Helmut-Schmidt-Universität
Universität der Bundeswehr Hamburg
Fakultät für Maschinenbau

Prof. Dr. Thomas Carraro
Dr. Frank Gimbel
Janna Puderbach

Mathematik II **Hörsaalübung 2**

WT 2022 Taylor-Polynom

Aufgabe 2.1: Taylor-Entwicklung

Gegeben sei die Funktion
$$f(x) = \sin(x)\ln(x).$$

a) Bestimmen Sie das Taylor-Polynom zweiter Ordnung $T_2(x)$ von $f(x)$ um den Punkt $x = 1$.

b) Bestimmen Sie die Differenz zwischen dem Taylor-Polynom $T_2(x)$ und der Funktion $f(x)$ im Punkt $x = 0$, d.h. bestimmen Sie $d(0)$, wobei
$$d(x) := |T_2(x) - f(x)|.$$
Man beachte, dass die Funktion $f(x)$ an der Stelle $x = 0$ stetig fortgesetzt werden muss.

Lösung 2.1:

a) Die Ableitungen von $f(x)$ sind:
$$f'(x) = \cos(x)\ln(x) + \frac{\sin(x)}{x},$$
$$f''(x) = -\sin(x)\ln(x) + 2\frac{\cos(x)}{x} - \frac{\sin(x)}{x^2}.$$
Das Taylor-Polynom ist
$$\begin{aligned} T_2(x;1) &= f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{1}{2}f''(x)(x-1)^2 \\ &= \sin(1)(x-1) + \left(\cos(1) - \frac{\sin(1)}{2}\right)(x-1)^2 \end{aligned}$$

b) Die Differenz ist
$$d(x) := |T_2(x) - f(x)| = |\sin(x)\ln(x) - \sin(1)(x-1) - \left(\cos(1) - \frac{\sin(1)}{2}\right)(x-1)^2|.$$
Wir müssen den Grenzwert $\lim_{x\to 0} d(x)$ berechnen, da die Funktion $\sin(x)\ln(x)$ in 0 nicht definiert ist. Wenn der Grenzwert existiert, erweitern wir die Funktion um den Wert des Grenzwertes.
$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0}\sin(x)\ln(x) &= \lim_{x\to 0}\frac{\ln(x)}{\frac{1}{\sin x}} \\ &= \lim_{x\to 0} -\frac{1}{x}\frac{\sin^2(x)}{\cos(x)} \\ &= \lim_{x\to 0} -\frac{\sin(x)}{x}\lim_{x\to 0}\sin(x)\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos(x)} \\ &= -1\cdot 0\cdot 1 = 0. \end{aligned}$$
Wir erweitern die Funktion bei $x = 0$ durch Kontinuität mit dem Grenzwert $f(0) = 0$. Die Differenz ist
$$d(0) = \left|\sin(1) + \frac{\sin(1)}{2} - \cos(1)\right| = \frac{3\sin(1)}{2} - \cos(1).$$

Aufgabe 2.2: Taylor-Entwicklung

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \ln(x).$$

a) Bestimmen Sie das Taylor-Polynom der Ordnung zwei, $T_2(x)$, von $f(x)$ an der Stelle $x = 1$.

b) Bestimmen Sie das Restglied $R_2(x;1)$ und schätzen Sie

$$\max_{x\in[1,2]} |R(x;1)|.$$

Lösung 2.2:

a) Die Ableitungen der Funktion sind

$$f'(x) = \frac{1}{x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad f'''(x) = \frac{2}{x^3}.$$

Das Taylor-Polynom ist

$$f(x) = f(1) + f'(x)(x-1) + \frac{1}{2}f''(x)(x-1)^2 + R_2(x;1),$$

und das Taylor-Polynom der zweiten Ordnung an der Stelle $x = 1$ ist

$$T_2(x) = 0 + 1(x-1) + \frac{1}{2}(-1)(x-1)^2 = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{2}$$

b) Das Restglied ist

$$R(x;1) = f'''(\xi)\frac{(x-1)^3}{3!}, \quad \xi \in [1,2].$$

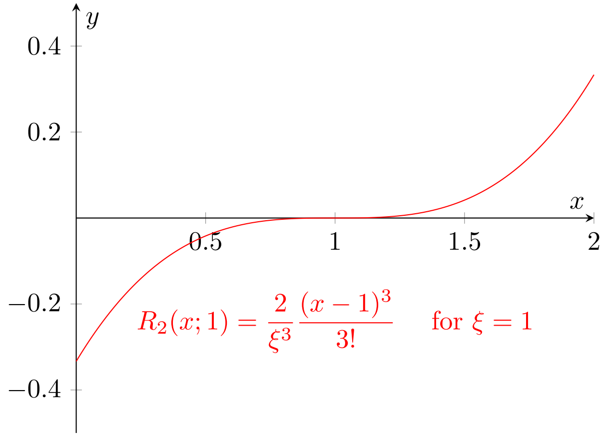
Es ist

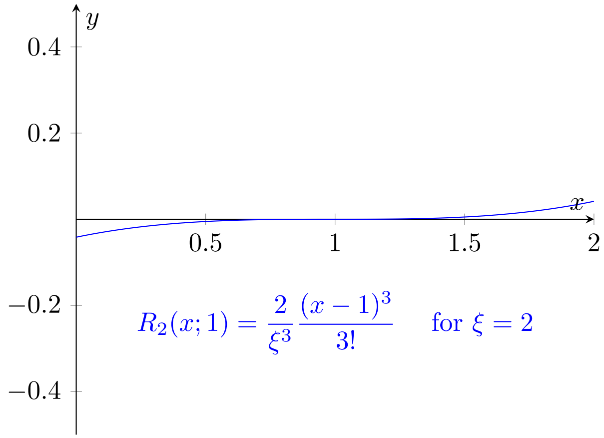
$$R(x;1) = \frac{2}{\xi^3}\frac{(x-1)^3}{3!}, \quad \xi \in [1,2].$$

Eine obere Schranke für die Funktion $R(x;1)$ für ξ und x im Intervall $[1,2]$ wird durch Minimieren des Nenners und Maximieren des Zählers gefunden. Das Minimum des Nenners liegt bei $\xi = 1$ und das Maximum des Zählers ist bei $x = 2$. Dies liegt daran, dass die kubische Funktion monoton steigend ist, da ihre Ableitung immer positiv ist. Wir haben also die Schätzung

$$R(x;1) \leq \frac{2}{1^3}\frac{(2-1)^3}{3!} = \frac{1}{3}.$$

Im Folgenden wird die Funktion $R_2(x;1)$ für die beiden Werte $\xi = 1$ und $\xi = 2$ skizziert:





Ergebnisse zu Aufgabe 2.1:

Die Differenz ist

$$d(0) = \frac{3\sin(1)}{2} - \cos(1).$$

Ergebnisse zu Aufgabe 2.2:

Eine Abschätzung des Restglieds ist

$$R(x;1) \leq \frac{1}{3}.$$