Helmut-Schmidt-Universität
Universität der Bundeswehr Hamburg
Fakultät für Maschinenbau und Bauingenieurwesen

Prof. Dr. Thomas Carraro
Dr. Ulrike Kochan-Eilers

Mathematik II/B (WI/ET) — Blatt 2

WT 2025 — Grenzwerte, Stetigkeit, Ableitungen

Einführende Bemerkungen

- Vermeiden Sie die Verwendung von Taschenrechnern oder Online-Ressourcen.

Aufgabe 2.1: Funktionenlimes

a) Gegeben sei die Funktion

$$f(x) := \frac{x^3 + |x+1| + \operatorname{sign}(x+1)}{\operatorname{sign} x}, \; x \in D(f) := \mathbb{R}\,.$$

Bestimmen Sie $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to(-1)+} f(x)$ und $\lim\limits_{x\to(-1)-} f(x)$.

b) Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \frac{\sinh x}{\cosh(ax)}\,, \quad a \in \mathbb{R}\,.$$

Bestimmen Sie $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$.
Hinweise:
- Mit der zunächst als bekannt vorausgesetzten Exponentialfunktion e^x gilt

$$\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \text{und} \qquad \cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

- Die Signum-Funktion liefert das Vorzeichen des Argumentes:

$$\operatorname{sign}(z) = \begin{cases} +1 & , z \geq 0 \\ -1 & , z < 0 \end{cases}$$

Aufgabe 2.2: Grenzwert Analyse - Definition

a) Notieren Sie die Definition des Grenzwertes und zeigen Sie, dass die Folge $a_n = \frac{1}{n}$ gegen den Grenzwert $a = 0$ konvergiert.
(Dies ist gleichbedeutend mit dem Nachweis, dass $\forall k \in \mathbb{N}$ eine Zahl $N \in \mathbb{R}$ existiert, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > N$ gilt: $|a_n - a| < 10^{-k}$).

b) Berechnen Sie den Grenzwert $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ der untenstehenden Folgen und dokumentieren Sie die Rechenregel, die Sie zur Berechnung des Grenzwertes verwendet haben (Produktregel, Einschließungssatz, Produkt beschränkter Folgen, Produkt von Nullfolgen etc).

i) $a_n = \dfrac{n^2 + 5n}{3n^2 + 1}$ **ii)** $a_n = \log_{10}(10n^2 - 2n) - \log_{10}(n^2 + 1)$

iii) $a_n = \dfrac{(n+1)!}{n! - (n+1)!}$ **iv)** $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{3n}$

v) $a_n = \dfrac{\cos n}{n}$ **vi)** $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

vii) $a_n = \dfrac{2^n}{n!}$

Aufgabe 2.3: Ableitungen

Berechnen Sie die erste Ableitung der folgenden Funktionen

a) $f(x) = x^x$

b) $g(x) = x^{3^x}$

c) $h(x) = x^{\cos(x)}$

Aufgabe 2.4: Differenzieren

a) Bestimmen Sie jeweils die erste Ableitung. (Eventuell notwendige Beschränkungen des Definitionsgebietes sind nicht angegeben.)

$$\begin{aligned} f_9(t) &= \sinh(t) - \cosh(2t), & f_{10}(t) &= (t-3)^4 \sinh(t),\\ f_{11}(t) &= t^2\, \mathrm{e}^{-2t} \sin(3t), & f_{12}(t) &= \sqrt{t}\, \mathrm{e}^{2t},\\ f_{13}(t) &= \sin^3\left(\mathrm{e}^{2t^2} + t^5\right), & f_{14}(t) &= \sqrt{2\,t^2+1},\\ f_{15}(t) &= \ln(t) - \ln(5t), & f_{16}(t) &= \ln(t^2) - \ln(t^5). \end{aligned}$$

b) Bestimmen Sie die n–te Ableitung folgender Funktionen.

$$\begin{aligned} f_{21}(t) &= \sin(3t), & f_{22}(t) &= t\,\mathrm{e}^{2t}\\ f_{23}(t) &= t\cdot\cos(t), & f_{24}(t) &= t\,\ln(2t) \end{aligned}$$

Aufgabe 2.5: Differentiation

a) Geben Sie die Konstanten b, c, $d \in \mathbb{R}$ an, damit die Funktion

$$g(x) = \begin{cases} bx^3 + cx^2 + d & \text{für } x \le 1 \\ \ln x & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

auf $\mathbb{R}$ zweimal differenzierbar ist.
Ist $g(x)$ für diese Wahl auch dreimal differenzierbar?

b) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x\sin(1/x) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

in $x=0$ stetig ist, aber *nicht* differenzierbar.
Hinweis: Betrachten Sie zur Untersuchung der Differenzierbarkeit die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n = \frac{1}{n\pi+\pi/2}$.

Ergebnisse zu Aufgabe 2.1:

a) $\lim\limits_{x\to 0\pm} f(x) = \pm 2$, $\lim\limits_{x\to -1\pm} f(x) = 1 \pm (-1)$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \begin{cases} 0, & |a| > 1 \\ 1, & |a| = 1 \\ \infty, & |a| < 1 \end{cases}$

Ergebnisse zu Aufgabe 2.2:

b)

i) $a = \frac{1}{3}$

ii) $a = 1$

iii) $a = -1$

iv) $a = \mathrm{e}^3$

v) $a = 0$

vi) $a = 0$

vii) $a = 0$

Ergebnisse zu Aufgabe 2.3:

- $f'(x) = x^x\left(\ln(x) + 1\right)$
- $g'(x) = x^{3^x}\left(\ln(3)\,3^x\ln(x) + \dfrac{3^x}{x}\right)$
- $h'(x) = x^{\cos(x)}\left(\dfrac{\cos(x)}{x} - \ln(x)\sin(x)\right)$

Ergebnisse zu Aufgabe 2.4:

a) $f_9'(2) \approx -50.818$, $f_{10}'(2) \approx -10.745$, $f_{11}'(2) \approx 0.2315$, $f_{12}'(2) \approx 173.73$, $f_{13}'(2) \approx -2039.7$,
$f_{14}'(2) = 4/3$, $f_{15}'(2) = 0$, $f_{16}'(2) = -3/2$
b) $f_{22}^{(n)}(t) = (n+2t)2^{n-1}\mathrm{e}^{2t}$, $f_{24}^{(n)}(t) = (-1)^n(n-2)!t^{-(n-1)}$.

Temporary page!

LaTeX was unable to guess the total number of pages correctly. As there was some unprocessed data that should have been added to the final page this extra page has been added to receive it.

If you rerun the document (without altering it) this surplus page will go away, because LaTeX now knows how many pages to expect for this document.