

## Mathematik II

## Übungsblatt 4

WT 2022 Differentialrechnung, Taylorpolynome, Newton-Verfahren

### Einführende Bemerkungen

- Vermeiden Sie die Verwendung von Taschenrechnern oder Online-Ressourcen.
- Die mit einem Stern \*) markierten (Teil-)Aufgaben entfallen in diesem Trimester. Stattdessen werden einzelne Online-Aufgaben im ILIAS-Kurs kenntlich gemacht, zu denen Sie dort Ihre Lösungswege zur Korrektur hochladen können.
- Die mit zwei Sternen \*\*) markierten (Teil-)Aufgaben richten sich an Studierende, die die übrigen Aufgaben bereits gelöst haben und die Inhalte weiter vertiefen möchten.

### Aufgabe 4.1: Umkehrfunktion

a) Differenzieren Sie die folgenden Funktionen:

- i)  $f_1(x) = 3x^4(\ln x)^2$ ,
- ii)  $f_2(x) = x^{x+\ln x}$ ,  $x > 0$ ,
- iii)  $f_3(x) = \arcsin_{\text{H}} x + \arcsin_{\text{H}}(2x\sqrt{1-x^2}) - 3\arcsin_{\text{H}} x$ ,  $|x| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

b) Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = e^x + 2x.$$

- i) Zeigen Sie, dass  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  umkehrbar ist.
- ii) Bestimmen Sie die Ableitungen  $g'(1)$  und  $g''(1)$  der Umkehrfunktion

$$g = f^{-1}.$$

### Aufgabe 4.2: Inverse Funktion

Gegeben seien die folgenden Funktionen

- i)  $f_1(x) = e^{\frac{1}{x}}$ ,
  - ii)  $f_2(x) = \frac{1}{x^2-1}$ ,
  - iii)  $f_3(x) = \sin(x)$ ,
  - iv)  $f_4(x) = \tan(x)$ .
- a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich und den Wertebereich.
  - b) Bestimmen Sie die Einschränkung des Definitionsbereichs und Wertebereichs, so dass die Funktionen bijektiv sind. (Betrachten Sie, falls nötig, den Hauptzweig.)
  - c) Bestimmen Sie die inverse Funktion.
  - d) Skizzieren Sie die Funktion sowie deren inverse Funktion.

### Aufgabe 4.3: Regel von L'Hospital

Berechnen Sie mit Hilfe der Regel von L'Hospital die Grenzwerte

- a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin x}{\tan x - x}$ ,
- b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e^x - x)}{\ln(\cos x)}$ ,
- c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} x(2 \arctan x - \pi)$ ,
- d)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^x - 1}$ .

### Aufgabe 4.4: Inverse Funktionen

Gegeben seien die folgenden Funktionen. Geben Sie den Definitionsbereich an (betrachten Sie dabei den Hauptwert der Funktion) und überprüfen Sie, ob die Funktionen invertierbar sind. Bestimmen Sie jeweils die inverse Funktion.

- i)  $f(x) = 2x - 1$ .
- ii)  $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ .
- iii)  $f(x) = (x-1)^{\frac{1}{3}}$ .
- iv)  $f(x) = \frac{x}{x+1}$ .
- v)  $f(x) = \log_2(x+3)$ .
- vi)  $f(x) = 2 + e^{x-1}$ .
- vii)  $f(x) = \arccos(x^{-2})$ .

#### Aufgabe 4.5: Trigonometrische Gleichungen

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden Ausdrücke. Beachten Sie dabei die Periodizität der Funktionen. Skizzieren Sie die Funktionen, um Ihre Ergebnisse zu bestätigen.

- a)  $\sin^2(x) = \frac{1}{2}$ .
- b)  $\sin^2(x) - \cos^2(x) + \sin(x) = 0$ .
- c)  $\cot^2(x) + \cot(x) = 0$  with  $\cot(x) = \frac{1}{\tan(x)} = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$ .
- d)  $\sin(x) \cos(x) = \frac{1}{2}$ .
- e)  $\frac{\tan(x) + 1}{\tan(x) - 1} = 2 + \sqrt{3}$ .

#### Aufgabe 4.6: Kurvendiskussion

- a) Gegeben sei die reelle Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 + 7x + 10}{x + 1}.$$

- i) Geben Sie den maximalen Definitionsbereich der Funktion an.
- ii) Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion.
- iii) Bestimmen Sie die kritischen Punkte für die Extrema der Funktion und deren Funktionswerte.
- iv) Bestimmen Sie die (nicht vertikale) Asymptote der Funktion, d. h. diejenige Gerade  $g(x) = a + bx$ , für die

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - g(x)) = 0$$

gilt.

- v) Skizzieren Sie die Funktion.

- b) Gegeben sei die Funktion

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^8 \cdot e^x.$$

Bestimmen Sie alle relativen Minima und Maxima der Funktion  $g$ .

#### Aufgabe 4.7: Kurvendiskussion

Führen Sie eine Kurvendiskussion für die Funktion

$$f(x) = \ln(3x^2 + 2x + 1)$$

durch. Bestimmen Sie dazu:

- a) den maximalen Definitionsbereich von  $f$ ,
- b) die Symmetrieachsen von  $f$ , d. h. Werte  $\alpha \in \mathbb{R}$ , so dass  $f(\alpha + x) = f(\alpha - x)$ ,
- c) das Verhalten von  $f$  im Unendlichen,
- d) die Nullstellen von  $f$ ,
- e) die Extrema und das Monotonieverhalten von  $f$ ,
- f) sowie die Wendepunkte und das Krümmungsverhalten von  $f$ .
- g) Skizzieren Sie den Graphen von  $f$ .

#### Aufgabe 4.8: Online Aufgabe

Bearbeiten Sie die aktuelle Online-Aufgabe im ILIAS-Kurs.

Beachten Sie, dass Sie dort auch die Lösungswege zu einzelnen Aufgaben zur Korrektur hochladen können.

---

#### Ergebnisse zu Aufgabe 4.3:

- a) 3, b) -1, c) -2, d) 2

#### Ergebnisse zu Aufgabe 4.4:

- i)  $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{2}$ . ii)  $f^{-1}(x) = x^3$ . iii)  $f^{-1}(x) = x^3 + 1$ . iv)  $f^{-1}(x) = \frac{x}{1-x}$ . v)  $f^{-1}(x) = 2^x - 3$ . vi)  $f^{-1}(x) = \ln(x-2) + 1$ . vii)  $f^{-1}(x) = \pm \frac{1}{\sqrt{\cos x}}$ .

#### Ergebnisse zu Aufgabe 4.7:

- b)  $\alpha = -1/3$ , d) 0, -2/3, e) Minimum bei -1/3, f) Wendepunkte bei  $-1/3 \pm \sqrt{2}/3$