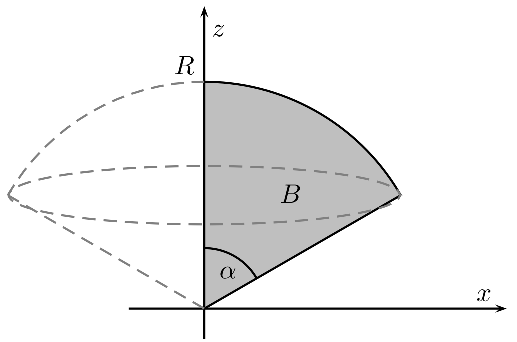
Gegeben sei der Kreissektor B in der x–z–Ebene in Abhängigkeit von den Parametern

$$R > 0 \text{ und } 0 < \alpha \leq \pi \ .$$

Durch die Rotation der Fläche B um die z–Achse wird ein Kugelsegment K gebildet.

Bestimmen Sie den Schwerpunkt und das Trägheitsmoment bezüglich der z-Achse des homogenen Rotationskörpers.

Hinweis: In Bezug auf die Masse bedeutet Homogenität, dass die Massendichte $\rho(x, y, z)$ des Körpers konstant ist. Es kann also beispielsweise $\rho \equiv 1$ angenommen werden.



Lösung 41:

Zunächst benötigen wir das Volumen des Rotationskörpers. Wir führen die Berechnung in Kugelkoordinaten durch:

$$\begin{aligned} V =& \int\limits_K \mathrm{d}V = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^R \int\limits_0^\alpha r^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}r \mathrm{d}\varphi \\ =& 2\pi \frac{R^3}{3} \int\limits_0^\alpha \sin\theta \mathrm{d}\theta = \frac{2\pi R^3}{3} \left(-\cos(\alpha) + \cos(0)\right) = \frac{2\pi R^3}{3} (1 - \cos(\alpha)). \end{aligned}$$

Wegen der Symmetrie des Rotationskörpers liegt der Schwerpunkt auf der z–Achse des Koordinatensystems. Es ist also nur die z–Komponente z_S zu berechnen:

$$\begin{aligned} z_S =& \frac{1}{V} \int\limits_K z \mathrm{d}V = \frac{1}{V} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^R \int\limits_0^\alpha r \cos\theta r^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}r \mathrm{d}\varphi \\ =& \frac{2\pi}{V} \cdot \frac{R^4}{4} \int\limits_0^\alpha \sin\theta \cos\theta \mathrm{d}\theta = \frac{3R}{4(1-\cos\alpha)} \cdot \left. \frac{\sin^2\theta}{2} \right|_0^\alpha \\ =& \frac{3R \sin^2\alpha}{8(1-\cos\alpha)} = \frac{3R}{8} \cdot \frac{1-\cos^2\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{3R}{8}(1+\cos\alpha). \end{aligned}$$

Das Trägheitsmoment bezüglich der z-Achse ergibt sich zu:

$$\begin{aligned} \Theta_z =& \int\limits_K r_\perp^2 \mathrm{d}V = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^R \int\limits_0^\alpha (r\sin\theta)^2 r^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}r \mathrm{d}\varphi \\ =& \frac{2\pi R^5}{5} \int\limits_0^\alpha \sin^2\theta \cdot \sin\theta \mathrm{d}\theta = \frac{2\pi R^5}{5} \int\limits_0^\alpha (1-\cos^2\theta) \sin\theta \mathrm{d}\theta \\ =& \frac{2\pi R^5}{5} \left[-\cos\theta + \frac{\cos^3\theta}{3} \right]_0^\alpha = \frac{2\pi R^5}{5} \left(1 - \cos\alpha + \frac{\cos^3\alpha - 1}{3} \right) \\ =& \frac{2\pi R^5}{15} (\cos^3\alpha - 3\cos\alpha + 2). \end{aligned}$$

Aufgabe 42: Volumenintegrale

Berechnen Sie

$$\int_V \frac{\mathrm{e}^{-x^2-y^2}}{1+z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

mit

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ z \geq 0\}.$$

Hinweise:

- Es empfiehlt sich die Rechnung in Zylinderkoordinaten.
- Der Integrationsbereich ist unendlich groß. Dadurch treten uneigentliche Integrale auf.

Lösung 42:

Es werden Zylinderkoordinaten (r,φ,z) verwandt: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z$. Dann gilt

$$\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,z)}\right| = r\,.$$

Es folgt

$$V' = \{(r,\varphi,z): \quad r \in [0,\infty), \quad \varphi \in [0,2\pi], \quad z \in [0,\infty)\}$$

$$\begin{aligned}
\int_V \frac{\mathrm{e}^{-x^2-y^2}}{1+z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \int_{V'} \frac{\mathrm{e}^{-r^2}}{1+z^2} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z \\
&= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^\infty\left(\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-r^2} r}{1+z^2}\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^\infty \left[\frac{-\mathrm{e}^{-r^2}}{2(1+z^2)}\right]_0^\infty \mathrm{d}z\right)\mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^\infty \frac{1}{2(1+z^2)}\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2}\arctan z\right]_0^\infty \mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^{2\pi}\frac{\pi}{4}\mathrm{d}\varphi = \frac{\pi^2}{2}\,.
\end{aligned}$$

Aufgabe 43: Schnittflächenberechnung

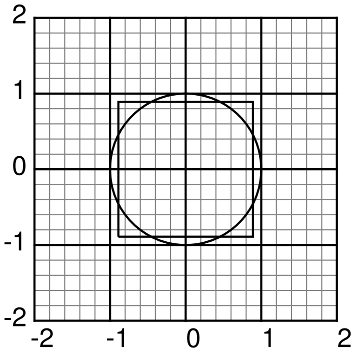
a) Gegeben sei ein Kreis $K \subset \mathbb{R}^2$ mit Radius $R = 1$ und Flächeninhalt $A = \pi$.

- **i)** Welche Kantenlänge $2L$ hat ein Quadrat Q mit demselben Flächeninhalt $A = \pi$?
- **ii)** Die Mittelpunkte beider Flächen (Kreis und Quadrat) befinden sich im Koordinatenursprung. Stellen Sie das Integral (inklusive Grenzen) zur Berechnung des Flächeninhaltes $A_{K\cap Q}$ der Schnittmenge $K \cap Q$ auf.
- **iii**)** Berechnen Sie das Integral $A_{K\cap Q}$.

b) Gegeben sei nun eine Kugel $B \subset \mathbb{R}^3$ mit Radius $R = 1$ und Volumen $V = \frac{4\pi}{3}$.
Welche Kantenlänge $2L_3$ hat ein Würfel W mit demselben Volumen $V = \frac{4\pi}{3}$?
Berechnen Sie das Volumen der Schnittmenge $W \cap B$.

Lösung 43:

a) **i)** Die Kantenlänge ist $2L = \sqrt{A} = \sqrt{\pi}$, die halbe Kantenlänge ist damit $L = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.



ii) Die zu berechnende Fläche lässt sich in kartesischen Koordinaten (als Normalbereich bezüglich x) parametrisieren:
Die zulässigen x-Werte sind $-L \le x \le L$.
Die zulässigen y-Werte hängen dann von der x-Position ab: $y_-(x) \le y \le y_+(x)$.
Da die Fläche symmetrisch bezüglich der x-Achse ist, gilt $y_-(x) = -y_+(x)$.
Weiterhin ist $y_+(x)$ im linken und rechten Teil des Integrationsbereiches durch die Kreiskurve $x^2 + y^2 = 1$ gegeben und in der Mitte durch $y = L$.

Der Wechsel zwischen beiden Kurven erfolgt am Schnittpunkt der beiden:

$$\begin{aligned} & x^2 + y^2 = 1 \text{ und } y = L \\ \Rightarrow \quad & x^2 + L^2 = 1 \\ \Rightarrow \quad & x = \pm\sqrt{1 - L^2} \end{aligned}$$

Es ist also $y_+(x) = \begin{cases} L & \text{, für } -\sqrt{1-L^2} \le x \le \sqrt{1-L^2} \\ \sqrt{1-x^2} & \text{, sonst} \end{cases}$.
Der gesuchte Flächeninhalt ist damit

$$A_{K\cap Q} = \int_{x=-L}^{L} \int_{y=-y_+(x)}^{y_+(x)} \mathrm{d}y\mathrm{d}x.$$

iii) Es ist

$$\begin{aligned} A_{K\cap Q} &= \int_{x=-L}^{L} \int_{y=-y_+(x)}^{y_+(x)} \mathrm{d}y\mathrm{d}x \\ &= \int_{x=-L}^{-\sqrt{1-L^2}} \int_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}y\mathrm{d}x + \int_{x=-\sqrt{1-L^2}}^{\sqrt{1-L^2}} \int_{y=-L}^{L} \mathrm{d}y\mathrm{d}x + \int_{x=\sqrt{1-L^2}}^{L} \int_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}y \\ &= \int_{x=-L}^{-\sqrt{1-L^2}} 2\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x + \int_{x=-\sqrt{1-L^2}}^{\sqrt{1-L^2}} 2L\mathrm{d}x + \int_{x=\sqrt{1-L^2}}^{L} 2\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Eine Stammfunktion für $\sqrt{1-x^2}$ erhält man durch die Substitution $\sin(t) = x$, $\mathrm{d}x = \cos(t)\mathrm{d}t$:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x &= \int \sqrt{1-\sin^2(t)}\cos(t)\mathrm{d}t = \int \cos^2(t)\mathrm{d}t = \frac{\sin(t)\cos(t) + t}{2} \\ &= \frac{x\sqrt{1-x^2} + \arcsin(x)}{2} \end{aligned}$$

Dies führt zu

$$
\begin{aligned}
A_{K\cap Q} =& 2\left.\frac{x\sqrt{1-x^2}+\arcsin(x)}{2}\right|_{x=-L}^{-\sqrt{1-L^2}} + 4L\sqrt{1-L^2}+ \\
&+2\left.\frac{x\sqrt{1-x^2}+\arcsin(x)}{2}\right|_{x=\sqrt{1-L^2}}^{L} \\
=& -2\sqrt{1-L^2}\sqrt{1-\sqrt{1-L^2}^2}+ \\
&-2\arcsin\sqrt{1-L^2}+2L\sqrt{1-L^2}+2\arcsin(L)+4L\sqrt{1-L^2} \\
=& -2\sqrt{1-L^2}L-2\arcsin\sqrt{1-L^2}+2L\sqrt{1-L^2}+2\arcsin(L)+4L\sqrt{1-L^2} \\
=& 2\arcsin(L)-2\arcsin\sqrt{1-L^2}+4L\sqrt{1-L^2} \\
=& 2(\arcsin(L)-\arccos(L))+4L\sqrt{1-L^2}
\end{aligned}
$$

b) Die halbe Kantenlänge ist $L_3 = \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{4\pi}{3}} = \sqrt[3]{\frac{\pi}{6}}$.
Das gesuchte Volumen $V_{W\cap B}$ ist das Volumen der Kugel B von der sechs gleichgroße Kappen abgeschnitten werden. Jede dieser Kappen entsteht durch das Schneiden einer Würfelkante mit der Kugel. Wir berechnen Das Volumen V_h der Kappe $+z$-Richtung. Für deren Radius R_h gilt $R_h^2+L_3^2=1 \Rightarrow R_h=\sqrt{1-L_3^2}$. Das Volumen berechnet sich damit in Zylinderkoordinaten:

$$
\begin{aligned}
V_h =& \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi}\int\limits_{r=0}^{R_h}\int\limits_{z=L_3}^{\sqrt{1-r^2}} r\mathrm{d}z\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi \\
=& 2\pi\int\limits_{r=0}^{R_h}(r\sqrt{1-r^2}-L_3r)\mathrm{d}r \\
=& 2\pi\left[\frac{-\sqrt{1-r^2}^3}{3}-\frac{L_3r^2}{2}\right]_{r=0}^{R_h} \\
=& 2\pi\left(\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{1-R_h^2}^3}{3}-\frac{L_3R_h^2}{2}\right)=\frac{\pi}{3}\left(2-2\sqrt{1-R_h^2}^3-3L_3R_h^2\right) \\
=& \frac{\pi}{3}\left(2-2L_3^3-3L_3(1-L_3^2)\right)=\frac{\pi}{3}\left(2+L_3^3-3L_3\right)=\frac{\pi}{3}\left(2+\frac{\pi}{6}-3\sqrt[3]{\frac{\pi}{6}}\right).
\end{aligned}
$$

Damit ergibt sich dann das Volumen des Schnittkörpers zu

$$
\begin{aligned}
V_{B\cap W} =& V_B-6V_h=\frac{4\pi}{3}-2\pi\left(2+\frac{\pi}{6}-3\sqrt[3]{\frac{\pi}{6}}\right) \\
=& \frac{-8\pi}{3}-\frac{\pi^2}{3}+6\pi\sqrt[3]{\frac{\pi}{6}}=\frac{\pi}{3}\left(3\sqrt[3]{36\pi}-8-\pi\right).
\end{aligned}
$$

Aufgabe 44: Alte Klausuraufgabe

a) Berechnen Sie das Integral $\iint_D \frac{x^2}{y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, wobei D den von den Geraden $x=2$, $y=x$ und der Hyperbel $xy=1$ begrenzten Bereich des $\mathbb{R}^2$ bezeichne.

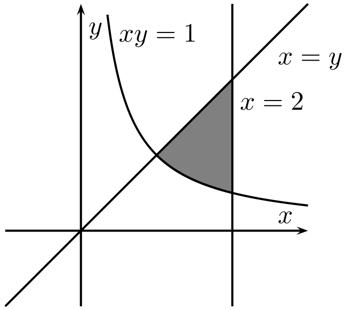
b) Gegeben sei der Körper

$$K=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2-z^2\le 1,\ -1\le z\le 2\right\}.$$

Skizzieren Sie den Körper und berechnen Sie dessen Volumen.

Lösung 44:

a) Der Integrationsbereich hat die folgende Gestalt:



D ist Normalbereich bezüglich x,

$$D=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2 : \frac{1}{x}\le y\le x,\quad 1\le x\le 2\right\}.$$

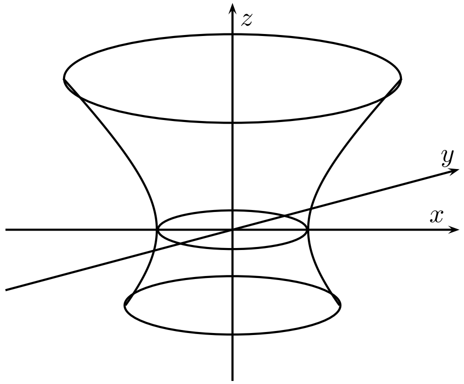
Es gilt

$$\begin{aligned}\iint_D \frac{x^2}{y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_1^2\left(\int_{1/x}^{x}\frac{x^2}{y^2}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\\ &= \int_1^2 x^2\cdot\left[\frac{-1}{y}\right]_{y=1/x}^{y=x}\mathrm{d}x\\ &= \int_1^2\left(-x+x^3\right)\mathrm{d}x=\frac{9}{4}.\end{aligned}$$

b) Die Ungleichung in der Definition des Integrationsgebietes lässt sich schreiben als

$$x^2+y^2\le 1+z^2.$$

Skizze:



Das Volumen berechnet man in Zylinderkoordinaten,

$$x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi,\quad z=z.$$

Die zugehörige Funktionaldeterminante ist $\left|\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,z)}\right|=r$. Das Volumen ist:

$$\begin{aligned}\int_{z=-1}^{2}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{\sqrt{1+z^2}} r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z &= \int_{z=-1}^{2}2\pi\frac{1+z^2}{2}\mathrm{d}z\\ &= \pi\left(3+\left[\frac{z^3}{3}\right]_{z=-1}^{2}\right)\\ &= \pi\left(3+\frac{8}{3}+\frac{1}{3}\right)=6\pi.\end{aligned}$$

Aufgabe 45: Frühere Klausuraufgabe

Berechnen Sie die Integrale

i) $I_1 = \int_0^1 (2x-1)\cosh(x)\mathrm{d}x,$

ii) $I_2 = \int \frac{\sin(x)\mathrm{e}^{\tan x}}{\cos^3(x)}\mathrm{d}x$

Lösung 45:

i) Partielles Integrieren ergibt

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^1 (2x-1)\cosh(x)\mathrm{d}x \\
&= \left[(2x-1)\sinh(x)\right]_0^1 - \int_0^1 2\sinh(x)\mathrm{d}x \\
&= \sinh(1) - 2\cosh(1) + 2 = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e} - \mathrm{e}^{-1} - 2\mathrm{e} - 2\mathrm{e}^{-1} + 4\right) \\
&= \frac{4 - \mathrm{e} - 3\mathrm{e}^{-1}}{2}.
\end{aligned}$$

ii) Wir substituieren zunächst $u = \tan x$, $\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}$ und integrieren dann partiell:

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int u\mathrm{e}^u \mathrm{d}u = u\mathrm{e}^u - \int \mathrm{e}^u \mathrm{d}u \\
&= (u-1)\mathrm{e}^u + C = (\tan(x) - 1)\mathrm{e}^{\tan(x)} + C.
\end{aligned}$$

Aufgabe 46: Parametrisierung von Integrationsbereichen

Gegeben seien die folgenden drei Körper im $\mathbb{R}^3$:

- ein Quader $Q = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 |\, 0 \leq x_1 \leq 1,\, 0 \leq x_2 \leq 1,\, -3 \leq x_3 \leq 3\}$
- eine Kugel $K = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 |\, \|\boldsymbol{x}\| \leq 1\}$
- ein Zylinder $Z = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 |\, x_1^2 + x_2^2 \leq 1,\; 0 \leq x_3 \leq 3\}$

Skizzieren und parametrisieren Sie die Schnittmenge eines jeden einzelnen dieser Körper mit den beiden folgenden Mengen:

$$M_1 = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 |\, 0 \leq \boldsymbol{x}_3\},\; M_2 = \{\boldsymbol{x} |\, 3x_1 \leq x_3\}.$$

D. h. geben Sie die Integrationsgrenzen der zugehörigen Volumenintegrale über die Bereiche $Q \cap M_1$, $Q \cap M_2$, $K \cap M_1$, ... an.

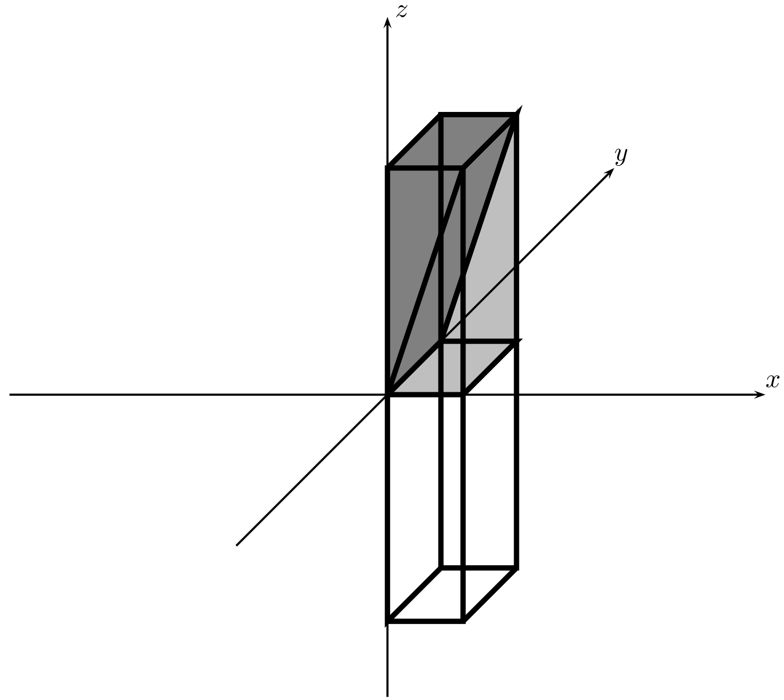
Lösung 46:

M_1 beschreibt den oberen Halbraum $z \geq 0$. M_2 beschreibt die Menge der Punkte oberhalb der Ebene $z = 3x$. Für die Schnittmengen mit den drei Körpern hat man jeweils:

- Für den Quader:

$$\begin{aligned} Q \cap M_1 =& \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 |\, 0 \leq x_1 \leq 1,\, 0 \leq x_2 \leq 1,\, 0 \leq x_3 \leq 3\} \\ Q \cap M_2 =& \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 |\, 0 \leq x_1 \leq 1,\, 0 \leq x_2 \leq 1,\, 3x_1 \leq x_3 \leq 3\} \end{aligned}$$

  Für $Q \cap M_2$ muss man keine Fallunterscheidung der x_3-Grenzen vornehmen, da die Obergrenze des Quaders ($z = 3$) die Ebene $3y = z$ nur an der Kante des Quaders schneidet.



- Für die Kugel:

  $K \cap M_1 = \Big\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 |\, -1 \leq x_1 \leq +1,\, -\sqrt{1-x_1^2} \leq x_2 \leq +\sqrt{1-x_1^2},\, 0 \leq x_3 \leq \sqrt{1-x_2^2}$

  Die zweite Schnittmenge $K \cap M_2$ besteht aus zwei Bereichen: B_1 der Bereich, der von oben durch die Kugeloberfläche und von unten durch die Ebene $3x = z$ begrenzt wird.
  B_2, der von oben und von unten durch die Kugeloberfläche begrenzt wird, da die Ebenbe dort außerhalb der Kugel liegt.
  Für die Schnittkurve der Kugeloberfläche $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ mit der Ebene $3x = z$ gilt

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 9x^2 =& 1 \\ \Leftrightarrow \qquad x =& \pm\sqrt{\frac{1-y^2}{10}} \end{aligned}$$

  Damit darf y nur Werte zwischen -1 und $+1$ annehmen.

B_1 lässt sich somit parametrisieren als

$$B_1 = \Big\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 | -1 \leq x_2 \leq 1,\, -\sqrt{\frac{1-x_2^2}{10}} \leq x_1 \leq \sqrt{\frac{1-x_2^2}{10}}, \\ 3x_1 \leq x_3 \leq \sqrt{1-x_1^2-x_2^2} \Big\}$$

Für den zweiten Teil von $K \cap M_2$ ergibt sich

$$B_2 = \Big\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 | -1 \leq x_2 \leq 1,\, -\sqrt{1-x_2^2} \leq x_1 \leq -\sqrt{\frac{1-x_2^2}{10}}, \\ -\sqrt{1-x_1^2-x_2^2} \leq x_3 \leq \sqrt{1-x_1^2-x_2^2} \Big\}$$

Eine Parametrisierung in Kugelkoordinaten, deren z-Achse ($\tilde{z}$ in der Skizze) senkrecht auf der Ebene $3x = z$ steht, wäre für diesen Körper deutlich einfacher. Die entsprechende Rotation um die y-Achse wird durch die (orthogonale) Matrix

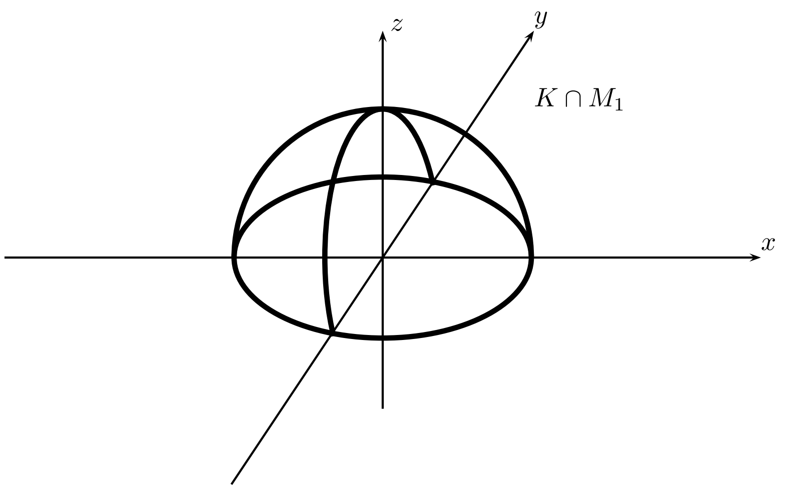
$$\boldsymbol{R} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & \sqrt{10} & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

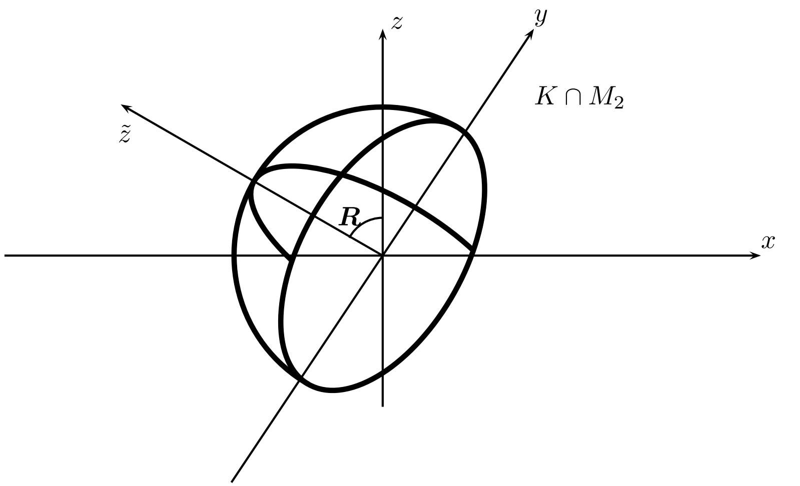
beschrieben. Damit ergibt sich dann

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}(r,\theta,\varphi) &= \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix} \\ &= \frac{r}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi - 3\cos\theta \\ \sin\theta\sin\varphi \\ 3\sin\theta\cos\varphi + \cos\theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und weiter

$$K \cap M_2 = \{\boldsymbol{x}(r,\theta,\varphi) |\, 0 \leq r \leq 1,\, 0 \leq \theta \leq \pi/2,\, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}\,.$$





- Für den Zylinder nutzen wir die Parametrisierung in Zylinderkoordinaten

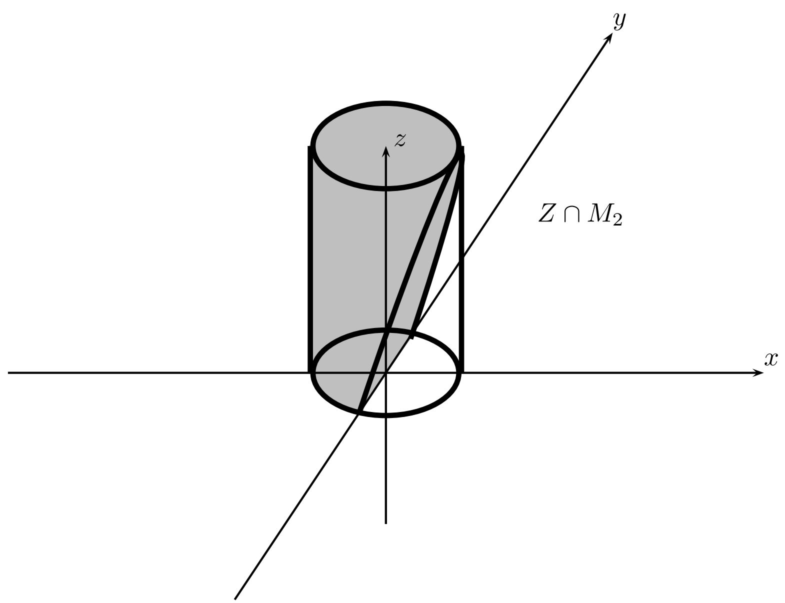
$$\boldsymbol{x}(r,\varphi,z) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$$

Die erste Menge $Z \cap M_1$ stimmt mit dem Zylinder überein.

$$\begin{aligned} Z = Z \cap M_1 &= \{\boldsymbol{x}(r,\varphi,z) | 0 \leq r \leq 1,\, 0 \leq \varphi \leq 2\pi,\, 0 \leq z \leq 3\} \\ Z \cap M_2 &= \{\boldsymbol{x}(r,\varphi,z) | 0 \leq r \leq 1,\, 0 \leq \varphi \leq 2\pi,\, z_0(r,\varphi) \leq z \leq 3\} \end{aligned}$$

Dabei berücksichtigt $z_0(r,\varphi)$, dass die Ebene $3x = z$ den Zylinderboden in der Mitte schneidet. Dies führt dazu, dass für positive x die Untergrenze des Integrationsbereichs von der Ebene beschrieben wird und für negative x durch den Zylinderboden $z = 0$:

$$z_0(r,\varphi) = \begin{cases} 0, & \text{für } \frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{3\pi}{2} \\ 3r\cos(\varphi), & \text{sonst} \end{cases} .$$



Aufgabe 47*: Transformationsformel

a) Berechnen Sie $I := \int\limits_{\boldsymbol{D}} (x^2\,y^4 + x)\mathrm{d}(x,y)$ mit $\boldsymbol{D} := [-2,2] \times [1,3]$. in den Koordinaten

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix}.$$

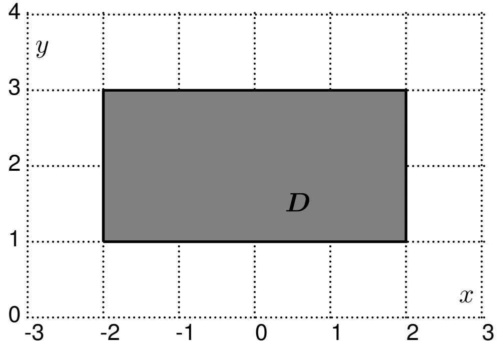
b) Berechnen Sie für den Bereich B, der von der Kurve $r = \varphi, 0 \le \varphi \le \pi$ (in Polarkoordinaten) und der x-Achse eingeschlossen wird, das Integral

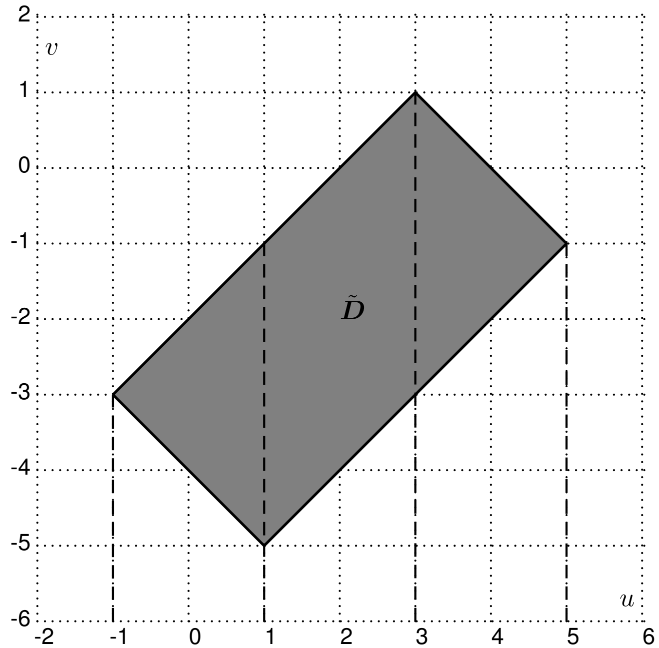
$$J := \int\limits_B \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \mathrm{d}B.$$

Führen Sie Ihre Rechnung in **Polarkoordinaten** durch.

Lösung 47:

a) Zunächst skizzieren wir den Integrationsbereich $\boldsymbol{D}$ in den beiden Koordinatensystemen:





Wir parametrisieren $\tilde{\boldsymbol{D}}$ als Normalbereich bezüglich u:

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{D}} =& \{(u,v)^\top \mid -4-u \le v \le -2+u,\ -1 \le u \le 1\} \cup \\ & \cup \{(u,v)^\top \mid -6+u \le v \le -2+u,\ 1 \le u \le 3\} \cup \\ & \cup \{(u,v)^\top \mid -6+u \le v \le 4-u,\ 3 \le u \le 5\}. \end{aligned}$$

Für die Anwendung der Transformationsformel benötigen wir außerdem die Determinante der Jacobi-Matrix der Transformation $(u,v)^\top$:

$$\det \boldsymbol{J_u} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -2.$$

Das Integral berechnet sich damit zu:

$$I = \int\limits_D (x^2y^4 + x)\mathrm{d}(x,y) = \int\limits_{\tilde{D}} \left(x(u,v)^2 y(u,v)^4 + x(u,v)\right) \frac{\mathrm{d}(u,v)}{|-2|} = I_1 + I_2$$

mit

$$I_1 = \int\limits_{\tilde{D}} x(u,v)^2 y(u,v)^4 \frac{\mathrm{d}(u,v)}{2} \text{ und } I_2 = \int\limits_{\tilde{D}} x(u,v) \frac{\mathrm{d}(u,v)}{2}.$$

Das einfachere Integral von beiden ist I_2:

$$I_2 = \int_{u=-1}^{1}\int_{v=-4-u}^{-2+u} \frac{u+v}{4}\mathrm{d}v\mathrm{d}u + \int_{u=1}^{3}\int_{v=-6+u}^{-2+u} \frac{u+v}{4}\mathrm{d}v\mathrm{d}u + \int_{u=3}^{5}\int_{v=-6+u}^{4-u} \frac{u+v}{4}\mathrm{d}v\mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{8}\left(\int_{-1}^{1}\left[(u+v)^2\right]_{v=-4-u}^{-2+u}\mathrm{d}u + \int_{1}^{3}\left[(u+v)^2\right]_{v=-6+u}^{-2+u}\mathrm{d}u + \int_{3}^{5}\left[(u+v)^2\right]_{v=-6+u}^{4-u}\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left(\int_{-1}^{3}(-2+2u)^2\mathrm{d}u - \int_{-1}^{1}(-4)^2\mathrm{d}u - \int_{1}^{5}(-6+2u)^2\mathrm{d}u + \int_{3}^{5}4^2\mathrm{d}u\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{4}{3}\left.(-1+u)^3\right|_{-1}^{3} - 32 - \frac{4}{3}\left.(-3+u)^3\right|_{1}^{5} + 32\right) = \frac{16-16}{6} = 0$$

Also ist $I = I_1$:

$$I = \frac{1}{2}\int_{u=-1}^{1}\int_{v=-4-u}^{-2+u}\left(\frac{u+v}{2}\right)^2\left(\frac{u-v}{2}\right)^4\mathrm{d}v\mathrm{d}u +$$

$$+\frac{1}{2}\int_{u=1}^{3}\int_{v=-6+u}^{-2+u}\left(\frac{u+v}{2}\right)^2\left(\frac{u-v}{2}\right)^4\mathrm{d}v\mathrm{d}u +$$

$$+\frac{1}{2}\int_{u=3}^{5}\int_{v=-6+u}^{4-u}\left(\frac{u+v}{2}\right)^2\left(\frac{u-v}{2}\right)^4\mathrm{d}v\mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{128}\Bigg(\int_{u=-1}^{1}\left[-(u+v)^2\frac{(u-v)^5}{5} - \frac{2(u+v)(u-v)^6}{5\cdot 6} - \frac{2(u-v)^7}{5\cdot 6\cdot 7}\right]_{v=-4-u}^{-2+u}\mathrm{d}u +$$

$$+\int_{u=1}^{3}\left[\ldots\right]_{v=-6+u}^{-2+u}\mathrm{d}u + \int_{u=3}^{5}\left[\ldots\right]_{v=-6+u}^{4-u}\mathrm{d}u\Bigg)$$

$$= \frac{1}{128}\Bigg(\int_{-1}^{3}\left[-(-2+2u)^2\frac{2^5}{5} - \frac{2(-2+2u)2^6}{30} - \frac{2\cdot 2^7}{210}\right]\mathrm{d}u +$$

$$-\int_{-1}^{1}\left[-(-4)^2\frac{(4+2u)^5}{5} - \frac{2(-4)(4+2u)^6}{30} - \frac{2(4+2u)^7}{210}\right]\mathrm{d}u +$$

$$-\int_{1}^{5}\left[-(-6+2u)^2\frac{6^5}{5} - \frac{2(-6+2u)6^6}{30} - \frac{2\cdot 6^7}{210}\right]\mathrm{d}u +$$

$$+\int_{3}^{5}\left[-4^2\frac{(2u-4)^5}{5} - \frac{2\cdot 4\cdot(2u-4)^6}{30} - \frac{2\cdot(2u-4)^7}{210}\right]\mathrm{d}u\Bigg)$$

und weiter

$$
\begin{aligned}
I =& \int\limits_{-1}^{3} \Big[-\frac{(-1+u)^2}{5} - \frac{(-1+u)}{15} - \frac{1}{105}\Big] \mathrm{d}u + \\
&- \int\limits_{-1}^{1} \Big[-4\frac{(2+u)^5}{5} + \frac{2(2+u)^6}{15} - \frac{(2+u)^7}{105}\Big] \mathrm{d}u + \\
&- \int\limits_{1}^{5} \Big[-(-3+u)^2\frac{3^5}{5} - \frac{(-3+u)3^6}{15} - \frac{3^7}{105}\Big] \mathrm{d}u + \\
&+ \int\limits_{3}^{5} \Big[-\frac{4(u-2)^5}{5} - \frac{2\cdot(u-2)^6}{15} - \frac{(u-2)^7}{105}\Big] \mathrm{d}u \\
=& \frac{1}{5}\Big(\Big[-\frac{(-1+u)^3}{3} - \frac{(-1+u)^2}{6} - \frac{-1+u}{21}\Big]_{-1}^{3} + \\
&\quad - \Big[-\frac{2(2+u)^6}{3} + \frac{2(2+u)^7}{21} - \frac{(2+u)^8}{21\cdot 8}\Big]_{-1}^{1} + \\
&\quad + \Big[\frac{3^5(-3+u)^3}{3} + \frac{3^5(-3+u)^2}{2} + \frac{3^6(-3+u)}{7}\Big]_{1}^{5} + \\
&\quad + \Big[-\frac{2(u-2)^6}{3} - \frac{2(u-2)^7}{21} - \frac{(u-2)^8}{8\cdot 21}\Big]_{3}^{5} \Big) \\
=& \frac{1}{5}\Big(\Big[-\frac{16}{3} - \frac{4}{21}\Big] - \Big[-\frac{2\cdot 3^6 - 2}{3} + \frac{2\cdot 3^7 - 2}{21} - \frac{3^8-1}{21\cdot 8}\Big] + \\
&\quad + \Big[3^4\cdot 2^4 + \frac{3^6\cdot 4}{7}\Big] + \Big[-\frac{2(3^6-1)}{3} - \frac{2(3^7-1)}{21} - \frac{3^8-1}{8\cdot 21}\Big] \Big) \\
=& \frac{1}{5}\Big(\frac{-16-2+2}{3} + \frac{-4+2+2}{21} + 3^5\,(2-2) + \frac{-2\cdot 3^6 + 4\cdot 3^6 - 2\cdot 3^6}{7} + \\
&\quad + \frac{3^8 - 1 - 3^8 + 1}{8\cdot 21} + 2^4\cdot 3^4 \Big) \\
=& \frac{1}{5}\Big(-\frac{16}{3} + 2^4\cdot 3^4\Big) = \frac{16}{5}\cdot\frac{3^5-1}{3} = \frac{32\cdot 121}{15} = \frac{3872}{15}
\end{aligned}
$$

b) Der angegebene Bereich lässt sich besser in Polarkoordinaten parametrisieren als in kartesischen:

$$\tilde{B} = \{(r,\varphi)\in\mathbb{R}^2 \,|\, 0 \le r \le \varphi,\ 0 \le \varphi \le \pi\}.$$

Die Determinante der Jakobimatrix der Koordinatentransformation

$$\begin{pmatrix} x(r,\varphi) \\ y(r,\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$$

ist

$$\det\begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} = r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r.$$

Damit berechnet sich das Integral zu:

$$
\begin{aligned}
J =& \int\limits_{\tilde{B}} \frac{r\cos\varphi}{\sqrt{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi}} |r| \mathrm{d}(r,\varphi) = \int\limits_{\varphi=0}^{\pi}\int\limits_{r=0}^{\varphi} r\cos\varphi \mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = \int\limits_{\varphi=0}^{\pi} \frac{1}{2}\varphi^2\cos\varphi\mathrm{d}\varphi \\
=& \frac{\varphi^2}{2}\sin\varphi\Big|_0^{\pi} - \int\limits_0^{\pi} \varphi\sin\varphi\mathrm{d}\varphi = 0 - \varphi(-\cos\varphi)|_0^{\pi} - \int\limits_0^{\pi}\cos\varphi\mathrm{d}\varphi = -\pi + 0 = -\pi.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 48: Transformationsformel

a) Berechnen Sie

$$I := \int\limits_{\boldsymbol{D}} \frac{x^6 - 2x^5y - x^4y^2 + 4x^3y^3 - x^2y^4 - 2xy^5 + y^6 + 32x + 32y}{64} \mathrm{d}(x,y),$$

wobei der Bereich $\boldsymbol{D}$ von den Geraden

$$y = -x - 4, \qquad y = x - 2, \qquad y = 4 - x \qquad \text{und} \qquad y = x - 6$$

eingeschlossen wird.
Führen Sie Ihre Berechnungen zunächst in kartesischen Koordinaten durch.
Berechnen Sie I anschließend in den Koordinaten

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x + y \\ x - y \end{pmatrix}.$$

b) Berechnen Sie für den Bereich B, der von der Kurve $r = \varphi$, $0 \leq \varphi \leq \pi$ (in Polarkoordinaten) und der x-Achse eingeschlossen wird, das Integral

$$J := \int\limits_{B} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \mathrm{d}B.$$

Führen Sie Ihre Rechnung in **Polarkoordinaten** durch.

c) Berechnen Sie das Integral

$$I_E = \int\limits_{E} x^2 \mathrm{d}(x,y),$$

wobei der Integrationsbereich eine Ellipse ist:

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 | \, x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1 \right\}$$

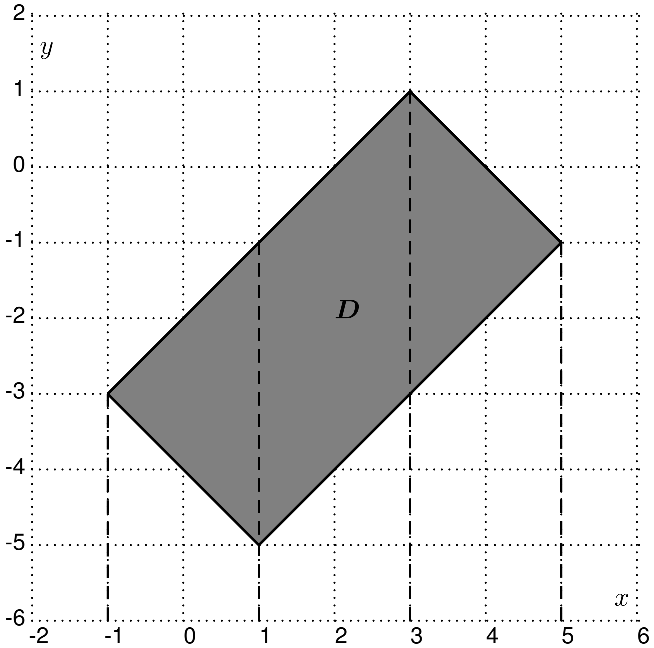
Hinweis: Nutzen Sie die gestreckten Polarkoordinaten

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ 2r\sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

.

Lösung 48:

a) Zunächst skizzieren wir den Integrationsbereich $\boldsymbol{D}$:



Wir parametrisieren $\boldsymbol{D}$ als Normalbereich bezüglich x:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{D} =& \{(x,y)^\top | -4 - x \leq y \leq -2 + x, \, -1 \leq x \leq 1\} \cup \\ & \cup \{(x,y)^\top | -6 + x \leq y \leq -2 + x, \, 1 \leq x \leq 3\} \cup \\ & \cup \{(x,y)^\top | -6 + x \leq y \leq 4 - x, \, 3 \leq x \leq 5\}. \end{aligned}$$

Das Integral lässt sich in zwei Teilintegrale zerlegen:

$$I = \int\limits_{\boldsymbol{D}} f_1(x,y)\mathrm{d}(x,y) + \int\limits_{\boldsymbol{D}} f_2(x,y)\mathrm{d}(x,y) =: I_1 + I_2$$

mit $f_1(x,y) = \dfrac{x^6 - 2x^5y - x^4y^2 + 4x^3y^3 - x^2y^4 - 2xy^5 + y^6}{64}$ und $f_2(x,y) = \frac{x+y}{2}$.

Das einfachere Integral von beiden ist I_2:

$$I_2 = \int_{x=-1}^{1}\int_{y=-4-x}^{-2+x} \frac{x+y}{2}\mathrm{d}y\mathrm{d}x + \int_{x=1}^{3}\int_{y=-6+x}^{-2+x} \frac{x+y}{2}\mathrm{d}y\mathrm{d}x + \int_{x=3}^{5}\int_{y=-6+x}^{4-x} \frac{x+y}{2}\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{4}\left(\int_{-1}^{1}\left[(x+y)^2\right]_{y=-4-x}^{-2+x}\mathrm{d}x + \int_{1}^{3}\left[(x+y)^2\right]_{y=-6+x}^{-2+x}\mathrm{d}x + \int_{3}^{5}\left[(x+y)^2\right]_{y=-6+x}^{4-x}\mathrm{d}x\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(\int_{-1}^{3}(-2+2x)^2\mathrm{d}x - \int_{-1}^{1}(-4)^2\mathrm{d}x - \int_{1}^{5}(-6+2x)^2\mathrm{d}x + \int_{3}^{5}4^2\mathrm{d}x\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{4}{3}\left.(-1+x)^3\right|_{-1}^{3} - 32 - \frac{4}{3}\left.(-3+x)^3\right|_{1}^{5} + 32\right) = \frac{16-16}{3} = 0$$

Also ist $I = I_1$. Wir vereinfachen zunächst die Darstellung von $f_1(x,y)$. Hierfür kann man wegen $f_1(t,t) = 0$ den Linearfaktor $(x-y)$ abspalten:

$$x^6-2x^5y-x^4y^2+4x^3y^3-x^2y^4-2xy^5+y^6 = (x-y)\cdot(x^5-x^4y-2x^3y^2+2x^2y^3+xy^4-y^5)$$

Auch vom Restpolynom lässt sich der Linearfaktor $(x-y)$ abspalten

$$f_1(x,y) = \frac{1}{64}(x-y)^2(x^4-2x^2y^2+y^4)$$

und eine weitere Zerlegung ergibt:

$$f_1(x,y) = \frac{1}{64}(x-y)^2(x^2-y^2)^2 = \frac{1}{64}(x-y)^4(x+y)^2.$$

Dies führt auf das Integral

$$I = I_1 = \int_{x=-1}^{1}\int_{y=-4-x}^{-2+x}\left(\frac{x+y}{2}\right)^2\left(\frac{x-y}{2}\right)^4\mathrm{d}y\mathrm{d}x + \int_{x=1}^{3}\int_{y=-6+x}^{-2+x}\left(\frac{x+y}{2}\right)^2\left(\frac{x-y}{2}\right)^4\mathrm{d}y\mathrm{d}x + \int_{x=3}^{5}\int_{y=-6+x}^{4-x}\left(\frac{x+y}{2}\right)^2\left(\frac{x-y}{2}\right)^4\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

Daraus ergibt sich mittels partieller Integration

$$I = \frac{1}{64}\Bigg(\int_{x=-1}^{1}\left[-(x+y)^2\frac{(x-y)^5}{5} - \frac{2(x+y)(x-y)^6}{5\cdot 6} - \frac{2(x-y)^7}{5\cdot 6\cdot 7}\right]_{y=-4-x}^{-2+x}\mathrm{d}x + \int_{x=1}^{3}\left[\ldots\right]_{y=-6+x}^{-2+x}\mathrm{d}x + \int_{x=3}^{5}\left[\ldots\right]_{y=-6+x}^{4-x}\mathrm{d}x\Bigg)$$

$$=\frac{1}{64}\Bigg(\int_{-1}^{3}\left[-(-2+2x)^2\frac{2^5}{5} - \frac{2(-2+2x)2^6}{30} - \frac{2\cdot 2^7}{210}\right]\mathrm{d}x + {}$$
$$-\int_{-1}^{1}\left[-(-4)^2\frac{(4+2x)^5}{5} - \frac{2(-4)(4+2x)^6}{30} - \frac{2(4+2x)^7}{210}\right]\mathrm{d}x + {}$$
$$-\int_{1}^{5}\left[-(-6+2x)^2\frac{6^5}{5} - \frac{2(-6+2x)6^6}{30} - \frac{2\cdot 6^7}{210}\right]\mathrm{d}x + {}$$
$$+\int_{3}^{5}\left[-4^2\frac{(2x-4)^5}{5} - \frac{2\cdot 4\cdot(2x-4)^6}{30} - \frac{2\cdot(2x-4)^7}{210}\right]\mathrm{d}x\Bigg)$$

und weiter

$$
\begin{aligned}
I =&2\int_{-1}^{3}\Big[-\frac{(-1+x)^2}{5}-\frac{(-1+x)}{15}-\frac{1}{105}\Big]\mathrm{d}x+\\
&-2\int_{-1}^{1}\Big[-4\frac{(2+x)^5}{5}+\frac{2(2+x)^6}{15}-\frac{(2+x)^7}{105}\Big]\mathrm{d}x+\\
&-2\int_{1}^{5}\Big[-(-3+x)^2\frac{3^5}{5}-\frac{(-3+x)3^6}{15}-\frac{3^7}{105}\Big]\mathrm{d}x+\\
&+2\int_{3}^{5}\Big[-\frac{4(x-2)^5}{5}-\frac{2\cdot(x-2)^6}{15}-\frac{(x-2)^7}{105}\Big]\mathrm{d}x\\
=&\frac{2}{5}\Bigg(\Bigg[-\frac{(-1+x)^3}{3}-\frac{(-1+x)^2}{6}-\frac{-1+x}{21}\Bigg]_{-1}^{3}+\\
&\quad-\Bigg[-\frac{2(2+x)^6}{3}+\frac{2(2+x)^7}{21}-\frac{(2+x)^8}{21\cdot 8}\Bigg]_{-1}^{1}+\\
&\quad+\Bigg[\frac{3^5(-3+x)^3}{3}+\frac{3^5(-3+x)^2}{2}+\frac{3^6(-3+x)}{7}\Bigg]_{1}^{5}+\\
&\quad+\Bigg[-\frac{2(x-2)^6}{3}-\frac{2(x-2)^7}{21}-\frac{(x-2)^8}{8\cdot 21}\Bigg]_{3}^{5}\Bigg)\\
=&\frac{2}{5}\Bigg(\Bigg[-\frac{16}{3}-\frac{4}{21}\Bigg]-\Bigg[-\frac{2\cdot 3^6-2}{3}+\frac{2\cdot 3^7-2}{21}-\frac{3^8-1}{21\cdot 8}\Bigg]+\\
&\quad+\Bigg[3^4\cdot 2^4+\frac{3^6\cdot 4}{7}\Bigg]+\Bigg[-\frac{2(3^6-1)}{3}-\frac{2(3^7-1)}{21}-\frac{3^8-1}{8\cdot 21}\Bigg]\Bigg)\\
=&\frac{2}{5}\Bigg(\frac{-16-2+2}{3}+\frac{-4+2+2}{21}+3^5\,(2-2)+\frac{-2\cdot 3^6+4\cdot 3^6-2\cdot 3^6}{7}+\\
&\quad+\frac{3^8-1-3^8+1}{8\cdot 21}+2^4\cdot 3^4\Bigg)\\
=&\frac{2}{5}\Bigg(-\frac{16}{3}+2^4\cdot 3^4\Bigg)=\frac{32}{5}\cdot\frac{3^5-1}{3}=\frac{64\cdot 121}{15}=\frac{7744}{15}
\end{aligned}
$$

Die Geraden, die das Integrationsgebiet $\boldsymbol{D}$ beranden, werden von der angegebenen Koordinatentransformation

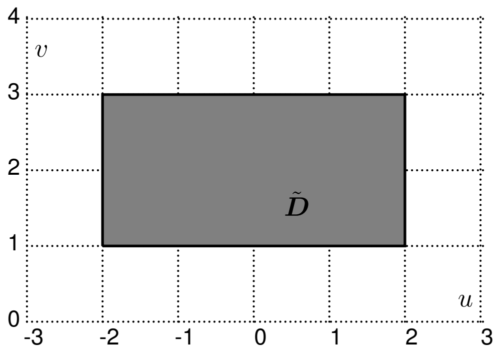
$$\boldsymbol{x}(u,v)=\begin{pmatrix}u+v\\ u-v\end{pmatrix}$$

zu achsenparallelen Geraden:

$$
\begin{array}{lclcl}
y=-x-4 & \Rightarrow & u-v=-u-v-4 & \Rightarrow & u=-2\\
y=x-2 & \Rightarrow & u-v=u+v-2 & \Rightarrow & v=1\\
y=4-x & \Rightarrow & u-v=4-u-v & \Rightarrow & u=2\\
y=x-6 & \Rightarrow & u-v=u+v-6 & \Rightarrow & v=3.
\end{array}
$$

Damit hat das transformierte Integrationsgebiet die einfache Gestalt eines achsenparallelen Rechtecks

$$\tilde{\boldsymbol{D}}=[-2,2]\times[1,3].$$



Für die Anwendung der Transformationsformel benötigen wir außerdem die Determinante der Jacobi-Matrix der Transformation $\boldsymbol{x}(u,v)$:

$$\det \boldsymbol{x}'(u,v)=\det\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}=-2.$$

Das Integral berechnet sich damit zu:

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{\tilde{D}} f(x(u,v), y(u,v))| -2|\mathrm{d}(u,v) \\
&= \frac{1}{32}\int_{\tilde{D}} \Big((u+v)^6 - 2(u+v)^5(u-v) - (u+v)^4(u-v)^2 + 4((u+v)(u-v))^3 + \\
&\qquad - (u+v)^2(u-v)^4 - 2(u+v)(u-v)^5 + (u-v)^6 + 32(u+v+u-v)\Big)\mathrm{d}(u,v) \\
&= \frac{1}{32}\int_{v=1}^{3}\int_{u=-2}^{2} \Big(2(u^6 + 15u^4v^2 + 15u^2v^4 + v^6) - 2(u+v)^4(u^2-v^2) - (u+v)^2(u^2-v^2)^2 + \\
&\qquad + 4(u^2-v^2)^3 - (u^2-v^2)^2(u-v)^2 - 2(u^2-v^2)(u-v)^4 + 64u\Big)\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\
&= \frac{1}{8}\int_{v=1}^{3} \left(\frac{2^7}{7} + 3v^2 2^5 + 5v^4 2^3 + v^6\cdot 2\right)\mathrm{d}v + \\
&\quad + \frac{1}{32}\int_{v=1}^{3}\int_{u=-2}^{2} (u^2-v^2)\Big(-4(u^4+6u^2v^2+v^4) - 2(u^2+v^2)(u^2-v^2) + 4(u^2-v^2)^2\Big)\mathrm{d}u\mathrm{d}v + 0 \\
&= \frac{\frac{256}{7} + (3^3-1)\cdot 2^5 + 2^3(3^5-1) + \frac{2(3^7-1)}{7}}{8} + \\
&\quad + \frac{1}{16}\int_{v=1}^{3}\int_{u=-2}^{2} (u^2-v^2)\left(-u^4 - 16u^2v^2 + v^4\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\
&= \frac{128 + 3^7 - 1}{4\cdot 7} + 26\cdot 4 + 3^5 - 1 + \\
&\quad + \frac{1}{8}\int_{v=1}^{3}\int_{u=0}^{2} \left(-u^6 - 15u^4v^2 + 17u^2v^4 - v^6\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\
&= \frac{127 + 3^7}{4\cdot 7} + 103 + 3^5 + \frac{1}{8}\int_{v=1}^{3}\left(-\frac{2^7}{7} - 3\cdot 2^5 v^2 + \frac{17}{3}\cdot 2^3 v^4 - 2v^6\right)\mathrm{d}v \\
&= \frac{127 + 3^7}{4\cdot 7} + 103 + 3^5 + \frac{1}{8}\left(-\frac{2^8}{7} - 2^5(3^3-1) + \frac{17}{15}\cdot 2^3(3^5-1) - \frac{2}{7}(3^7-1)\right) \\
&= \frac{127 + 3^7 - 2^7 - 3^7 + 1}{4\cdot 7} + 103 + 3^5 - 4\cdot 26 + \frac{17\cdot 242}{15} \\
&= 0 + 346 - 104 + \frac{17\cdot 242}{15} = \frac{242\cdot 15 + 17\cdot 242}{15} - 13 = \frac{242\cdot 32}{15} = \frac{7744}{15}.
\end{aligned}
$$

b) Der angegebene Bereich lässt sich besser in Polarkoordinaten parametrisieren als in kartesischen:

$$\tilde{B} = \{(r,\varphi) \in \mathbb{R}^2 |\, 0 \le r \le \varphi,\ 0 \le \varphi \le \pi\}.$$

Die Determinante der Jakobimatrix der Koordinatentransformation

$$\begin{pmatrix} u(r,\varphi) \\ y(r,\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$$

ist

$$\det\begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} = r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r.$$

Damit berechnet sich das Integral zx:

$$
\begin{aligned}
J &= \int_{\tilde{B}} \frac{r\cos\varphi}{\sqrt{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi}}|r|\mathrm{d}(r,\varphi) = \int_{\varphi=0}^{\pi}\int_{r=0}^{\varphi} r\cos\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = \int_{\varphi=0}^{\pi}\frac{1}{2}\varphi^2\cos\varphi\mathrm{d}\varphi \\
&= \frac{\varphi^2}{2}\sin\varphi\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\varphi\sin\varphi\mathrm{d}\varphi = 0 - \varphi(-\cos\varphi)|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\cos\varphi\mathrm{d}\varphi = -\pi + 0 = -\pi.
\end{aligned}
$$

c) Das Integral ergibt sich zu

$$
\begin{aligned}
I_E &= \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1} r^2\cos^2(\varphi)\cdot 2r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi \\
&= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{r^4}{2}\Big|_{r=0}^{1} \cos^2(\varphi)\mathrm{d}\varphi \\
&= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \cos^2(\varphi)\mathrm{d}\varphi\cdot\frac{1}{2} = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 49: Bereichsintegral

Gegeben sei der Integrationsbereich B, der von den beiden Kurven:

$$y = \sin(x) \qquad \text{und} \qquad y = \cos(x)$$

im Bereich $0 \le x \le 2\pi$ komplett eingeschlossen wird.

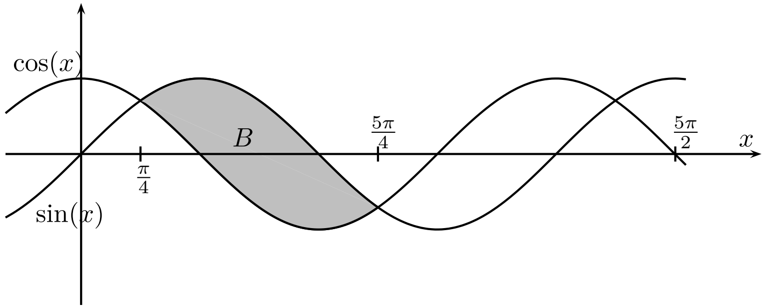
a) Skizzieren Sie den Bereich $B \subset \mathbb{R}^2$.

b) Berechnen Sie das Integral

$$I = \int_B 2y \mathrm{d}(x, y).$$

Lösung 49:

a) Der Integrationsbereich lässt sich mit Hilfe folgender Skizze bestimmen:



b) Es bietet sich eine Parametrisierung als Normalbereich bezüglich x an. Dabei ist zu beachten, dass die untere Grenze des Bereichs B durch $\cos(x)$ gegeben ist und die obere Grenze durch $\sin(x)$.

$$\begin{aligned} I &= \int_{x=\pi/4}^{5\pi/4} \int_{y=\cos(x)}^{\sin(x)} 2y \mathrm{d}y \mathrm{d}x = \int_{x=\pi/4}^{5\pi/4} y^2 \Big|_{y=\cos(x)}^{\sin(x)} \mathrm{d}x \\ &= \int_{x=\pi/4}^{5\pi/4} (\sin^2(x) - \cos^2(x)) \mathrm{d}x = \int_{x=\pi/4}^{5\pi/4} (-\cos(2x)) \mathrm{d}x \\ &= -\frac{\sin(2x)}{2} \Big|_{x=\pi/4}^{5\pi/4} = \frac{1}{2} \left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin\frac{5\pi}{2} \right) = \frac{1-1}{2} = 0 \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis konnte man erwarten, da der Integrand $2y$ eine ungerade Funktion bezüglich y ist und der Integrationsbereich bezüglich der x-Achse symmetrisch ist (wenn auch nicht spiegelsymmetrisch).

Aufgabe 50: Uneigentliche Integrale

Überprüfen Sie, ob die folgenden uneigentlichen Integrale existieren (d. h. einen endlichen Wert annehmen). Berechnen Sie für das dritte Beispiel den Wert des Integrals.

$$I_1 = \int_1^\infty \frac{\sin\frac{1}{x^2}}{x^2}\mathrm{d}x$$

$$I_2 = \int_0^1 \frac{\cos x^2}{1-x}\mathrm{d}x$$

$$I_3 = \int_0^\infty \frac{\arctan x}{x^2+1}\mathrm{d}x$$

Lösung 50:

- Das erste Integral hat einen endlichen Wert, man kann seinen Wert nach oben abschätzen, indem man den Integranden durch eine größere Funktion ersetzt:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_1^\infty \frac{\sin\frac{1}{x^2}}{x^2}\mathrm{d}x \le \int_1^\infty \left|\frac{\sin\frac{1}{x^2}}{x^2}\right|\mathrm{d}x \\ &\le \int_1^\infty \left|\frac{1}{x^2}\right|\mathrm{d}x \qquad (\text{weil } |\sin(1/x^2)| \le 1) \\ &= \left[\frac{-1}{x}\right]_1^\infty = \lim_{b\to\infty}\frac{-1}{b} - \frac{-1}{1} = 1 \end{aligned}$$

  Damit hat I_1 einen endlichen Wert, der an dieser Stelle jedoch nicht berechnet werden soll.

- Das zweite Integral wird nach unten abgeschätzt, indem man die Integrandenfunktion durch eine geringere Funktion abschätzt:

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^1 \frac{\cos x^2}{1-x}\mathrm{d}x \\ &\ge \int_0^1 \frac{\cos 1}{1-x}\mathrm{d}x \qquad (\text{weil cos auf dem Intervall } [0,1] \text{ monoton fällt}) \\ &= \cos 1\Big[-\ln|1-x|\Big]_0^1 = \cos 1 \cdot \left(-\lim_{b\to 1}\ln|1-b| - (-\ln|1-0|)\right) = \infty \end{aligned}$$

  Damit hat auch das Integral I_2 keinen endlichen Wert.

- Für den Integranden $f(x) = \frac{\arctan x}{1+x^2}$ des dritten Integrals kann man mittels partieller Integration eine Stammfunktion ermittelt werden:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \int_0^x \underbrace{\arctan t}_{u(t)} \underbrace{\frac{1}{1+t^2}}_{v'(t)}\mathrm{d}t \\ &= \underbrace{\arctan t}_{u(t)}\underbrace{\arctan t}_{v(t)}\Big|_0^x - \int_0^x \underbrace{\frac{1}{1+t^2}}_{u'(t)}\underbrace{\arctan t}_{v(t)}\mathrm{d}t \\ &= \arctan^2 x - F(x) \\ \Rightarrow \qquad 2F(x) &= \arctan^2 x \\ \Rightarrow \qquad F(x) &= \frac{\arctan^2 x}{2} \end{aligned}$$

  Den Wert des Integrals I_3 erhält man dann durch den Grenzübergang:

$$I_3 = \lim_{b\to\infty} F(b) - F(0) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - 0 = \frac{\pi^2}{8}.$$

Aufgabe 51: Kreiszylinder

Berechnen Sie das Volumen der Schnittmenge

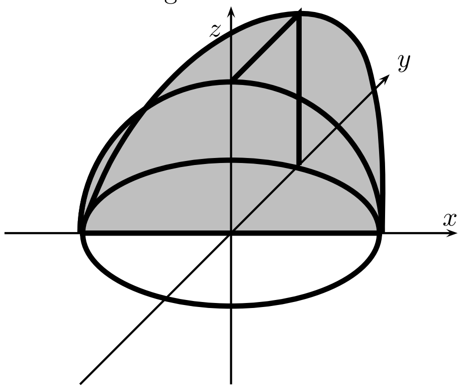
i) zweier Kreiszylinder um die $z-$ und die y-Achse.

ii**) dreier Kreiszylinder um die $x-$, die $y-$ und die $z-$Achse.

Die Zylinder haben jeweils den Radius 1.

Lösung 51:

i) B_2 beschreibe die Schnittmenge der beiden Zylinder um die $z-$ und die $y-$Achse. Die Skizze zeigt ein Viertel des betrachteten Volumens.



Der Integrationsbereich für die $r-$ und die $\varphi-$Variable (in Zylinderkoordinaten) beschreibt den Einheitskreis in zwei Dimensionen (in der Skizze zur Hälfte grau markiert). Dadurch ist der Integrationsbereich auf jeden Fall im ersten Zylinder (um die $z-$Achse) enthalten.
Der Integrationsbereich in $z-$Richtung hängt von x und y ab. Er wird durch den zweiten Zylinder (um die y-Achse) eingeschränkt:

$$z^2 + x^2 \leq 1 \Rightarrow |z| \leq \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-r^2\cos^2\varphi}.$$

Insgesamt hat man so für das Volumen von B_2:

$$\begin{aligned}
V_2 &= \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi}\int\limits_{r=0}^{1}\int\limits_{z=-\sqrt{1-r^2\cos^2\varphi}}^{+\sqrt{1-r^2\cos^2\varphi}} 1\cdot r\mathrm{d}z\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi}\int\limits_{r=0}^{1} 2r\sqrt{1-r^2\cos^2\varphi}\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi \\
&= \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi}\left[\frac{-2}{3\cos^2\varphi}\left(1-r^2\cos^2\varphi\right)^{3/2}\right]_{r=0}^{1}\mathrm{d}\varphi \qquad \text{(Beachte die Kettenregel)} \\
&= \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi}\frac{-2}{3\cos^2\varphi}\left((1-\cos^2\varphi)^{3/2}-1\right)\mathrm{d}\varphi = \frac{2}{3}\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi}\frac{1-|\sin\varphi|^3}{\cos^2\varphi}\mathrm{d}\varphi \\
&= \frac{4}{3}\int\limits_{0}^{\pi}\frac{1-\sin^3\varphi}{\cos^2\varphi}\mathrm{d}\varphi \qquad \text{(Der Integrand ist } \pi\text{-periodisch)} \\
&= \frac{4}{3}\left(\left[(1-\sin^3\varphi)\tan\varphi\right]_0^\pi - \int\limits_0^\pi(-3\sin^2\varphi\cos\varphi)\tan\varphi\mathrm{d}\varphi\right) \\
&= \frac{4}{3}\int\limits_0^\pi 3\sin^3\varphi\mathrm{d}\varphi = 4\int\limits_0^\pi(\sin\varphi-\cos^2\varphi\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi \\
&= 4\left[-\cos\varphi+\frac{1}{3}\cos^3\varphi\right]_0^\pi = \frac{16}{3}
\end{aligned}$$

ii) Nun wird aus dem oben beschriebenen Volumen noch der Bereich ausgeschnitten, der nicht in dem Zylinder um die $x-$Achse

$$y^2 + z^2 = 0$$

liegt. Der Integrationsbereich für r und φ bleibt wie vorher. Der $z-$Integrationsbereich wird jedoch weiter eingeschränkt auf

$$|z| \leq \min\left\{\sqrt{1-x^2},\ \sqrt{1-y^2}\right\} = \begin{cases}\sqrt{1-x^2} =: z_x & \text{für } x^2 > y^2 \\ \sqrt{1-y^2} =: z_y & \text{für } x^2 \leq y^2\end{cases}.$$

Diese Fallunterscheidung führt zu einer Unterteilung des Integrals:

$$V_3 = \int\limits_{B_3}\mathrm{d}(x,y,z) = 4\cdot\int\limits_{r=0}^{1}\left(\int\limits_{\varphi=0}^{\pi/4}\int\limits_{z=-z_x}^{+z_x}\mathrm{d}z\mathrm{d}\varphi + \int\limits_{\varphi=\frac{\pi}{4}}^{\pi/2}\int\limits_{z=-z_y}^{+z_y}\mathrm{d}z\mathrm{d}\varphi\right)r\mathrm{d}r$$

Beide Teilintegrale treten jeweils viermal auf, da der Integrationsbereich in allen vier Quadranten gleich aussieht.

Weiter ergibt sich, unter Nutzung der obigen Integration bezüglich z und r:

$$
\begin{aligned}
V_3 =& 4\left(\frac{2}{3}\int\limits_{\varphi=0}^{\pi/4}\frac{1-|\sin\varphi|^3}{\cos^2\varphi}\mathrm{d}\varphi+\frac{2}{3}\int\limits_{\varphi=\frac{\pi}{4}}^{\pi/2}\frac{1-|\cos\varphi|^3}{\sin^2\varphi}\mathrm{d}\varphi\right)\\
=&\frac{8}{3}\Big(\big[\tan\varphi(1-\sin^3\varphi)\big]_0^{\pi/4}+\int\limits_0^{\pi/4}\tan\varphi\cdot 3\sin^2\varphi\cos\varphi\mathrm{d}\varphi+\\
&+\big[-\cot\varphi(1-\cos^3\varphi)\big]_{\pi/4}^{\pi/2}+\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2}\cot\varphi\cdot 3\cos^2\varphi\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\Big)\\
=&\frac{8}{3}\Big(\left(1-\frac{1}{2^{3/2}}\right)+3\left[-\cos\varphi+\frac{1}{3}\cos^3\varphi\right]_0^{\pi/4}+\\
&+\left(1-\frac{1}{2^{3/2}}\right)+3\left[\sin\varphi-\frac{1}{3}\sin^3\varphi\right]_{\pi/4}^{\pi/2}\Big)\\
=&\frac{8}{3}\left(\frac{2\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}+3\left[\frac{-1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}^3}+\frac{2}{3}\right]+3\left[\frac{2}{3}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}^3}\right]\right)\\
=&\frac{8}{3}\left(\frac{2\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}+4-3\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=8(2-\sqrt{2}).
\end{aligned}
$$

Aufgabe 52: Zylinderkoordinaten

Skizzieren Sie den Körper K, der in Zylinderkoordinaten durch folgende Bedingungen charakterisiert wird:

$$\tilde{K} = \left\{(r, \varphi, z) |\, \varphi \leq 2\pi r \leq \sqrt{\varphi},\, 0 \leq z \leq \frac{r\varphi}{2\pi}\right\}$$

Berechnen Sie das Volumen des Körpers K.

Lösung 52:

Die Grenzen für z und r hängen von φ ab. Die Grenzen für das φ-Integral ergeben sich aus der Bedingung $\varphi \leq 2\pi r \leq \sqrt{\varphi}$. Diese ist nur erfüllbar für $0 \leq \varphi \leq 1$.
Somit hat K das Volumen

$$\begin{aligned}
V &= \int\limits_{\varphi=0}^{1} \int\limits_{r=\varphi/(2\pi)}^{\sqrt{\varphi}/(2\pi)} \int\limits_{z=0}^{r\varphi/(2\pi)} r \mathrm{d}z \mathrm{d}r \mathrm{d}\varphi \\
&= \int\limits_{\varphi=0}^{1} \int\limits_{r=\frac{\varphi}{2\pi}}^{\frac{\sqrt{\varphi}}{2\pi}} r \frac{r\varphi}{2\pi} \mathrm{d}r \mathrm{d}\varphi \\
&= \frac{1}{48\pi^4} \int\limits_{\varphi=0}^{1} \left(\varphi^{5/2} - \varphi^4\right) \mathrm{d}\varphi \\
&= \frac{1}{48\pi^4} \left(\frac{2}{7} - \frac{1}{5}\right) = \frac{3}{35 \cdot 48\pi^4} = \frac{1}{560\pi^4}
\end{aligned}$$

Aufgabe 53: Interpolation**

Gesucht ist ein Polynom vierten Grades

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4$$

mit folgenden Eigenschaften:

- Der Funktionswert bei 0 ist $p(0) = 0$.
- p hat ein Minimum bei $(1, -1)$.
- p hat einen Sattelpunkt bei $(2, 0)$.

a) Geben Sie die Bedingungen, die der Koeffizientenvektor $(a_0, \ldots, a_4)^\top$ erfüllen muss, in Form eines linearen Gleichungssystems an. (Es sollten sich sechs lineare Gleichungen mit fünf Unbekannten ergeben.)

b) Berechnen Sie den Rang der Koeffizientenmatrix und der erweiterten Koeffizientenmatrix. Ist das Gleichungssystem lösbar?

c) Welchen Wert $p(0)$ muss die Funktion bei 0 annehmen, damit das System doch lösbar ist?

d) Lösen Sie das so geänderte Gleichungssystem.

e) Skizzieren Sie die Funktion $p(x)$.

Lösung 53:

a) Die angegebenen Eigenschaften der Funktion ergeben folgende Bedingungen:

$$\begin{array}{lcr}
p(0)=0 & \Rightarrow & a_0 = 0 \\
p(1)=-1 \text{ minimal} \;\Rightarrow & p(1)=-1,\ p'(1)=0 \;\Rightarrow & a_0+a_1+a_2+a_3+a_4 = -1 \\
 & & a_1+2a_2+3a_3+4a_4 = 0 \\
p(2)=0 \text{ Sattelpkt.} \;\Rightarrow & p(2)=0,\ p'(2)=p''(2)=0 \;\Rightarrow & a_0+2a_1+4a_2+8a_3+16a_4 = 0 \\
 & & a_1+4a_2+12a_3+32a_4 = 0 \\
 & & 2a_2+12a_3+48a_4 = 0
\end{array}$$

Als Matrixgleichung ergibt sich

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$$

mit

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \\ 0 & 1 & 4 & 12 & 32 \\ 0 & 0 & 2 & 12 & 48 \end{pmatrix} \text{ und } \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

b) Der Rang von $\boldsymbol{A}$ ist höchstens 5, da die Matrix nur fünf Spalten hat. Die Determinante der ersten fünf Zeilen der Matrix ist

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \\ 0 & 1 & 4 & 12 & 32 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 8 & 16 \\ 1 & 4 & 12 & 32 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 6 & 14 \\ 1 & 3 & 11 & 31 \end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 14 \\ 3 & 11 & 31 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 8 \\ 3 & 5 & 22 \end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 5 & 22 \end{pmatrix} = 4 \neq 0$$

Also haben die ersten fünf Zeilen den Rang 5 und damit auch

$$\operatorname{Rang}\boldsymbol{A} = 5.$$

Die Determinante der erweiterten Systemmatrix $(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b})$ ist

$$\det(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}) = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 12 & 32 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 12 & 48 & 0 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & 8 & 16 & 0 \\ 1 & 4 & 12 & 32 & 0 \\ 0 & 2 & 12 & 48 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= -\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 8 & 16 \\ 1 & 4 & 12 & 32 \\ 0 & 2 & 12 & 48 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & 2 & 9 & 28 \\ 0 & 2 & 12 & 48 \end{pmatrix}$$

$$= -\det\begin{pmatrix} 0 & 2 & 8 \\ 2 & 9 & 28 \\ 2 & 12 & 48 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} 0 & 2 & 8 \\ 2 & 9 & 28 \\ 0 & 3 & 20 \end{pmatrix}$$

$$= 2 \cdot \det\begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 20 \end{pmatrix} = 32 \neq 0$$

Also hat $(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b})$ Vollrang, $\operatorname{Rang}(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}) = 6$ und wegen

$$\operatorname{Rang}\boldsymbol{A} \neq \operatorname{Rang}(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b})$$

ist das Gleichungssystem $\boldsymbol{A}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ nicht lösbar.

c) Der Funktionswert $p(0) = c$ taucht in der oberen rechten Ecke der Matrix $(\boldsymbol{A}|\tilde{\boldsymbol{b}})$ auf. Dabei ist $\tilde{\boldsymbol{b}} = (c, -1, 0, 0, 0, 0)^\top$.

Die Determinante ändert sich dadurch wie folgt:

$$
\begin{aligned}
\det(\boldsymbol{A}|\tilde{\boldsymbol{b}}) =& \det(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}) - c \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \\ 0 & 1 & 4 & 12 & 32 \\ 0 & 0 & 2 & 12 & 48 \end{pmatrix} \\
=& 32 - c \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 8 & 16 \\ 1 & 4 & 12 & 32 \\ 0 & 2 & 12 & 48 \end{pmatrix} - c \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 12 & 32 \\ 0 & 2 & 12 & 48 \end{pmatrix} \\
=& 32 - c \cdot (-32) - c \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 11 & 31 \\ 0 & 2 & 12 & 48 \end{pmatrix} = 32 + 32c - c \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 11 & 31 \\ 2 & 12 & 48 \end{pmatrix} \\
=& 32 + 32c - c \cdot \begin{pmatrix} 5 & 22 \\ 8 & 42 \end{pmatrix} = 32 - 2c
\end{aligned}
$$

Die Determinante verschwindet also für $p(0) = c = 16$. Damit gilt dann

$$\operatorname{Rang} \boldsymbol{A} = \operatorname{Rang}(\boldsymbol{A}|\tilde{\boldsymbol{b}}) = 5$$

und das System besitzt eine eindeutige Lösung.

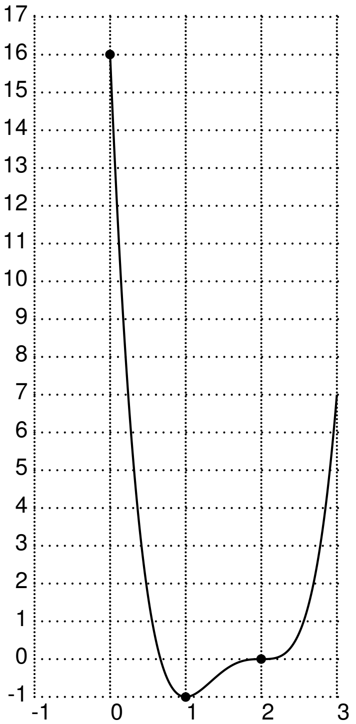
d) Die Lösung dieses Systems ist

$$
\begin{array}{ccccc|c|l}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & \text{-1. Zeile} \\
0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & \\
1 & 2 & 4 & 8 & 16 & 0 & \text{-1. Zeile} \\
0 & 1 & 4 & 12 & 32 & 0 & \\
0 & 0 & 2 & 12 & 48 & 0 & \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & \\
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -17 & \\
0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & \text{-2. Zeile} \\
0 & 2 & 4 & 8 & 16 & -16 & \text{-2}\cdot\text{ 2. Zeile} \\
0 & 1 & 4 & 12 & 32 & 0 & \text{-2. Zeile} \\
0 & 0 & 2 & 12 & 48 & 0 & \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & \\
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -17 & \\
0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 17 & \\
0 & 0 & 2 & 6 & 14 & 18 & \text{-2}\cdot\text{ 3. Zeile} \\
0 & 0 & 3 & 11 & 31 & 17 & \text{-3}\cdot\text{ 3. Zeile} \\
0 & 0 & 2 & 12 & 48 & 0 & \text{-2}\cdot\text{ 3. Zeile} \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & \\
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -17 & \\
0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 17 & \\
0 & 0 & 0 & 2 & 8 & -16 & \cdot 1/2 \\
0 & 0 & 0 & 5 & 22 & -34 & \text{-5/2}\cdot\text{ 4. Zeile} \\
0 & 0 & 0 & 8 & 42 & -34 & \text{-4}\cdot\text{ 4. Zeile} \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & \\
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -17 & \\
0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 17 & \\
0 & 0 & 0 & 1 & 4 & -8 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6 & \cdot 1/2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 30 & \text{-5}\cdot\text{ 5. Zeile} \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & \\
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -17 & \\
0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 17 & \\
0 & 0 & 0 & 1 & 4 & -8 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 &
\end{array}
$$

Es ergibt sich die Lösung

$$\boldsymbol{a} = (16,\ -48,\ 48,\ -20,\ 3)^\top.$$

e)


17
16
15
14
13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
-1
-1
0
1
2
3

Aufgabe 54: Umkehrfunktion

Gegeben seien die folgenden Funktionen

i) $f_1(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$,

ii) $f_2(x) = \frac{1}{x^2-1}$,

iii) $f_3(x) = \sin(x)$,

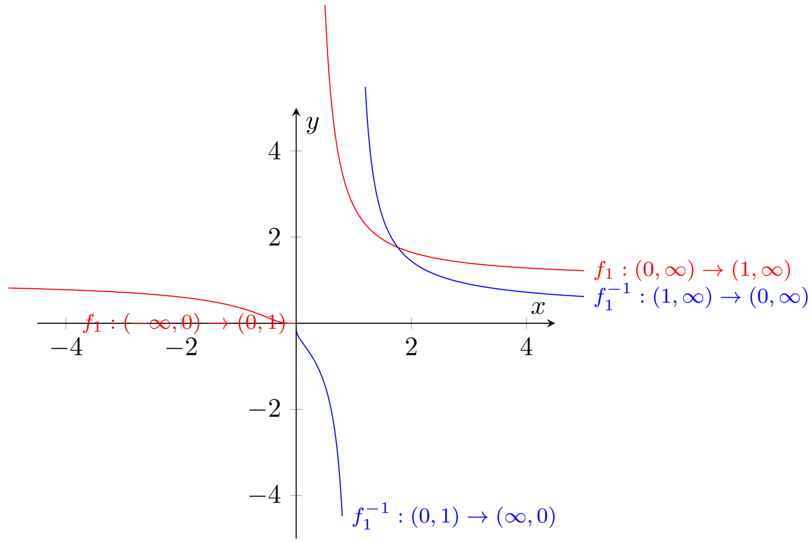
iv) $f_4(x) = \tan(x)$.

a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich und den Wertebereich.

b) Bestimmen Sie die Einschränkung des Definitionsbereichs und Wertebereichs, so dass die Funktionen bijektiv sind. (Betrachten Sie, falls nötig, den Hauptzweig.)

c) Bestimmen Sie die inverse Funktion.

d) Skizzieren Sie die Funktion sowie deren inverse Funktion.



Lösung 54:

i) Die Funktion $f_1(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ ist definiert für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Die erste Ableitung ist $-\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} < 0$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Daher ist f_1 streng monoton fallend auf jedem Zweig, also injektiv. Die Funktion hat den Grenzwert

$$\lim_{x \to \pm\infty} f_1(x) = 1.$$

Daher ist die Funktion surjektiv in dem Wertebereich $(0,1) \cup (1,\infty)$. Die Funktion f_1 ist eine bijektive Abbildung $f_1 : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to (0,1) \cup (1,\infty)$. Die Umkehrfunktion kann berechnet werden als

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = y, \quad y = \begin{cases} (0,1) & \text{für} x < 0, (1,\infty) \text{für} x > 0, \end{cases} \\ \frac{1}{x} = \ln(y), \\ x = \frac{1}{\ln(y)}, \quad (\ln(y) \neq 0). \end{aligned}$$

Die Umkehrfunktion erhalten wir durch vertauschen der Variablennamen

$$f_1^{-1}(x) = \frac{1}{\ln(x)}.$$

ii) Die Funktion $f_2(x) = \frac{1}{x^2-1}$ ist nicht definiert für $x = \pm 1$. Der Definitionsbereich ist $(-\infty,-1) \cup (-1,1) \cup (1,\infty)$. Der Wertebereich ist $(-\infty,-1] \cup (0,\infty)$. Die erste Ableitung

$$f_2'(x) = -\frac{2x}{(x^2-1)^2}$$

ist positiv für $x \in (-\infty,-1)$ und $x \in (-1,0)$. Daher ist sie monoton steigend. Sie ist negativ für $x \in (0,1)$ und $x \in (1,\infty)$ und daher monoton fallend. Die Abbildung $f_2 : (0,1) \cup (1,\infty) \to (-\infty,-1] \cup (0,\infty)$ ist bijektiv und die Umkehrfunktion kann berechnet werden als

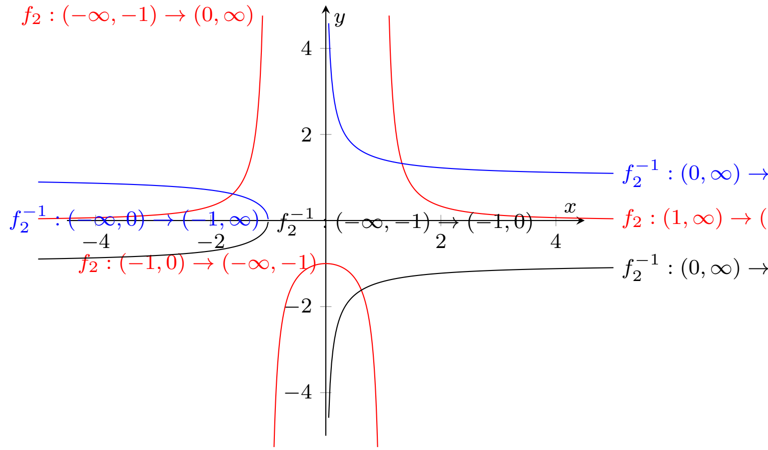
$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2-1} &= y, \\ x^2 - 1 &= \frac{1}{y}, \\ x^2 &= \frac{1}{y} + 1, \\ x &= \sqrt{\frac{1}{y} + 1}. \end{aligned}$$

Die Umkehrfunktion ergibt sich dann durch Vertauschen der Variablennamen

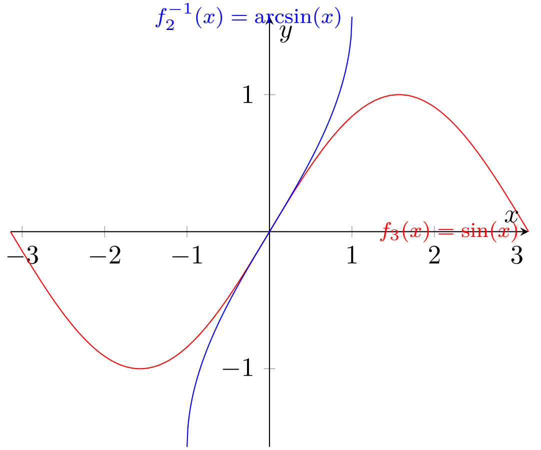
$$f_2^{-1}(x) = \sqrt{\frac{1+x}{x}}.$$

Analog können wir den negativen Zweig invertieren. Wir schränken den Definitionsbereich ein zu $(-\infty,-1) \cup (-1,0)$. Die Abbildung $f_2 : (-\infty,-1) \cup (-1,0) \to (-\infty,-1] \cup (0,\infty)$ ist bijektiv und die Umkehrfunktion kann wie oben berechnet werden, aber wir ziehen die negative Quadratwurzel. Die Umkehrfunktion des negativen Zweiges ist:

$$f_2^{-1}(x) = -\sqrt{\frac{1}{x} + 1}.$$

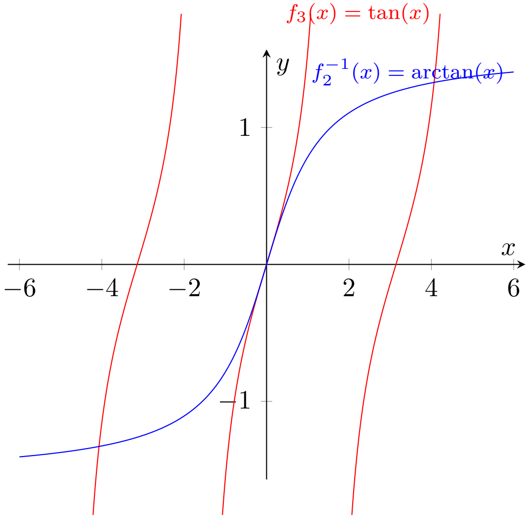


iii) Die Funktion $\arcsin(x)$ ist die Umkehrfunktion von $\sin(x)$, wenn nur der Hauptwert betrachtet wird. Nach Definition, schränken wir den Definitionsbereich von $\sin(x)$ ein auf $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, während der Wertebereich $[-1, 1]$ ist. Die erste Ableitung von $\sin(x)$ ist $\cos(x) \geq 0$ für alle $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, daher ist die Funktion monoton steigend und folglich injektiv. Als Abbildung $f_3 : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ ist die



Funktion bijektiv.

iv) Die Funktion $\arctan(x)$ ist die Umkehrfunktion von $\tan(x)$, wenn nur der Hauptwert betrachtet wird. Nach Definition beschränken wir den Definitionsbereich von $\tan(x)$ auf $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, während der Wertebereich $(-\infty, \infty)$ ist. Die erste Ableitung von $\tan(x)$ ist $\frac{1}{\cos^2(x)} > 0$ für alle $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, daher ist die Funktion monoton steigend und folglich injektiv. Als Abbildung $f_3 : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to (-\infty, \infty)$



ist sie bijektiv

Aufgabe 55: Umkehrfunktion

Gegeben seien die folgenden Funktionen. Geben Sie den Definitionsbereich an (betrachten Sie dabei den Hauptwert der Funktion) und überprüfen Sie, ob die Funktionen invertierbar sind. Bestimmen Sie jeweils die inverse Funktion.

i) $f(x) = 2x - 1$.

ii) $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$.

iii) $f(x) = (x-1)^{\frac{1}{3}}$.

iv) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$.

v) $f(x) = \log_2(x+3)$.

vi) $f(x) = 2 + \mathrm{e}^{x-1}$.

vii) $f(x) = \arccos(x^{-2})$.

Lösung 55:

i) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 1$ ist bijektiv und daher invertierbar. Um die Umkehrfunktion zu bestimmen, löst man die Gleichung $y = \dfrac{x+1}{2}$ für die Variable x. Es gilt

$$\begin{aligned} 2x - 1 &= y, \\ 2x &= y + 1, \\ x &= \frac{y+1}{2}. \end{aligned}$$

Das Ergebnis erhalten wir durch Vertauschen der Variablennamen. Beide Funktionen sind auf dem Definitionsbereich $\mathbb{R}$ definiert.

ii) Die Funktion $x^{\frac{1}{3}}$ ist definiert für $x \in \mathbb{R}$. Für die erste Ableitung gilt $\frac{1}{3}x^{-2/3} \geq 0$ für $x \in \mathbb{R}$, daher ist die Funktion streng monoton steigend und folglich injektiv. Außerdem ist die Funktion surjektiv auf $\mathbb{R}$, weil sie nicht beschränkt ist. Daher ist die Funktion bijektiv und damit invertierbar. Die Umkehrfunktion x^3 hat den gleichen Definitionsbereich $\mathbb{R}$.

iii) Die Funktion $(x-1)^{1/3}$ ist ebenso wie die vorherige Funktion bijektiv. Die Umkehrfunktion kann berechnet werden durch

$$\begin{aligned} (x-1)^{\frac{1}{3}} &= y, \\ x - 1 &= y^3, \\ x &= y^3 + 1 \end{aligned}$$

mit dem Definitionsbereich $\mathbb{R}$.

iv) Die Funktion $\dfrac{x}{x+1}$ ist definiert für $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Die Funktion hat die Grenzwerte

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 1.$$

Daher ist sie surjektiv auf dem Wertebereich $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$. Die Funktion f ist eine bijektive Abbildung $f : (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty) \to (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$. Da die Ableitung

$$f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} > 0, \quad \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

stets positiv ist, ist die Funktion streng monoton steigend auf dem Definitionsbereich. Die Umkehrfunktion wird berechnet durch

$$\begin{aligned} \frac{x}{x+1} &= y \\ x &= (x+1)y \\ x(1-y) &= y \\ x &= \frac{y}{1-y}, \end{aligned}$$

Die Funktion ist definiert für $x \in \mathbb{R} \setminus \{+1\}$.

v) Die Funktion $\log_2(x+3)$ ist definiert für $x+3 > 0 \Rightarrow x > -3$. Sie ist streng monoton steigend. Die Abbildung $f : (-3, +\infty) \to \mathbb{R}$ ist bijektiv. Die Umkehrfunktion kann berechnet werden als

$$\begin{aligned} \log_2(x+3) &= y, \\ 2^{\log_2(x+3)} &= 2^y, \\ x + 3 &= 2^y, \\ x &= 2^y - 3, \end{aligned}$$

Die Funktion ist definiert auf $\mathbb{R}$ und der Wertebereich ist $(-3, +\infty)$.

vi) Die Funktion $2 + \mathrm{e}^{x-1}$ ist definiert auf $x \in \mathbb{R}$. Die Abbildung $f : \mathbb{R} \to (2, +\infty)$ ist bijektiv, weil die Ableitung stets positiv ist $f'(x) = \mathrm{e}^{x-1} > 0$. Die Umkehrfunktion ist

$$\begin{aligned} 2 + \mathrm{e}^{x-1} &= y \\ \mathrm{e}^{x-1} &= y - 2 \\ \ln \mathrm{e}^{x-1} &= \ln(y-2) \\ x &= \ln(y-2) + 1, \end{aligned}$$

welche definiert ist auf $x \in (2, +\infty)$ und der Wertebereich ist $\mathbb{R}$.

vii) Die Funktion $\arccos(x)$ ist die Umkehrfunktion von $\cos(x)$, wenn man nur den Hauptwert der Funktion betrachtet. Nach Definition beschränken wir den Definitionsbereich von $\cos(x)$ auf $0 \leq x \leq \pi$, dann ist der Wertebereich $[-1, 1]$. Damit ist der Definitionsbereich von $\arccos(x)$ gegeben durch $[-1, 1]$ und der Wertebereich ist $[0, \pi]$. Für die Funktion $\arccos(x^{-2})$ ist der Definitionsbereich der Definitionsbereich der zusammengesetzten Funktion. Der Definitionsbereich der inneren Funktion x^{-2} ist $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Der Definitionsbereich der äußeren Funktion $\arccos(w)$ wie oben bemerkt, ist $w \in [-1, 1]$, daher muss $w := x^{-2} \geq -1$ gelten, was immer wahr ist. Es gilt $x^{-2} \leq 1 \Rightarrow x^2 \geq 1 \Rightarrow x \geq 1 \wedge x \leq -1$. Der Wertebereich der zusammengesetzten Funktion $\arccos(x^{-2})$ ist $[0, \pi]$, weil das der Wertebereich der äußeren Funktion ist.

Zu untersuchen bleibt die Monotonie der zusammengesetzten Funktion. Da die Funktion x^{-2} nicht-monoton ist, können wir daraus keine Aussage über die Monotonie der zusammengesetzten Funktion treffen. Die Ableitung von arccos ist

$$(\arccos(w))' = -\frac{1}{\sqrt{1 - w^2}}.$$

Für die Ableitung der zusammengesetzten Funktion benutzen wir die Kettenregel. Damit erhalten wir die Ableitung

$$\begin{aligned}\left(\arccos(x^{-2})\right)' &= -\frac{1}{\sqrt{1 - (x^{-2})^2}}\,(-2x^{-3}),\\ &= \frac{2}{\sqrt{1 - (x^{-4})}}\,x^{-3},\end{aligned}$$

welche ungerade ist. Daher ist die zusammengesetzte Funktion $\arccos(x^{-2})$ nicht-monoton. Um die Umkehrfunktion zu bestimmen müssen wir den Definitionsbereich in zwei Teile teilen, in denen die Funktion jeweils monoton ist. Damit definieren wir zwei Zweige der Funktion. Die Funktion ist monoton, wenn wir sie auf den Definitionsbereich für den x-positiven Zweig auf $[1, \infty)$ einschränken und für den x-negativen Zweig auf $(-\infty, -1]$ einschränken. Die Umkehrfunktion wird berechnet durch

$$\begin{aligned}\arccos(x^{-2}) &= y,\\ \cos(\arccos x^{-2}) &= \cos(y),\\ x^{-2} &= \cos(y),\\ x &= \pm\frac{1}{\sqrt{\cos(y)}}.\end{aligned}$$

Durch Vertauschen der Variablennamen erhalten wir die Umkehrfunktion

$$y = \pm\frac{1}{\sqrt{\cos(x)}}.$$

Diese Funktion ist die zusammengesetzte Funktion mit dem Definitionsbereich, der die Bedingungen

$$\cos(x) > 0$$

und $x \in [0, \pi]$ erfüllt. Dies ist der Definitionsbereich für den Hauptwert von $\cos(x)$. Daraus ergibt sich die Bedingung $x \in [0, \frac{\pi}{2})$. Der Wertebereich ist der Wertebereich der äußeren Funktion. Also $[1, +\infty]$ für den positiven Zweig und $(-\infty, -1]$ für den negativen Zweig.

Aufgabe 56: Inverse Funktion

Gegeben seien die folgenden Funktionen

i) $f_1(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$,

ii) $f_2(x) = \frac{1}{x^2-1}$,

iii) $f_3(x) = \sin(x)$,

iv) $f_4(x) = \tan(x)$.

a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich und den Wertebereich.

b) Betimmen Sie die Einschränkung des Definitionsbereichs und Wertebereichs, so dass die Funktionen bijektiv sind. (Betrachten Sie, falls nötig, den Hauptzweig.)

c) Bestimmen Sie die inverse Funktion.

d) Skizzieren Sie die Funktion sowie deren inverse Funktion.

Lösung 56:

i) The function $f_1(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ is defined for $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. The first derivative is $-\frac{1}{x^2}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} < 0$ for all $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ therefore f_1 is strictly monotonically decreasing on each branch, thus injective. The function has the limit

$$\lim_{x \to \pm\infty} f_1(x) = 1.$$

therefore it is surjective on the codomain $(0,1) \cup (1,\infty)$. The function f_1 is bijective as a map $f_1 : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to (0,1) \cup (1,\infty)$. The inverse function can be computed as

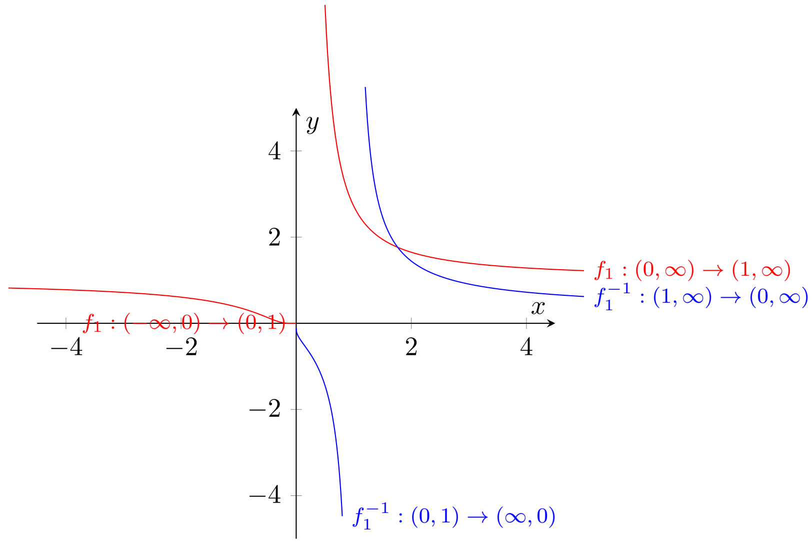
$$\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = y, \quad y = \Big\{ (0,1) \quad \text{for} x < 0, (1,\infty) \text{for} x > 0,$$

$$\frac{1}{x} = \ln(y),$$

$$x = \frac{1}{\ln(y)}, \quad (\ln(y) \neq 0).$$

A change of the variable names gives the inverse function

$$f_1^{-1}(x) = \frac{1}{\ln(x)}.$$



ii) The function $f_2(x) = \frac{1}{x^2-1}$ is not defined for $x = \pm 1$. The domain of definition is $(-\infty,-1) \cup (-1,1) \cup (1,\infty)$. The codamain is $(-\infty,1] \cup (0,\infty)$. The first derivative

$$f_2'(x) = -\frac{2x}{(x^2-1)^2}$$

is positive for $x \in (-\infty,-1)$ and $x \in (-1,0)$ therefore monotonically increasing and it is negative for $x \in (0,1)$ and $x \in (1,\infty)$ therefore monotonically decreasing. The maps $f_2 : (0,1) \to (-\infty,1] \cup (1,\infty) \to \cup(0,\infty)$ is bijective and the inverse function can be computed as

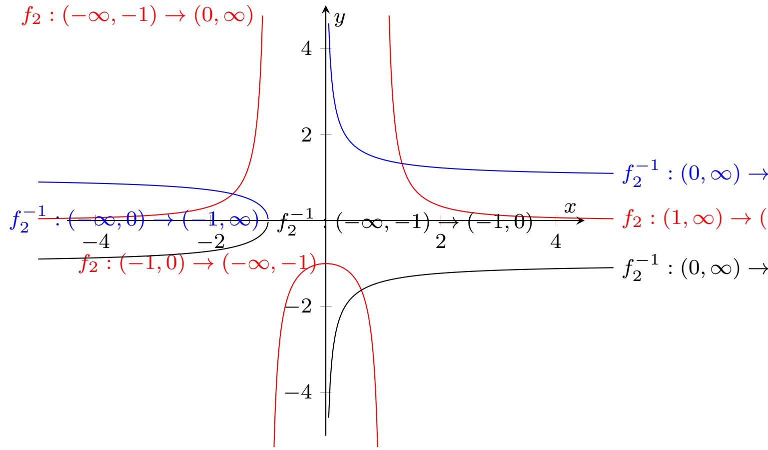
$$\begin{aligned}
\frac{1}{x^2-1} &= y,\\
x^2 - 1 &= \frac{1}{y},\\
x^2 &= \frac{1}{y} + 1,\\
x &= \sqrt{\frac{1}{y} + 1}.
\end{aligned}$$

A change of the variable names gives the inverse function

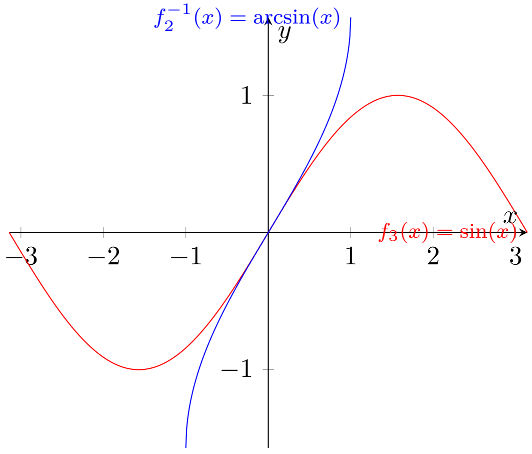
$$f_2^{-1}(x) = \sqrt{\frac{1+x}{x}}.$$

Analogous we can invert the negative branch. We restrict the domain of definition to $(-\infty,-1) \cup (-1,0)$. The map $f_2 : (-\infty,-1) \cup (-1,0) \to (-\infty,-1] \cup (0,\infty)$ is bijective and the inverse function can be computed as above, but we take the negative square root. The inverse function of negative branch is:

$$f_2^{-1}(x) = \sqrt{\frac{1}{x} + 1}.$$

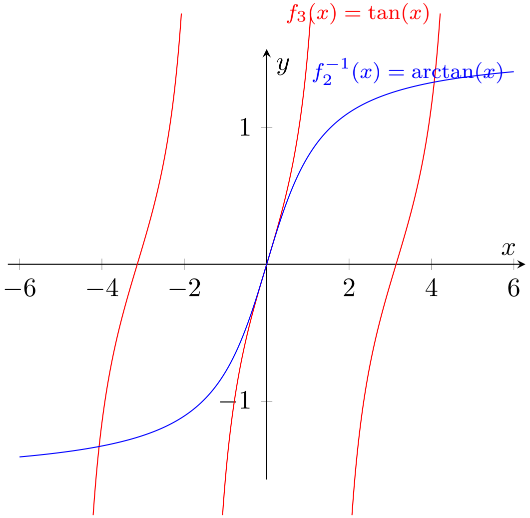


iii) The function $\arcsin(x)$ is the inverse function of $\sin(x)$ considering only the principal branch. By definition, we restrict the domain of definition of $\sin(x)$ in $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, while the codomain is $[-1, 1]$. The first derivative of $\sin(x)$ is $\cos(x) \geq 0$ for all $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, therefore it is monotonicallyincreasing, thus injective. As map f_3 :



$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ it is bijective.

iv) The function $\arctan(x)$ is the inverse function of $\tan(x)$ considering only the principal branch. By definition, we restrict the domain of $\tan(x)$ in $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, while the codomain is $(-\infty, \infty)$. The first derivative of $\tan(x)$ is $\frac{1}{\cos^2(x)} > 0$ for all $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, therefore it is monotonically increasing, thus injective. As map f_3 :



$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to (-\infty, \infty)$ it is bijective.

d) The MATLAB code for the plots of the functions and their inverse functions can be found in the ILIAS.

Aufgabe 57: Mehrdimensionale Kettenregel

Berechnen Sie mit Hilfe der Kettenregel die Jacobi-Matrix der Funktion

$$\boldsymbol{h}(x,y,z) = \boldsymbol{h}_2(\boldsymbol{h}_1(x,y,z))$$

mit

$$\boldsymbol{h}_1(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3xz + 2y \\ 4y^2 + \frac{1}{3}x^3 z \end{pmatrix} \text{ und } \boldsymbol{h}_2(u,v) = \begin{pmatrix} \cos(2u-3v) \\ \frac{1}{2}u + \frac{3}{2}v^2 \\ 4v + u \end{pmatrix}.$$

Lösung 57:

Wir berechnen zunächst die Jacobi-Matrizen der einzelnen Funktionen:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{h}_1}(x,y,z) &= \begin{pmatrix} 3z & 2 & 3x \\ zx^2 & 8y & \frac{1}{3}x^3 \end{pmatrix} \\ \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{h}_2}(u,v) &= \begin{pmatrix} -2\sin(2u-3v) & 3\sin(2u-3v) \\ \frac{1}{2} & 3v \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

und daraus mit Hilfe der Kettenregel die Ableitung der Funktion $\boldsymbol{h}$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{h}}(x,y,z) =& \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{h}_2}(\boldsymbol{h}_1)\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{h}_1}(x,y,z) \\ =& \begin{pmatrix} -2\sin(a) & 3\sin(a) \\ \frac{1}{2} & 12y^2 + x^3 z \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3z & 2 & 3x \\ zx^2 & 8y & \frac{1}{3}x^3 \end{pmatrix} \\ =& \begin{pmatrix} (x^2-2)3z\sin(a) & (6y-1)4\sin(a) & (x^2-6)x\sin(a) \\ \frac{3}{2}z + 12x^2y^2z + x^5z^2 & 1 + 96y^3 + 8x^3yz & \frac{3}{2}x + 4x^3y^2 + \frac{1}{3}x^6 z \\ z(3+4x^2) & 32y + 2 & x(3+\frac{4}{3}x^2) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

mit $a := 6xz + 4y - 12y^2 - x^3 z$.

Aufgabe 58:

a) Gegeben sei die Funktion $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\sin x\right)$.

i) Bestimmen Sie den Definitionsbereich und den Wertebereich von f.

ii) Zeigen Sie, dass die Funktion f die Periodizität π besitzt, d.h. zeigen Sie, dass $f(x+\pi) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

iii) Bestimmen Sie alle Nullstellen von f.
Hinweis: Beachten Sie die Periodizität von f.

iv) Bestimmen Sie alle Extrema von f und charakterisieren Sie diese.
Hinweis: Beachten Sie die Periodizität von f.

v) Skizzieren Sie den Graphen von f im Intervall $[-\pi, 2\pi]$.

b) Bestimmen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x\to\infty} (x+3)\left(\mathrm{e}^{2/x} - 1\right) .$$

Lösung 58:

Zu a)

i) Der Wertebereich der Sinusfunktion ist $[-1, 1]$. Auf $[-\pi/2, \pi/2]$ nimmt der Kosinus alle Werte von 0 bis 1 an. Somit gilt

$$D(f) = \mathbb{R} \qquad \text{und} \qquad W(f) = [0,1] .$$

ii) Es gilt

$$\begin{aligned} f(x+\pi) &= \cos\left(\frac{\pi}{2}\sin(x+\pi)\right) \\ &= \cos\left(-\frac{\pi}{2}\sin x\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2}\sin x\right) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Somit hat f die Periode π. Hinweis: Es lässt sich zeigen, dass f keine kleinere Periode als π besitzt.

iii) Aufgrund der Periodizität reicht es aus, die Nullstellen im Intervall $[0, \pi]$ zu bestimmen. Es gilt

$$\begin{aligned} & f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\sin x\right) = 0 \\ \iff \quad & \frac{\pi}{2}\sin x = \frac{\pi}{2} \quad \text{oder} \quad \frac{\pi}{2}\sin x = \frac{3\pi}{2} . \end{aligned}$$

Der erste Fall liefert $x = \pi/2$. Der zweite Fall würde $\sin x = 3$ ergeben, was unmöglich ist. Die Menge aller Nullstellen ist somit

$$N = \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\} .$$

iv) Es gilt

$$f'(x) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}\sin x\right)\frac{\pi}{2}\cos x .$$

Es folgt

$$\begin{aligned} & f'(x) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}\sin x\right)\frac{\pi}{2}\cos x = 0 \\ \iff \quad & \sin\left(\frac{\pi}{2}\sin x\right) = 0 \quad \text{oder} \quad \cos x = 0 . \end{aligned}$$

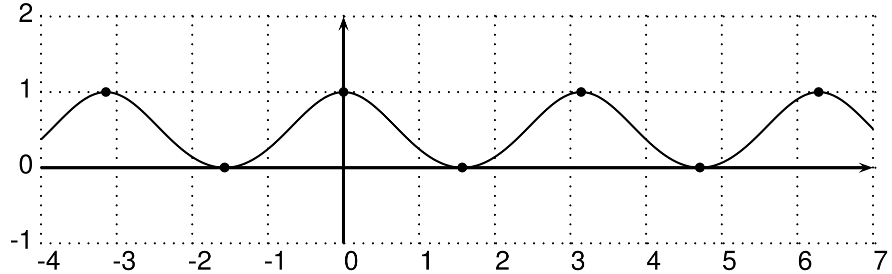
Der erste Fall liefert $x = 0$ und $x = \pi$. Der zweite Fall ergibt $x = \pi/2$. Da f nur Werte zwischen 0 und 1 annimmt, sind $x_1 = (0,1)$ und $x_3 = (\pi, 1)$ Maxima, während $x_2 = (\pi/2, 0)$ Minimum ist. Die Menge aller Maxima ist

$$E_{\max} = \{(k\pi, 1) \mid k \in \mathbb{Z}\} .$$

Die Menge aller Minima ist

$$E_{\max} = \left\{ \left(\frac{\pi}{2} + k\pi, 0\right) \mid k \in \mathbb{Z} \right\} .$$

v)



Zu b) Es gilt

$$(x+3)\left(\mathrm{e}^{2/x} - 1\right) = \frac{\mathrm{e}^{2/x} - 1}{\dfrac{1}{x+3}} =: \frac{f(x)}{g(x)}$$

mit $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ und $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$. Mit dem Satz von L'Hospital folgt dann

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{2\,\mathrm{e}^{2/x}(x+3)^2}{x^2} \\ &= \lim_{x\to\infty} 2\,\mathrm{e}^{2/x} \lim_{x\to\infty} \frac{(x+3)^2}{x^2} = 2\,.\end{aligned}$$

Aufgabe 59: Kurvendiskussion

Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich, die Symmetrie, alle Nullstellen, sowie Art und Lage der kritischen Punkte und Wendepunkte der rellen Funktion

$$f(x) = x\sqrt{16 - x^2}.$$

Lösung 59:

i) Der maximale Definitionsbereich ist $D = [-4, 4]$.

ii) Die Funktion f ist ungerade bzw. punktsymmetrisch zum Ursprung:

$$f(x) = x\sqrt{16 - x^2} = -(-x)\sqrt{16 - (-x)^2} = -f(-x) \ .$$

iii) Die Nullstellen sind

$$\begin{aligned} 0 =& x\sqrt{16 - x^2} \\ \Leftrightarrow \qquad x =& 0 \ \text{ oder } \ 16 = x^2 \\ \Leftrightarrow \qquad x \in& \{0,\ 4,\ -4\} \end{aligned}$$

iv) Kritische Punkte liegen bei $x \in D$ mit:

$$\begin{aligned} 0 =& f'(x) = \sqrt{16 - x^2} - \frac{x \cdot x}{\sqrt{16 - x^2}} = \frac{16 - 2x^2}{\sqrt{16 - x^2}} \\ \Leftrightarrow \qquad \pm 4 =& \sqrt{2}x \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

Die Funktion f selbst hat an den Grenzen des Definitionsbereiches D sowie im Ursprung den Wert $f(0) = f(\pm 4) = 0$ Für alle anderen $x > 0$ ist $f(x) > 0$. Also muss im Punkt $x = +2\sqrt{2}$ das absolute (und damit auch ein relatives) Maximum $f(2\sqrt{2}) = 8$ der Funktion liegen.
Mit der Symmetrie der Funktion folgt, dass in $x = -2\sqrt{2}$ ein Minimum $f(-2\sqrt{2}) = -8$ liegt.

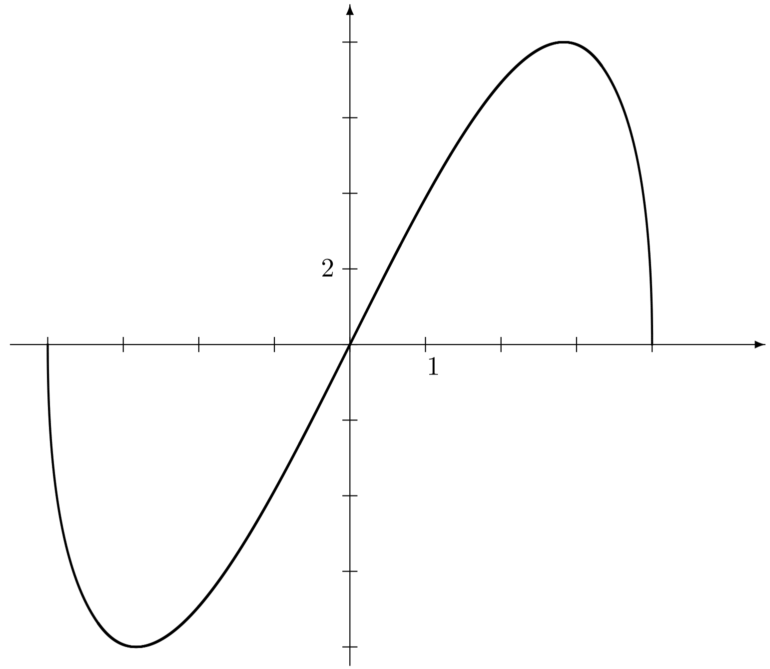
v) Wendepunkte und Konvexität:
Zunächst ist

$$\begin{aligned} f''(x) =& \frac{-4x\sqrt{16 - x^2} - (16 - 2x^2) \cdot (-2x)\frac{1}{2}(16 - x^2)^{-1/2}}{16 - x^2} \\ =& \frac{-4x(16 - x^2) + x(16 - 2x^2)}{(16 - x^2)^{3/2}} \\ =& \frac{2x^3 - 48x}{(16 - x^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

Die einzige reelle Nullstelle des Zählers im Definitionsbereich $]-4,4[$ ist $x = 0$ und es gilt

$$f''(x) = \begin{cases} > 0 & \text{für } x \in]-4, 0[\\ < 0 & \text{für } x \in]0, 4[\end{cases}$$

Also liegt in $(0, 0)$ ein Wendepunkt, links davon ist f konvex und rechts davon konkav.



Aufgabe 60: Kurvendiskussion

a) Gegeben sei die Funktion
$$f(x) = \frac{x^2 + 3\,x}{1 - x}.$$

i) Geben Sie den maximalen Definitionsbereich der Funktion f an.

ii) Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion.

iii) Bestimmen Sie die kritischen Punkte für die Extrema der Funktion und deren Funktionswerte.

iv) Bestimmen Sie die (nicht vertikale) Asymptote der Funktion, d. h. diejenige Gerade $g(x) = a + b\,x$ für die
$$\lim_{x\to\pm\infty} \big(f(x) - g(x)\big) = 0$$
ist.

v) Skizzieren Sie die Funktion.

b) Gegeben sei die Funktion
$$g\,:\,\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,:\,x\to\left(x^2-4\right)^2\cdot \mathrm{e}^{-x}.$$

Bestimmen Sie alle relativen Minima und Maxima der Funktion g **ohne** die zweite Ableitung zu berechnen.

Lösung 60:

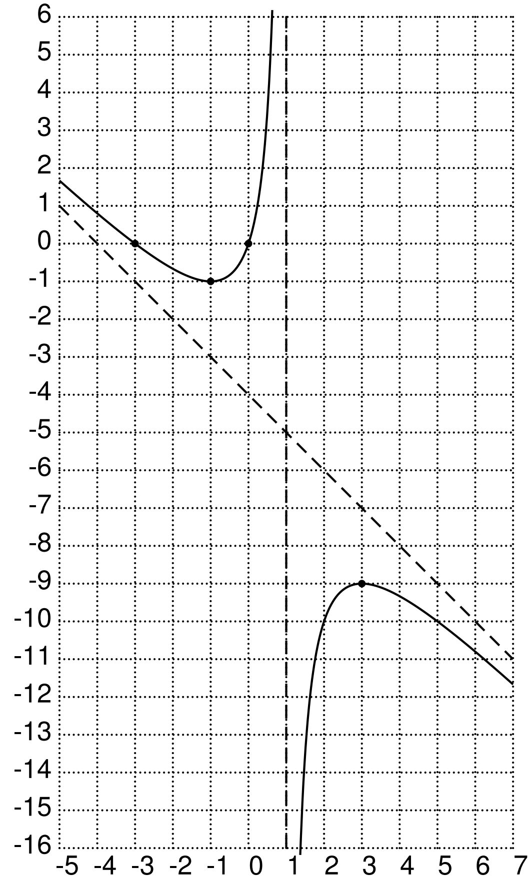
a) **i)** Der maximale Definitionsbereich ist $\mathcal{D} = \mathbb{R}\setminus\{1\}$.

ii) Die Nullstellen der Funktion sind $x_{\mathrm{N}_1} = -3$ und $x_{\mathrm{N}_2} = 0$.

iii) Die kritischen Punkte sind die Nullstellen der ersten Ableitung. Aus
$$f'(x) = \frac{(2x+3)(1-x)+(x^2+3x)}{(1-x)^2} = \frac{-x^2+2\,x+3}{(1-x)^2} = 0$$
folgt
$$x_{\mathrm{K}_1} = -1 \text{ mit } f(-1) = -1 \text{ und } x_{\mathrm{K}_2} = 3 \text{ mit } f(3) = -9\,.$$

iv) Aus $f(x) = -x - 4 + \dfrac{4}{1-x}$ folgt, dass $g(x) = -x-4$ die Asymptote ist.

v)



Bei $(-1,-1)$ handelt es sich also um ein (lokales) Minimum, bei $(3,-9)$ um ein Maximum.

b) Da die Funktion nirgends negativ ist, sind die Nullstellen automatisch lokale Minima: $x_{\min_{1,2}} = \pm 2$.

Die Nullstellen der ersten Ableitung sind die kritischen Punkte. Aus
$$g'(x) = 4x\,(x^2-4)\,\mathrm{e}^{-x} - (x^2-4)^2\,\mathrm{e}^{-x} = (-x^2+4x+4)(x^2-4)\,\mathrm{e}^{-x} = 0$$
folgt
$$x_{1,2} = \pm 2 \text{ und } x_{3,4} = 2 \pm \sqrt{8}.$$

Die ersten beiden kritischen Punkte sind die schon bekannten Nullstellen und die beiden anderen sind Maxima, da ein einfacher kritischer Punkt zwischen zwei Minima nur ein Maximum sein kann und die Funktion für $x\to\infty$ gegen 0 geht.

Aufgabe 61: Kurvendiskussion

Führen Sie eine Kurvendiskussion für die Funktion

$$f(x) = \ln(3x^2 + 2x + 1)$$

durch. Bestimmen Sie dazu:

a) den maximalen Definitionsbereich von f,

b) die Symmetrieachsen von f, d. h. Werte $\alpha \in \mathbb{R}$, so dass $f(\alpha + x) = f(\alpha - x)$,

c) das Verhalten von f im Unendlichen,

d) die Nullstellen von f,

e) die Extrema und das Monotonieverhalten von f,

f) sowie die Wendepunkte und das Krümmungsverhalten von f.

g) Skizzieren Sie den Graphen von f.

Lösung 61:

a) Die Funktion ist für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert, weil das Argument der Logarithmusfunktion immer positiv ist:

$$3x^2 + 2x + 1 = \left(\sqrt{3}x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1 - \frac{1}{3} > 1 - \frac{1}{3} > 0.$$

b) Gesucht ist ein $\alpha \in \mathbb{R}$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned}
& f(\alpha + x) = f(\alpha - x) \\
\Leftrightarrow\quad & \ln(3(\alpha + x)^2 + 2(\alpha + x) + 1) = \ln(3(\alpha - x)^2 + 2(\alpha - x) + 1) \\
\Leftrightarrow\quad & 3(\alpha + x)^2 + 2(\alpha + x) + 1 = 3(\alpha - x)^2 + 2(\alpha - x) + 1 \qquad \text{(Monotonie von ln)} \\
\Leftrightarrow\quad & 6x\alpha + 2x = -6x\alpha - 2x \\
\Leftrightarrow\quad & (12\alpha + 4)x = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & 12\alpha + 4 = 0
\end{aligned}$$

Also liegt die Symmetrieachse bei $\alpha = -1/3$.

c) Es ist

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \infty.$$

d) Die einzige Nullstelle des Logarithmus liegt bei 1, also muss für $f(x) = 0$ gelten:

$$1 = 3x^2 + 2x + 1 \Rightarrow x \in \{0, -2/3\}.$$

e) Die Nullstellen der Ableitung berechnen sich zu:

$$0 = f'(x) = \frac{1}{3x^2 + 2x + 1} \cdot (6x + 2) \Rightarrow x = -\frac{1}{3}.$$

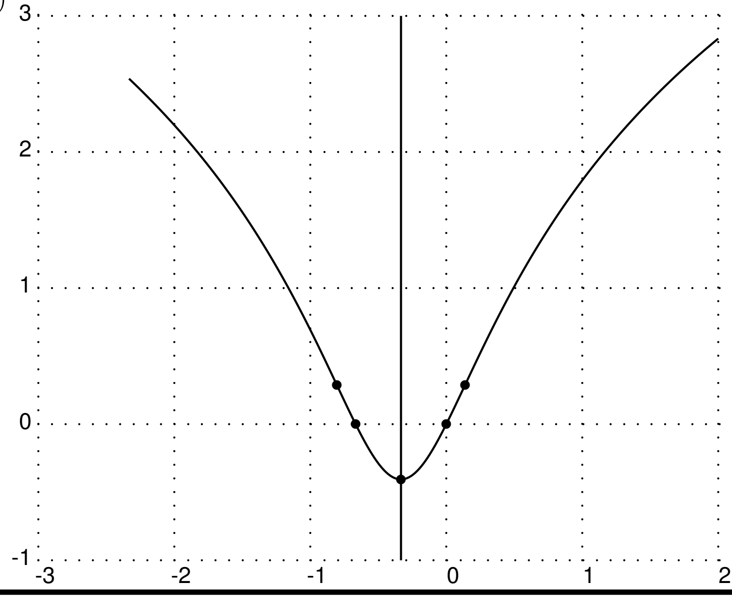
Dies ist die einzige Nullstelle der Ableitung. Da die Funktion bezüglich dieser Achse symmetrisch ist, und für $x \to \pm\infty$ gegen ∞ geht, liegt bei $x = -1/3$ ein Minimum.

f) Die Wendepunkte liegen an den Nullstellen der zweiten Ableitung:

$$\begin{aligned}
0 = f''(x) &= \frac{6(3x^2 + 2x + 1) - (6x + 2)^2}{(3x^2 + 2x + 1)^2} = \frac{-18x^2 - 12x + 2}{(3x^2 + 2x + 1)^2} \\
\Rightarrow\qquad x &= \frac{-1 \pm \sqrt{2}}{3}.
\end{aligned}$$

Links von $-1/3 - \sqrt{2}/3$ ist $f''(x) < 0$, also ist die Funktion dort konkav, rechts von $-1/3 - \sqrt{2}/3$ ist $f''(x) > 0$ und die Funktion f ist dort konvex. Rechts von $-1/3 + \sqrt{2}/3$ ist die Funktion wegen der Symmetrie wiederum konkav.

g)



Aufgabe 62: Kurvendiskussion

a) Gegeben sei die reelle Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 + 7\,x + 10}{x + 1}\ .$$

i) Geben Sie den maximalen Definitionsbereich der Funktion an.

ii) Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion.

iii) Bestimmen Sie die kritischen Punkte für die Extrema der Funktion und deren Funktionswerte.

iv) Bestimmen Sie die (nicht vertikale) Asymptote der Funktion, d. h. diejenige Gerade $g(x) = a + bx$, für die

$$\lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - g(x)) = 0$$

gilt.

v) Skizzieren Sie die Funktion.

b) Gegeben sei die Funktion

$$g\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ :\ x \mapsto x^8 \cdot \mathrm{e}^x\ .$$

Bestimmen Sie alle relativen Minima und Maxima der Funktion g.

Lösung 62:

Zu a)

i) Die Funktion ist nur an der Nullstelle des Nenners, $x_{\mathrm{Pol}} = -1$, nicht definiert und hat dort eine einfache Polstelle.

ii) Die Nullstellen sind die Nullstellen des Zählers: $x_{N1} = -5$ und $x_{N2} = -2$.

iii) Die kritischen Punkte für die Extrema sind die Nullstellen (des Zählers) der ersten Ableitung:

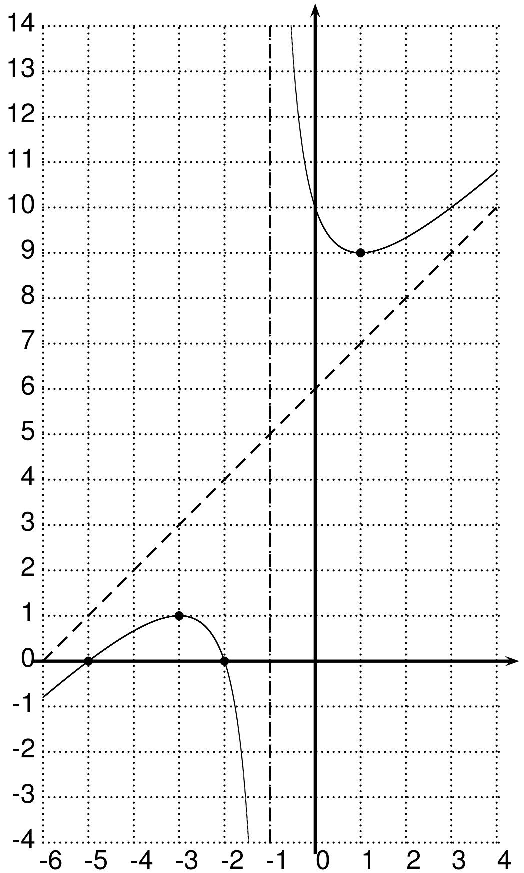
$$f'(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2} \quad\Longrightarrow\quad x_{E1} = -3 \text{ un d } x_{E2} = 1$$

mit $f(-3) = 1$ und $f(1) = 9$.

iv) Durch Polynomdivision erhält man die Asymptote:

$$f(x) = \frac{x^2 + 7\,x + 10}{x + 1} = x + 6 + \frac{4}{x+1} \quad\Longrightarrow\quad g(x) = x + 6\,.$$

v) Skizze:



Aus der Skizze ersieht man, dass bei $x = -3$ ein Maximum vorliegt und bei $x = 1$ ein Minimum.

Zu b) Da die Funktion beliebig oft differenzierbar ist, können die Extrema nur an Nullstellen der ersten Ableitung liegen:

$$g'(x) = x^7 \cdot (8 + x) \cdot \mathrm{e}^x = 0 \quad\Longrightarrow\quad x_1 = -8 \text{ und } x_{2,\ldots,8} = 0\,.$$

Da $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 0$ und $g(0) = 0$ ist und $x = -8$ der einzige kritische Punkt im Innern dieses Intervalls ist, liegt wegen $g(-8) > 0$ an der Stelle $x = -8$ ein Maximum vor.
An der Stelle $x = 0$ gilt $g(x) = 0$. Da $x = 0$ die einzige Nullstelle ist, muß dies ein Minimum sein.

Aufgabe 63: Laplace-Transformation

Berechnen Sie die Laplace-Transformation $\mathcal{L}\{f(t)\}$ der folgenden Funktionen:

i) $f(t) = 1$,

ii) $f(t) = t$,

iii) $f(t) = t^2$,

iv) $f(t) = t^3$,

v) $f(t) = e^{-at}$,

vi) $f(t) = e^{-at} \cdot t$,

vii) $\mathcal{L}\{f'(t)\}$, for a generic $f(t)$,

viii) $\mathcal{L}\{f''(t)\}$, for a generic $f(t)$.

Lösung 63:

Diese Laplace-Transformationen mssen durch Anwendung der Definition und Bestimmung der Integrale berechnet werden. Hier sind die Ergebnisse:

i) $\mathcal{L}\{1\} = \dfrac{1}{s}$,

ii) $\mathcal{L}\{t\} = \dfrac{1}{s^2}$,

iii) $\mathcal{L}\{t^2\} = \dfrac{2}{s^3}$,

iv) $\mathcal{L}\{t^3\} = \dfrac{3!}{t^4}$,

v) $\mathcal{L}\{e^{-at}\} = \frac{1}{s+a}$,

vi) $\mathcal{L}\{e^{-at} \cdot t\} = \dfrac{1}{(s+a)^2}$,

vii) $\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$,

viii) $\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$.

Aufgabe 64: Vektor- und Matrixwertige Funktionen

Gegeben seien

$$\boldsymbol{A}(t) = \begin{pmatrix} t & t^2 \\ \sqrt{t} & t^5 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{B}(t) = \begin{pmatrix} \sin t & \cos t \\ \mathrm{e}^t & \cosh t \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{c}(t) = \left(t^3, \sqrt{t^5}, \frac{1}{t}\right)^\top, \qquad \boldsymbol{d}(t) = \left(\mathrm{e}^{-t^2}, \sin(\sqrt{t}), \tanh(t/2)\right)^\top.$$

Berechnen Sie

a) $\frac{d}{dt}\Big(\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{B}(t)\Big)$ und

b) $\frac{d}{dt}\Big(\boldsymbol{c}(t) \times \boldsymbol{d}(t)\Big)$

auf die folgenden beiden Arten:

- Indem sie vor der Differentiation die Produkte $\boldsymbol{AB}$ bzw. $\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}$ bilden und die Ergebnisfunktionen ableiten.
- Indem Sie zunächst die Ableitungen der einzelnen Funktionen bilden und diese dann gemäß einer Produktregel verrechnen.

Lösung 64:

a) Zunächst ist

$$\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} t\sin t + t^2\mathrm{e}^t & t\cos t + t^2\cosh t \\ \sqrt{t}\sin t + t^5\mathrm{e}^t & \sqrt{t}\cos t + t^5\cosh t \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{B}(t)\right) = \begin{pmatrix} \sin t + t\cos t + (2t+t^2)\mathrm{e}^t & \cos t - t\sin t + 2t\cosh t + t^2\sinh t \\ \frac{\sin t}{2\sqrt{t}} + \sqrt{t}\cos t + (5t^4+t^5)\mathrm{e}^t & \frac{\cos t}{2\sqrt{t}} - \sqrt{t}\sin t + 5t^4\cosh t + t^5\sinh t \end{pmatrix}.$$

Ebenso ist

$$\boldsymbol{A}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2t \\ \frac{1}{2\sqrt{t}} & 5t^4 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}'(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \mathrm{e}^t & \sinh t \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{B}(t)\right) =& \boldsymbol{A}'(t)\boldsymbol{B}(t) + \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{B}'(t) \\ =& \begin{pmatrix} \sin t + 2t\mathrm{e}^t & \cos t + 2t\cosh t \\ \frac{\sin t}{2\sqrt{t}} + 5t^4\mathrm{e}^t & \frac{\cos t}{2\sqrt{t}} + 5t^4\cosh t \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} t\cos t + t^2\mathrm{e}^t & -t\sin t + t^2\sinh t \\ \sqrt{t}\cos t + t^5\mathrm{e}^t & -\sqrt{t}\sin t + t^5\sinh t \end{pmatrix} \\ =& \begin{pmatrix} \sin t + t\cos t + (2t+t^2)\mathrm{e}^t & \cos t - t\sin t + 2t\cosh t + t^2\sinh t \\ \frac{\sin t}{2\sqrt{t}} + \sqrt{t}\cos t + (5t^4+t^5)\mathrm{e}^t & \frac{\cos t}{2\sqrt{t}} - \sqrt{t}\sin t + 5t^4\cosh t + t^5\sinh t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

b) Das Vektorprodukt von $\boldsymbol{c}$ und $\boldsymbol{d}$ ist

$$\boldsymbol{c}(t) \times \boldsymbol{d}(t) = \begin{pmatrix} t^{5/2}\tanh(t/2) - \frac{\sin(\sqrt{t})}{t} \\ \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{t} - t^3\tanh\frac{t}{2} \\ t^3\sin(\sqrt{t}) - t^{5/2}\mathrm{e}^{-t^2} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}(\boldsymbol{c}(t) \times \boldsymbol{d}(t)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t^{3/2}\left(5\tanh\frac{t}{2} + \frac{t}{\cosh^2(t/2)}\right) + \frac{\sin(\sqrt{t})}{t^2} - \frac{\cos(\sqrt{t})}{2\sqrt{t}\,t} \\ \mathrm{e}^{-t^2}\left(-2 - \frac{1}{t^2}\right) - 3t^2\tanh\frac{t}{2} - \frac{t^3}{2\cosh^2\frac{t}{2}} \\ 3t^2\sin(\sqrt{t}) + \frac{t^{5/2}}{2}\cos(\sqrt{t}) - \mathrm{e}^{-t^2}\left(\frac{5}{2}t^{3/2} - 2t^{7/2}\right) \end{pmatrix}.$$

Durch separates Differenzieren ergibt sich

$$\boldsymbol{c}'(t) = \begin{pmatrix} 3t^2 \\ \frac{5}{2}t^{3/2} \\ -\frac{1}{t^2} \end{pmatrix}, \; \boldsymbol{d}'(t) = \begin{pmatrix} -2t\mathrm{e}^{-t^2} \\ \frac{\cos(\sqrt{t})}{2\sqrt{t}} \\ \frac{1}{2\cosh^2\frac{t}{2}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & \boldsymbol{c}'(t) \times \boldsymbol{d}(t) + \boldsymbol{c}(t) \times \boldsymbol{d}'(t) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{5t^{3/2}\tanh\frac{t}{2}}{2} + \frac{\sin(\sqrt{t})}{t^2} \\ \frac{-\mathrm{e}^{-t^2}}{t^2} - 3t^2\tanh\frac{t}{2} \\ 3t^2\sin(\sqrt{t}) - \frac{5}{2}t^{3/2}\mathrm{e}^{-t^2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{t^{5/2}}{2\cosh^2\frac{t}{2}} - \frac{\cos(\sqrt{t})}{2t^{3/2}} \\ -2\mathrm{e}^{-t^2} - \frac{t^3}{2\cosh^2\frac{t}{2}} \\ \frac{t^{5/2}\cos\sqrt{t}}{2} + 2t^{7/2}\mathrm{e}^{-t^2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Aufgabe 65: Minimaler Abstand

Gegeben seien die folgenden Funktionen

i) $f_1(x) = x^2 + 1$, **ii)** $f_2(x) = \ln(x)$.

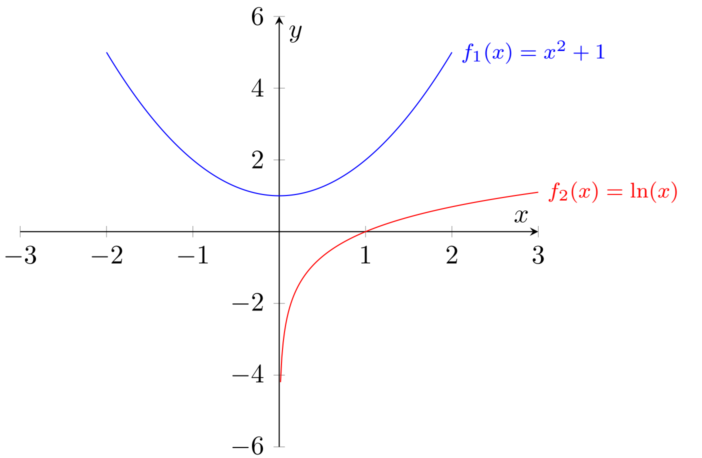
a) Skizzieren Sie die Funktionen f_1 und f_2.

b) Bestimmen Sie den minimalen vertikalen Abstand beider Funktionsgraphen

$$d = \min\ \left\{|f_1(x) - f_2(x)|;\ x \in \mathbb{R}^+\right\}.$$

Lösung 65:

a)



b) Der gesuchte Abstand ist das Minimum der Funktion $g(x) = |h(x)|$ mit $h(x) = f_1(x) - f_2(x)$.
Es gilt $f_1(x) > f_2(x)$ für alle $x \in D$. Daher ist die Differenz immer positiv.

Dieses Minimum liegt in einem lokalen Extremum von $h(x)$, da an den Grenzen des Definitionsbereiches D gilt:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} h(x) &= \lim_{x\to\infty}\left(x^2 + 1 - \ln(x)\right)\\
&= \ln\left(\lim_{x\to\infty} \mathrm{e}^{x^2+1-\ln(x)}\right)\\
&= \ln\left(\lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{e}^{x^2+1}}{\mathrm{e}^{\ln x}}\right) \qquad \text{L'Hospital wg.} \mathrm{e}^{x^2+1} \to \infty,\ \mathrm{e}^{\ln x} = x \to \infty.\\
&= \ln\left(\lim_{x\to\infty} \frac{2x\mathrm{e}^{x^2+1}}{1}\right) = \infty\\
\lim_{x\to 0} h(x) &= \lim_{x\to 0}\left(x^2 + 1 - \ln x\right) = \infty
\end{aligned}$$

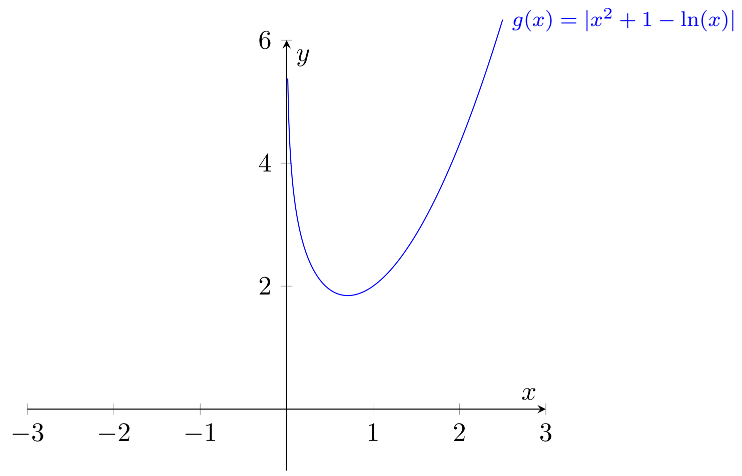
Das heißt innerhalb des Definitionsbereiches wird ein Minimum angenommen.
Die lokalen Extrema von $h(x)$ liegen in den Nullstellen der ersten Ableitung:

$$\begin{aligned}
&& h'(x) = 2x - \frac{1}{x} &= 0\\
\Leftrightarrow && 2x^2 &= 1\\
\Leftrightarrow && x_{1/2} &= \pm\frac{1}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

von diesen beiden Werten liegt nur $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ im Definitionsbereich D. Dort ist

$$d = g(x_1) = h(x_1) = \frac{1}{2} + 1 - \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Der Graph von $h(x) = g(x)$ ist



Aufgabe 66: Mittelwertsatz

Sei $s(t)$ die Gesamtzahl der Kilometer, die Sie auf Ihrer Reise auf einer Autobahn mit einer Geschwindigkeitsbegrenzung von 120 km/h nach der Zeit t Stunden zurückgelegt haben. Nehmen Sie außerdem an, dass $s(1/4) = 10$ Kilometer und $s(5/4) = 160$ Kilometer beträgt. An einer Kontrollstelle entlang der Autobahn gestehen Sie diese Tatsachen einem Beamten der Autobahnpolizei, der mit dem Mittelwertsatz vertraut ist. Der Beamte führt ein paar schnelle Berechnungen durch, lächelt und bereitet sich dann höflich darauf vor, Ihnen einen Strafzettel auszustellen. Erklären Sie, warum.

Lösung 66:

Wir wissen, dass $s(t)$ die Entfernung (Kilometer) zum Zeitpunkt t (Stunden) ist. Wir nehmen an, dass $s(t)$ differenzierbar ist, wobei $s'(t)$ die Geschwindigkeit (km/h) zum Zeitpunkt t (Std.) ist. Wenden wir den Mittelwertsatz auf die Funktion s auf dem geschlossenen Intervall $[1/4, 5/4]$ an. Dann

$$s'(\xi) = \frac{160 - 10}{5/4 - 1/4} = 150 \text{ km/h}.$$

Der Mittelwertsatz beweist, dass Ihre Geschwindigkeit zum unbekannten Zeitpunkt xi mit Sicherheit größer war als die zulässige Höchstgeschwindigkeit.

Aufgabe 67: Newton-Verfahren

a) Gegeben seien die Funktionen

$$f(x) = \frac{x}{3} \text{ und } g(x) = \sin(x^2).$$

i) Skizzieren Sie die Funktionen und bestimmen Sie Näherungen für die Schnittstellen der beiden Funktionsgraphen.

ii) Bestimmen Sie die kleinste positive Schnittstelle mit dem Newton-Verfahren auf fünf Nachkommastellen genau.

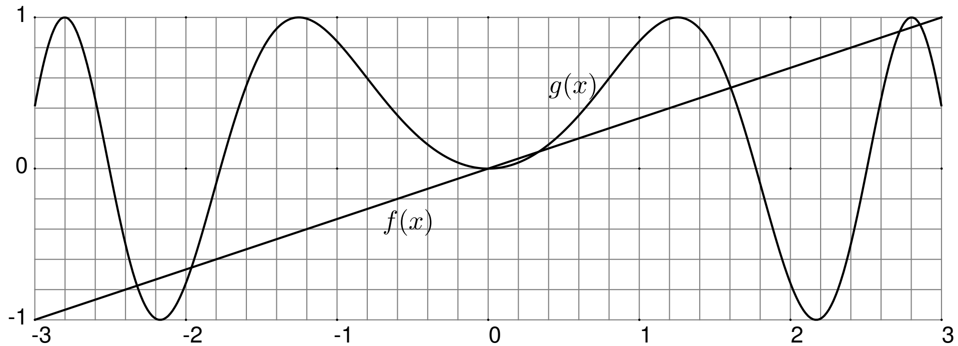
b) Führen Sie das Verfahren ebenso für die Funktionen

$$f(x) = x^3 \text{ und } g(x) = \cos(2\pi x)$$

und die betragskleinste Schnittstelle durch.

Lösung 67:

a)



i) Aus der Skizze kann man die ungefähren Schnittpunkte

$$(-2.3, -0.8),\ (-2, -0.7),\ (0, 0),\ (0.3, 0.1),\ (1.6, 0.5),\ (2.7, 0.9),\ (2.9, 0.9)$$

ablesen.

ii) Die kleinste positive Schnittstelle z liegt im Intervall $[0.3, 0.4]$. Sie ist Nullstelle der Funktion $F(x) = f(x) - g(x)$ mit

$$F'(x) = \frac{1}{3} - 2x\cos(x^2).$$

Die Iterationsvorschrift für das Newton-Verfahren lautet:

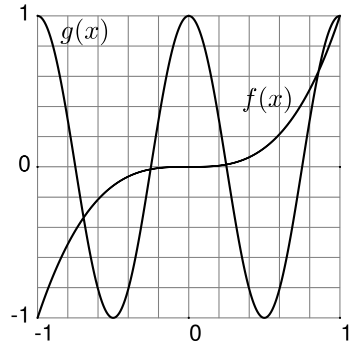
$$x_{i+1} = x_i - \frac{F(x_i)}{F'(x_i)}.$$

Mit $x_0 = 0.35$ liefert sie

n	x_n	$F(x_n)$	$F'(x_n)$	$F(x_n)/F'(x_n)$
0	0.3500000	-0.0055272	-0.3614210	0.0152929
1	0.3347071	-0.0002256	-0.3318845	0.0006798
2	0.3340273	-0.0000004	-0.3305673	0.0000014
3	0.3340259	0.0000000	-0.3305647	-0.0000000

Bereits nach drei Schritten findet keine Korrektur der ersten sechs Nachkommastellen mehr statt, der gesuchte Schnittpunkt liegt also bei $z \approx 0.33403$.

b)



i) Aus der Skizze kann man die ungefähren Schnittpunkte

$$(-0.6, -0.4),\ (-0.2, 0.0),\ (0.2, 0.0),\ (0.9, 0.6),\ (1.0, 1.0)$$

ablesen.

ii) Die betraglich kleinste Schnittstelle z liegt im Intervall $[0.2, 0.3]$. Sie ist Nullstelle der Funktion $G(x) = f(x) - g(x)$ mit

$$G'(x) = 3x^2 + 2\pi\sin(2\pi x).$$

Die Iterationsvorschrift für das Newton-Verfahren lautet:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{G(x_i)}{G'(x_i)}.$$

Mit $x_0 = 0.25$ liefert sie

n	x_n	$G(x_n)$	$G'(x_n)$	$G(x_n)/G'(x_n)$
0	0.250000	0.015625	6.470685	0.002415
1	0.247585	0.000004	6.466358	0.000001
2	0.247585	0.000000	6.466356	0.000000
3	0.247585			

Für diesen Fall hat das Verfahren bereits nach zwei Schritten die gewünschte Genauigkeit erreicht und das Ergebnis ist $z \approx 0.24759$.

Aufgabe 68: Newton-Verfahren

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = 17x^3 - 468x^2 + 2849x - 2294.$$

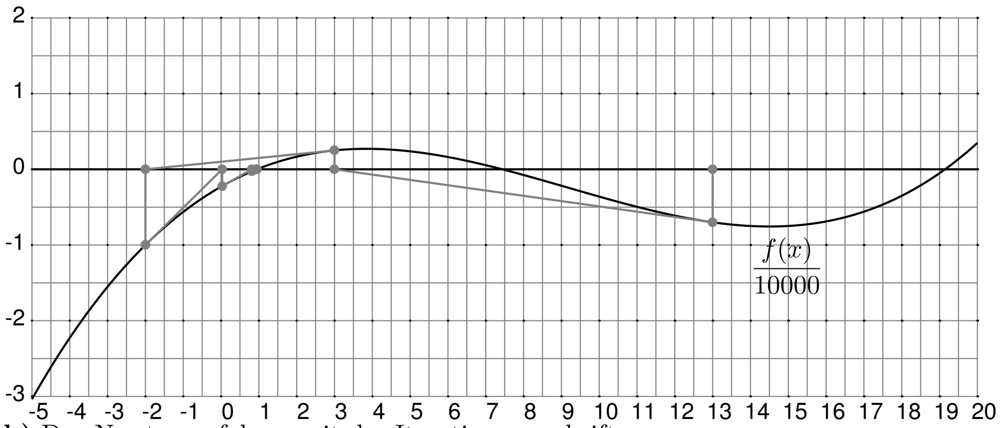
a) Skizzieren Sie die Funktion im Intervall $-5 \le x \le 20$.

b) Führen Sie mindestens zwei Schritte des Newton-Verfahrens mit dem Startwert $x_0 = 13$ für die Funktion $f(x)$ durch.

c) Skizzieren Sie im Funktionsgraphen die berechneten Iterationen x_0, x_1, x_2, ...

Lösung 68:

a)/c)



b) Das Newtonverfahren mit der Iterationsvorschrift:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

ergibt

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$-f(x_n)/f'(x_n)$
0	13.0000	-7000.0000	-700	-10.0000000
1	3.0000	2500.0000	500	-5.0000000
2	-2.0000	-10000.0000	4925	2.0304568
3	0.0304	-2207.6621	2821	0.7827090
4	0.8131	-277.6091	2122	0.1308489
5	0.9440	-7.2647	2011	0.0036127
6	0.9476	-0.0055	2008	0.0000027
7	0.9476			

Aufgabe 69: Newton-Verfahren

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 15x - 36.$$

a) Bestimmen Sie alle lokalen Extrema der Funktion $f(x)$.

b) Begründen Sie, weshalb f zwei Nullstellen besitzt.

c) Führen Sie das Newton-Verfahren mit der Funktion f zwei mal durch. Wählen Sie im ersten Durchlauf den Startwert $x_0 = 1$ und im zweiten Durchlauf $x_0 = -1$. Führen Sie jeweils drei Iterationsschritte durch.

Lösung 69:

a) Die Ableitung der Funktion f ist

$$f'(x) = 3x^2 + 4x - 15.$$

Ihre Nullstellen

$$x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{49}}{3} = \begin{cases} 5/3 \\ -3 \end{cases}$$

sind die stationären Punkte der Funktion f.
Die zweite Ableitung der Funktion ist $f''(x) = 6x + 4$ und wegen

$$f''(x_1) = 14 > 0 \text{ und } f''(x_2) = -14 < 0$$

liegt bei $(x_1, f(x_1)) = (5/3, -1372/27)$ ein Minimum und bei $(x_2, f(x_2)) = (-3, 0)$ ein Maximum der Funktion f vor.

b) Da f links der Maximalstelle $x_2 = -3$ (die auch Nullstelle ist) sowie rechts der Minimalstelle $x_1 = 5/3$ streng monoton steigt, und sonst streng monoton fällt, besitzt f lediglich die Nullstelle x_2 sowie (wegen $f(x_1) < 0$) eine weitere Nullstelle rechts von x_1.

c) Mit der oben berechneten Ableitung $f'(x) = 3x^2 + 4x - 15$ lautet die Iterationsvorschrift für das Newton-Verfahren:

$$x_{k+1} = x_k - (f'(x_k))^{-1} \cdot f(x_k).$$

Für die gegebenen Startwerte sind die ersten drei Iterationsschritte:

k	x_k	$f(x_k)$
0	1.0000	-48.0000
1	-5.0000	-36.0000
2	-4.1000	-9.8010
3	-3.5850	-2.5955

k	x_k	$f(x_k)$
0	-1.00000	-20.00000
1	-2.25000	-3.51562
2	-2.64894	-0.81945
3	-2.82923	-0.19916

Obwohl der erste Startwert $x_0 = 1$ dichter an der Nullstelle $x = 4$ der Funktion liegt, konvergiert das Verfahren trotzdem gegen die Nullstelle $x = -3$.
Um die Nullstelle $x = 4$ dennoch zu korrekt zu finden, muss x_0 geeignet gewählt werden.

Aufgabe 70: Optimierungsproblem

Ein Poster muss mit einer Gesamtfläche von $\bar{A} = 64000 \text{ mm}^2$ gedruckt werden. Es muss 10 mm Seitenränder und 25 mm obere und untere Ränder haben. Welche Höhe und Breite ergeben die maximale Druckfläche?

Lösung 70:

Seien x und y die beiden Dimensionen des Plakats und s die Seitenränder und t die oberen und unteren Ränder. Die Gesamtfläche ist $\bar{A} = 64000 \text{ mm}^2 = xy \text{ mm}^2$. Die gedruckte Fläche beträgt

$$\begin{aligned} A(x) &= (x - 2s)(y - 2t) \\ &= (x - 2s)\left(\frac{\bar{A}}{x} - 2t\right) \quad \text{(unter Verwendung der Nebenbedingung der Gesamtfläche)} \\ &= \bar{A} - \frac{2s}{x}\bar{A} - 2tx + 4st \text{ mm}^2. \end{aligned}$$

Um die Fläche zu maximieren, suchen wir die stationären Punkte:

$$A'(x) = 2s\bar{A}\frac{1}{x^2} - 2t.$$

Die stationären Punkte sind:

$$x_c = \pm\sqrt{\frac{s\bar{A}}{t}}.$$

Nur der positive Wert ist sinnvoll, da wir nach physikalischen Größen suchen. Die zweite Ableitung ist

$$A''(x) = -\frac{4s\bar{A}}{x^3}$$

die in x_c negativ ist. Daher ist x_c ein lokales Maximum. Wir haben also

$$x_c = 160 \text{ mm}$$

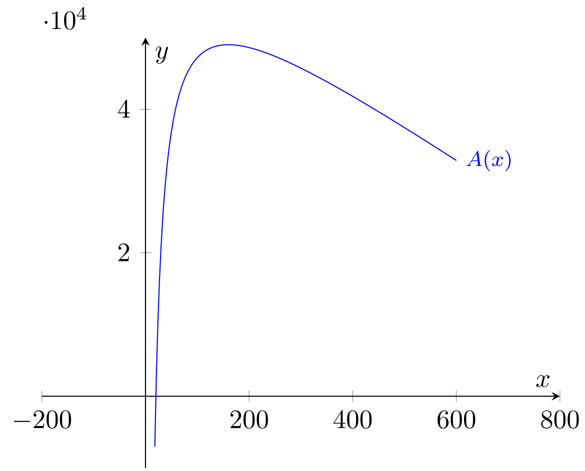
und

$$y_c = \frac{\bar{A}}{x_c} = 400 \text{ mm}.$$

Die maximale Druckfläche beträgt

$$A_{\max} = x_c\, y_c = 32000 \text{ mm}^2.$$

Der Graph der Fläche $A(x)$ ist



Aufgabe 71: Tangenten

a) Bestimmen Sie die Geradengleichungen (in der Form $ax + by = c$) der Tangenten an den Nullstellen der Funktionen

$$\varphi_1(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6, \qquad \varphi_2(x) = x^2 \text{ und } \varphi_3(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{für } x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & \text{für } x < 0 \end{cases}.$$

b) Geben Sie alle Punkte (x–Werte) an, in denen die Tangenten von $f(x) = x^2$ und $g(x) = x^3$ parallel sind.

c) Stellen Sie den Verlauf der beiden vektorwertigen Funktionen

$$\boldsymbol{v}(t) = \begin{pmatrix} t \\ \varphi_3(t) \end{pmatrix} \qquad \text{mit } \varphi_3(t) \text{ aus Aufgabenteil } \mathbf{a)}$$

und

$$\boldsymbol{w}(s) = \begin{pmatrix} s \cdot |s| \\ s \end{pmatrix}.$$

im selben Graphen dar.
Berechnen Sie – wo möglich – die Ableitungen beider Funktionen $\boldsymbol{v}(t)$ und $\boldsymbol{w}(s)$.

Hinweis: Die Funktion $\boldsymbol{w}(s)$ lässt sich analog zu $\varphi_3(t)$ mit Hilfe einer Fallunterscheidung auch ohne die Betragsfunktion darstellen.

Lösung 71:

a) **i)** Eine Nullstelle der Funktion $\varphi_1(x)$ ist $x_1 = 1$. Mittels Horner-Schema erhält man das Restpolynom:

	1	−2	−5	6
1	$\backslash$	1	−1	−6
	1	−1	−6	0

Für weitere Nullstellen muss also gelten

$$1x^2 - 1x - 6 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x_{2/3} = \begin{cases} -2 \\ 3 \end{cases}.$$

Die Ableitung der Funktion liefert die Steigung der Tangenten. An den Nullstellen x_1, x_2 und x_3 hat man

$$\varphi_1'(x) = 3x^2 - 4x - 5 \Rightarrow \varphi_1'(1) = -6,\ \varphi_1'(-2) = 15,\ \varphi_1'(3) = 10.$$

Damit sind die Tangentengeraden gegeben durch:

$$\begin{array}{rccc} x_1 = 1: & y = -6x + 6 & \Rightarrow & 6x + y = 6 \\ x_2 = -2: & y = 15x + 30 & \Rightarrow & 15x - y = -30 \\ x_3 = 3: & y = 10x - 30 & \Rightarrow & 10x - y = 30 \end{array}$$

ii) $\varphi_2(x)$ hat nur die Nullstelle $x_0 = 0$. Die Ableitung $\varphi_2'(x) = 2x$ hat dort den Wert Null, so dass die Tangente durch

$$y = 0$$

gegeben ist.

iii) Die Funktion $\varphi_3(x)$ hat nur die Nullstelle $\varphi_0 = 0$. Dort ist φ_3 nicht differenzierbar:

$$\frac{\varphi_3(x) - \varphi(0)}{x - 0} = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}-0}{x}, & x > 0 \\ \frac{-\sqrt{-x}-0}{x}, & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}, & x > 0 \\ \frac{-\sqrt{-x}-0}{-(\sqrt{-x})^2}, & x < 0 \end{cases} = \frac{1}{\sqrt{|x|}} \xrightarrow[x \to 0]{} \infty.$$

Die Steigung der Funktion ist dort also unendlich und sie hat die senkrechte Tangente:

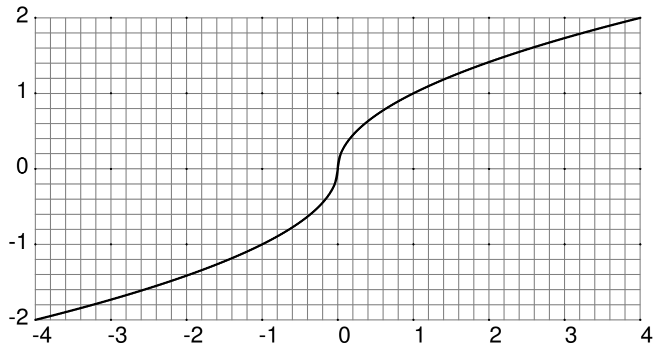
$$x = 0.$$

b) Die beiden Funktionen haben im Punkt x parallele Tangenten, wenn ihre Ableitungen dort denselben Wert annehmen:

$$f'(x) = g'(x) \Leftrightarrow 2x = 3x^2$$

Dies ist für $x = 0$ oder für $x = \frac{2}{3}$ der Fall.

c) Die Funktionsgraphen beider Funktionen stimmen überein.



In Aufgabenteil **a)** wurde bereits gezeigt, dass $\varphi_3(t)$ und damit auch $\boldsymbol{v}(t)$ an der Stelle $t = 0$ nicht differenzierbar ist. In allen anderen Punkten hat man:

$$\boldsymbol{v}'(t) = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t} \\ \varphi_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2\sqrt{|t|}} \end{pmatrix}.$$

Durch die Umparametrisierung der Kurve hat man eine differenzierbare Funktion $\boldsymbol{w}(s)$ mit

$$\boldsymbol{w}'(s) = \begin{pmatrix} 2s \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{für } s > 0$$

$$\boldsymbol{w}'(s) = \begin{pmatrix} -2s \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{für } s < 0$$

Für $s = 0$ ergibt sich für die erste Komponente $w_1(s)$:

$$\begin{aligned} \frac{w_1(s) - w_1(0)}{s - 0} &= \begin{cases} \frac{s^2 - 0}{s} & \text{für } s > 0 \\ \frac{-s^2 - 0}{s} & \text{für } s < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} s & \text{für } s > 0 \\ -s & \text{für } s < 0 \end{cases} \\ &\underset{s \to 0}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

Damit hat man

$$\boldsymbol{w}'(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und insgesamt

$$\boldsymbol{w}'(s) = \begin{pmatrix} 2|s| \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 72: Partielle Ableitungen

Gegeben sei die Funktion

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

Berechnen Sie $f_{xy}(x,y)$ für alle $(x,y)^\top \in \mathbb{R}^2$ und untersuchen Sie, wo

$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y)$$

gilt.
Sind die zweiten Ableitungen von f stetig in $(0,0)^\top$?
Hinweis: Berechnen Sie die Ableitungen im Ursprung $(0,0)^\top$ über die Grenzwert-Definition.

Lösung 72:

Für $(x,y)^\top \neq (0,0)^\top$ gilt

$$\begin{aligned} f_x(x,y) =& \frac{(3x^2y - y^3)(x^2+y^2) - 2x(x^3y - y^3x)}{(x^2+y^2)^2} \\ =& \frac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2+y^2)^2} . \end{aligned}$$

Wegen $f(x,y) = -f(y,x)$ gilt

$$f_y(x,y) = -\partial_1 f(y,x) = \frac{x^5 - 4y^2x^3 - y^4x}{(x^2+y^2)^2} .$$

Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} f_{xy}(x,y) =& \frac{(x^4 + 12x^2y^2 - 5y^4) \cdot (x^2+y^2)^2 - 2(x^2+y^2) \cdot 2y \cdot (x^4y + 4x^2y^3 - y^5)}{(x^2+y^2)^4} \\ =& \frac{x^6 + 9x^4y^2 - 9x^2y^4 - y^6}{(x^2+y^2)^3} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} f_{yx}(x,y) =& \frac{\partial}{\partial x}\Big(f_y(x,y)\Big) = \frac{\partial}{\partial x}\Big(-\partial_1 f(y,x)\Big) \\ =& -\partial_2\partial_1 f(y,x) = \partial_2\partial_1 f(x,y) = f_{xy}(x,y). \end{aligned}$$

Die zweiten Ableitungen sind für $(x,y)^\top \neq (0,0)^\top$ stetig, deswegen gilt auch

$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y).$$

Im Ursprung hat man zunächst

$$\begin{aligned} f_x(0,0) =& \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h(h^2+0)} = 0 \\ f_y(0,0) =& \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h(0+h^2)} = 0. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für die zweite Ableitung

$$\begin{aligned} f_{xy}(0,0) =& \lim_{h\to 0} \frac{f_x(0,h) - f_x(0,0)}{h} \\ =& \lim_{h\to 0} \left(\frac{1}{h}\left(\frac{-h^5}{h^4} - 0\right)\right) = \lim_{h\to 0} \frac{-h^5}{h^5} = -1. \end{aligned}$$

Vertauscht man die Reihenfolge der Ableitungen, ergibt sich

$$\begin{aligned} f_{yx}(0,0) =& \lim_{h\to 0} \frac{f_y(h,0) - f_y(0,0)}{h} \\ =& \lim_{h\to 0} \left(\frac{1}{h}\left(\frac{h^5}{h^4} - 0\right)\right) = \lim_{h\to 0} \frac{h^5}{h^5} = 1. \end{aligned}$$

Also gilt im Ursprung

$$f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0).$$

Die Ableitungen können also nicht stetig sein, da die Reihenfolge gemäß Satz von Schwarz sonst egal wäre.

Aufgabe 73: Partialbruchzerlegung

Berechnen Sie mit Hilfe der Partialbruchzerlegung die unbestimmten Integrale folgender Funktionen:

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$, b) $f(x) = \dfrac{x^2}{(x-3)^3}$,

c) $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{(x+1)(x-2)^2}$, d) $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)(x^2+x+1)}$.

Lösung 73:

Zu a) Die Funktion f lässt sich darstellen als

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}\,.$$

Durch Multiplikation mit dem Hauptnenner erhält man

$$x^2 - x - 1 = A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-2)(x-1)$$

Einsetzen der Nullstellen des Hauptnenners in die Gleichung liefert:
für $x = 1:\quad -1 = A \cdot (-1) \cdot (-2) \Rightarrow A = -\frac{1}{2}$
für $x = 2:\quad B = -1$
für $x = 3:\quad 5 = C \cdot 2 \Rightarrow C = \frac{5}{2}\,.$

Es folgt

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\ln|x-1| - \ln|x-2| + \frac{5}{2}\ln|x-3| + C\,.$$

Zu b) Die Funktion f lässt sich darstellen als

$$f(x) = \frac{x^2}{(x-3)^3} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x-3)^2} + \frac{C}{(x-3)^3}\,.$$

Durch Multiplikation mit dem Hauptnenner erhält man

$$x^2 = A(x-3)^2 + B(x-3) + C$$

Es folgt Einsetzen der Nullstelle des Hauptnenners in die Gleichung liefert für $x = 3$ den Wert $C = 9$ und Koeffizientenvergleich für x^2 liefert $A = 1$. Nun wählen wir noch $x = 4$ und erhalten die Gleichung $16 = A + B + C \Rightarrow B = 16$.

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \ln|x-3| - \frac{6}{x-3} - \frac{9}{2(x-3)^2} + C\,.$$

Zu c) Hier existiert eine Partialbruchzerlegung der Form

$$f(x) = \frac{x^2+1}{(x+1)(x-2)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2}\,.$$

Durch Multiplikation mit dem Hauptnenner erhält man

$$x^2 + 1 = A(x-2)^2 + B(x+1)(x-2) + C(x+1)$$

Einsetzen der Nullstellen des Hauptnenners in die Gleichung liefert:
für $x = -1:\quad 2 = A \cdot 9 \Rightarrow A = \frac{2}{9}$
für $x = 2:\quad 5 = C \cdot 3 \Rightarrow C = \frac{5}{3}\,.$

Mithilfe des Koeffizientenvergleichs für die Potenz x^2 erhält man $1 = A + B \Rightarrow B = 1 - A = \frac{7}{9}$.
Folglich ist

$$f(x) = \frac{2}{9(x+1)} + \frac{7}{9(x-2)} + \frac{5}{3(x-2)^2}\,,$$

und

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{9}\ln|x+1| + \frac{7}{9}\ln|x-2| - \frac{5}{3(x-2)} + C\,.$$

Zu d) Der Faktor $x^2 + x + 1$ hat hier keine reellen Nullstellen und kann deshalb nicht in Linearfaktoren zerlegt werden (zumindest nicht in $\mathbb{R}$). Deshalb benutzt man den Ansatz

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}\,.$$

Durch Multiplikation mit dem Hauptnenner erhält man

$$1 = A(x^2+x+1) + (Bx+C)(x-1)$$

Einsetzen der reellen Nullstelle des Hauptnenners in die Gleichung liefert für $x = 1$ die Gleichung $1 = 3 \cdot A \Rightarrow A = \frac{1}{3}$ und Koeffizientenvergleich für x^2 liefert $0 = A + B \Rightarrow B = -\frac{1}{3}$. Nun wählen wir noch $x = 0$ und erhalten $1 = A - C \Rightarrow C = A - 1 = -\frac{2}{3}\,.$

Damit ist $f(x) = \dfrac{1}{3(x-1)} - \dfrac{x+2}{3(x^2+x+1)}$. Das Integral über $\dfrac{x+2}{x^2+x+1}$ berechnet man mit der Substitution $u = x + \frac{1}{2}$,

$$\begin{aligned}
\int \frac{x+2}{x^2+x+1}\mathrm{d}x &= \int \frac{x+2}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{u+\frac{3}{2}}{u^2+\frac{3}{4}}\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{2u}{u^2+\frac{3}{4}}\mathrm{d}u + \frac{3}{2}\int \frac{1}{u^2+\frac{3}{4}}\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2}\ln\left|u^2+\frac{3}{4}\right| + \frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\int \frac{1}{\frac{4u^2}{3}+1}\mathrm{d}u, \quad \text{substituiere } z = 2u/\sqrt{3} \\
&= \frac{1}{2}\ln\left|u^2+\frac{3}{4}\right| + \sqrt{3}\int \frac{1}{z^2+1}\mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{2}\ln\left|u^2+\frac{3}{4}\right| + \sqrt{3}\arctan(z) + C \\
&= \frac{1}{2}\ln\left|u^2+\frac{3}{4}\right| + \sqrt{3}\arctan\left(\frac{2u}{\sqrt{3}}\right) + C \\
&= \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \sqrt{3}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C
\end{aligned}$$

Damit gilt

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C\,.$$

Aufgabe 74: Regel von L'Hospital

Berechnen Sie mit Hilfe der Regel von L'Hospital die Grenzwerte

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin x}{\tan x - x}$, b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\mathrm{e}^x - x)}{\ln(\cos x)}$,

c) $\lim\limits_{x\to\infty} x(2\arctan x - \pi)$, d) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^x-1}$.

Lösung 74:

a) Da sowohl Zähler, als auch Nenner gegen Null konvergieren

$$\lim_{x\to 0}(x^2\sin x) = 0 = \lim_{x\to 0}(\tan x - x),$$

darf der Satz von L'Hospital angewendet werden:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin x}{\tan x - x} &= \lim_{x\to 0}\frac{2x\sin x + x^2\cos x}{\frac{1}{\cos^2 x} - 1} = \lim_{x\to 0}\frac{2x\sin x\cos^2 x + x^2\cos^3 x}{1-\cos^2 x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{2\sin x + 2x\cos x + 2x\cos x - x^2\sin x}{2(\cos x)^{-3}\sin x}\\ &\qquad \text{(Erneut gehen Zähler und Nenner gegen 0)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{2\cos x + 4\cos x - 4x\sin x - 2x\sin x - x^2\cos x}{6(\cos x)^{-4}\sin^2 x + 2(\cos x)^{-2}}\end{aligned}$$

Der Zähler dieses Bruches geht gegen 6, der Nenner gegen 2, also ist insgesamt

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin x}{\tan x - x} = \frac{6}{2} = 3$$

b) Auch hier kann die Regel von L'Hospital angewendet werden, da Zähler und Nenner gegen Null gehen:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\mathrm{e}^x - x)}{\ln(\cos x)} &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x-x}}{\frac{-\sin x}{\cos x}}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x\cos x - \cos x}{-\mathrm{e}^x\sin x + x\sin x}\\ &\qquad \text{(Erneut gehen Zähler und Nenner gegen 0)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x\cos x - \mathrm{e}^x\sin x + \sin x}{-\mathrm{e}^x\sin x - \mathrm{e}^x\cos x + \sin x + x\cos x} = \frac{1}{-1} = -1\end{aligned}$$

c) Das Produkt $x(2\arctan x - \pi)$ kann in einen Quotienten umgeformt werden, dessen Zähler und Nenner jeweils gegen Unendlich gehen, danach kann die Regel von L'Hospital angewendet werden:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} x(2\arctan x - \pi) &= \lim_{x\to\infty}\frac{2\arctan x - \pi}{x^{-1}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{1+x^2}}{-x^{-2}}\\ &= -\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{1+x^2} \quad \text{(Zähler und Nenner gehen gegen } \infty)\\ &= -\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{2x} = -2\end{aligned}$$

d) Da Zähler und Nenner gegen Null konvergieren kann man die Regel von L'Hospital anwenden. Danach folgt mit $x^x = \mathrm{e}^{x\ln x}$:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{2x}{(1+\ln x)\mathrm{e}^{x\ln x}} = 2\,.$$

Aufgabe 75: Regel von L'Hospital

Berechnen Sie mit Hilfe der Regel von L'Hospital die Grenzwerte

$$A = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right), \qquad B = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cosh x}{x^3}\right), \qquad C = \lim_{x\to 1}\left(\frac{\ln x}{\sin(\pi x)}\right)$$

Lösung 75:

Es gilt $\lim\limits_{x\to 0}\tan x = \lim\limits_{x\to 0} x = 0$, also darf der Satz von L'Hospital angewendet werden:

$$A = \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{1} = 1.$$

Für B gehen Zähler und Nenner gegen Null ($\lim\limits_{x\to 0}\cosh x = 1$), also kann auch hier der Satz von L'Hospital angewendet werden:

$$\begin{aligned} B =& \lim_{x\to 0}\frac{1-\cosh x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{-\sinh x}{3x^2} \text{ (erneut ist } \lim_{x\to 0}\sinh x = \lim_{x\to 0} x^2 = 0\text{)} \\ =& \lim_{x\to 0}\frac{-\cosh x}{6x} = \begin{cases} -\infty & \text{, für } x > 0 \text{ (rechtsseitiger Grenzwert)} \\ \infty & \text{, für } x < 0 \text{ (linksseitiger Grenzwert)} \end{cases}. \end{aligned}$$

Für C gilt wiederum $\lim\limits_{x\to 1}\ln x = \lim\limits_{x\to 1}\sin(\pi x) = 0$, also kann auch hier der Satz von L'Hospital angewendet werden:

$$\begin{aligned} C =& \lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{\sin(\pi x)} = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{\pi\cos(\pi x)} \\ =& \lim_{x\to 1}\frac{1}{\pi x\cos(\pi x)} = -\frac{1}{\pi}. \end{aligned}$$

Aufgabe 76: Richtungsableitungen

a) Gegeben seien die skalarwertigen Funktionen

$$f(x,y,z) = y^2 - xz \qquad \text{und} \qquad g(x,y,z) = x^2\sin(y) + \cos(z).$$

Berechnen Sie die Richtungsableitung beider Funktionen in Richtung $\boldsymbol{h} := (-2,3,4)^\top$.

b) Gegeben sei die folgende vektorwertige Funktion

$$\boldsymbol{f}(x,y) = (\mathrm{e}^{xy}, x^2+y^3)^\top.$$

i) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix von $\boldsymbol{f}$ in dem Punkt $\boldsymbol{P}_1 = (1,2)^\top$.

ii) Berechnen Sie die Richtungsableitung von $\boldsymbol{f}$ in Richtung $\boldsymbol{v} = (1,0)^\top$ in dem Punkt $\boldsymbol{P}_2 = (1,1)^\top$.

Lösung 76:

a) Zunächst berechnen wir die Gradienten der beiden Funktionen:

$$\begin{aligned}\nabla f(x,y,z) =& (-z,\, 2y,\, -x)^\top \\ \nabla g(x,y,z) =& (2x\sin(y),\, x^2\cos(y),\, -\sin(z))^\top.\end{aligned}$$

Desweiteren benötigen wir den Normalenvektor in Richtung $\boldsymbol{h}$:

$$\hat{\boldsymbol{h}} = \frac{1}{\sqrt{4+9+16}}(-2,\,3,\,4)^\top = \frac{1}{\sqrt{29}}(-2,\,3,\,4)^\top.$$

Damit ergeben sich dann die Richtungsableitungen:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \hat{\boldsymbol{h}}}(x,y,z) &= \left\langle \hat{\boldsymbol{h}},\, \nabla f(x,y,z)\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{29}}\,(2z+6y-4x) \\ \frac{\partial g}{\partial \hat{\boldsymbol{h}}}(x,y,z) &= \left\langle \hat{\boldsymbol{h}},\, \nabla g(x,y,z)\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{29}}\,\left(-4x\sin(y)+3x^2\cos(y)-4\sin(z)\right).\end{aligned}$$

b) **i)** Die Jacobi-Matrix ist

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} f_{1,x} & f_{1,y} \\ f_{2,x} & f_{2,y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y\,\mathrm{e}^{xy} & x\,\mathrm{e}^{xy} \\ 2x & 3y^2\end{pmatrix}$$

Die Jacobi-Matrix ausgewertet in dem Punkt $\boldsymbol{P}_1 = (1,2)^\top$ ist

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{P}_1) = \begin{pmatrix} 2\,\mathrm{e}^2 & \mathrm{e}^2 \\ 2 & 12\end{pmatrix}$$

ii) Um die Richtungsableitung zu bestimmen, benötigen wir einen Einheitsvektor. Da der gegebene Vektor $\boldsymbol{v}$ bereits Einheitslänge hat, kann die Richtungsableitung berechnet werden durch

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{h}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{J}(x)\boldsymbol{v} = (y\,\mathrm{e}^{xy}, 2x)^\top$$

Die Richtungsableitung ausgewertet in dem Punkt $\boldsymbol{P}_2$ ist

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{h}}(\boldsymbol{P}_2) = (\mathrm{e}, 2)^\top.$$

Aufgabe 77: Kurven im $\mathbb{R}^n$

Ein Satellit bewege sich auf der Bahn

$$\boldsymbol{r}(t) = \left(\sqrt{1+t^2},\, 3t\right)^\top$$

a) Berechnen Sie die Geschwindigkeit $\dot{\boldsymbol{r}}(t)$ des Satelliten.

b) Geben Sie die Grenzwerte (für $t \to +\infty$ und für $t \to -\infty$) der Bahnrichtung r_2/r_1 und Geschwindigkeit $\dot{\boldsymbol{r}}$ des Satelliten an.

Lösung 77:

a) Die Geschwindigkeit ist

$$\dot{\boldsymbol{r}}(t) = \left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, 3\right)^\top.$$

b) Es ist

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\pm\infty} \frac{r_2}{r_1} &= \lim_{t\to\pm\infty} \frac{3t}{\sqrt{1+t^2}} \\ &= \lim_{t\to\pm\infty} \frac{3\ \mathrm{sign}(t)}{\sqrt{\frac{1}{|t|^2}+1}} = \pm 3\end{aligned}$$

Die Bahn verläuft also asymptotisch in Richtung der beiden Geraden $\mathrm{span}\{(1, \pm 3)^\top\}$. Für die Geschwindigkeit gilt passend dazu

$$\lim_{t\to\pm\infty} \dot{\boldsymbol{r}}(t) = (\pm 1, 3)^\top.$$

Aufgabe 78: Stetige Fortsetzung

a) Untersuchen Sie, ob die folgenden reellen Funktionen im Punkt $x = 0$ stetig sind oder stetig fortgesetzt werden können.

$$f_1(x) = |x|, \qquad f_2(x) = \frac{x}{|x|}, \qquad f_3(x) = \frac{x^3}{|x|}, \qquad f_4(x) = \frac{x^2}{|x|^2}$$

b) Bestimmen Sie die Definitionslücken der Funktionen

$$g(x) = \frac{2x^3 - 12x^2 + 18x}{x^3 - 9x}$$

In welchen dieser Lücken ist die Funktion stetig fortsetzbar?

Lösung 78:

a) **i)** Sei also x_n eine beliebige Nullfolge, dann ist gemäß Funktionsdefinition

$$\lim_{n\to\infty} |f_1(x_n) - f(0)| = \lim_{n\to\infty} |x_n - 0| = 0$$

und damit auch

$$\underset{x\to 0}{f}{}_1(x) = f_1(0).$$

Also ist f_1 in $x = 0$ stetig.

ii) Die Funktion f_2 ist in $x = 0$ nicht definiert. Um sie stetig fortzusetzen, müsste die Folge $f_2(x_n)$ für eine beliebige Nullfolge x_n konvergieren. Um dies zu widerlegen, wählen wir die Nullfolge $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$. Damit gilt:

$$f_2(x_n) = \frac{x_n}{|x_n|} = \frac{(-1)^n \cdot 1/n}{1/n} = (-1)^n.$$

Diese Folge $f_2(x_n)$ konvergiert sicher nicht. Damit ist f_2 nicht stetig fortsetzbar in $x = 0$.

iii) Die Funktion f_3 ist ebenfalls in $x = 0$ nicht definiert, sie lässt sich jedoch durch

$$f_3(0) := 0$$

stetig fortsetzen. Sei dafür eine beliebige Nullfolge x_n. Damit gilt dann:

$$|f_3(x_n) - f_3(0)| = \left|\frac{x_n^3}{|x_n|} - 0\right| = \frac{|x_n|^3}{|x_n|} = |x_n|^2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Also konvergiert die Folge $f_3(x_n)$ gegen $f_3(0)$ und die Funktion ist stetig.

iv) Die Funktion f_4 ist nicht definiert für $x = 0$. Setzt man jedoch $f_4(0) = 1$, so erhält man $f_4(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Also hat man f_4 stetig fortgesetzt.

In den beiden Fällen f_3 und f_4 wurden die Definitionsbereiche der Funktionen durch das stetige Fortsetzen im Nullpunkt erweitert. Damit erhält man formal eine neue Funktion.

b) Die Definitionslücken der Funktion g sind gegeben durch die Nullstellen des Nenners:

$$x^3 - 9x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 0 \vee x_2 = 3 \vee x_3 = -3.$$

Der Zähler lässt sich schreiben als

$$2x^3 - 12x^2 + 18x = 2 \cdot (x - 0) \cdot (x - 3)^2.$$

Damit hat man dann

$$g(x) = \frac{2 \cdot (x - 0) \cdot (x - 3)^2}{(x - 0)(x - 3)(x - (-3))} = \frac{2(x - 3)}{x + 3}.$$

Man kann also die Definitionslücken $x_1 = 0$ und $x_2 = 3$ durch

$$g(0) = -2 \text{ und } g(3) = 0$$

beheben. Bei $x_3 = -3$ hat man einerseits für $y_j^- = -3 - 1/j \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} -3$:

$$g(y_j^-) = \frac{2\,(-3 - 1/j - 3)}{-3 - 1/j + 3} = 2\frac{6 + 1/j}{1/j} = 12j + 2 > 2$$

und andererseits für $y_j^+ = -3 + 1/j \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} -3$:

$$g(y_j^+) = \frac{2\,(-3 + 1/j - 3)}{-3 + 1/j + 3} = 2\frac{-6 + 1/j}{1/j} = -12j + 2 < -10.$$

Wenn jede einzelne dieser Folgen einen Grenzwert hätte, so würden diese wegen der Schranken 2 und -10 jedenfalls nicht übereinstimmen. Also kann man g im Punkt $x = -3$ nicht stetig fortsetzen.

Aufgabe 79: Stetige Fortsetzung

a) Untersuchen Sie, ob die folgenden reellen Funktionen im Punkt $x = 0$ stetig sind oder stetig fortgesetzt werden können.

$$f_1(x) = |x|, \qquad f_2(x) = \frac{x}{|x|}, \qquad f_3(x) = \frac{x^3}{|x|}, \qquad f_4(x) = \frac{x^2}{|x|^2}$$

b) Bestimmen Sie die Definitionslücken der Funktionen

$$g(x) = \frac{2x^3 - 12x^2 + 18x}{x^3 - 9x}$$

In welchen dieser Lücken ist die Funktion stetig fortsetzbar?

Lösung 79:

a) **i)** Sei also x_n eine beliebige Nullfolge, dann ist gemäß Funktionsdefinition

$$\lim_{n\to\infty} |f_1(x_n) - f(0)| = \lim_{n\to\infty} |x_n - 0| = 0$$

und damit auch

$$\underset{x\to 0}{f_1}(x) = f_1(0).$$

Also ist f_1 in $x = 0$ stetig.

ii) Die Funktion f_2 ist in $x = 0$ nicht definiert. Um sie stetig fortzusetzen, müsste die Folge $f_2(x_n)$ für eine beliebige Nullfolge x_n konvergieren. Um dies zu widerlegen, wählen wir die Nullfolge $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$. Damit gilt:

$$f_2(x_n) = \frac{x_n}{|x_n|} = \frac{(-1)^n \cdot 1/n}{1/n} = (-1)^n.$$

Diese Folge $f_2(x_n)$ konvergiert sicher nicht. Damit ist f_2 nicht stetig fortsetzbar in $x = 0$.

iii) Die Funktion f_3 ist ebenfalls in $x = 0$ nicht definiert, sie lässt sich jedoch durch

$$f_3(0) := 0$$

stetig fortsetzen. Sei dafür eine beliebige Nullfolge x_n. Damit gilt dann:

$$|f_3(x_n) - f_3(0)| = \left| \frac{x_n^3}{|x_n|} - 0 \right| = \frac{|x_n|^3}{|x_n|} = |x_n|^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Also konvergiert die Folge $f_3(x_n)$ gegen $f_3(0)$ und die Funktion ist stetig.

iv) Die Funktion f_4 ist nicht definiert für $x = 0$. Setzt man jedoch $f_4(0) = 1$, so erhält man $f_4(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Also hat man f_4 stetig fortgesetzt.

In den beiden Fällen f_3 und f_4 wurden die Definitionsbereiche der Funktionen durch das stetige Fortsetzen im Nullpunkt erweitert. Damit erhält man formal eine neue Funktion.

b) Die Definitionslücken der Funktion g sind gegeben durch die Nullstellen des Nenners:

$$x^3 - 9x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 0 \vee x_2 = 3 \vee x_3 = -3.$$

Der Zähler lässt sich schreiben als

$$2x^3 - 12x^2 + 18x = 2 \cdot (x - 0) \cdot (x - 3)^2.$$

Damit hat man dann

$$g(x) = \frac{2 \cdot (x - 0) \cdot (x - 3)^2}{(x - 0)(x - 3)(x - (-3))} = \frac{2(x - 3)}{x + 3}.$$

Man kann also die Definitionslücken $x_1 = 0$ und $x_2 = 3$ durch

$$g(0) = -2 \text{ und } g(3) = 0$$

beheben. Bei $x_3 = -3$ hat man einerseits für $y_j^- = -3 - 1/j \xrightarrow[j\to\infty]{} -3$:

$$g(y_j^-) = \frac{2\,(-3 - 1/j - 3)}{-3 - 1/j + 3} = 2\frac{6 + 1/j}{1/j} = 12j + 2 > 2$$

und andererseits für $y_j^+ = -3 + 1/j \xrightarrow[j\to\infty]{} -3$:

$$g(y_j^+) = \frac{2\,(-3 + 1/j - 3)}{-3 + 1/j + 3} = 2\frac{-6 + 1/j}{1/j} = -12j + 2 < -10.$$

Wenn jede einzelne dieser Folgen einen Grenzwert hätte, so würden diese wegen der Schranken 2 und -10 jedenfalls nicht übereinstimmen. Also kann man g im Punkt $x = -3$ nicht stetig fortsetzen.

Aufgabe 80: Äquipotentialfläche und Tangentialebene

Gegeben seien die Funktion $f(x,y,z) = y^2 - xz$ und der Punkt $\boldsymbol{p}_0 = (1,\,-2,\,3)^\top$.

a) Bestimmen Sie die Äquipotentialfläche der Funktion f durch den Punkt $\boldsymbol{p}_0$:

$$\boldsymbol{F} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 | \quad f(x,y,z) = f(\boldsymbol{p}_0)\}.$$

Skizzieren Sie die Schnitte der Fläche $\boldsymbol{F}$ mit zur xy-Ebene parallelen Ebenen, d. h. für konstante z-Werte. (z. B. $z = 0\pm,\ 1\pm,\ 2\pm,\ 3\pm$ und $z \to \infty$)

b) Bestimmen Sie $\nabla f(\boldsymbol{p}_0)$.

c) Bestimmen Sie die Hessesche Normalform der Tangentialebene $\boldsymbol{E}$ an $\boldsymbol{F}$ im Punkt $\boldsymbol{p}_0$.

d) Bestimmen Sie den Abstand der Tangentialebene $\boldsymbol{E}$ zum kritischen Punkt der Funktion f.

Lösung 80:

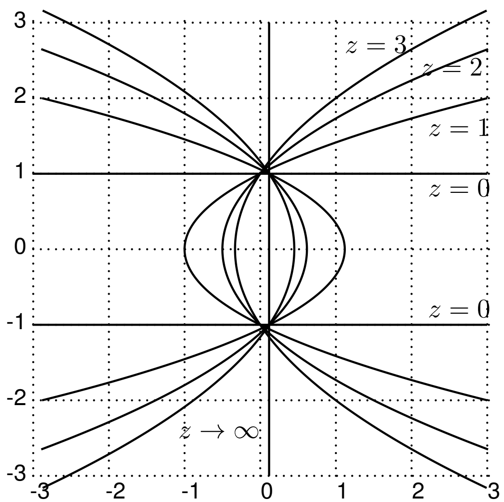
a) Mit $f(\boldsymbol{p}_0) = 1$ ergibt sich die Äquipotentialfläche zu

$$\boldsymbol{F} = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\quad y^2 - xz = 1\right\}.$$

Für konstante z-Werte ergeben sich für die Schnittkurven Parabeln ($z \neq 0$):

$$x = \frac{y^2 - 1}{z},$$

während sich für $z = 0$ die Geraden $y = \pm 1$ ergeben:



b) Es ist

$$\nabla f(x,y,z) = (-z, 2y, -x)^\top \text{ und damit } \nabla f(\boldsymbol{p}_0) = (-3,\,-4,\,-1)^\top.$$

c) Die Ebene $\boldsymbol{E}$ hat den Normalenvektor $\nabla f(\boldsymbol{p}_0)$, dessen Normierung

$$\boldsymbol{n}_0 = \frac{1}{\sqrt{26}}\begin{pmatrix}-3\\-4\\-1\end{pmatrix}$$

ergibt und enthält den Punkt $\boldsymbol{p}_0$. Ihre Hessesche Normalform ist also

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E} =& \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 |\ \langle \boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}_0,\, \boldsymbol{n}_0\rangle = 0\}\\ =& \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \left\langle \begin{pmatrix}x-1\\y+2\\z-3\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{26}}\begin{pmatrix}-3\\-4\\-1\end{pmatrix}\right\rangle = 0\right\}.\end{aligned}$$

d) Ein kritischer Punkt erfüllt die Bedingung $\nabla f(\boldsymbol{x}) = 0$. Damit ist $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ der einzige kritische Punkt. Der Abstand ergibt sich aus dem Skalarprodukt der Hesseschen Normalform:

$$d = |\langle \boldsymbol{0} - \boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{n}_0\rangle| = \frac{1}{\sqrt{26}}|-2| = \sqrt{\frac{2}{13}}.$$

Aufgabe 81: Taylor-Entwicklung

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \sin(x)\ln(x).$$

a) Bestimmen Sie das Taylor-Polynom zweiter Ordnung $T_2(x)$ von $f(x)$ um den Punkt $x = 1$.

b) Bestimmen Sie die Differenz zwischen dem Taylor-Polynom $T_2(x)$ und der Funktion $f(x)$ im Punkt $x = 0$, d.h. bestimmen Sie $d(0)$, wobei

$$d(x) := |T_2(x) - f(x)|.$$

Man beachte, dass die Funktion $f(x)$ an der Stelle $x = 0$ stetig fortgesetzt werden muss.

Lösung 81:

a) Die Ableitungen von $f(x)$ sind:

$$f'(x) = \cos(x)\ln(x) + \frac{\sin(x)}{x},$$
$$f''(x) = -\sin(x)\ln(x) + 2\frac{\cos(x)}{x} - \frac{\sin(x)}{x^2}.$$

Das Taylor-Polynom ist

$$\begin{aligned} T_2(x;1) &= f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{1}{2}f''(x)(x-1)^2 \\ &= \sin(1)(x-1) + \left(\cos(1) - \frac{\sin(1)}{2}\right)(x-1)^2 \end{aligned}$$

b) Die Differenz ist

$$d(x) := |T_2(x) - f(x)| = |\sin(x)\ln(x) - \sin(1)(x-1) - \left(\cos(1) - \frac{\sin(1)}{2}\right)(x-1)^2|.$$

Wir müssen den Grenzwert $\lim_{x\to 0} d(x)$ berechnen, da die Funktion $\sin(x)\ln(x)$ in 0 nicht definiert ist. Wenn der Grenzwert existiert, erweitern wir die Funktion um den Wert des Grenzwertes.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0}\sin(x)\ln(x) &= \lim_{x\to 0}\frac{\ln(x)}{\frac{1}{\sin x}} \\ &= \lim_{x\to 0} -\frac{1}{x}\frac{\sin^2(x)}{\cos(x)} \\ &= \lim_{x\to 0} -\frac{\sin(x)}{x}\lim_{x\to 0}\sin(x)\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos(x)} \\ &= -1\cdot 0\cdot 1 = 0. \end{aligned}$$

Wir erweitern die Funktion bei $x = 0$ durch Kontinuität mit dem Grenzwert $f(0) = 0$. Die Differenz ist

$$d(0) = \left|\sin(1) + \frac{\sin(1)}{2} - \cos(1)\right| = \frac{3\sin(1)}{2} - \cos(1).$$

Aufgabe 82: Taylor-Entwicklung

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \ln(x).$$

a) Bestimmen Sie das Taylor-Polynom der Ordnung zwei, $T_2(x)$, von $f(x)$ an der Stelle $x = 1$.

b) Bestimmen Sie das Restglied $R_2(x;1)$ und schätzen Sie

$$\max_{x\in[1,2]} |R(x;1)|.$$

Lösung 82:

a) Die Ableitungen der Funktion sind

$$f'(x) = \frac{1}{x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad f'''(x) = \frac{2}{x^3}.$$

Das Taylor-Polynom ist

$$f(x) = f(1) + f'(x)(x-1) + \frac{1}{2}f''(x)(x-1)^2 + R_2(x;1),$$

und das Taylor-Polynom der zweiten Ordnung an der Stelle $x = 1$ ist

$$T_2(x) = 0 + 1(x-1) + \frac{1}{2}(-1)(x-1)^2 = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{2}$$

b) Das Restglied ist

$$R(x;1) = f'''(\xi)\frac{(x-1)^3}{3!}, \quad \xi \in [1,2].$$

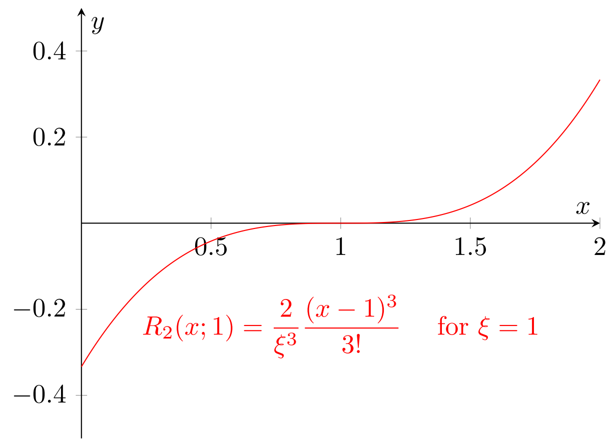
Es ist

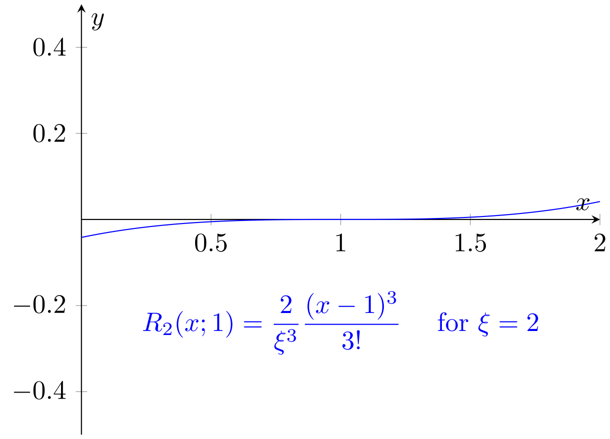
$$R(x;1) = \frac{2}{\xi^3}\frac{(x-1)^3}{3!}, \quad \xi \in [1,2].$$

Eine obere Schranke für die Funktion $R(x;1)$ für ξ und x im Intervall $[1,2]$ wird durch Minimieren des Nenners und Maximieren des Zählers gefunden. Das Minimum des Nenners liegt bei $\xi = 1$ und das Maximum des Zählers ist bei $x = 2$. Dies liegt daran, dass die kubische Funktion monoton steigend ist, da ihre Ableitung immer positiv ist. Wir haben also die Schätzung

$$R(x;1) \leq \frac{2}{1^3}\frac{(2-1)^3}{3!} = \frac{1}{3}.$$

Im Folgenden wird die Funktion $R_2(x;1)$ für die beiden Werte $\xi = 1$ und $\xi = 2$ skizziert:





Aufgabe 83: Taylor-Polynom

a) Geben Sie das Taylorpolynom n-ter Ordnung der folgenden Funktionen um den angegebenen Entwicklungspunkt x_0 an:

i) $f(x) = \sin(x) \cdot \cos(x)$ um $x_0 = 0$, $n = 4$

ii) $g(x) = \cos(x)$ um $x_0 = \pi/2$, $n = 4$

iii) $h(x) = \mathrm{e}^{1-x}(x^2 - 2x)$ um $x_0 = 1$, $n = 2$

b) Geben Sie die Nullstellen der Funktionen sowie der Taylor-Polynome im Intervall $[0, 5]$ an.

c) Skizzieren Sie die Funktionen und deren Taylor-Polynome.

Lösung 83:

a) **i)** Zunächst werden die ersten vier Ableitungen ermittelt:

$$f(x) = \sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin(2x), \qquad f'(x) = \cos(2x), \quad f''(x) = -2\sin(2x)$$
$$f'''(x) = -4\cos(2x), \qquad f^{(4)}(x) = 8\sin(2x)$$

Damit ist das Taylorpolynom

$$\begin{aligned} T_4(x) =& \sum_{k=0}^{4} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x-0)^k \\ =& 0 + \frac{1}{1!}x - 0 - \frac{4}{3!}x^3 + 0 = x - \frac{2}{3}x^3. \end{aligned}$$

ii) Die Ableitungen von $g(x)$ sind:

$$g(x) = \cos x, \qquad g'(x) = -\sin x, \qquad g''(x) = -\cos x$$
$$g'''(x) = \sin x, \qquad g^{(4)}(x) = \cos x$$

Damit hat man dann

$$\begin{aligned} T_4(x) =& \sum_{k=0}^{4} \frac{g^{(k)}(\pi/2)}{k!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^k \\ =& 0 - \frac{1}{1}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 0 + \frac{1}{6}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3 + 0 \\ =& -\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{6}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3. \end{aligned}$$

iii) Es ist

$$\begin{aligned} h(x) =& \mathrm{e}^{1-x}(x^2 - 2x) \\ h'(x) =& \mathrm{e}^{1-x}(-x^2 + 2x + 2x - 2) = \mathrm{e}^{1-x}(-x^2 + 4x - 2) \\ h''(x) =& \mathrm{e}^{1-x}(x^2 - 4x + 2 - 2x + 4) = \mathrm{e}^{1-x}(x^2 - 6x + 6), \end{aligned}$$

und damit
$$T_2(x) = -1 + (x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2.$$

b) **i)** Die Nullstellen im Intervall $[0, 5]$ liegen bei:

$$\begin{aligned} f(x) =& 0 \text{ für } x \in \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi\right\} \\ T_4(x) =& 0 \text{ für } x \in \left\{0, \sqrt{\frac{3}{2}}\right\} \end{aligned}$$

ii)

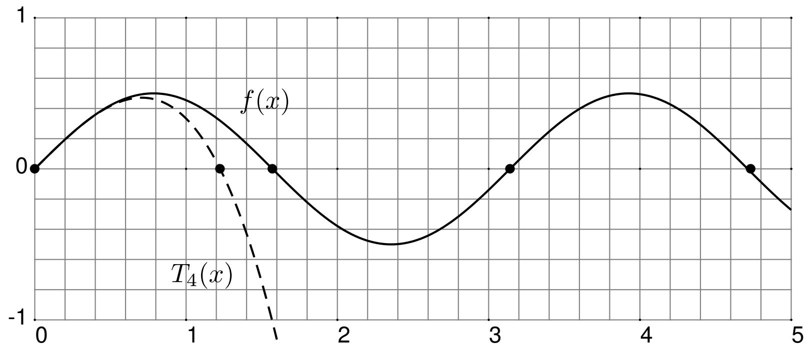
$$\begin{aligned} g(x) =& 0 \text{ für } x \in \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right\} \\ T_4(x) =& 0 \text{ für } x \in \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + \sqrt{6}\right\} \end{aligned}$$

iii)

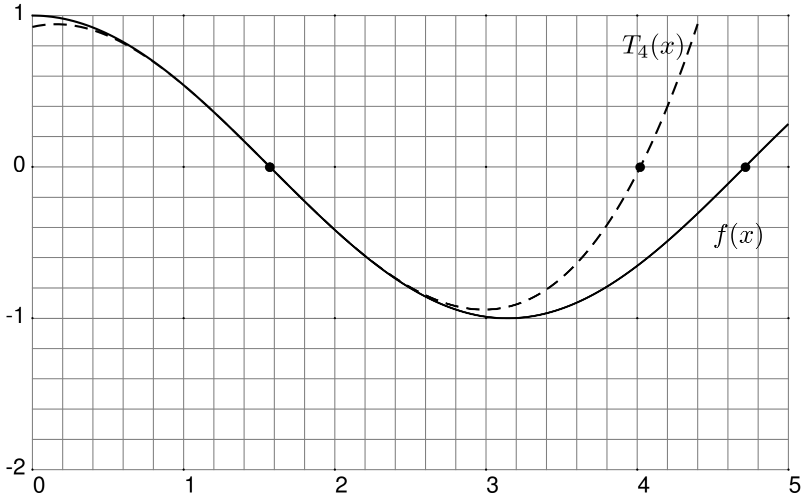
$$\begin{aligned} h(x) =& 0 \text{ für } x \in \{0, 2\} \\ T_2(x) =& 0 \text{ für } x \in \{\sqrt{3}\}. \end{aligned}$$

c)

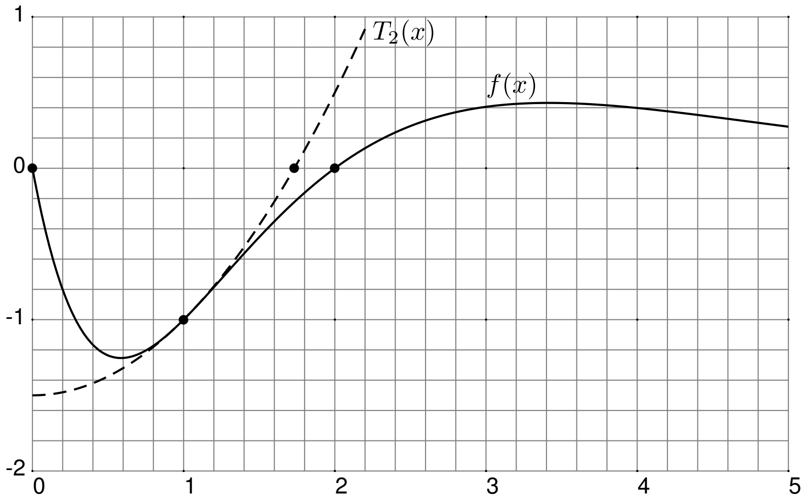
i)



ii)



iii)



Aufgabe 84*: Taylor-Entwicklung

a) Geben Sie zu der Funktion

$$f(x,y) = x\sin(xy)$$

die Taylor-Entwicklung ersten Grades $T_1(\boldsymbol{x})$ um den Punkt $\boldsymbol{x}_0 = (1,0)^\top$ an.

b) Berechnen Sie $f(\boldsymbol{x})$ und $T_1(\boldsymbol{x})$ an der Stelle $\boldsymbol{x} = (0,1)^\top$. Berechnen Sie außerdem den Fehler der Taylor-Approximation $T_1(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x})$.

c) Geben Sie mit Hilfe des Lagrange-Restgliedes eine Abschätzung für den Fehler

$$|f(\boldsymbol{x}) - T_1(\boldsymbol{x})|$$

an.

Hinweis: Für das Restglied erhalten Sie einen Ausdruck der Form

$$(3\theta - 2)\cos(\theta^2 - \theta) + \frac{1}{2}(3\theta^3 - 7\theta^2 + 5\theta - 1)\cos(\theta^2 - \theta)$$

mit $0 \le \theta \le 1$. Diesen Ausdruck können Sie abschätzen, indem Sie die Extrema der beiden Vorfaktoren ($3\theta - 2$ und $\frac{1}{2}(3\theta^3 - 7\theta^2 + 5\theta - 1)$) auf dem Intervall $[0,1]$ und eine obere Schranke der Kosinus- bzw. Sinus-Funktion bestimmen.

Lösung 84:

a) Der Wert der Funktion selbst sowie der der ersten Ableitung im Punkt $\boldsymbol{x}_0 = (1,0)^\top$ sind:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x\sin(xy) & \Rightarrow \quad f(1,0) &= 0 \\ \nabla f(x,y) &= (\sin(xy) + xy\cos(xy),\, x^2\cos(xy))^\top & \Rightarrow \quad \nabla f(1,0) &= (0,\,1)^\top. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich die Taylor-Summe (mit $\boldsymbol{x} = (x,y)^\top$):

$$T_1(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0) + \langle \nabla f(\boldsymbol{x}_0),\, (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)\rangle = 0 + \left\langle (0,\,1)^\top,\, (x-1,\, y-0)^\top \right\rangle = y.$$

b) An der Stelle $\boldsymbol{x} = (0,1)^\top$ hat man dann

$$\begin{aligned} f(0,1) &= 0 \\ T_1(0,1) &= 1 \\ f(0,1) - T_1(0,1) &= -1. \end{aligned}$$

c) Die Lagrange-Darstellung des Fehlers ist

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) - T_1(\boldsymbol{x}) &= \frac{1}{2!}(\langle \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0,\, \nabla\rangle)^2 f(\boldsymbol{x}_0 + \theta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)) \text{ mit } \theta \in [0,1] \\ \Rightarrow \quad |f(\boldsymbol{x}) - T_1(\boldsymbol{x})| &= \frac{1}{2}\left|(\left\langle(-1,1)^\top,\, \nabla\right\rangle)^2 f(1-\theta,\,\theta)\right| \\ &= \frac{1}{2}\left|\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) f(1-\theta,\theta)\right| \end{aligned}$$

Wir berechnen zunächst die zweiten partiellen Ableitungen von f:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= y\cos(xy) + y\cos(xy) - xy^2\sin(xy) = 2y\cos(xy) - xy^2\sin(xy) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= -x^3\sin(xy) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) &= 2x\cos(xy) - x^2 y\sin(xy) \end{aligned}$$

und setzen ein:

$$\begin{aligned} |f(\boldsymbol{x}) - T_1(\boldsymbol{x})| &= \frac{1}{2}\Big|2\theta\cos(\theta(1-\theta)) - (1-\theta)\theta^2\sin(\theta-\theta^2) + \\ &\qquad - 2\big(2(1-\theta)\cos(\theta-\theta^2) - (1-\theta)^2\theta\sin(\theta-\theta^2)\big) + \\ &\qquad - (1-\theta)^3\sin(\theta-\theta^2)\Big| \\ &= \frac{1}{2}\Big|(2\theta - 4(1-\theta))\cos(\theta-\theta^2) + \\ &\qquad + (1-\theta)(-\theta^2 - 2\theta^2 + 2\theta - 1 - \theta^2 + 2\theta)\sin(\theta-\theta^2)\Big| \\ &\le \frac{1}{2}\Big(2\cdot|3\theta-2||\cos(\theta-\theta^2)| + \\ &\qquad + |1-\theta|\cdot|-4\theta^2 + 4\theta - 1|\cdot|\sin(\theta-\theta^2)|\Big) \end{aligned}$$

Da sowohl Kosinus und Sinus als auch $1-\theta$ betraglich stets kleiner als 1 sind, müssen nur noch die Extrema von $|3\theta - 2|$ und $|(1-\theta)\cdot(-4\theta^2 + 4\theta - 1)| = |4\theta^3 - 8\theta^2 + 5\theta - 1|$ auf dem Intervall $[0,1]$ ermittelt werden:
Das Maximum von $|3\theta - 2|$ ist 2.
Das Maximum des zweiten Koeffizienten $\varphi(\theta) = 4\theta^3 - 8\theta^2 + 5\theta - 1$ liegt entweder an den Intervallgrenzen $\theta = 0$ oder $\theta = 1$ oder an einem kritischen Punkt der Funktion, also an einer Nullstelle der Ableitung:

$$\begin{aligned} 0 &\overset{!}{=} \frac{d}{d\theta}(4\theta^3 - 8\theta^2 + 5\theta - 1) = 12\theta^2 - 16\theta + 5 \\ \Rightarrow \quad \theta_{1,2} &= \frac{2}{3} \pm \sqrt{\frac{4}{9} - \frac{5}{12}} = \frac{2}{3} \pm \frac{1}{4} \in \left\{\frac{5}{12},\, \frac{11}{12}\right\}. \end{aligned}$$

Insgesamt ist also

$$\begin{aligned}|\varphi(\theta)| \leq &\max\{|\varphi(0)|, |\varphi(1)|, |\varphi(5/12)|, |\varphi(11/12)|\}\\ =&\max\{1, 0, 7/432, 25/432\} = 1.\end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich so die Fehlerabschätzung:

$$|f(\boldsymbol{x}) - T_1(\boldsymbol{x})| \leq \frac{1}{2}(2 \cdot 2 + 1) = \frac{5}{2}.$$

Diese Abschätzung ist mehr als doppelt so groß wie der in Aufgabenteil **b)** ermittelte tatsächliche Fehler.

Aufgabe 85*: Taylor-Entwicklung

Gegeben seien die beiden Funktionen $\mathbb{R} \xrightarrow{r} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = -\,\mathrm{e}^{y+1-x^2} \qquad \text{und} \qquad \boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos(\pi \cdot t) \\ \ln t - \sin^2(\pi \cdot t) \end{pmatrix}.$$

a) Geben Sie die Taylorentwicklung zweiter Ordnung $T_{2,f}$ der Funktion f um den Punkt $\boldsymbol{x}_0 = (1,\,0)^\top$ an.

b) Geben Sie die Taylorentwicklung zweiter Ordnung $\boldsymbol{T}_{2,r}$ der Funktion $\boldsymbol{r}$ um den Punkt $t_0 = 1$ an. (Entwickeln Sie dazu die Komponenten r_1 und r_2 der Funktion $\boldsymbol{r} = (r_1, r_2)^\top$ separat.)

c) Bilden Sie durch Verkettung beider Funktionen die Funktion

$$g(t) := f \circ \boldsymbol{r}(t).$$

d) Verketten Sie ebenso die beiden Taylor-Polynome

$$\tilde{g}(t) := T_{2,f} \circ \boldsymbol{T}_{2,r}(t).$$

e) Vergleichen Sie g und $\tilde{g}$ und die Taylorpolynome erster Ordung dieser beiden Funktionen.

Lösung 85:

a) Die ersten beiden Ableitungen von f ergeben sich zu

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= -\,\mathrm{e}^{y+1-x^2} & &\Rightarrow & f(1,0) &= -\,1 \\
\boldsymbol{J}_f(x,y) &= -\,\mathrm{e}^{y+1-x^2}(-2x,\,1) & &\Rightarrow & \boldsymbol{J}_f(1,0) &= (2,-1) \\
\boldsymbol{H}_f(x,y) &= -\,\mathrm{e}^{y+1-x^2}\begin{pmatrix} 4x^2-2 & -2x \\ -2x & 1 \end{pmatrix} & &\Rightarrow & \boldsymbol{H}_f(1,0) &= \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

und damit ist das Taylorpolynom zweiter Ordnung um den Entwicklungspunkt $(1,0)^\top$:

$$\begin{aligned}
T_{2,f}(x,y) &= f(1,0) + \boldsymbol{J}_f(1,0)\begin{pmatrix} x-1 \\ y-0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(x-1,\,y-0)\boldsymbol{H}_f(1,0)\begin{pmatrix} x-1 \\ y-0 \end{pmatrix} \\
&= -\,1 + 2(x-1) - y + \frac{1}{2}\left(-2(x-1)^2 + 2\cdot 2(x-1)y - 1\cdot y^2\right) \\
&= -\,1 + 2(x-1) - y - (x-1)^2 + 2(x-1)y - \frac{y^2}{2}.
\end{aligned}$$

b) Für $\boldsymbol{r}$ ergeben sich die Ableitungen zu

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r}(t) &= \begin{pmatrix} \cos(\pi t) \\ \ln t - \sin^2(\pi t) \end{pmatrix} & & & &\Rightarrow & \boldsymbol{r}(1) &= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\boldsymbol{r}'(t) &= \begin{pmatrix} -\pi\sin(\pi t) \\ \frac{1}{t} - 2\pi\sin(\pi t)\cos(\pi t) \end{pmatrix} &=& \begin{pmatrix} -\pi\sin(\pi t) \\ \frac{1}{t} - \pi\sin(2\pi t) \end{pmatrix} & &\Rightarrow & \boldsymbol{r}'(1) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
\boldsymbol{r}''(t) &= \begin{pmatrix} \pi^2\cos(\pi t) \\ -\frac{1}{t^2} - 2\pi^2\cos(2\pi t) \end{pmatrix} & & & &\Rightarrow & \boldsymbol{r}''(t) &= \begin{pmatrix} -\pi^2 \\ -1-2\pi^2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

und das Taylorpolynom zu:

$$\begin{aligned}
T_{2,\boldsymbol{r}} &= \boldsymbol{r}(1) + (t-1)\boldsymbol{r}'(1) + \frac{1}{2}(t-1)^2\boldsymbol{r}''(1) \\
&= \begin{pmatrix} -1 - \frac{1}{2}\pi^2(t-1)^2 \\ (t-1) - \frac{1}{2}(1+2\pi^2)(t-1)^2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

c) Es ist

$$g(t) = -\mathrm{e}^{\ln t - \sin^2(\pi t) + 1 - \cos^2(\pi t)} = -\mathrm{e}^{\ln t} = -t.$$

d) Die Verkettung der beiden Taylor-Polynome hingegen ergibt:

$$\begin{aligned}
\tilde{g}(t) =& -1 + 2\left(-2 - \frac{1}{2}\pi^2(t-1)^2\right) - (t-1)\left(1 - \frac{1}{2}(1+2\pi^2)(t-1)\right) + \\
& - \left(-2 - \frac{1}{2}\pi^2(t-1)^2\right)^2 + \\
& + 2\left(-2 - \frac{1}{2}\pi^2(t-1)^2\right)(t-1)\left(1 - \frac{1}{2}(1+2\pi^2)(t-1)\right) + \\
& - \frac{1}{2}(t-1)^2\left(1 - \frac{1}{2}(1+2\pi^2)(t-1)\right)^2 \\
=& -9 - 5(t-1) + \left(2\pi^2+2\right)(t-1)^2 + \frac{1}{2}(t-1)^3 + \left(\frac{1}{4}\pi^4 - \frac{1}{8}\right)(t-1)^4
\end{aligned}$$

e) Anders als man vermuten könnte, ist die exakt ermittelte Funktion $g(t)$ weit weniger kompliziert als die Näherungsfunktion $\tilde{g}(t)$. Auch die beiden linearen Taylorpolynome um den Punkt $t = 1$ unterscheiden sich deutlich:

$$T_{1,g}(t) = g(t) = -t, \qquad T_{1,\tilde{g}}(t) = -9 - 5(t-1).$$

Anders wäre dies, wenn man die Funktion f statt um $\boldsymbol{x}_0 = (1,0)^\top$ um den Punkt $\boldsymbol{r}(t_0) = (-1,0)^\top$ entwickeln würde. Dann wären zumindest $T_{1,g}$ und $T_{1,\tilde{g}}$

identisch, denn

$$
\begin{aligned}
T_{2,f}(x,y) =& f(-1,0) + \boldsymbol{J}_f(-1,0)\begin{pmatrix} x+1 \\ y-0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(x+1,\, y-0)\boldsymbol{H}_f(-1,0)\begin{pmatrix} x+1 \\ y-0 \end{pmatrix} \\
=& -1 - 2(x+1) - y + \frac{1}{2}\left(-2(x+1)^2 - 2\cdot 2(x+1)y - 1\cdot y^2\right) \\
=& -1 - 2(x+1) - y - (x+1)^2 - 2(x+1)y - \frac{y^2}{2}.
\end{aligned}
$$

und für die Verkettung der beiden Polynome hätten wir dann

$$
\begin{aligned}
\tilde{g}(t) =& -1 - 2\left(-\frac{1}{2}\pi^2(t-1)^2\right) - (t-1)\left(1 - \frac{1}{2}(1+2\pi^2)(t-1)\right) + \\
& - \left(-\frac{1}{2}\pi^2(t-1)^2\right)^2 + \\
& + 2\left(-\frac{1}{2}\pi^2(t-1)^2\right)(t-1)\left(1 - \frac{1}{2}(1+2\pi^2)(t-1)\right) + \\
& - \frac{1}{2}(t-1)^2\left(1 - \frac{1}{2}(1+2\pi^2)(t-1)\right)^2 \\
=& -1 - (t-1) + 2\pi^2(t-1)^2 + \left(2\pi^2 + \frac{1}{2}\right)(t-1)^3 + \\
& - \left(\pi^2 + \frac{7}{4}\pi^4 + \frac{1}{8}\right)(t-1)^4 .
\end{aligned}
$$

Somit ist $T_{1,\tilde{g}} = -1 - (t-1) = -t = T_{1,g}$.

Aufgabe 86: Taylor-Entwicklung

a) Geben Sie zu der Funktion

$$f(x,y) = x\sin(xy)$$

die Taylor-Entwicklung ersten Grades $T_1(\boldsymbol{x})$ um den Punkt $\boldsymbol{x}_0 = (1,0)^\top$ an.

b) Berechnen Sie $f(\boldsymbol{x})$ und $T_1(\boldsymbol{x})$ an der Stelle $\boldsymbol{x} = (0,1)^\top$. Berechnen Sie außerdem den Fehler der Taylor-Approximation $T_1(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x})$.

c) Geben Sie mit Hilfe des Lagrange-Restgliedes eine Abschätzung für den Fehler

$$|f(\boldsymbol{x}) - T_1(\boldsymbol{x})|$$

an.

d) Berechnen Sie die Richtungsableitung der $\partial_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{x}_0)$ in Richtung $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Hinweis: Für das Restglied erhalten Sie einen Ausdruck der Form

$$(3\theta-2)\cos(\theta^2-\theta) + \frac{1}{2}(4\theta^3 - 8\theta^2 + 5\theta - 1)\sin(\theta^2-\theta)$$

mit $0 \le \theta \le 1$. Diesen Ausdruck können Sie abschätzen, indem Sie die Extrema der beiden Vorfaktoren ($3\theta - 2$ und $\frac{1}{2}(4\theta^3 - 8\theta^2 + 5\theta - 1)$) auf dem Intervall $[0,1]$ und eine obere Schranke der Kosinus- bzw. Sinus-Funktion bestimmen.

Lösung 86:

a) Der Wert der Funktion selbst sowie der der ersten Ableitung im Punkt $\boldsymbol{x}_0 = (1,0)^\top$ sind:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x\sin(xy) & \Rightarrow && f(1,0) &= 0 \\ \nabla f(x,y) &= (\sin(xy) + xy\cos(xy),\, x^2\cos(xy))^\top & \Rightarrow && \nabla f(1,0) &= (0,\,1)^\top. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich die Taylor-Summe (mit $\boldsymbol{x} = (x,y)^\top$):

$$T_1(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0) + \langle \nabla f(\boldsymbol{x}_0),\, (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)\rangle = 0 + \left\langle (0,\,1)^\top,\, (x-1,\, y-0)^\top \right\rangle = y.$$

b) An der Stelle $\boldsymbol{x} = (0,1)^\top$ hat man dann

$$\begin{aligned} f(0,1) &= 0 \\ T_1(0,1) &= 1 \\ f(0,1) - T_1(0,1) &= -1. \end{aligned}$$

c) Die Lagrange-Darstellung des Fehlers ist

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) - T_1(\boldsymbol{x}) &= \frac{1}{2!}(\langle \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0,\, \nabla\rangle)^2 f(\boldsymbol{x}_0 + \theta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)) \text{ mit } \theta \in [0,1] \\ \Rightarrow \qquad |f(\boldsymbol{x}) - T_1(\boldsymbol{x})| &= \frac{1}{2}\left|(\langle (-1,1)^\top,\, \nabla\rangle)^2 f(1-\theta,\, \theta)\right| \\ &= \frac{1}{2}\left|\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) f(1-\theta,\theta)\right| \end{aligned}$$

Wir berechnen zunächst die zweiten partiellen Ableitungen von f:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= y\cos(xy) + y\cos(xy) - xy^2\sin(xy) = 2y\cos(xy) - xy^2\sin(xy) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= -x^3\sin(xy) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) &= 2x\cos(xy) - x^2 y\sin(xy) \end{aligned}$$

und setzen ein:

$$\begin{aligned} |f(\boldsymbol{x}) - T_1(\boldsymbol{x})| &= \frac{1}{2}\Big|2\theta\cos(\theta-\theta^2)) - (1-\theta)\theta^2\sin(\theta-\theta^2) + \\ &\quad - 2\big(2(1-\theta)\cos(\theta-\theta^2) - (1-\theta)^2\theta\sin(\theta-\theta^2)\big) + \\ &\quad - (1-\theta)^3\sin(\theta-\theta^2)\Big| \\ &= \frac{1}{2}\Big|(2\theta - 4(1-\theta))\cos(\theta-\theta^2) + \\ &\quad + (1-\theta)(-\theta^2 - 2\theta^2 + 2\theta - 1 - \theta^2 + 2\theta)\sin(\theta-\theta^2)\Big| \\ &\le \frac{1}{2}\Big(2\cdot|3\theta-2||\cos(\theta-\theta^2)| + \\ &\quad + |1-\theta|\cdot|-4\theta^2 + 4\theta - 1|\cdot|\sin(\theta-\theta^2)|\Big) \end{aligned}$$

Da sowohl Kosinus und Sinus als auch $1-\theta$ betraglich stets kleiner als 1 sind, müssen nur noch die Extrema von $|3\theta - 2|$ und $|(1-\theta)\cdot(-4\theta^2 + 4\theta - 1)| = |4\theta^3 - 8\theta^2 + 5\theta - 1|$ auf dem Intervall $[0,1]$ ermittelt werden:
Das Maximum von $|3\theta - 2|$ ist 2.
Das Maximum des zweiten Koeffizienten $\varphi(\theta) = 4\theta^3 - 8\theta^2 + 5\theta - 1$ liegt entweder an den Intervallgrenzen $\theta = 0$ oder $\theta = 1$ oder an einem kritischen Punkt der Funktion, also an einer Nullstelle der Ableitung:

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{!}{=} \frac{d}{d\theta}(4\theta^3 - 8\theta^2 + 5\theta - 1) = 12\theta^2 - 16\theta + 5 \\ \Rightarrow \qquad \theta_{1,2} &= \frac{2}{3} \pm \sqrt{\frac{4}{9} - \frac{5}{12}} = \frac{2}{3} \pm \frac{1}{6} \in \left\{\frac{5}{6},\, \frac{1}{2}\right\}. \end{aligned}$$

Insgesamt ist also

$$\begin{aligned}|\varphi(\theta)| \leq & \max\{|\varphi(0)|,\, |\varphi(1)|,\, |\varphi(5/6)|,\, |\varphi(1/2)|\} \\ = & \max\{1,\, 0,\, 2/27,\, 0\} = 1.\end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich so die Fehlerabschätzung:

$$|f(\boldsymbol{x}) - T_1(\boldsymbol{x})| \leq \frac{1}{2}(2 \cdot 2 + 1) = \frac{5}{2}.$$

Diese Abschätzung ist mehr als doppelt so groß wie der in Aufgabenteil **b)** ermittelte tatsächliche Fehler.

d) Es ist

$$\begin{aligned}\partial_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{x}_0) = & \frac{\langle \nabla f(\boldsymbol{x}_0), \boldsymbol{v} \rangle}{\|\boldsymbol{v}\|} = \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}{\sqrt{2}} \\ = & \frac{1}{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

Aufgabe 87: Taylor 2D

Man bestimme das Taylor-Polynom vom zweiten Grad der Funktion im Punkt $(0, 1)$

$$f(x, y) = \cosh(x)y^2.$$

Aufgabe 88: Trigonometrische Gleichungen

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden Ausdrücke. Beachten Sie dabei die Periodizität der Funktionen. Skizzieren Sie die Funktionen, um Ihre Ergebnisse zu bestätigen.

a) $\sin^2(x) = \dfrac{1}{2}\,.$

b) $\sin^2(x) - \cos^2(x) + \sin(x) = 0\,.$

c) $\cot^2(x) + \cot(x) = 0 \quad \text{with} \quad \cot(x) = \dfrac{1}{\tan(x)} = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}\,.$

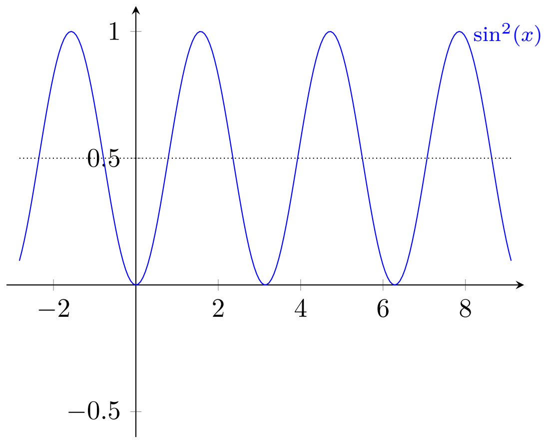
d) $\sin(x)\cos(x) = \dfrac{1}{2}\,.$

e) $\dfrac{\tan(x)+1}{\tan(x)-1} = 2 + \sqrt{3}\,.$

Lösung 88:

a) Die Lösungsmenge von $\sin^2(x) = \frac{1}{2}$ ist

$$x \in \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k\,, \quad k \in \mathbb{Z} \right\}\,.$$



b) Um die Lösungsmenge von $f(x) = 0$ mit $f(x) := \sin^2(x) - \cos^2(x) + \sin(x)$ zu bestimmen, nutzen die Pythagoreische Identität für trigonometrische Funktionen,

$$\boxed{\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1}\,.$$

Ausnutzen von $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$ führt zu

$$\begin{aligned} f(x) &= 0\,, \\ \sin^2(x) - \cos^2(x) + \sin(x) &= 0\,, \\ \sin^2(x) - (1 - \sin^2(x)) + \sin(x) &= 0\,, \\ 2 \cdot \sin^2(x) + \sin(x) - 1 &= 0\,. \end{aligned}$$

Wir substituieren $y := \sin(x)$ und erhalten die quadratische Gleichung

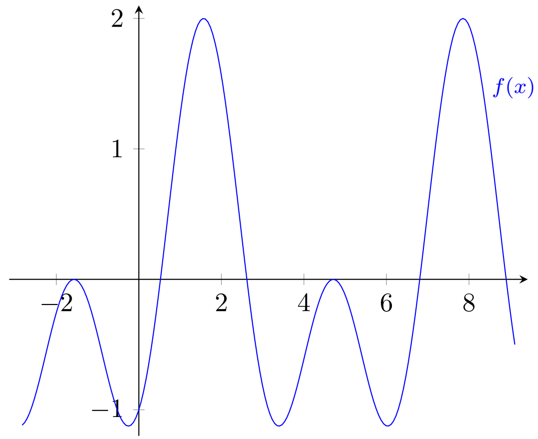
$$2y^2 + y - 1 = 0\,,$$

mit den Lösungen $y_1 = -1$ und $y_2 = \frac{1}{2}$. Das führt zu den folgenden Gleichungen

$$\sin(x) = -1 \quad \text{and} \quad \sin(x) = \frac{1}{2}\,.$$

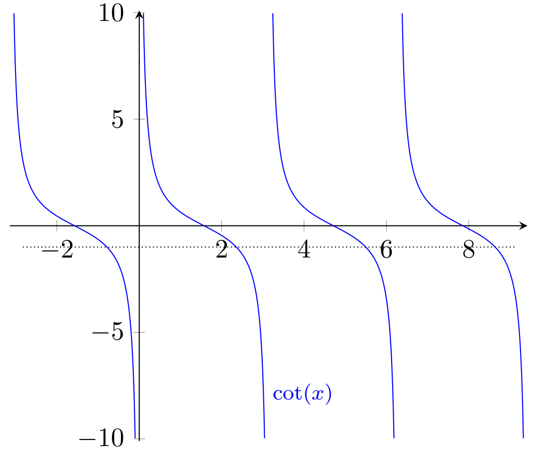
Die Lösungsmenge von $\sin^2(x) - \cos^2(x) + \sin(x) = 0$ ist

$$x \in \left\{ \frac{\pi}{6} + 2\pi k\,, \quad \frac{5\pi}{6} + 2\pi k\,, \quad \frac{9\pi}{6} + 2\pi k\,, \quad k \in \mathbb{Z} \right\}\,.$$



c) Der Kotangens ist definiert als

$$\boxed{\cot(x) = \frac{1}{\tan(x)} = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}}\,.$$



Die Gleichung $\cot^2(x) + \cot(x) = 0$ kann geschrieben werden als

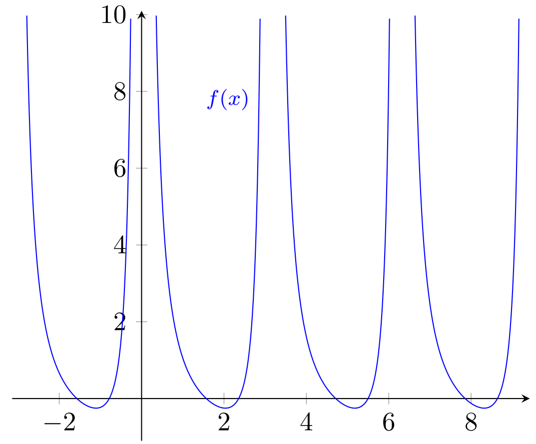
$$\cot(x) \cdot (\cot(x) + 1) = 0\,,$$

die Gleichung ist erfüllt, wenn

$$\cot(x) = 0 \quad \text{und} \quad \cot(x) = -1\,.$$

Aus diesen beiden Bedingungen ergibt sich die Lösungsmenge von $f(x) := \cot^2(x) + \cot(x) = 0$ als

$$x \in \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi k\,, \quad \frac{3\pi}{4} + \pi k\,, \quad k \in \mathbb{Z} \right\}\,.$$



d) Betrachten Sie das Additionstheorem für trigonometrische Funktionen

$$\boxed{\sin(\varphi+\psi) = \sin(\varphi)\cos(\psi) + \cos(\varphi)\sin(\psi)}\,.$$

Um die Lösungsmenge von $\sin(x)\cos(x) = \frac{1}{2}$, zu bestimmen, nutzen wir

$$\sin(x)\cos(x) = \frac{1}{2}\cdot\sin(2x)$$

mit dem Additionstheorem. Die ursprüngliche Gleichung kann geschrieben werden als

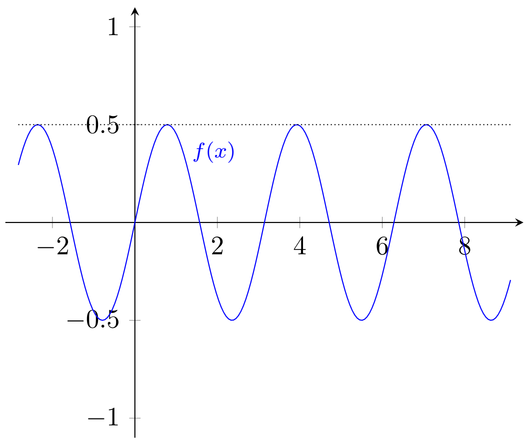
$$\sin(2x) = 1.$$

Die Substitution $y := 2x$ führt zu $\sin(y) = 1$ mit der Lösung

$$y \in \left\{\frac{\pi}{2} + 2\pi k\,, \quad k\in\mathbb{Z}\right\}\,.$$

Die Lösungsmenge von $f(x) = \frac{1}{2}$, $f(x) := \sin(x)\cos(x)$ ist

$$x \in \left\{\frac{\pi}{4} + \pi k\,, \quad k\in\mathbb{Z}\right\}\,.$$



e) Wir schreiben die Gleichung um zu

$$\begin{aligned}
\frac{\tan(x)+1}{\tan(x)-1} &= 2+\sqrt{3}\,,\\
\frac{\tan(x)+1+(1-1)}{\tan(x)-1} &= 2+\sqrt{3}\,,\\
\frac{(\tan(x)-1)+2}{(\tan(x)-1)} &= 2+\sqrt{3}\,,\\
1+\frac{2}{\tan(x)-1} &= 2+\sqrt{3}\,.
\end{aligned}$$

Auflösen der Gleichung nach $\tan(x)$ führt zu (für $\tan(x)\neq 1$)

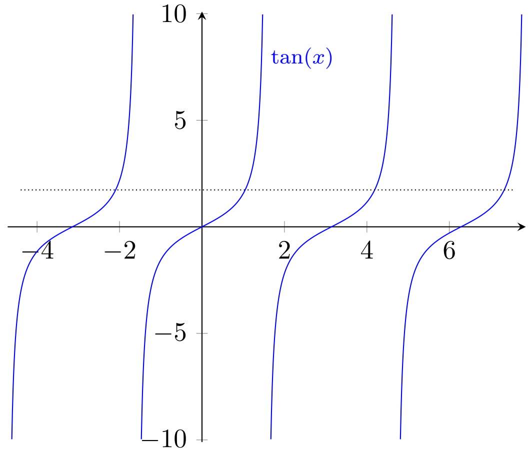
$$\tan(x) = \frac{2}{1+\sqrt{3}} + 1 = \frac{3+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = \sqrt{3}\,.$$

Die Lösungsmenge von

$$\frac{\tan(x)+1}{\tan(x)-1} = 2+\sqrt{3}$$

ist äquivalent zu der Lösungsmenge von $\tan(x) = \sqrt{3}$ und ist daher gegeben durch

$$x \in \left\{\frac{\pi}{3} + \pi k\,, \quad k\in\mathbb{Z}\right\}\,.$$



Aufgabe 89: Uneigentliche Integrale

Welche der folgenden uneigentlichen Integrale besitzen einen endlichen Wert? Bestimmen Sie den Wert dieser Integrale.

a) $$\int_0^1 \frac{1}{x^{1/4}}\,\mathrm{d}x$$

b) $$\int_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

c) $$\int_0^{1/\pi} \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

d) $$\int_0^{\infty} 2x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

Lösung 89:

a) Dieses Integral existiert:

$$\int_0^1 x^{-\frac{1}{4}}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to 0}\int_a^1 x^{-\frac{1}{4}}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to 0}\left(\frac{4}{3}\,x^{\frac{3}{4}}\Big|_a^1\right) = \frac{4}{3}\lim_{a\to 0}(1-a^{3/4}) = \frac{4}{3}.$$

b) Dieses Integral existiert nicht:

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to 0}\int_a^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to 0}\left(\ln|x|\Big|_a^1\right) = \lim_{a\to 0}(\ln 1 - \ln a) = +\infty.$$

c) Hier ist

$$\int_0^{1/\pi} \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to 0}\int_a^{1/\pi} \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to 0}\cos\frac{1}{x}\Big|_a^{1/\pi} = \lim_{a\to 0}\left(\cos(\pi)-\cos\frac{1}{a}\right).$$

Der Grenzwert existiert nicht, da $\cos(1/a)$ für $a\to 0$ immer wieder alle Werte zwischen -1 und $+1$ annimmt. Also existiert auch kein Wert für das Integral.

d) Dieses Integral existiert:

$$\int_0^{\infty} 2x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to\infty}\int_0^{a} 2x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to\infty}\left(-\mathrm{e}^{-x^2}\Big|_0^a\right)$$
$$= \lim_{a\to\infty}\left(-\mathrm{e}^{-a^2}+\mathrm{e}^0\right) = 0+1 = 1.$$

Aufgabe 90: Umkehrfunktion

a) Geben Sie zu den folgenden Funktionen an, in welchem Bereich sie umkehrbar sind, geben Sie im Punkt $(0, f_j(0))$ den Wert der Ableitung von $f_j^{-1}(x)$ an.

$$f_1(y) = y^3 - 3y$$
$$f_2(y) = \frac{y^2 + 3y}{1 - y}$$

b) Gegeben seien die Funktionen

$$g_3(x) = \tan(x), \qquad g_4(x) = \mathrm{e}^{x^2+2x-8}, \qquad g_5(x) = \cosh(x), \qquad g_6(x) = \frac{1}{x^2+2}.$$

Bestimmen Sie zunächst die Ableitungen $g_j'(x)\,(j = 3, 4, 5, 6)$ dieser Funktionen. Ermitteln Sie daraus mit Hilfe von Satz 3.38 (Ableitung der Umkehrfunktion) die Ableitung der Umkehrfunktionen $f_j(y) = g_j^{-1}(x)\,(j = 3, 4, 5, 6)$. (Es gilt $f_j(g_j(x)) = x$.)
Geben Sie auch für jede Funktion an, in welchem Bereich die Umkehrfunktion erklärt ist.

Lösung 90:

a) **i)** Die Ableitung der ersten Funktion ist $f_1'(y) = 3y^2 - 3$, diese wird Null bei $y = \pm 1$. Im Intervall $[-1, 1]$ ist f_1 also streng monoton und damit umkehrbar.
Die Ableitung der Umkehrfunktion bei $(0, f_1(0)) = (0, 0)$ ist

$$(f_1^{-1})'(0) = \frac{1}{f_1'(0)} = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}.$$

ii) Wie schon in Aufgabe 1 festgestellt, ist die Funktion f_2 im Invervall $[-1, 1[$ streng monoton steigend und damit umkehrbar. Die Ableitung wurde dort ebenfalls berechnet und es ist

$$f_2'(0) = 3 \text{ und } f_2(0) = 0.$$

Also ist die Ableitung der Umkehrfunktion im Ursprung

$$(f_2^{-1})'(0) = \frac{1}{f_2'(0)} = \frac{1}{3}.$$

b) **iii)** Die Funktion $g_3(x) = \tan(x)$ ist auf dem Intervall $]-\pi/2, \pi/2[$ umkehrbar. Ihre Umkehrfunktion ist

$$f_4 = \arctan : \mathbb{R} \to]-\pi/2, \pi/2[.$$

Zunächst folgt mit der Quotientenregel

$$g_3'(x) = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

Die Ableitung von $f_4(y) = \arctan(y)$ ergibt sich daraus mit Hilfe des angegebenen Satzes:

$$\begin{aligned}
\arctan'(y) &= \left.\frac{1}{\tan'(x)}\right|_{x=\arctan(y)} \\
&= \left.\frac{1}{\frac{1}{\cos^2(x)}}\right|_{x=\arctan(y)} = \left.\frac{1}{\frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} + \frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)}}\right|_{x=\arctan(y)} \\
&= \left.\frac{1}{\tan^2(x) + 1}\right|_{x=\arctan(y)} = \frac{1}{\tan^2(\arctan(y)) + 1} \\
&= \frac{1}{1 + y^2}.
\end{aligned}$$

iv) Die Ableitung der Funktion $g_4(x)$ ist

$$g_4'(x) = (2x + 2)\mathrm{e}^{x^2+2x-8}.$$

Sie ist größer Null für $x > -1$, also ist die Funktion

$$g_4 : [-1, \infty[\to [\mathrm{e}^{-9}, \infty[$$

invertierbar.
Dort ist mit Satz 3.38

$$f_4'(y) = \frac{1}{g_4'(f_4(y))} = \left.\frac{\mathrm{e}^{8-x^2-2x}}{2x + 2}\right|_{x=f_4(y)} = \left.\frac{1}{g_4(x)(2x + 2)}\right|_{x=f_4(y)}$$

und außerdem ist $f_4(y) = \sqrt{\ln y + 9} - 1$ für $y \geq \mathrm{e}^{-9}$. Insgesamt hat man damit

$$f_4'(y) = \frac{1}{2y\sqrt{\ln y + 9}}.$$

v) Der cosh ist auf der rechten reellen Halbgraden $[0, \infty[$ umkehrbar und hat die Ableitung

$$g_5'(x) = \sinh(x).$$

Damit hat man für

$$f_5 = \mathrm{Ar}\cosh : [1, \infty[\to [0, \infty[$$

die Ableitung

$$\begin{aligned}\operatorname{Ar}\cosh'(y) =& \frac{1}{\cosh'(\operatorname{Ar}\cosh y)} = \frac{1}{\sinh(\operatorname{Ar}\cosh y)}\\ =& \frac{1}{\sqrt{\cosh^2(\operatorname{Ar}\cosh y) - 1}} = \frac{1}{\sqrt{y^2-1}}.\end{aligned}$$

Man beachte, dass wegen $x = \operatorname{Ar}\cosh y > 0$ gilt: $\sinh x = +\sqrt{\cosh^2 x - 1}$.

vi) Die Funktion $g_6(x) = \frac{1}{2+x^2}$ hat die Ableitung

$$g_6'(x) = \frac{-2x}{(2+x^2)^2}.$$

Für $x > 0$ ist $g_6'(x) < 0$. Also ist g_6 dort monoton fallend und invertierbar mit

$$g_6 : [0,\infty[\to \left]0, \frac{1}{2}\right]$$

bzw.

$$f_6 : \left]0, \frac{1}{2}\right] \to [0,\infty[, \quad f_6(y) = \sqrt{\frac{1}{y} - 2}.$$

Die Ableitung der Umkehrfunktion ergibt sich zu

$$\begin{aligned}f_6'(y) =& \frac{1}{g_6'(f_6(y))} = -\left.\frac{(2+x^2)^2}{2x}\right|_{x=f_6(y)}\\ =& -\frac{(2+1/y-2)^2}{2\sqrt{1/y-2}} = -\frac{1}{2\sqrt{y^3-2y^4}}.\end{aligned}$$

Aufgabe 91: Umkehrfunktion

a) Differenzieren Sie die folgenden Funktionen:

i) $f_1(x) = 3x^4(\ln x)^2$,

ii) $f_2(x) = x^{x+\ln x}$, $x > 0$,

iii) $f_3(x) = \arcsin_{\mathrm{H}} x + \arcsin_{\mathrm{H}} \left(2x\sqrt{1-x^2}\right) - 3\arcsin_{\mathrm{H}} x$, $|x| \le \frac{\sqrt{2}}{2}$.

b) Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = e^x + 2x.$$

i) Zeigen Sie, dass $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ umkehrbar ist.

ii) Bestimmen Sie die Ableitungen $g'(1)$ und $g''(1)$ der Umkehrfunktion

$$g = f^{-1}.$$

Lösung 91:

Zu a) Es gilt:

i) $$f_1'(x) = 3 \cdot 4x^3(\ln x)^2 + 3x^4 \cdot 2\ln x \cdot \frac{1}{x} = 6x^3 \ln x(2\ln x + 1)\,,$$

ii) $$f_2(x) = x^{x+\ln x} = \exp\left((x + \ln x) \cdot \ln x\right)\,,$$

$$\begin{aligned} f_2'(x) &= \exp\left((x+\ln x)\cdot \ln x\right) \cdot \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)\ln x + (x + \ln x)\cdot \frac{1}{x}\right] \\ &= \left(1 + \ln x + \frac{2}{x}\ln x\right) \cdot x^{x+\ln x}\,, \end{aligned}$$

iii) $$\begin{aligned} f_3'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{2\sqrt{1-x^2} + 2x \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1-4x^2(1-x^2)}} - \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= -\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{2\sqrt{1-x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-2x^2} \\ &= -\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{2-4x^2}{(1-2x^2)\sqrt{1-x^2}} = 0\,, \end{aligned}$$

d.h. f_3 ist konstant.

Zu b)

i) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist streng monoton steigend, denn $x \mapsto 2x$ und $x \mapsto e^x$ sind beide streng monoton steigend.
Außerdem ist $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ und $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
Also werden von der stetigen Funktion $f(x)$ alle reellen Werte angenommen. Wegen der Monotonie wird jeder Wert nur genau ein Mal angenommen und die Funktion $f(x)$ ist umkehrbar.

ii) Es ist $f(0) = e^0 + 2 \cdot 0 = 1$, also hat man $x_0 = 0$ und $y_0 = f(x_0) = 1$. Mit den Formeln für die Ableitung der Umkehrfunktion aus der Vorlesung und den Ableitungen $f'(x) = e^x + 2$ sowie $f''(x) = e^x$ folgt

$$g'(1) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{3} \text{ und } g''(1) = -\frac{f''(0)}{(f'(0))^3} = -\frac{1}{27}\,.$$

Aufgabe 92: Transformationsformel für Volumenintegrale

Berechnen Sie
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(x^2+y^2+z^2+1)^2}.$$
Hinweis: Integrieren Sie über eine Kugel K mit Radius R und lassen Sie dann R gegen unendlich wachsen.

Lösung 92:

Die Integration über eine Kugel legt die Einführung von Kugelkoordinaten nahe:
$$x = r\sin\vartheta\cos\varphi\,,\quad y = r\sin\vartheta\sin\varphi\,,\quad z = r\cos\vartheta$$
mit $0 \le r \le R$, $0 \le \varphi \le 2\pi$ und $0 \le \vartheta \le \pi$. Es gilt (vgl. Vorlesung oder einfaches Nachrechnen):
$$\left|\det\left(\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\vartheta,\varphi)}\right)\right| = r^2\sin\vartheta\,.$$
Damit folgt
$$\begin{aligned}
&\int_0^R\left(\int_0^\pi\left(\int_0^{2\pi}\frac{1}{(r^2+1)^2}r^2\sin\vartheta\mathrm{d}\varphi\right)\mathrm{d}\vartheta\right)\mathrm{d}r\\
&= \int_0^R\frac{2\pi r^2}{(r^2+1)^2}\underbrace{\int_0^\pi\sin\vartheta\mathrm{d}\vartheta}_{=2}\,\mathrm{d}r\\
&= 4\pi\int_0^R\frac{r^2\mathrm{d}r}{(r^2+1)^2}\\
&= 4\pi\left[-\frac{r}{2(r^2+1)}+\frac{1}{2}\arctan r\right]_{r=0}^{r=R}\\
&= 4\pi\Big[\frac{1}{2}\underbrace{\arctan R}_{\substack{\to\frac{\pi}{2}\\ \text{für} R\to\infty}} - \underbrace{\frac{R}{2(R^2+1)}}_{\substack{\to 0\\ \text{für} R\to\infty}}\Big]\xrightarrow[R\to\infty]{}\pi^2\,.
\end{aligned}$$

Aufgabe 93: Wegableitungen

Gegeben sind die Funktionen

$$f(x,y) = \mathrm{e}^x \cdot \sin y \text{ und } \boldsymbol{g}(t) = (t^3,\, 1+t^2)^\top$$

aus denen sich die Funktion $h(t) = f(\boldsymbol{g}(t))$ ergibt.

a) Berechnen Sie $h'(t)$ durch explizites Einsetzen und anschließendes (eindimensionales) Ableiten nach t.

b) Berechnen Sie $h'(t)$ mit Hilfe der Kettenregel.

Lösung 93:

a)

$$\begin{aligned} h'(t) =& \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(f(t^3, 1+t^2)\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{e}^{t^3} \cdot \sin(1+t^2)\right) \\ =& 3t^2\mathrm{e}^{t^3} \cdot \sin(1+t^2) + \mathrm{e}^{t^3} \cdot 2t\cos(1+t^2) \\ =& \left(3t\sin(1+t^2) + 2\cos(1+t^2)\right) t\mathrm{e}^{t^3} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} h'(t) =& \left(\nabla f(\boldsymbol{g}(t))\right)^\top \boldsymbol{g}'(t) = \left(\mathrm{e}^{g_1(t)}\sin(g_2(t)),\, \mathrm{e}^{g_1(t)}\cos(g_2(t))\right)\begin{pmatrix} 3t^2 \\ 2t \end{pmatrix} \\ =& \mathrm{e}^{t^3}\sin(1+t^2)\cdot 3t^2 + \mathrm{e}^{t^3}\cos(1+t^2)\cdot 2t \\ =& (3t\sin(1+t^2) + 2\cos(1+t^2))t\mathrm{e}^{t^3} \end{aligned}$$

Aufgabe 94*: Zwischenwertsatz

Ein Auto fährt eine Strecke von 400km in genau fünf Stunden (was einer Durchschnittsgeschwindigkeit $\bar{v} = 80$km/h entspricht). Gibt es einen zusammenhängenden Zeitabschnitt von exakt einer Stunde, in welchem das Auto eine Strecke von genau 80km gefahren ist?
Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $f(t) := x(t+1) - x(t), \quad t \in [0,\, 4]$, wobei das Auto nach der Zeit von t Stunden die Strecke von $x(t)$ Kilometern zurückgelegt hat. Wenden Sie den Zwischenwertsatz an.

Lösung 94:

Die Funktion $f(t) = x(t+1) - x(t)$ gibt die Strecke an, die das Auto im Zeitintervall $[t,\, t+1]$ zurücklegt. Den gesuchten Zeitabschnitt, in dem das Auto 80km fährt, gibt es also, wenn es ein $t_0 \in [0, 4]$ gibt mit $f(t_0) = 80$.
Mit $x(\cdot)$ ist auch $f(\cdot)$ als Summe stetiger Funktionen stetig.
Wenn gelten würde $f(t) < 80$ für alle $t \in [0, 4]$, so wäre die insgesamt zurückgelegte Strecke des Autos:

$$400 = x(5) = f(0) + f(1) + f(2) + f(3) + f(4) < 5 \cdot 80 = 400,$$

was nicht möglich ist. Ebenso wäre für $f(t) > 80$ für alle $t \in [0, 4]$:

$$400 = x(5) = f(0) + f(1) + f(2) + f(3) + f(4) > 5 \cdot 80 = 400,$$

was auch nicht möglich ist. Also liegt das Maximum der Funktion f mindestens bei 80 und das Minimum höchstens bei 80:

$$\min_{t \in [0,4]} f(t) \leq 80 \leq \max_{t \in [0,4]} f(t).$$

Nun kann der Zwischenwertsatz angewendet werden: Es gibt ein $t_0 \in [0, 4]$ mit

$$f(t_0) = 80.$$

Damit ist das geforderte einstündige Zeitintervall gegeben durch $[t_0, t_0 + 1]$.

Aufgabe 95:

a) Zeigen Sie anhand der Definition der Konvergenz, dass gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+n-12}{n^2-8} = 2\,.$$

b) Zeigen Sie: Konvergiert $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a, so konvergiert auch $\{|a_n|\}_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $|a|$.

c) Gilt die Umkehrung von b)? Begründen Sie Ihre Aussage mit einem Beweis oder einem Gegenbeispiel.

Lösung 95:

Lösung

Zu a) Die Aussage „a_n konvergiert gegen a“ bedeutet: Für jedes $k \in \mathbb{N} > 0$ existiert ein $N = N(k) \in \mathbb{R}$, so dass für alle $n > N$ gilt, dass $|a_n - a| < 10^{-k}$. Für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$a_n := \frac{2n^2+n-12}{n^2-8} = \frac{2(n^2-8)+(n+4)}{n^2-8} = 2 + \frac{n+4}{n^2-8}\,.$$

Damit folgt

$$|a_n - 2| = \left|\frac{n+4}{n^2-8}\right| \overset{\text{für } n\geq 3}{=} \frac{n+4}{n^2-8} = \frac{n+4}{n^2-16+8}$$

$$\overset{\text{für } n\geq 5}{<} \frac{n+4}{n^2-16} = \frac{n+4}{(n+4)(n-4)} = \frac{1}{n-4}\,.$$

Sei nun $k \in \mathbb{N}$ vorgegeben. Es gilt

$$\frac{1}{n-4} = 10^{-k} \qquad \Longleftrightarrow \qquad n = 10^k + 4\,.$$

Ist $N(k) := 4 + 10^k$, dann gilt insbesondere für alle $n > N(k)$:

$$|a_n - 2| < 10^{-k}\,.$$

Damit ist ist Behauptung bewiesen.

Zu b) Die Aussage „a_n konvergiert gegen a“ bedeutet: Für jedes $k \in \mathbb{N}$ gibt es ein $N(k) \in \mathbb{R}$, so dass für alle $n > N$ gilt, dass $|a_n - a| < 10^{-k}$. Wegen

$$\big||a_n| - |a|\big| \leq |a_n - a|\,,$$

gilt für jedes $k \in \mathbb{N}$, dass das dazugehörige $N(k)$ und jedes $n > N$ auch

$$\big||a_n| - |a|\big| < 10^{-k}$$

erfüllt, d.h. $|a_n|$ konvergiert gegen $|a|$.

Zu c) Die Umkehrung gilt nicht, zum Beispiel gilt für $a_n = (-1)^n$ sicher $|a_n| = 1 \to 1$, aber $(-1)^n$ ist nicht konvergent.

Aufgabe 96: Lokale Extrema in 2 Dim.

Gegeben sei die Funktion $f \in \mathrm{Abb}\,(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ mit

$$f(x,y) = (x+y)^2 - 4\,(x+y-2) + y^3 - 3y.$$

Bestimmen Sie alle stationären (kritischen) Punkte dieser Funktion und geben Sie an, ob es sich dabei um lokale Minima, Maxima oder Sattelpunkte handelt, oder ob der Charakter des stationären Punktes nicht durch die Hesse–Matrix entschieden werden kann.

Lösung 96:

Die stationären Punkte erhält man aus

$$\mathbf{grad}\, f(x,y) = \begin{pmatrix} 2\,(x+y) - 4 \\ 2\,(x+y) - 4 + 3\,y^2 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

zu $P_1 = (3,-1)$ und $P_2 = (1,1)$. Die Hesse–Matrix der Funktion f lautet:

$$\boldsymbol{H}_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2+6\,y \end{pmatrix}.$$

Für den Punkt P_1 ergibt sich damit

$$\boldsymbol{H}_f(3,-1) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = \det(\boldsymbol{H}_f) = -12 < 0\,,$$

Damit haben die Eigenwerte verschiedene Vorzeichen und es handelt sich um einen Sattelpunkt. Entsprechend erhält man für den Punkt P_2, dass

$$\boldsymbol{H}_f(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = \det(\boldsymbol{H}_f) = 12 > 0,\ \mathrm{Sp}(\boldsymbol{H}_f) = 10 > 0\,.$$

Damit sind beide Eigenwerte positiv und es handelt sich um ein Minimum.

Aufgabe 97: Newton-Verfahren

Zur Berechnung eines kritischen Punktes der Funktion

$$f(x,y) = \int_0^x \left(\frac{\sin(\pi t)}{\pi t} - \frac{1}{3} \right) \, \mathrm{d}t + \frac{1}{\pi^2} \sin\left(\pi \frac{x}{y}\right)$$

soll das Newton-Verfahren angewandt werden. Bestimmen Sie mit Hilfe **eines Schrittes** des Newton-Verfahrens eine Näherung für einen kritischen Punkt von f in der Nähe von $(1,2)$.

Hinweis: Es gibt keine geschlossene Darstellung des Integrals.

Lösung 97:

Mit dem Newton-Verfahren einen kritischen Punkt anzunähern bedeutet, die Nullstellen des Gradienten anzunähern. Die Iterationsvorschrift lautet dann

$$\boldsymbol{x}^{k+1} = \boldsymbol{x}^k - \boldsymbol{J}_{\nabla f}^{-1}(\boldsymbol{x}^k) \cdot \nabla f(\boldsymbol{x}^k)$$

Wir wählen den Startvektor $\boldsymbol{x}^0 = (1,2)^T$. Der Gradient ergibt sich aus den ersten partiellen Ableitungen:

$$f_x = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} - \frac{1}{3} + \frac{1}{\pi y} \cos\left(\pi \frac{x}{y}\right) ,$$

$$f_y = \frac{-x}{\pi y^2} \cos\left(\pi \frac{x}{y}\right) .$$

Es gilt dann:

$$\nabla f(1,2) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Die Jacobi-Matrix des Gradienten, ergibt sich dann aus den zweiten partiellen Ableitungen:

$$f_{xx} = \frac{\cos(\pi x)}{x} - \frac{\sin(\pi x)}{\pi x^2} - \frac{1}{y^2} \sin\left(\pi \frac{x}{y}\right) ,$$

$$f_{xy} = \frac{-1}{\pi y^2} \cos\left(\pi \frac{x}{y}\right) + \frac{x}{y^3} \sin\left(\pi \frac{x}{y}\right) ,$$

$$f_{yy} = \frac{2x}{\pi y^3} \cos\left(\pi \frac{x}{y}\right) - \frac{x^2}{y^4} \sin\left(\pi \frac{x}{y}\right) .$$

Damit erhalten wir die Jacobi-Matrix

$$\boldsymbol{J}_f(1,2) = \begin{pmatrix} \frac{-5}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{-1}{16} \end{pmatrix}$$

Es gilt dann:

$$\boldsymbol{x}^1 = \boldsymbol{x}^0 \underbrace{- \boldsymbol{J}_{\nabla f}^{-1}(\boldsymbol{x}^0) \cdot \nabla f(\boldsymbol{x}^0)}_{\boldsymbol{\Delta x}}$$

mit der Lösung $\boldsymbol{\Delta x}$ des linearen Gleichungssystems

$$\boldsymbol{J}_{\nabla \boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x}^0) \boldsymbol{\Delta x} = -\nabla f(\boldsymbol{x}^0) :$$

$$\begin{array}{cc|c|l} \frac{-5}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{3} & \\ \frac{1}{8} & \frac{-1}{16} & 0 & +\frac{1}{10} \times I \\ \hline \frac{-5}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{3} & \\ 0 & \frac{-4}{80} & \frac{1}{30} & \end{array}$$

Daraus ergibt sich

$$\boldsymbol{\Delta x} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$$

und damit

$$\boldsymbol{x}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 98:

a) Bestimmen Sie drei verschiedene (reelle) Nullstellen der Ableitung der Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ f(x) = \int_0^{x^3} e^{t^4} \cdot (t^2 - t - 2)\,dt\,.$$

Hinweis: Das Integral **nicht** berechnen!

b) Gegeben seien die Funktionen (Das Integral **nicht** berechnen!)

$$F(x) := \int_0^x \frac{\sinh t^2}{t^2}\,e^{t^2}\,dt, \qquad G(x) := e^{-2x^2}, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Berechnen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{x\to\infty} G(x)\cdot F(x)$.
Hinweis: Regel von L'Hospital.

c) Bestimmen Sie die **reelle** Partialbruchzerlegung von

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)}\,.$$

Lösung 98:

Lösung

Zu a) Mit dem Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung und der Kettenregel folgt:

$$\begin{aligned}\left(\int_0^{x^3} e^{t^4}\cdot(t^2-t-2)\,\mathrm{d}t\right)' &= \left(e^{(x^3)^4}\cdot\left((x^3)^2-(x^3)-2\right)\right)\cdot 3\,x^2 \\ &= 3\,e^{x^{12}}\cdot x^2\cdot\left(x^6-x^3-2\right)\end{aligned}$$

Der erste Term wird nie Null, d.h. die Nullstellen sind die Nullstellen der beiden letzten Terme:

$$x = 0 \text{ (doppelt)}\,,\quad x = -1\,,\quad x = \sqrt[3]{2}\,.$$

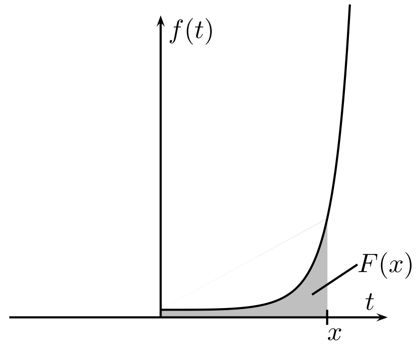
Zu b) Wir betrachten als Erstes

$$f(t) = \frac{\sinh t^2}{t^2}\,e^{t^2} = \frac{\left(e^{t^2}-e^{-t^2}\right)\cdot e^{t^2}}{2t^2} = \frac{e^{t^2}-1}{2t^2}$$

$$\lim_{x\to 0} f(t) \overset{\text{l'Hosp.}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{4te^{2t^2}}{4t} = 1$$

$$\lim_{x\to\infty} f(t) \overset{\text{l'Hosp.}}{=} \lim_{x\to\infty} e^{2t^2} = +\infty$$

Die Funktion $f(t)$ ist positiv für $t \in (0,\infty)$. Dadurch entspricht $F(x)$ der Fläche zwischen dem Funktionsgraphen von $f(t)$, der t-Achse und den Geraden $t = 0$ und $t = x$. Da für $t \to \infty$ die Funktion $f(t)$ uneingeschränkt wächst, gilt auch für die Fläche $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = \infty$.



Mit dem Grenzwert

$$\lim_{x\to\infty} G(x) = e^{-2x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^{2x^2}} = 0$$

ist der Ausdruck $\lim\limits_{x\to\infty} G(x)\cdot F(x) = 0\cdot\infty$ unbestimmt. Wir behandeln ihn mit der Regel von l'Hospital:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} G(x)\cdot F(x) &= \lim_{x\to\infty}\frac{F(x)}{\frac{1}{G(x)}} = \lim_{x\to\infty}\frac{F'(x)}{4xe^{2x^2}} \\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{\sinh x^2}{4x^3e^{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{2}\left(e^{x^2}-e^{-x^2}\right)}{4x^3e^{x^2}} \\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{1-e^{-2x^2}}{8x^3} = 0\,.\end{aligned}$$

Zu c) Der Faktor x^2+x+1 hat keine reellen Nullstellen und kann deshalb nicht in Linearfaktoren zerlegt werden (zumindest nicht in $\mathbb{R}$). Deshalb verwendet man den Ansatz

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}.$$

Durch Multiplikation mit dem Hauptnenner erhält man

$$1 = A(x^2+x+1) + (Bx+C)(x-1)$$

Einsetzen der reellen Nullstelle des Hauptnenners in die Gleichung liefert für $x = 1$ die Gleichung $1 = 3 \cdot A \Rightarrow A = \frac{1}{3}$ und Koeffizientenvergleich für x^2 liefert $0 = A + B \Rightarrow B = -\frac{1}{3}$. Nun wählen wir noch $x = 0$ und erhalten $1 = A - C \Rightarrow C = A - 1 = -\frac{2}{3}$.

Damit ist $f(x) = \dfrac{1}{3(x-1)} - \dfrac{x+2}{3(x^2+x+1)}$.

Aufgabe 99:

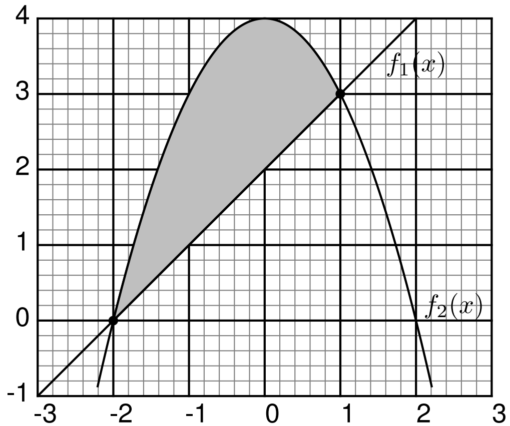
Bestimmen Sie den Flächeninhalt der Fläche, die durch die Gerade $f_1(x) = x + 2$ und die Parabel $f_2(x) = 4 - x^2$ begrenzt wird.

Lösung 99:

Zunächst bestimmt man die Schnittpunkte der beiden Funktionsgraphen, indem man $f_1(x) = f_2(x)$ löst:

$$x + 2 = 4 - x^2 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \text{ oder } x = 1$$

Die beiden Funktionsgraphen schneiden sich in $x = -2$ und $x = 1$. Skizziert man die Funktionsgraphen, erkennt man, wie die Fläche von den beiden Funktionsgraphen begrenzt wird, $f_2(x)$ liegt hierbei über $f_1(x)$.



Die Funktionen schneiden sich lediglich in zwei Punkten, also gibt es nur ein zu berücksichtigendes Flächenstück. Dessen Flächeninhalt wird berechnet, indem man die Differenz der Integrale der beiden Funktionen bestimmt.

$$A = \int_{-2}^{1} f_2(x)\,\mathrm{d}x - \int_{-2}^{1} f_1(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{1} (f_2(x) - f_1(x))\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_{-2}^{1} (-x^2 - x + 2)\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x\right]_{-2}^{1} = \frac{9}{2}\,.$$

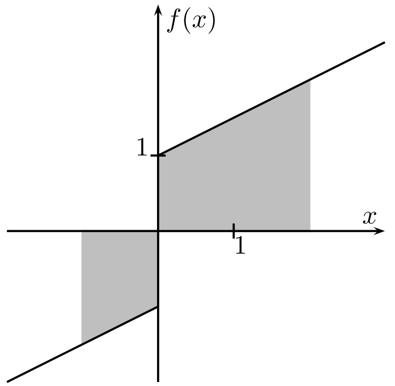
Aufgabe 100:

Es sei

$$\operatorname{sign}(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ -1 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

Gegeben sei die Funktion $f \in Abb(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mit $f(x) = \dfrac{x}{2} + \operatorname{sign}(x)$. Skizzieren Sie f. Ist f auf $I = [-1, 2]$ Riemann-integrierbar? Begründen Sie Ihre Antwort und bestimmen Sie gegebenenfalls das zugehörige Riemann-Integral.

Lösung 100:



Nach einem Satz aus der Vorlesung (Satz 3.96) ist f auf $[-1, 2]$ Riemann-integrierbar, da f auf $[-1, 0]$ und auf $[0, 2]$ jeweils Riemann-integrierbar ist. Es gilt

$$I = \int_{-1}^{0} \left(\frac{x}{2} - 1\right) \, \mathrm{d}x + \int_{0}^{2} \left(\frac{x}{2} + 1\right) \, \mathrm{d}x = \left(\frac{x^2}{4} - x\right)\Bigg|_{-1}^{0} + \left(\frac{x^2}{4} + x\right)\Bigg|_{0}^{2} = \frac{7}{4}\,.$$

Aufgabe 101: Newton-Verfahren

Gegeben seien die beiden Kurven in der oberen Halbebene

$$(y-3)^2 - x = 3 \text{ und } xy = 4\ , \quad y \geq 0\ .$$

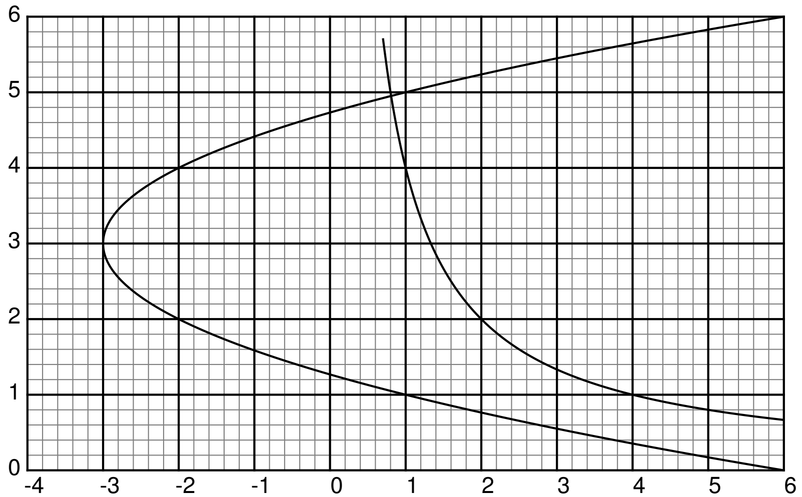
a) Skizzieren Sie die beiden Kurven und lesen Sie aus Ihrer Skizze eine nicht-ganzzahlige Näherung für den Schnittpunkt ab.

b) Um den Schnittpunkt numerisch zu bestimmen, führen Sie **einen** Iterationsschritt mit dem **zweidimensionalen** Newton–Verfahren durch, wobei Sie den Punkt $(x_0, y_0) := (1,5) \in \mathbb{N}^2$ als Startwert benutzen.

c) Hat sich die Näherung durch den Newtonschritt aus Teil b) gegenüber dem Startwert (x_0, y_0) verbessert? Kurze Begründung!

Lösung 101:

Zu a)



Der Schnittpunkt der beiden Kurven liegt in der Nähe von $(x,y) = (0.80\,,\,4.9)$.

Zu b) Der Startwert sei $(x_0\,,\,y_0) = (1,5)$. Das nichtlineare Gleichungssystem ist

$$\boldsymbol{f}(x,y) = \begin{pmatrix} (y-3)^2 - x - 3 \\ xy - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\ .$$

Damit ist die Matrix der ersten partiellen Ableitungen

$$\boldsymbol{J_f}(x,y) = \begin{pmatrix} -1 & 2y-6 \\ y & x \end{pmatrix}\ .$$

Der erste Newton–Schritt lautet mit eingesetzten Zahlenwerten

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \boldsymbol{\Delta x}$$

Dabei ist $\boldsymbol{\Delta x}$ Lösung des Gleichungssystems

$$\boldsymbol{J_f}(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{\Delta x} = -\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)\ :$$

$$\begin{array}{rr|r|l} -1 & 4 & 0 & \\ 5 & 1 & -1 & +5\times I \\ \hline -1 & 4 & 0 & \\ 0 & 21 & -1 & \end{array}$$

Daraus ergibt sich $\boldsymbol{\Delta x} = \frac{1}{21}\begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix}$ und damit

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} - \frac{1}{21}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{21}\begin{pmatrix} 17 \\ 104 \end{pmatrix}.$$

Zu c) Die (euklidische) Norm des Funktionswertes ist kleiner geworden:

$$\boldsymbol{f}(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{f}(x_1\,,\,y_1) = \begin{pmatrix} 0.0023 \\ 0.0091 \end{pmatrix}\ .$$

Alternativ: Ja, denn die verbesserte Näherung liegt viel dichter an dem aus der Zeichnung abgelesenen Wert als die Ausgangsnäherung.

Aufgabe 102:

a) Entwickeln Sie die Funktion

$$f(x,y,z) = \cosh(x) + \mathrm{e}^{2\,xy} - \ln(-yz) + \frac{1}{y} + \frac{z}{2}$$

nach der Taylor'schen Formel um den Punkt $P = (0\,,\,-1\,,\,2)$ bis zu einschließlich zweiter Ordnung (ohne Restglied).

b) Bestimmen Sie die Taylor-Entwicklung 2. Grades um den Punkt $y_0 = \dfrac{4}{3}$ für die Umkehrfunktion $g^{-1}(y)$ von $g(x) = \dfrac{x^3}{3} + x$ (ohne Restglied).

Hinweis: Die Umkehrfunktion ist **nicht** explizit zu bestimmen!

c) Führen Sie zur Bestimmung einer Näherungslösung des Gleichungssystems

$$y = \mathrm{e}^{-x^2}\,, \quad y = -(x-1)^2 + 2$$

einen Iterationsschritt des **zweidimensionalen** Newton-Verfahrens mit dem Startvektor $(x_0, y_0) = (0,0)$ durch.

Lösung 102:

Lösung:

Zu a) Mit $\boldsymbol{x}_0 = (0\,,\,-1\,,\,2)^\top$ gilt:

$$\begin{array}{lclclcl}
f &=& \cosh(x) + \mathrm{e}^{2\,xy} - \ln(-yz) + \dfrac{1}{y} + \dfrac{z}{2} & \Rightarrow & f(\boldsymbol{x}_0) &=& 2 - \ln(2)\,. \\
f_x &=& \sinh(x) + 2y\,\mathrm{e}^{2\,xy} & \Rightarrow & f_x(\boldsymbol{x}_0) &=& -2\,, \\
f_y &=& 2x\,\mathrm{e}^{2\,xy} - \dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{y^2} & \Rightarrow & f_y(\boldsymbol{x}_0) &=& 0\,, \\
f_z &=& -\dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{2} & \Rightarrow & f_z(\boldsymbol{x}_0) &=& 0\,, \\
f_{xx} &=& \cosh(x) + 4\,y^2\,\mathrm{e}^{2\,xy} & \Rightarrow & f_{xx}(\boldsymbol{x}_0) &=& 5\,, \\
f_{xy} &=& 4\,xy\,\mathrm{e}^{2\,xy} + 2\mathrm{e}^{2\,xy} & \Rightarrow & f_{xy}(\boldsymbol{x}_0) &=& 2\,, \\
f_{xz} &=& 0 & \Rightarrow & f_{xz}(\boldsymbol{x}_0) &=& 0\,, \\
f_{yy} &=& 4\,x^2\,\mathrm{e}^{2\,xy} + \dfrac{1}{y^2} + \dfrac{2}{y^3} & \Rightarrow & f_{yy}(\boldsymbol{x}_0) &=& -1\,, \\
f_{yz} &=& 0 & \Rightarrow & f_{yz}(\boldsymbol{x}_0) &=& 0\,, \\
f_{zz} &=& \dfrac{1}{z^2} & \Rightarrow & f_{yz}(\boldsymbol{x}_0) &=& \dfrac{1}{4}\,.
\end{array}$$

Damit lautet das Taylor–Polynom 2. Grades

$$\begin{aligned}
T_2(x,y,z) =& 2 - \ln(2) - 2\,x + \frac{5}{2}\,x^2 + 2x(y+1) \\
& - \frac{1}{2}(y+1)^2 + \frac{1}{8}\,(z-2)^2\ .
\end{aligned}$$

Zu b) Mit

$$g^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) = 1\,, \left(g^{-1}\right)'\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{1}{g'(1)} = \frac{1}{2}$$

und

$$\left(g^{-1}\right)''\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{-g''(1)}{\left(g'(1)\right)^3} = -\frac{1}{4}$$

folgt

$$T_2\left(y;\frac{4}{3}\right) = 1 + \frac{1}{2}\left(y - \frac{4}{3}\right) - \frac{1}{8}\left(y - \frac{4}{3}\right)^2\ .$$

Zu c) Für $\boldsymbol{F}(x,y) = (y - \mathrm{e}^{-x^2}, y + (x-1)^2 - 2)^\top$ gilt

$$\boldsymbol{J_F}(x,y) = \begin{pmatrix} 2x\mathrm{e}^{-x^2} & 1 \\ 2(x-1) & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{J_F}(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Das Newton-Verfahren liefert damit für den Iterationsschritt

$$\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{\Delta x}$$

mit der Lösung $\boldsymbol{\Delta x}$ des linearen Gleichungssystems $\boldsymbol{J_F}(0,0)\boldsymbol{\Delta x} = -\boldsymbol{F}(0,0)$:

$$\begin{array}{rr|r|} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{array}$$

die Schrittweite

$$\boldsymbol{\Delta x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und damit

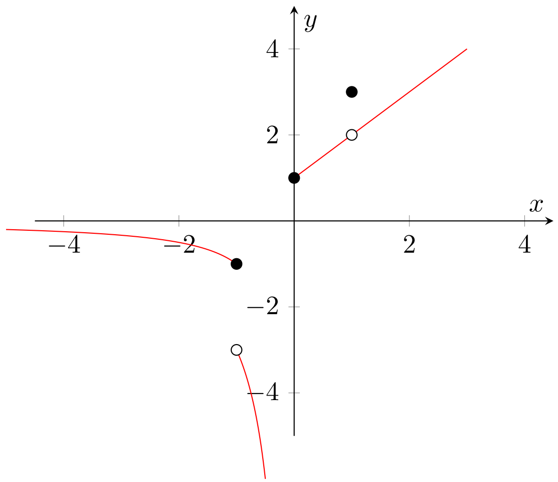
$$\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{\Delta x} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}.$$

Aufgabe 103: Stetigkeit

Betrachten Sie die Funktion $y = f(x)$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{für } x \in (-\infty, -1], \\ \frac{3}{x} & \text{für } x \in (-1, 0), \\ \frac{x^2-1}{x-1} & \text{für } x \in [0, 1) \cup (1, \infty), \\ 3 & \text{für } x = 1. \end{cases}$$

und deren Graphen



a) Finden Sie alle Werte an denen die Funktion unstetig ist.

b) Begründen Sie für jeden dieser Werte, weshalb die formale Definition der Stetigkeit verletzt ist.

c) Klassifizieren Sie jede der Untetigkeitsstellen als **Sprungstelle**, **hebbare Unstetigkeit** oder **Polstelle**.

Lösung 103:

Die Funktion ist unstetig bei

i) $x = -1$,

ii) $x = 0$,

iii) $x = 1$.

i) Die Funktion ist unstetig für $x = -1$. Diese Unstetigkeit entspricht einer Sprungstelle, da die links- und rechtsseitigen Grenzwerte existieren (sprich, auf einen endlichen Wert konvergieren), diese aber nicht übereinstimmen:

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} \frac{1}{x} = -1,$$

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} \frac{3}{x} = -3.$$

ii) Die Funktion ist unstetig bei $x = 0$. Dies ist eine Polstelle, da der linksseitiger Grenzwert nicht existiert.

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{3}{x} = -\infty,$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \to 0^+} x + 1 = 1.$$

iii) Die Unstetigkeit bei $x = 1$ ist hebbar, da deren links- und rechtsseitige Grenzwerte existieren und übereinstimmen

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \to 1^-} x + 1 = 2,$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \to 1^+} x + 1 = 2,$$

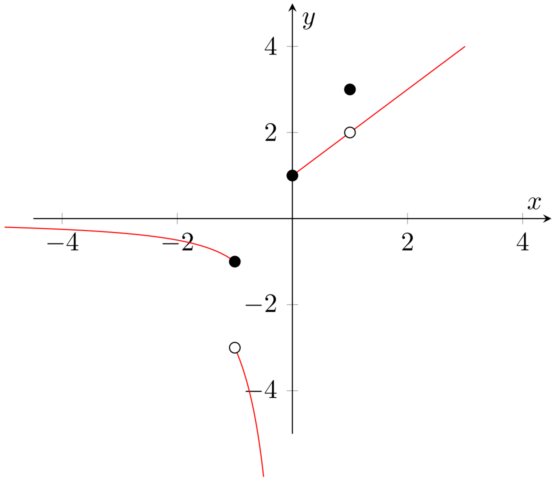
jedoch vom Funktionswert $f(1) = 3$ an der Stelle abweichen.

Aufgabe 104: Continuity

Consider the following function $y = f(x)$ with

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{for } x \in (-\infty, -1], \\ \frac{3}{x} & \text{for } x \in (-1, 0), \\ \frac{x^2-1}{x-1} & \text{for } x \in [0, 1) \cup (1, \infty), \\ 3 & \text{for } x = 1. \end{cases}$$

and its graph



a) Find all values for which the function is discontinuous.

b) For each value of discontinuity, state why the formal definition of continuity does not apply.

c) Classify each discontinuity as either jump, removable, or infinite.

Lösung 104:

The function is discontinuous in

i) $x = -1$,

ii) $x = 0$,

iii) $x = 1$.

i) The function is discontinuous for $x = -1$. This discontinuity is a jump because the half-sided limits exist are finit but are not equal:

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} \frac{1}{x} = -1,$$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \frac{3}{x} = -3.$$

ii) The function is discontinuous for $x = 0$. This discontinuity is an infinite discontinuity because the half-sided limit is infinite:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{3}{x} = -\infty,$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 0^+} x+1 = 1.$$

iii) The discontinuity $x = 1$ is removable, because the half-sided limits are finite and equal but differ from the value $f(1) = 3$:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} x+1 = 2,$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} x+1 = 2.$$

Aufgabe 105: Positive Definitheit

a) Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrizen

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 4/3 & \sqrt{5}/3 \\ \sqrt{5}/3 & 7/6 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Welche der Matrizen sind positiv oder negativ definit, welche sind indefinit?

Lösung 105:

a) **i)** Das charakteristische Polynom der Matrix $\boldsymbol{A}$ ist:

$$\begin{aligned}\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}) =& \det \begin{pmatrix} -3-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -3-\lambda \end{pmatrix} \\ =&(-3-\lambda)^2(-1-\lambda) - (-1-\lambda)\end{aligned}$$

und seine Nullstellen

$$\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = -2,\ \lambda_3 = -4$$

sind die Eigenwerte der Matrix $\boldsymbol{A}$.

ii) Das charakteristische Polynom der Matrix $\boldsymbol{B}$ ist

$$\det(\boldsymbol{B} - \lambda \boldsymbol{E}) = \left(\frac{4}{3} - \lambda\right)\left(\frac{7}{6} - \lambda\right) - \frac{5}{9}$$

und seine Nullstellen

$$\lambda_{1,2} = \frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{25}{16} + \frac{5}{9} - \frac{14}{9}} = \frac{5 \pm 3}{4} \in \{2,\ 1/2\}$$

sind die Eigenwerte von $\boldsymbol{B}$.

iii) Es gilt $\boldsymbol{C}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{C}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Also hat $\boldsymbol{C}$ die Eigenwerte 1 und -1.

b) Alle drei Matrizen sind symmetrisch.
Zudem sind die Eigenwerte von $\boldsymbol{A}$ negativ, also ist $\boldsymbol{A}$ negativ definit.
Die Eigenwerte von $\boldsymbol{B}$ sind alle positiv, also ist $\boldsymbol{B}$ positiv definit.
$\boldsymbol{C}$ besitzt einen positiven und einen negativen Eigenwert, ist also indefinit.

Aufgabe 106: Taylor–Entwicklung

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) := x \cdot \arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\,.$$

a) Berechnen Sie das Taylorpolynom $T_2(x)$ zweiten Grades im Entwicklungspunkt $x_0 = 1$.
b) Berechnen Sie das zugehörige Restglied und geben Sie den Fehler $|f(x) - T_2(x)|$ im Intervall $|x-1| \leq 0.1$ an.

Lösung 106:

a) Es gilt

$$T_2(x) = f(1) + f'(1)\cdot(x-1) + \frac{1}{2}f''(1)\cdot(x-1)^2$$

mit folgenden Werten:

$$f(1) = \arctan(1) - \frac{1}{2}\ln(2) = \underline{\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(2)}\,,$$

$$f'(x) = \arctan(x) + \frac{x}{1+x^2} - \frac{1}{2}\frac{2x}{1+x^2} = \arctan(x) \Rightarrow \underline{f'(1) = \frac{\pi}{4}}\,,$$

$$f''(x) = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow \underline{f''(1) = \frac{1}{2}}\,,$$

$$f'''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}\,.$$

Also gilt

$$T_2(x) = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2\right) + \frac{\pi}{4}\cdot(x-1) + \frac{1}{4}\cdot(x-1)^2\,.$$

b) Für das Restglied gilt

$$R_2(x;1) = f'''(\xi)\cdot\frac{(x-1)^3}{3!} = -\frac{\xi}{\left(1+\xi^2\right)^2}\cdot\frac{(x-1)^3}{3}$$

mit $\xi = 1 + \theta(x-1)\,,\ \theta \in]0,1[$.
Für $|x-1| \leq 0.1$ gilt dann die Fehlerabschätzung

$$|f(x) - T_2(x)| = |R_2(x;1)| \leq \frac{1.1}{(1+0.9^2)^2}\cdot\frac{(0.1)^3}{3} \leq \frac{11}{(3/2)^2\cdot 3}\cdot 10^{-4} \leq 2\cdot 10^{-4}.$$

Aufgabe 107: Differenzieren

Berechnen Sie folgende Aufgaben:

i) $f(t) := (2t+1)^4 \cdot \sin(3t)$ gesucht: $f'''(t)$

ii) $g(t) := t^4 \cdot \cos(3t) \cdot \mathrm{e}^{-2t}$ gesucht: $g''(t)$

iii) $h(t) := \dfrac{2t^2-2t+1}{3t-2}$ gesucht: $h'''(t)$

Hinweis: Vergessen Sie nicht die Ergebnisse (auch die Zwischenergebnisse) sinnvoll zusammenzufassen!

Lösung 107:

i) Mit der Leibniz–Regel gilt:

$$\begin{aligned} f'''(t) &= -27 \cdot (2t+1)^4 \cos(3t) - 3 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 9 \cdot (2t+1)^3 \sin(3t) \\ &\quad +3 \cdot 12 \cdot 4 \cdot 3 \cdot (2t+1)^2 \cos(3t) + 24 \cdot 8 \cdot (2t+1) \sin(3t) \\ &= \Big[192\,(2t+1) - 216\,(2t+1)^3\Big] \sin(3t) + \Big[432\,(2t+1)^2 - 27\,(2t+1)^4\Big] \cos(3t) \ . \end{aligned}$$

ii) Mit der Ableitungsregel für Mehrfachprodukte gilt:

$$\begin{aligned} g(t) &= t^4 \cdot \cos(3t) \cdot \mathrm{e}^{-2t} \\ \Rightarrow \quad g'(t) &= 4\,t^3 \cdot \cos(3t) \cdot \mathrm{e}^{-2t} - 3\,t^4 \cdot \sin(3t) \cdot \mathrm{e}^{-2t} - 2\,t^4 \cdot \cos(3t) \cdot \mathrm{e}^{-2t} \\ &= \Big[\big(4\,t^3 - 2\,t^4\big) \cos(3t) - 3\,t^4 \sin(3t)\Big] \mathrm{e}^{-2t} \\ \Rightarrow \quad g''(t) &= \Big[\big(12t^2 - 16t^3 - 5t^4\big) \cos(3t) + \big(-24t^3 + 12t^4\big) \sin(3t)\Big] \mathrm{e}^{-2t} \ . \end{aligned}$$

iii)

1. Lösungsweg: Direkte Anwendung der Quotientenregel:

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{2t^2-2t+1}{3t-2} \\ \Rightarrow \quad h'(t) &= \frac{(4t-2) \cdot (3t-2) - (2t^2-2t+1) \cdot 3}{(3t-2)^2} = \frac{6t^2-8t+1}{(3t-2)^2} \\ \Rightarrow \quad h''(t) &= \frac{(12t-8) \cdot (3t-2)^2 - (6t^2-8t+1) \cdot (3t-2)6}{(3t-2)^4} = \frac{10}{(3t-2)^3} \\ \Rightarrow \quad h'''(t) &= \frac{-90}{(3t-2)^4} \ . \end{aligned}$$

2. Lösungsweg: Zunächst den ganzrationalen Anteil abdividieren und dann differenzieren:

$$h(t) = \frac{2t^2-2t+1}{3t-2} = \frac{2t}{3} - \frac{2}{9} + \frac{5}{9}\,\frac{1}{3t-2}$$

$$\Rightarrow h'(t) = \frac{2}{3} - \frac{5}{3(3t-2)^2} \Rightarrow h''(t) = \frac{10}{(3t-2)^3} \Rightarrow h'''(t) = \frac{-90}{(3t-2)^4} \ .$$

Aufgabe 108: Iterierte Grenzwerte

Berechnen Sie für folgende Funktionen $f(x,y)$ die Grenzwerte

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)\,; \quad \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)\,; \quad \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{0}} f(\boldsymbol{x}) \text{ mit } \boldsymbol{x} := (x,y)^\top\,,$$

(falls diese existieren):

a) $f(\boldsymbol{x}) := \dfrac{x-y}{x+y}\,,$

b) $f(\boldsymbol{x}) := \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$

c) $f(\boldsymbol{x}) := (x+y)\sin\left(\frac{1}{x}\right)\sin\left(\frac{1}{y}\right)\,.$

Hinweis zu b): Betrachten Sie auch den Fall $y=\alpha x\,,\ \alpha\in\mathbb{R}\,.$

Lösung 108:

a) Es gilt

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x-y}{x+y}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x}{x} = \lim_{x\to 0} 1 = 1\,,$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x-y}{x+y}\right) = \lim_{y\to 0}\frac{-y}{y} = -1\,.$$

Die iterierten Grenzwerte sind also verschieden und $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{0}} f(\boldsymbol{x})$ existiert nicht.

b) Es gilt

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{0}{x^2} = \lim_{x\to 0} 0 = 0\,,\quad \text{da } x\neq 0$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) = 0\,,\quad \text{da } f(x,y)=f(y,x) \text{ symmetrisch}\,.$$

Es sei $y=\alpha x\,.$ Wir nähern uns also dem Punkt $x=0$ entlang einer Geraden $y=\alpha x$ an. Dann gilt

$$\lim_{x\to 0} f(x,\alpha x) = \lim_{x\to 0}\frac{\alpha^2x^4}{\alpha^2x^4+x^2(1-\alpha)^2} = \begin{cases} 1 & \text{für } \alpha = 1\,,\\ 0 & \text{für } \alpha\neq 1\,.\end{cases}$$

Abhängig von dem Weg, auf dem wir uns dem Punkt $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ annähern, erhält man unterschiedliche Grenzwerte. Deshalb existiert $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{0}} f(\boldsymbol{x})$ nicht.

c) Es gilt

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) = \lim_{x\to 0}\sin\left(\frac{1}{x}\right)\left[\lim_{y\to 0}(x+y)\sin\left(\frac{1}{y}\right)\right]\,.$$

Der Grenzwert $\lim\limits_{y\to 0}(x+y)\sin\left(\frac{1}{y}\right)$ existiert nicht und damit auch $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)\right)$ nicht.

Wegen $f(x,y)=f(y,x)$ gilt dasselbe für den Grenzwert $\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)\right)$.

Sei $\boldsymbol{x}_n=(x_n,y_n)$ eine Folge mit $\boldsymbol{0}\neq\boldsymbol{x}_n\in\mathbb{R}^2$, dann gilt:

$$\boldsymbol{x}_n\to\boldsymbol{0} \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\sqrt{x_n^2+y_n^2}=0$$

Mit

$$|x_n+y_n| \le |x_n|+|y_n| = \sqrt{(|x_n|+|y_n|)^2} = \sqrt{|x_n|^2+|y_n|^2+2|x_n||y_n|}$$
$$\le \sqrt{|x_n|^2+|y_n|^2+|x_n|^2+|y_n|^2} = \sqrt{2}\sqrt{x_n^2+y_n^2}$$

erhalten wir

$$0 \le \lim_{n\to\infty}|x_n+y_n| \le \sqrt{2}\lim_{n\to\infty}\sqrt{x_n^2+y_n^2} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}|x_n+y_n| = 0\,.$$

Somit ist

$$\lim_{n\to\infty}|f(\boldsymbol{x}_n)| = \lim_{n\to\infty}\underbrace{|x_n+y_n|}_{\text{Nullfolge}}\underbrace{|\sin\frac{1}{x_n}|}_{\le 1}\underbrace{|\sin\frac{1}{y_n}|}_{\le 1} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{0}} f(\boldsymbol{x}) = 0\,.$$

Aufgabe 109: Partielle Ableitungen

Bestimmen Sie alle ersten und zweiten partiellen Ableitungen der folgenden reellen Funktionen und geben Sie jeweils die ersten und zweiten Ableitungen in Matrixschreibweise an:

i) $f(x,y) = \mathrm{e}^{2\,xy^2}$ **ii)** $g(x,y) = x^2 \sin(2x+y)$

iii) $h(x,y) = \sin(2x)\cos(3y)$ **iv)** $k(x,y,z) = x\,y^2\,z^3$

v) $j(u,v) = \dfrac{uv}{uv-1}$

Lösung 109:

Anmerkungen:
1. Die Ableitung (Gradient) einer Funktion mehrer Variablen ist ein Vektor (Spaltenvektor):

$$f(x,y,...) \Rightarrow f'(x,y,...) = \Big(\partial_x f\ ,\ \partial_y f\ ,\ ...\Big) = (\nabla f(x,y,\ldots))^\top$$
$$\Rightarrow f''(x,y,\ldots) = \boldsymbol{H}(x,y,\ldots) = \begin{pmatrix} \partial_{xx} f & \partial_{xy} f & \ldots \\ \partial_{yx} f & \partial_{yy} f & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}$$

2. Wenn die 2. partiellen Ableitungen **stetig** sind, dann ist die Hesse–Matrix $\boldsymbol{H}(x,y,...)$ symmetrisch.

i)

$$\nabla f(x,y) = \Big(2\,y^2\,e^{2xy^2}\ ,\ 4\,xy\,e^{2xy^2}\Big)^\top$$
$$\boldsymbol{H}_f(x,y) = \begin{pmatrix} 4\,y^4\,e^{2xy^2} & (4\,y + 8\,x\,y^3)\,e^{2xy^2} \\ (4\,y + 8\,x\,y^3)\,e^{2xy^2} & (4\,x + 16\,x^2\,y^2)\,e^{2xy^2} \end{pmatrix}$$

ii)

$$\nabla g(x,y) = \Big(2\,x\,\sin(2x+y) + 2\,x^2\,\cos(2x+y)\ ,\ x^2\,\cos(2x+y)\Big)^\top$$
$$\boldsymbol{H}_g(x,y) = \begin{pmatrix} (2-4\,x^2)\sin(2x+y) + 8\,x\cos(2x+y)) & 2\,x\cos(2x+y) - 2\,x^2\sin(2x+y) \\ 2\,x\cos(2x+y) - 2\,x^2\sin(2x+y) & -x^2\sin(2x+y) \end{pmatrix}$$

iii)

$$\nabla h(x,y) = \Big(2\,\cos(2x)\,\cos(3y)\ ,\ -3\,\sin(2x)\,\sin(3y)\Big)^\top$$
$$\boldsymbol{H}_h(x,y) = \begin{pmatrix} -4\,\sin(2x)\,\cos(3y) & -6\,\cos(2x)\,\sin(3y) \\ -6\,\cos(2x)\,\sin(3y) & -9\,\sin(2x)\,\cos(3y) \end{pmatrix}$$

iv)

$$\nabla k(x,y,z) = \big(y^2\,z^3\ ,\ 2\,x\,y\,z^3\ ,\ 3\,x\,y^2\,z^2\big)^\top$$
$$\boldsymbol{H}_k(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & 2\,y\,z^3 & 3\,y^2\,z^2 \\ 2\,y\,z^3 & 2\,x\,z^3 & 6\,x\,y\,z^2 \\ 3\,y^2\,z^2 & 6\,x\,y\,z^2 & 6\,x\,y^2\,z \end{pmatrix}$$

v)

$$\nabla j(u,v) = \frac{1}{(uv-1)^2} \cdot \big(-v\ ,\ -u\big)^\top ,$$
$$\boldsymbol{H}_j(u,v) = \frac{1}{(uv-1)^3} \cdot \begin{pmatrix} 2\,v^2 & uv+1 \\ uv+1 & 2\,u^2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 110: Taylor–Entwicklung in 2 Dim.

Bestimmen Sie das Taylor-Polynom 2. Ordnung der Funktion

$$f(x,y) = \mathrm{e}^x \cos(\pi(x+2y))$$

um den Entwicklungspunkt $\boldsymbol{x}_0 = (1,-1)^\top$.

Lösung 110:

Die partiellen Ableitungen lauten:

$$\begin{aligned} f(x,y) =& \mathrm{e}^x \cdot \cos\big(\pi(x+2y)\big) \\ &\Rightarrow\ f(1,-1) = -\mathrm{e} \\[2ex] f_x(x,y) =& \mathrm{e}^x \cdot \Big[\cos\big(\pi(x+2y)\big) - \pi \sin\big(\pi(x+2y)\big)\Big] \\ &\Rightarrow\ f_x(1,-1) = -\mathrm{e} \\[2ex] f_y(x,y) =& -2\pi \cdot \mathrm{e}^x \cdot \sin\big(\pi(x+2y)\big) \\ &\Rightarrow\ f_y(1,-1) = 0 \\[2ex] f_{xx}(x,y) =& \mathrm{e}^x \Big[(1-\pi^2)\cos\big(\pi(x+2y)\big) - 2\pi \sin\big(\pi(x+2y)\big)\Big] \\ &\Rightarrow\ f_{xx}(1,-1) = \mathrm{e}\,(\pi^2 - 1) \\[2ex] f_{xy}(x,y) =& -2\pi \cdot \mathrm{e}^x \Big[\sin\big(\pi(x+2y)\big) + \pi \cos\big(\pi(x+2y)\big)\Big] \\ &\Rightarrow\ f_{xy}(1,-1) = 2\,\pi^2\,\mathrm{e} \\[2ex] f_{yy}(x,y) =& -4\,\pi^2 \cdot \mathrm{e}^x \cdot \cos\big(\pi(x+2y)\big) \\ &\Rightarrow\ f_{yy}(1,-1) = 4\,\pi^2\,\mathrm{e} \end{aligned}$$

Damit lautet das Taylorpolynom 2. Grades am Entwicklungspunkt $\boldsymbol{x}_0 = (1,-1)^\top$

$$T_2(x,y) = -\mathrm{e} - \mathrm{e}\,(x-1) + (\pi^2-1)\,\mathrm{e}\,\frac{(x-1)^2}{2} + 2\pi^2\,\mathrm{e}\,(x-1)(y+1) + 4\pi^2\,\mathrm{e}\,\frac{(y+1)^2}{2} \ .$$

Aufgabe 111: Taylor–Entwicklung in 2 Dim.

Gegeben seien $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = \mathrm{e}^{xy} + x + y$ und $\boldsymbol{a} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom 2. Grades von f für den Entwicklungspunkt $(0,0)$.

b) Bestimmen Sie die Richtungsableitung $\partial_{\boldsymbol{a}} f$ von f in Richtung $\boldsymbol{a}$ im Punkt $(0,0)$.

Lösung 111:

a) Mit den partiellen Ableitungen

$$\begin{array}{rcll} f_x &=& y\,\mathrm{e}^{xy} + 1 & \Rightarrow \quad f_x(0,0) = 1\ , \\ f_y &=& x\,\mathrm{e}^{xy} + 1 & \Rightarrow \quad f_y(0,0) = 1\ , \\ f_{xx} &=& y^2\,\mathrm{e}^{xy} & \Rightarrow \quad f_{xx}(0,0) = 0\ , \\ f_{xy} &=& xy\,\mathrm{e}^{xy} + \mathrm{e}^{xy} & \Rightarrow \quad f_{xy}(0,0) = 1\ , \\ f_{yy} &=& x^2\,\mathrm{e}^{xy} & \Rightarrow \quad f_{yy}(0,0) = 0 \end{array}$$

folgt

$$T_{f,2}(x,y) \;=\; 1 + x + y + \frac{2}{2}xy \;=\; 1 + x + y + xy\ .$$

b) Es ist

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{a}}(0,0) \;=\; \langle \nabla f(0,0), \boldsymbol{a} \rangle \;=\; f_x(0,0)\cdot a_1 + f_y(0,0)\cdot a_2 \;=\; a_1 + a_2 \;=\; -\frac{1}{5}\ .$$

Aufgabe 112: Taylor–Polynom & Extrema in 2 Dimensionen

a) Berechnen Sie das Taylor–Polynom 2. Grades der Funktion $f(x,y) = (2x-3y)\cdot\sin(3x-2y)$ zum Entwicklungspunkt $\boldsymbol{x}_0 = (0,0)^{\mathrm{T}}$.

b) Ermitteln Sie die Extrema der Funktion $f(x,y) = 2x^3 - 3xy + 2y^3 - 3$.

Lösung 112:

a)

$1.5rclcrcrf = (2x{-}3y)\cdot\sin(3x{-}2y) f(0,0) = 0 f_x = 2\,\sin(3x{-}2y){+}3\,(2x{-}3y)\cdot\cos(3x{-}2y) f_x(0,0) = 0 f_y = -3\,\sin(3x{-}2y){-}2\,(2x{-}3y)\cdot\cos(3x{-}2y) f_y(0,0) = 0 f_{xx} = 12\,\cos(3x{-}2y){-}9\,(2x{-}3y)\cdot\sin$

Damit erhält man für das gesuche Taylor–Polynom die Darstellung:

$$T_2(x,y) = 6\,x^2 - 13\,xy + 6\,y^2 \ .$$

b) Die stationären Punkte erhält man aus

$$\mathbf{grad}\, f(x,y) = c6\,x^2 - 3\,y$$
$$-3\,x + 6y^2 = \mathbf{0}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} y = 2x^2 \\ -3x + 24x^4 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} y = 2x^2 \\ 3x\left(8x^3 - 1\right) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} y = 2x^2 \\ x = 0 \vee x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

zu $P_1 = (0,0)$ und $P_2 = \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.
Die Hesse–Matrix ist

$$\mathrm{Hess}_f(x,y) = cc12x - 3 - 312y.$$

Für $P_1 = (0,0)$ erhält man

$$\mathrm{Hess}_f(0,0) = rr0 - 3 - 30\lambda_1\cdot\lambda_2 = \det(\mathrm{Hess}_f(0,0)) = -9 < 0 \ .$$

Damit haben die Eigenwerte verschiedene Vorzeichen und es handelt sich um einen Sattelpunkt.
Für $P_2 = \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ erhält man

$$\mathrm{Hess}_f\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right) = rr6 - 3 - 36\lambda_1\cdot\lambda_2 = \det((\mathrm{Hess}_f\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right)) = 27 > 0$$

sowie

$$f_{xx}\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right) = 6 > 0\,.$$

Damit sind beide Eigenwerte positiv und es handelt sich um ein Minimum.

Aufgabe 113: Fehlersuche

Behauptung:

$$\int_{-2}^{2} x^2 \, \mathrm{d}x = 0$$

Beweis: Mit der Substitution $t = x^2 \Rightarrow \mathrm{d}t = 2x \, \mathrm{d}x$ gilt:

$$\int_{-2}^{2} x^2 \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_{-2}^{2} x \cdot 2x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_{4}^{4} \sqrt{t} \, \mathrm{d}t = 0 \, .$$

Wo steckt der Fehler?

Lösung 113:

Der Fehler liegt bei der „naiven" Ersetzung von x durch $\sqrt{t}$. Die Umkehrung von $t = x^2$ ist:

$$\begin{array}{lll} x = -\sqrt{t} & \text{für} & x < 0 \\ x = +\sqrt{t} & \text{für} & x \geq 0 \end{array} \, .$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} \int_{-2}^{2} x^2 \, \mathrm{d}x &= \frac{1}{2} \int_{-2}^{0} x \cdot 2x \, \mathrm{d}x + \frac{1}{2} \int_{0}^{2} x \cdot 2x \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2} \int_{4}^{0} -\sqrt{t} \, \mathrm{d}t + \frac{1}{2} \int_{0}^{4} +\sqrt{t} \, \mathrm{d}t \\ &= \int_{0}^{4} \sqrt{t} \, \mathrm{d}t = \left[\frac{2}{3} t^{3/2} \right]_0^4 = \frac{2}{3} \cdot 8 = \frac{16}{3} \, , \end{aligned}$$

was das richtige Ergebnis ist.

Aufgabe 114: Integration

Bestimmen Sie jeweils eine Stammfunktion:

a)

$$I_a := \int \frac{4x^4}{x^4-1}\mathrm{d}x\,.$$

b)

$$I_b := \int (1+3x^2)\cdot\ln(x^3)\mathrm{d}x\,.$$

c)

$$I_c := \int \sin(\sqrt{x})\mathrm{d}x\,.$$

d)

$$I_d := \int \sin(2x)\cdot\mathrm{e}^x\mathrm{d}x\,.$$

Lösung 114:

a) Die Partialbruchzerlegung des Integranden ergibt

$$\frac{4x^4}{x^4-1} = 4 + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} - \frac{2}{x^2+1}.$$

Damit ist

$$\begin{aligned} I_a &= \int 4 + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} - \frac{2}{x^2+1}\mathrm{d}x \\ &= 4x + \ln|x-1| - \ln|x+1| - 2\arctan(x). \end{aligned}$$

b) Mit partieller Integration erhält man

$$\begin{aligned} I_b &= 3\int \left(1+3x^2\right)\cdot\ln(x)\mathrm{d}x \\ &= 3\left[\left(x+x^3\right)\ln(x) - \int\frac{x+x^3}{x}\mathrm{d}x\right] \\ &= 3\left[\left(x+x^3\right)\ln(x) - x - \frac{x^3}{3}\right] \\ &= \left(3x+3x^3\right)\ln(x) - 3x - x^3. \end{aligned}$$

(Falls man ohne Umformung partiell integriert, erhält man $I_2 = (x+x^3)\ln(x^3) - 3x - x^3$.)

c) Mit der Substitution $\quad t=\sqrt{x} \quad\Rightarrow\quad 2t\mathrm{d}t = \mathrm{d}x \quad$ erhält man

$$\begin{aligned} I_c &= \int 2t\cdot\sin(t)\mathrm{d}t \\ &= -2t\cos(t) - \int -2\cos(t)\mathrm{d}t \\ &= -2t\cos(t) + 2\sin(t) \\ &= -2\sqrt{x}\cos(\sqrt{x}) + 2\sin(\sqrt{x}). \end{aligned}$$

d) Zweimalige partielle Integration ergibt

$$\begin{aligned} \int \sin(2x)\cdot\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}t &= \sin(2x)\cdot\mathrm{e}^x - \int 2\cos(2x)\cdot\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \\ &= \sin(2x)\cdot\mathrm{e}^x - 2\cos(2x)\cdot\mathrm{e}^x - 4\int\sin(2x)\cdot\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$I_d = \int\sin(2x)\cdot\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}t = \frac{1}{5}\sin(2x)\cdot\mathrm{e}^x - \frac{2}{5}\cos(2x)\,\mathrm{e}^x\,.$$

Aufgabe 115: Monotonieverhalten

Gegeben seien die Funktionen

$$f(x) = ... \quad , \quad g(x) = ...$$

Bestimmen Sie jeweils das Monotonieverhalten der gegebenen Funktionen. Geben Sie dazu die Intervalle an, in denen die Funktion monoton steigend bzw. monoton fallend ist.

Lösung 115: