Helmut-Schmidt-Universität
Universität der Bundeswehr Hamburg
Fakultät für Maschinenbau

Prof. Dr. Thomas Carraro
Dr. Frank Gimbel
Janna Puderbach

Mathematik III — Blatt 5

FT 2022 — Integration, Differentialgleichungen

Einführende Bemerkungen

- Vermeiden Sie die Verwendung von Taschenrechnern oder Online-Ressourcen.
- Die mit einem Stern *) markierten (Teil-)Aufgaben entfallen in diesem Trimester. Stattdessen werden einzelne Online-Aufgaben im ILIAS-Kurs kenntlich gemacht, zu denen Sie dort Ihre Lösungswege zur Korrektur hochladen können.
- Die mit zwei Sternen **) markierten (Teil-)Aufgaben richten sich an Studierende, die die übrigen Aufgaben bereits gelöst haben und die Inhalte weiter vertiefen möchten.

Aufgabe 5.1: Inhomogene lineare Differentialgleichungen

Bestimmen Sie von folgenden inhomogenen linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten jeweils die allgemeine reelle Lösung, indem Sie zunächst die zugehörige homogene lineare Differentialgleichung allgemein lösen und eine spezielle (partikuläre) Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung mit Hilfe von geeigneten Ansätzen bestimmen.

a) $y''(x) - 5\,y'(x) + 6\,y(x) = r_k(x)$ mit

i) $r_1 = 108\,x^2$, **ii)** $r_2 = 7\,\mathrm{e}^{3x}$, **iii)** $r_3 = 18 + 14\,\mathrm{e}^{3x}$.

b) $y'''(x) + 25\,y'(x) = s_k(x)$ mit

i) $s_1 = 150\,x$, **ii)** $s_2 = \sin(x)$,
iii) $s_3 = \sin(5x) - 200\,x$, **iv)** $s_4 = 6\,\sin(3x)\,\cos(2x)$.

Hinweis: Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt $\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$.

c) $y''(x) - 2\,y'(x) = t_k(x)$ mit

i) $t_1 = 4\,\mathrm{e}^{2x}$, **ii)** $t_2 = \cosh(2x)$.

Lösung 5.1:

a) Zunächst die zugehörige homogene lineare Differentialgleichung:

Die charkt. Gl. ist: $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2\,,\ \lambda_2 = 3\,.$

$$\Rightarrow \quad \underline{y_\mathrm{h}(x) = a\,\mathrm{e}^{2x} + b\,\mathrm{e}^{3x}\ ,\quad a,b\in\mathbb{R}}\ .$$

i) Faustregelansatz:

$$y_\mathrm{p} = A + B\,x + C\,x^2 \ \Rightarrow ;y_\mathrm{p}' = B + 2C\,x \text{ und } y_\mathrm{p}'' = 2C\ .$$

Einsetzen in die Differentialgleichung:

$$2C - 5\cdot(B + 2C\,x) + 6\cdot\left(A + B\,x + C\,x^2\right) = 108\,x^2\ .$$

Koeffizientenvergleich:

$$\begin{aligned} 1:&\quad 2\,C - 5\,B + 6\,A = 0\\ x:&\quad -10\,C + 6\,B = 0\\ x^2:&\quad 6\,C = 108 \qquad \Rightarrow C = 18\,,\ \ B = 30\ \ A = 19\ . \end{aligned}$$

Partikuläre Lösung der inhomogen linearen Differentialgleichung:

$$\Rightarrow \quad \underline{y_\mathrm{p}(x) = 19 + 30\,x + 18\,x^2}\ .$$

Allgemeine Lösung der inhomogen linearen Differentialgleichung:

$$\Rightarrow \ \underline{\underline{y(x) = y_\mathrm{h} + y_\mathrm{p} = a\,\mathrm{e}^{2x} + b\,\mathrm{e}^{3x} + 19 + 30\,x + 18\,x^2\ ,\quad a,b\in\mathbb{R}}}\ .$$

ii) Faustregelansatz: $y_\mathrm{p} = A\,x\,\mathrm{e}^{3x}$ „x–spendieren".

Eingesetzt:

$$\left((6A + 9A\,x) - 5\cdot(A - 3A\,x) + 6\cdot A\,x\right)\cdot\mathrm{e}^{3x} = 7\,\mathrm{e}^{3x} \ \Rightarrow\ A = 7 \text{ und } 0 = 0\ .$$

Partikuläre Lösung: $\underline{y_\mathrm{p}(x) = 7x\,\mathrm{e}^{3x}}$.

Allgemeine Lösung: $\underline{\underline{y(x) = y_\mathrm{h} + y_\mathrm{p} = a\,\mathrm{e}^{2x} + b\,\mathrm{e}^{3x} + 7x\,\mathrm{e}^{3x}\ ,\quad a,b\in\mathbb{R}}}$.

iii) Faustregelansätze für beide Summanden der „Störfunktion" einzeln.

Ansatz für $r = 18$: $y_{\mathrm{p}_1} = A \Rightarrow \underline{y_{\mathrm{p}_1}(x) = 3}$.

Für $r = 14\,\mathrm{e}^{3x}$ ergibt sich nach ii) : $\underline{y_{\mathrm{p}_2}(x) = 14x\,\mathrm{e}^{3x}}$.

Allgemeine Lösung: $\underline{\underline{y(x) = y_\mathrm{h} + y_{\mathrm{p}_1} + y_{\mathrm{p}_2} = a\,\mathrm{e}^{2x} + b\,\mathrm{e}^{3x} + 3 + 14x\,\mathrm{e}^{3x}\ ,\quad a,b\in\mathbb{R}}}$.

b) Die zugehörige homogene lineare Differentialgleichung hat die allgemeine Lösung

$$\underline{y_{\mathrm{h}}(x) = a\,\cos(5x) + b\,\sin(5x) + c\,, \quad a,b,c \in \mathbb{R}}\ .$$

i) Faustregelansatz: $y_{\mathrm{p}} = A\,x + B\,x^2$ („x–spendieren") $\Rightarrow$ $\underline{y_{\mathrm{p}} = 3\,x^2}$.

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{y(x) = y_{\mathrm{h}} + y_{\mathrm{p}} = a\,\cos(5x) + b\,\sin(5x) + c + 3\,x^2\,, \quad a,b,c \in \mathbb{R}}}\ .$$

ii)

1.Lösungsweg

Faustregelansatz: $y_{\mathrm{p}}(x) = \mathrm{Im}(A \cdot \mathrm{e}^{ix})$

Einsetzen in die Differentialgleichung:

$$A \cdot (i^3 + 25i) \cdot \mathrm{e}^{ix} = \mathrm{e}^{ix} \Rightarrow A = \frac{1}{-i + 25i} = \frac{1}{24i} = \frac{-i}{24}$$

Somit gilt

$$y_{\mathrm{p}} = \mathrm{Im}\left(\frac{-i}{24} \cdot (\cos(x) + i\sin(x))\right) = -\frac{1}{24}\,\cos(x)$$

2.Lösungsweg

Faustregelansatz: $y_{\mathrm{p}} = A\,\cos(x) + B\,\sin(x) \ \Rightarrow\ \underline{y_{\mathrm{p}}(x) = -\dfrac{1}{24}\,\cos(x)}$.

Beide Wege liefern dann die allgemeine Lösung

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{y(x) = y_{\mathrm{h}} + y_{\mathrm{p}} = a\,\cos(5x) + b\,\sin(5x) + c - \frac{1}{24}\,\cos(x)\,, \quad a,b,c \in \mathbb{R}}}\ .$$

iii) Faustregelansätze für beide Summanden einzeln:

Ansatz für $s = \sin(5x) = \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{i5x})$: $y_{\mathrm{p}_1} = \mathrm{Im}(Ax\mathrm{e}^{i5x})$ („x–spendieren") liefert nach Einsetzen in die DGL

$$A \cdot (3 \cdot (5i)^2 \cdot \mathrm{e}^{i5x} + x \cdot (5i)^3 \cdot \mathrm{e}^{i5x} + 25 \cdot (\mathrm{e}^{i5x} + x \cdot 5i \cdot \mathrm{e}^{i5x})) = \mathrm{e}^{i5x}$$

$$A \cdot (-75 - 125ix + 25 + 125ix) = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{-50}$$

$$\Rightarrow y_{\mathrm{p}_1} = \mathrm{Im}\left(\frac{1}{-50}x\mathrm{e}^{i5x}\right) = -\frac{1}{50}\,x\,\sin(5x)$$

Alternativ kann mann den Ansatz $Ax\,\cos(5x) + Bx\,\sin(5x)$ benutzen.

$$\Rightarrow \underline{y_{\mathrm{p}_1} = -\frac{1}{50}\,x\,\sin(5x)}\ .$$

Für $s = -200$ ergibt sich die spezielle Lösung nach i) zu $\underline{y_{\mathrm{p}_2} = -4\,x^2}$.

$$\underline{\underline{y(x) = y_{\mathrm{h}} + y_{\mathrm{p}_1} + y_{\mathrm{p}_2} = a\,\cos(5x) + b\,\sin(5x) + c - \frac{1}{50}\,x\,\sin(5x) - 4\,x^2\,, \quad a,b,c \in \mathbb{R}}}$$

iv) Die „Störfunktion" ist $s_4 = 6\,\sin(3x)\,\cos(2x) = 3\big(\sin(x) + \sin(5x)\big)$.

Nach ii) und iii) ist damit die spezielle Lösung: $\underline{y_{\mathrm{p}} = -\dfrac{1}{8}\,\cos(x) - \dfrac{3}{50}\,x\,\sin(5x)}$.

$$\underline{\underline{y(x) = y_{\mathrm{h}} + y_{\mathrm{p}} = a\,\cos(5x) + b\,\sin(5x) + c - \frac{1}{8}\,\cos(x) - \frac{3}{50}\,x\,\sin(5x)\,, \quad a,b,c \in \mathbb{R}}}\ .$$

c) Die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen linearen Differentialgleichung ist

$$\underline{y_{\mathrm{h}}(x) = a\, + b\,\mathrm{e}^{2x}\,, \quad a,b \in \mathbb{R}}\ .$$

i) Faustregelansatz $y_{\mathrm{p}} = A\,x\,\mathrm{e}^{2x}$ („x–spendieren") $\Rightarrow$ $\underline{y_{\mathrm{p}} = 2\,x\,\mathrm{e}^{2x}}$.

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{y(x) = y_{\mathrm{h}} + y_{\mathrm{p}} = a\, + b\,\mathrm{e}^{2x} + 2\,x\,\mathrm{e}^{2x}\,, \quad a,b \in \mathbb{R}}}.$$

ii) Die „Störfunktion" ist $t_2 = \cosh(2x) = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2x} + \dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-2x}$.

Faustregelansätze für beide Summanden einzeln:

Für $t = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2x}$ ergibt sich nach i) $\underline{y_{\mathrm{p}_1}(x) = \dfrac{1}{4}\,x\,\mathrm{e}^{2x}}$.

Ansatz für $t = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-2x}$: $y = A\,\mathrm{e}^{-2x}$ (**kein** „x–spendieren" !) $\Rightarrow$ $\underline{y_{\mathrm{p}_2} = \dfrac{1}{16}\,\mathrm{e}^{-2x}}$.

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{y(x) = y_{\mathrm{h}} + y_{\mathrm{p}_1} + y_{\mathrm{p}_2} = a\, + b\,\mathrm{e}^{2x} + \frac{1}{4}\,x\,\mathrm{e}^{2x} + \frac{1}{16}\,\mathrm{e}^{-2x}\,, \quad a,b \in \mathbb{R}}}$$

Aufgabe 5.2: LR-Kreis

Ein Stromkreis habe einen Widerstand von $R = 0.8$ Ohm und eine Selbstinduktion von $L = 4$ Henry . Bis zur Zeit $t_0 = 0$ fließe kein Strom. Dann wird eine Spannung von $U = 5$ Volt angelegt. Nach 5 Sekunden wird die Spannung abgeschaltet. Berechnen Sie den Stromverlauf $I(t)$ für $0 \leq t \leq 5$ und $t > 5$.
Hinweis: In diesem Stromkreis gilt $L\dot{I}(t) + RI(t) = U(t)$

Lösung 5.2:

Es gilt gilt die Differentialgleichung

$$L\dot{I}(t) + RI(t) = U(t)$$

Für $0 \le t \le 5$ gilt $U(t) = 5$. Die Trennung der Variablen führt zu

$$\int \frac{dI}{U - RI} = \int \frac{1}{L}\,dt, \Rightarrow -\frac{1}{R}\ln|U - RI(t)| = \frac{1}{L}t + c_1\,, \quad c_1 \in \mathbb{R}\,.$$

Auflösen nach $I(t)$ liefert

$$U - RI(t) = c_2 e^{-Rt/L}$$

und somit

$$I(t) = \frac{1}{R}\bigl(U - c_2 e^{-Rt/L}\bigr)\,.$$

Einsetzen der Anfangsbedingung $I(0) = 0$ ergibt $c_2 = U$ und

$$I(t) = \frac{U}{R}\bigl(1 - e^{-R/Lt}\bigr)\,.$$

Einsetzen der gegebenen Zahlenwerte ergibt die Lösung

$$I(t) = 6.25\left(1 - e^{-0.2t}\right) \text{ für } 0 < t < 5\,.$$

Im Zeitraum $t > 5$ ist $U(t) = 0$ und der Anfangsstrom ist

$$I(5) = I_0 = 6.25\left(1 - e^{-1}\right)\,.$$

Die Lösung der Differentialgleichung ist

$$\int \frac{dI}{I} = -\int \frac{R}{L}dt \Rightarrow \ln|I(t)| = -\frac{R}{L}t + c_3$$

und damit

$$I(t) = c_4 e^{-Rt/L}\,.$$

Aus $I(t_0) = I_0$ folgt

$$I(t) = I_0 e^{-R(t-t_0)/L}\,.$$

Einsetzen der Zahlenwerte ergibt die Lösung

$$I(t) = 6.25\bigl(1 - e^{-1}\bigr)e^{-0.2(t-5)} \text{ für } t > 5\,.$$

Aufgabe 5.3: Lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung

Bestimmen Sie die allgemeinen Lösungen der folgenden Differentialgleichungen. Falls Anfangswerte gegeben sind, ermitteln Sie auch die Lösung des Anfangswertproblems.

a) $y'' + 6y' + 8y = 0$,

b) $y'' + 2y' + 5y = 17\,\sin(2x)$.

c) $y''(x) - 2y'(x) - 3y(x) = 4\mathrm{e}^{x}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 6$,

d) $y''(x) + 5y'(x) + 6y(t) = 3\mathrm{e}^{3x}$,

e) $y''(x) - y'(x) - 2y(x) = 4x\mathrm{e}^{x}$.

f) $y''' + y'' - y' - y = 3\mathrm{e}^{-2x}$,

Lösung 5.3:

a) Das charakteristische Polynom $p(\lambda) = \lambda^2 + 6\lambda + 8$ hat die Nullstellen $\lambda_1 = -2$ und $\lambda_2 = -4$. Damit ist

$$y(x) = c_1\mathrm{e}^{-2x} + c_2\mathrm{e}^{-4x} \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

b) Das charakteristische Polynom $p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 5$ hat die Nullstellen $\lambda_{1/2} = -1 \pm \sqrt{1-5} = -1 \pm 2i$. Damit hat man das reelle Fundamentalsystem

$$\bigl\{\mathrm{e}^{-x}\cos(2x), \mathrm{e}^{-x}\sin(2x)\bigr\}.$$

Um die Partikulärlösung der inhomogenen Gleichung zu finden gibt es zwei Möglichkeit

Reeller Ansatz
Ein Ansatz für eine Partikulärlösung ist

$$y_p(x) = A\cos(2x) + B\sin(2x).$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert:

$$17\sin(2x) \overset{!}{=} -4A\cos(2x) - 4B\sin(2x) - 4A\sin(2x) + 4B\cos(2x) + 5A\cos(2x) + 5B\sin(2$$

Koeffizientenvergleich führt dann zum linearen Gleichungssystem für A und B:

$$\begin{aligned} \cos(2x): &\quad A + 4B &= 0 \\ \sin(2x): &\quad -4A + B &= 17 \end{aligned}$$

Mit der Lösung $B = 1$ und $A = -4$ haben wir die Partikulärlösung

$$y_p(x) = -4\cos(2x) + \sin(2x)$$

Alternativ: Komplexer Ansatz:
Der Ansatz für eine Partikulärlösung ist

$$y_p(x) = \mathrm{Im}(b\mathrm{e}^{i2x})$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert:

$$b((-4)\mathrm{e}^{i2x} + 4i\mathrm{e}^{i2x} + 5\mathrm{e}^{i2x}) \stackrel{!}{=} 17\mathrm{e}^{i2x}$$

Daraus folgt $b = \dfrac{17}{1+4i} = 1-4i$. Damit haben wir die Partikulärlösung

$$y_p(x) = \mathrm{Im}((1-4i)\cdot(\cos(2x) + i\sin(2x))) = -4\cos(2x) + \sin(2x)$$

Die Gesamtlösung lautet also

$$y(x) = \sin(2x) - 4\cos(2x) + c_1\mathrm{e}^{-x}\cos(2x) + c_2\mathrm{e}^{-x}\sin(2x).$$

c) Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 3$ sind $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 3$. Eine Partikulärlösung der inhomogenen Gleichung berechnet man mit dem Ansatz $y_p(x) = ae^x$, es folgt $-4ae^x \stackrel{!}{=} 4e^x$ und damit $a = -1$. Die allgemeine Lösung ist

$$y_{allg}(x) = -e^x + c_1\mathrm{e}^{-x} + c_2\mathrm{e}^{3x} \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Aus den Anfangsbedingungen $y(0) = -1 + c_1 + c_2 \stackrel{!}{=} 0$ und $y'(0) = -1 - c_1 + 3c_2 \stackrel{!}{=} 6$ folgt das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} c_1 \quad + \quad c_2 &= 1, \\ -c_1 \quad + \quad 3c_2 &= 7 \end{aligned}$$

mit Lösung $c_2 = 2$ und $c_1 = -1$. Damit ist

$$y_{AWP}(x) = -e^x - \mathrm{e}^{-x} + 2\mathrm{e}^{3x}.$$

d) Man berechnet zuerst die Lösungen der homogenen Gleichung

$$y'' + 5y' + 6y = 0.$$

Das charakteristische Polynom $p(\lambda) = \lambda^2 + 5\lambda + 6$ hat die Nullstellen $\lambda_1 = -2$ und $\lambda_2 = -3$. Ein Fundamentalsystem ist $\{\mathrm{e}^{-2x}, \mathrm{e}^{-3x}\}$. Nun braucht man noch eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung. Diese berechnet man mit dem Ansatz $y_p(x) = a\mathrm{e}^{3x}$ mit $a \in \mathbb{R}$. Einsetzen in die inhomogene DGl liefert $(9 + 15 + 6)a\mathrm{e}^{3x} = 3\mathrm{e}^{3x}$, also $a = 1/10$. Die allgemeine Lösung der Gleichung ist

$$y(x) = c_1\mathrm{e}^{-2x} + c_2\mathrm{e}^{-3x} + \frac{1}{10}\mathrm{e}^{3x} \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

e) Das Polynom $p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 2$ hat die Nullstellen $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = -1$, dies ergibt das Fundamentalsystem $\{\mathrm{e}^{2x}, \mathrm{e}^{-x}\}$. Der Ansatz für die Partikulärlösung ist $y_p(x) = (ax+b)e^x$. Mit $y_p'(x) = (ax+a+b)e^x$ und $y_p'' = (ax+2a+b)e^x$ folgt

$$\mathrm{e}^x(ax + 2a + b - (ax + a + b) - 2(ax + b)) = 4x\mathrm{e}^x$$

$$-2ax + a - 2b = 4x$$

Koeffizientenvergleich liefert dann $a = -2$ und $2b = a$, $b = -1$. Damit hat man die allgemeine Lösung

$$y(x) = c_1\mathrm{e}^{2x} + c_2\mathrm{e}^{-x} - (2x+1)e^x \text{ mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

f) Das charakteristische Polynom ist $p(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 - \lambda - 1$. Eine Nullstelle kann man raten, zum Beispiel $\lambda_1 = 1$. Polynomdivision oder Anwendung des Horner–Schemas liefert dann

$$p(\lambda) = (\lambda - 1)\big(\lambda^2 + 2\lambda + 1\big),$$

damit ist $\lambda_2 = -1$ eine weitere, und zwar doppelte, Nullstelle. Folglich hat die homogene Gleichung das Fundamentalsystem

$$\big\{e^x, \mathrm{e}^{-x}, x\mathrm{e}^{-x}\big\}.$$

Zur Berechnung einer Partikulärlösung benutzt man den Ansatz $y_p(x) = a\mathrm{e}^{-2x}$. Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$a\mathrm{e}^{-2x}\big(-8 + 4 + 2 - 1\big) \stackrel{!}{=} 3\mathrm{e}^{-2x}$$

und damit $a = -1$. Die allgemeine Lösung ist also

$$y(x) = -\mathrm{e}^{-2x} + c_1\mathrm{e}^x + c_2\mathrm{e}^{-x} + c_3x\mathrm{e}^{-x} \quad \text{mit } c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 5.4: Alte Klausuraufgabe

a) Berechnen Sie das Integral $\iint_D \frac{x^2}{y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, wobei D den von den Geraden $x = 2$, $y = x$ und der Hyperbel $xy = 1$ begrenzten Bereich des $\mathbb{R}^2$ bezeichne.

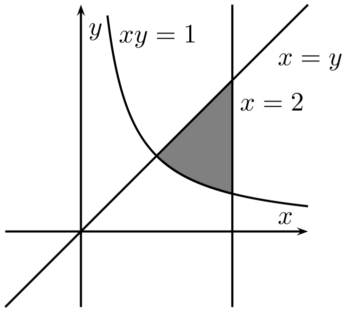
b) Gegeben sei der Körper

$$K = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 - z^2 \leq 1,\ -1 \leq z \leq 2\big\}.$$

Skizzieren Sie den Körper und berechnen Sie dessen Volumen.

Lösung 5.4:

a) Der Integrationsbereich hat die folgende Gestalt:



D ist Normalbereich bezüglich x,

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{x} \le y \le x, \quad 1 \le x \le 2 \right\}.$$

Es gilt

$$\iint_D \frac{x^2}{y^2} \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \int_1^2 \left(\int_{1/x}^x \frac{x^2}{y^2} \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

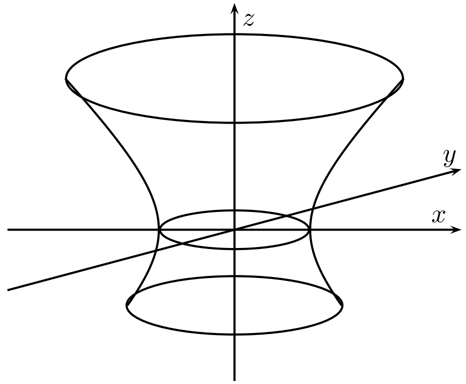
$$= \int_1^2 x^2 \cdot \left[\frac{-1}{y} \right]_{y=1/x}^{y=x} \mathrm{d}x$$

$$= \int_1^2 \left(-x + x^3\right) \mathrm{d}x = \frac{9}{4}.$$

b) Die Ungleichung in der Definition des Integrationsgebietes lässt sich schreiben als

$$x^2 + y^2 \le 1 + z^2.$$

Skizze:



Das Volumen berechnet man in Zylinderkoordinaten,

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z.$$

Die zugehörige Funktionaldeterminante ist $\left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,z)} \right| = r$. Das Volumen ist:

$$\int_{z=-1}^2 \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{\sqrt{1+z^2}} r \,\mathrm{d}r \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}z = \int_{z=-1}^2 2\pi \frac{1+z^2}{2} \mathrm{d}z$$

$$= \pi \left(3 + \left[\frac{z^3}{3} \right]_{z=-1}^2 \right)$$

$$= \pi \left(3 + \frac{8}{3} + \frac{1}{3} \right) = 6\pi.$$

Aufgabe 5.5: Lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung

Bestimmen Sie die allgemeinen L"osungen der folgenden Differentialgleichungen:

a) $y^{(4)} + 4y = 0$,

b) $y^{(4)} + 2y''' + y'' = 12x$,

c) $y'' + 4y' + 5y = 8 \sin t$,

d) $y'' - 4y' + 4y = \mathrm{e}^{2x}$.

Lösung 5.5:

a) Es ist $p(\lambda) = \lambda^4 + 4$, die Nullstellen sind $\lambda_\ell = \sqrt{2} \mathrm{e}^{i(2\ell+1)\pi/4}$ für $\ell = 0, 1, 2, 3$, also

$$\lambda_0 = 1 + i, \lambda_1 = -1 + i, \lambda_2 = -1 - i, \lambda_3 = 1 - i$$

Ein reelles Fundamentalsystem ist

$$\{e^x \cos x, e^x \sin x, \mathrm{e}^{-x} \cos x, \mathrm{e}^{-x} \sin x\}$$

Die allgemeine Lösung lautet also

$$y(x) = c_1 e^x \cos x + c_2 e^x \sin x + c_3 \mathrm{e}^{-x} \cos x + c_4 \mathrm{e}^{-x} \sin x \text{ mit } c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}.$$

b) Das Polynom $p(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^3 + \lambda^2$ hat die Nullstellen
$\lambda_{1/2} = 0$ (doppelte Nullstelle), $\lambda_{3/4} = -1$ (ebenfalls doppelt).
Ein Fundamentalsystem ist also $\{1, x, \mathrm{e}^{-x}, x\mathrm{e}^{-x}\}$.
Für die Partikulärlösung ist der Ansatz $y_p(x) = (ax + b)x^2 = ax^3 + bx^2$ sinnvoll.

$$y_p'(x) = 3ax^2 + 2bx, y_p''(x) = 6ax + 2b, y_p^{(3)}(x) = 6a \text{ und } y_p^{(4)}(x) = 0$$

Eingesetzt in die DGL:

$$0 + 12a + 6ax + 2b = 12x$$

Koeffizientenvergleich liefert dann $a = 2$, $b = -6a = -12$. Die allgemeine Lösung der Gleichung ist

$$y(x) = c_1 + c_2 x + c_3 \mathrm{e}^{-x} + c_4 x \mathrm{e}^{-x} - 12x^2 + 2x^3 \text{ mit } c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}.$$

c) Das Polynom $p(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda + 5$ hat die Nullstellen

$$\lambda_1 = -2 + i, \lambda_2 = -2 - i$$

Die homogene Lösung ist dann

$$y_h = C_1 \mathrm{e}^{-2t+it} + C_2 \mathrm{e}^{-2t-it} = \mathrm{e}^{-2t}(C_1(\cos t + i \sin t) + C_2(\cos t - i \sin t))$$

$$= \mathrm{e}^{-2t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t), \text{ wobei } C_1 = \overline{C_2} = \frac{ic_1 + c_2}{2}$$

Eine Partikulärlösung berechnet man für die rechte Seite $8 \sin t = \mathrm{Im}(8\mathrm{e}^{it})$ mit dem Ansatz $y_p(t) = \mathrm{Im}(a\mathrm{e}^{it})$.
Man erhält durch Einsetzen in die DGL

$$a(-1 + 4i + 5)\mathrm{e}^{it} = 8\mathrm{e}^{it} \Rightarrow a = \frac{2}{1 + i} = 1 - i$$

Damit ist

$$y_p(t) = \mathrm{Im}((1 - i)\mathrm{e}^{it}) = \mathrm{Im}\big((1 - i)(\cos t + i \sin t)\big) = \sin t - \cos t$$

eine Partikulärlösung . Die allgemeine Lösung der Gleichung ist

$$y(t) = \mathrm{e}^{-2t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t) + \sin t - \cos t.$$

d) Es ist $p(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2$.
Das Polynom hat die doppelte Nullstelle $\lambda = 2$.
Ein Fundamentalsystem ist daher $\{\mathrm{e}^{2x}, x\mathrm{e}^{2x}\}$.
Mit dem Ansatz $y_p(x) = ax^2\mathrm{e}^{2x}$ folgt

$$y_p'(x) = a(2x^2 + 2x)\mathrm{e}^{2x}, \; y_p''(x) = a(4x^2 + 8x + 2)\mathrm{e}^{2x}$$

Das Einsetzen in die DGL liefert somit

$$a\mathrm{e}^{2x}(4x^2 + 8x + 2 - 8x^2 - 8x + 4x^2) = \mathrm{e}^{2x}$$

Daraus folgt $a = 1/2$.
Die allgemeine Lösung lautet

$$y(x) = \left(c_1 + c_2 x + \frac{1}{2}x^2\right)\mathrm{e}^{2x} \text{ mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 5.6: Online Aufgabe

Bearbeiten Sie die aktuelle Online-Aufgabe im ILIAS-Kurs.
Beachten Sie, dass Sie dort auch die Lösungswege zu einzelnen Aufgaben zur Korrektur hochladen können.