
Einführende Bemerkungen

- Vermeiden Sie die Verwendung von Taschenrechnern oder Online-Ressourcen.
-

Aufgabe 3.1: Ableitungen

Man berechne die erste Ableitung der folgenden Funktionen

- a) $f(x) = x^x$
b) $g(x) = x^{3^x}$
c) $h(x) = x^{\cos(x)}$

Lösung 3.1:

- a) $f'(x) = x^x (\ln(x) + 1)$
b) $g'(x) = x^{3^x} \left(\ln(3) 3^x \ln(x) + \frac{3^x}{x} \right)$
c) $h'(x) = x^{\cos(x)} \left(\frac{\cos(x)}{x} - \ln(x) \sin(x) \right)$
-

Aufgabe 3.2: Stetige Fortsetzung

- a) Untersuchen Sie, ob die folgenden reellen Funktionen im Punkt $x = 0$ stetig sind oder stetig fortgesetzt werden können.

$$f_1(x) = |x|, \quad f_2(x) = \frac{x}{|x|}, \quad f_3(x) = \frac{x^3}{|x|}, \quad f_4(x) = \frac{x^2}{|x|^2}$$

- b) Bestimmen Sie die Definitionslücken der Funktionen

$$g(x) = \frac{2x^3 - 12x^2 + 18x}{x^3 - 9x}$$

In welchen dieser Lücken ist die Funktion stetig fortsetzbar?

Lösung 3.2:

- a) i) Sei also x_n eine beliebige Nullfolge, dann ist gemäß Funktionsdefinition

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f_1(x_n) - f(0)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - 0| = 0$$

und damit auch

$$\lim_{x \rightarrow 0} f_1(x) = f_1(0).$$

Also ist f_1 in $x = 0$ stetig.

- ii) Die Funktion f_2 ist in $x = 0$ nicht definiert. Um sie stetig fortzusetzen, müsste die Folge $f_2(x_n)$ für eine beliebige Nullfolge x_n konvergieren. Um dies zu widerlegen, wählen wir die Nullfolge $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$. Damit gilt:

$$f_2(x_n) = \frac{x_n}{|x_n|} = \frac{(-1)^n \cdot 1/n}{1/n} = (-1)^n.$$

Diese Folge $f_2(x_n)$ konvergiert sicher nicht. Damit ist f_2 nicht stetig fortsetzbar in $x = 0$.

- iii) Die Funktion f_3 ist ebenfalls in $x = 0$ nicht definiert, sie lässt sich jedoch durch

$$f_3(0) := 0$$

stetig fortsetzen. Sei dafür eine beliebige Nullfolge x_n . Damit gilt dann:

$$|f_3(x_n) - f_3(0)| = \left| \frac{x_n^3}{|x_n|} - 0 \right| = \frac{|x_n|^3}{|x_n|} = |x_n|^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Also konvergiert die Folge $f_3(x_n)$ gegen $f_3(0)$ und die Funktion ist stetig.

- iv) Die Funktion f_4 ist nicht definiert für $x = 0$. Setzt man jedoch $f_4(0) = 1$, so erhält man $f_4(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Also hat man f_4 stetig fortgesetzt.

In den beiden Fällen f_3 und f_4 wurden die Definitionsbereiche der Funktionen durch das stetige Fortsetzen im Nullpunkt erweitert. Damit erhält man formal eine neue Funktion.

- b) Die Definitionslücken der Funktion g sind gegeben durch die Nullstellen des Nenners:

$$x^3 - 9x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 0 \vee x_2 = 3 \vee x_3 = -3.$$

Der Zähler lässt sich schreiben als

$$2x^3 - 12x^2 + 18x = 2 \cdot (x - 0) \cdot (x - 3)^2.$$

Damit hat man dann

$$g(x) = \frac{2 \cdot (x - 0) \cdot (x - 3)^2}{(x - 0)(x - 3)(x - (-3))} = \frac{2(x - 3)}{x + 3}.$$

Man kann also die Definitionslücken $x_1 = 0$ und $x_2 = 3$ durch

$$g(0) = -2 \text{ und } g(3) = 0$$

beheben. Bei $x_3 = -3$ hat man einerseits für $y_j^- = -3 - 1/j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} -3$:

$$g(y_j^-) = \frac{2(-3 - 1/j - 3)}{-3 - 1/j + 3} = 2 \frac{6 + 1/j}{1/j} = 12j + 2 > 2$$

und andererseits für $y_j^+ = -3 + 1/j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} -3$:

$$g(y_j^+) = \frac{2(-3 + 1/j - 3)}{-3 + 1/j + 3} = 2 \frac{-6 + 1/j}{1/j} = -12j + 2 < -10.$$

Wenn jede einzelne dieser Folgen einen Grenzwert hätte, so würden diese wegen der Schranken 2 und -10 jedenfalls nicht übereinstimmen. Also kann man g im Punkt $x = -3$ nicht stetig fortsetzen.

Aufgabe 3.3: Differenzieren

Bestimmen Sie jeweils die erste Ableitung. Zur Kontrolle sind die Werte der Ableitung an Kontrollpunkten angegeben. (Eventuell notwendige Beschränkungen des Definitionsbereiches sind nicht angegeben.)

$$\begin{array}{lll} f_1(t) = 3t^4 - 4t + 7, & f_2(t) = (2t - 3)^4, & f_3(t) = t^3(t + 3)^4 \\ f_4(t) = 3 \cos(2t), & f_5(t) = \sin^2(3t), & f_6(t) = \tan(2 - t/2) \\ f_7(t) = \frac{2t - 3}{(t + 2)^3}, & f_8(t) = \frac{4t \sin(t)}{\cos(2t)}, & f_9(t) = t^2 e^{\sqrt{t}} \\ f_{10}(t) = \sqrt{t \sqrt{t \sqrt{t}}}, & f_{11}(t) = e^{\frac{1}{1+t^2}}, & f_{12}(t) = \tan(t) \\ f_{13}(t) = \frac{t + \cos(t) \sin(t)}{2}, & f_{14}(t) = \frac{t^2 - t + 2}{2t + 3}, & f_{15}(t) = \frac{\sin^2(t)}{\cos(t)} \end{array}$$

Lösung 3.3:

$$\begin{aligned} f'_1(t) &= 3 \cdot 4 \cdot t^3 - 4 = 12t^3 - 4, \\ f'_2(t) &= 4 \cdot (2t - 3)^3 \cdot 2 = 8(2t - 3)^3, \\ f'_3(t) &= 3t^2 \cdot (t + 3)^4 + t^3 \cdot 4(t + 3)^3 \\ &= t^2(t + 3)^3(3(t + 3) + 4t) = t^2(t + 3)^3(7t + 9), \\ f'_4(t) &= 3 \cdot 2 \cdot (-\sin(2t)) = -6 \sin(2t), \\ f'_5(t) &= 2 \sin(3t) \cdot 3 \cos(3t) = 6 \sin(3t) \cos(3t), \\ f'_6(t) &= \frac{1}{\cos^2(2 - t/2)} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{-1}{2 \cos^2(2 - t/2)}, \\ f'_7(t) &= \frac{2(t + 2)^3 - (2t - 3) \cdot 3(t + 2)^2}{(t + 2)^6} = \frac{13 - 4t}{(t + 2)^4}, \\ f'_8(t) &= \frac{(4t \cos(t) + 4 \sin(t)) \cos(2t) - 4t \sin(t) \cdot 2(-\sin(2t))}{\cos^2(2t)} \\ &= \frac{4}{\cos^2(2t)} \cdot (t \cos(t) \cos(2t) + \sin(t) \cos(2t) + 2t \sin(t) \sin(2t)) \\ &= \frac{4}{\cos^2(2t)} \cdot (t \cos^3(t) - t \cos(t) \sin^2(t) + \cos^2(t) \sin(t) - \sin^3(t) + 4t \sin^2(t) \cos(t)) \\ &= \frac{4}{\cos^2(2t)} \cdot (t \cos^3(t) + 3t \cos(t) \sin^2(t) + \sin(t) - 3 \sin^3(t)) \\ &= \frac{4}{\cos^2(2t)} \cdot (3t \cos(t) - 2t \cos^3(t) + \sin(t) - 3 \sin^3(t)) \\ f'_9(t) &= 2te^{\sqrt{t}} + t^2 \frac{1}{2\sqrt{t}} e^{\sqrt{t}} \\ f'_{10}(t) &= \frac{d}{dt} \left(t^{7/8}\right) = \frac{7}{8} t^{-1/8} = \frac{7}{8\sqrt[8]{t}} \\ f'_{11}(t) &= e^{\frac{1}{1+t^2}} \cdot \frac{-2t}{(1+t^2)^2} \\ f'_{12}(t) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\sin t}{\cos t}\right) = \frac{\cos t \cos t - (-\sin t) \sin t}{\cos^2 t} = \frac{1}{\cos^2 t} \\ f'_{13}(t) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} (-\sin t \sin t + \cos t \cos t) = \frac{1}{2} (1 - \sin^2 t + \cos^2 t) = \cos^2 t \end{aligned}$$

$$f'_{14}(t) = \frac{(2t-1)(2t+3) - 2 \cdot (t^2 - t + 2)}{(2t+3)^2} = \frac{2t^2 + 6t - 7}{(2t+3)^2}$$

$$f'_{15}(t) = \frac{d}{dt}(\tan t \cdot \sin t) = \frac{1}{\cos^2 t} \sin t + \tan t \cos t = \frac{\tan t}{\cos t} + \sin t$$

Aufgabe 3.4: Differentiation

- a) Geben Sie Konstanten $b, c, d \in \mathbb{R}$ an, damit die Funktion

$$g(x) = \begin{cases} bx^3 + cx^2 + d & \text{für } x \leq 1 \\ \ln x & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

auf \mathbb{R} zweimal differenzierbar ist.

Ist $g(x)$ für diese Wahl auch dreimal differenzierbar?

- b) Überprüfen Sie, dass die Funktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x \sin(1/x) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

in $x = 0$ stetig ist, aber *nicht* differenzierbar.

Hinweis: Betrachten Sie zur Untersuchung der Differenzierbarkeit die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n = \frac{1}{n\pi + \pi/2}$.

Lösung 3.4:

- a) Außerhalb des kritischen Punktes $x = 1$ hat man

$$g'(x) = \begin{cases} 3bx^2 + 2cx & \text{für } x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

sowie

$$g''(x) = \begin{cases} 6bx + 2c & \text{für } x < 1 \\ -\frac{1}{x^2} & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

Da die Funktion zweimal differenzierbar sein soll, müssen $g(x)$ und $g'(x)$ stetig sein, im Punkt $x = 1$ muss also gelten:

$$g(1) = b + c + d = \ln 1 = 0 \text{ und } g'(1) = 3b + 2c = \frac{1}{1} = 1.$$

Aus der zweiten Relation erhält man $c = \frac{1-3b}{2}$.

Die linksseitige zweite Ableitung im Punkt $x = 1$ ist

$$\begin{aligned} g''_-(1) &= \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{g'(x) - g'(1)}{x - 1} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{3bx^2 + 2cx - 1}{x - 1} \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{3bx^2 + (1 - 3b)x - 1}{x - 1} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{3b(x^2 - x) + x - 1}{x - 1} \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} (3bx + 1) = 3b + 1 \end{aligned}$$

und die rechtsseitige zweite Ableitung:

$$\begin{aligned} g''_+(1) &= \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{g'(x) - g'(1)}{x - 1} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{\frac{1}{x} - 1}{x - 1} \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{1 - x}{x(x - 1)} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \left(-\frac{1}{x} \right) = -1 \end{aligned}$$

Beide Grenzwerte müssen übereinstimmen, damit $g''(1)$ sinnvoll definiert ist, also gilt

$$b = -\frac{2}{3} \Rightarrow c = \frac{3}{2} \Rightarrow d = -b - c = -\frac{5}{6}.$$

Man hat dann

$$g''(x) = \begin{cases} -4x + 3 & \text{für } x < 1 \\ -1 & \text{für } x = 1 \\ -\frac{1}{x^2} & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

Die linksseitige Ableitung dieser Funktion im Punkt $x = 1$ ist

$$\begin{aligned} g'''_-(1) &= \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{g''(x) - g''(1)}{x - 1} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{-4x + 3 - (-1)}{x - 1} \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{-4x + 4}{x - 1} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \left(-4 \frac{x - 1}{x - 1} \right) = -4 \end{aligned}$$

und die rechtsseitige Ableitung:

$$\begin{aligned} g'''_+(1) &= \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{g''(x) - g''(1)}{x - 1} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{-\frac{1}{x^2} - (-1)}{x - 1} \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{x^2 - 1}{x^2(x - 1)} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{x + 1}{x^2} = 2 \end{aligned}$$

Da die beiden Werte nicht übereinstimmen ($-4 \neq 2$), ist g'' im Punkt $x = 1$ nicht differenzierbar.

- b) Die Funktion ist stetig in $x = 0$, denn $|\sin(1/x)| \leq 1$ und somit ist $|f(x) - f(0)| = |f(x)| \leq |x| \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$.

Der Differenzenquotient in $x_0 = 0$ ist

$$Q(x) := \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{x} f(x) = \sin(1/x).$$

Dieser Ausdruck konvergiert **nicht** für $x \rightarrow 0$. Setzt man zum Beispiel $x_n = \frac{1}{n\pi + \pi/2}$, dann gilt $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ und

$$Q(x_n) = \sin(n\pi + \pi/2) = \begin{cases} +1, & \text{für gerade } n \\ -1, & \text{für ungerade } n \end{cases}$$

Aufgabe 3.5: Kurven im \mathbb{R}^n

Ein Satellit bewege sich auf der Bahn

$$\mathbf{r}(t) = (\sqrt{1+t^2}, 3t)^\top$$

- a) Berechnen Sie die Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{r}}(t)$ des Satelliten.
- b) Geben Sie die Grenzwerte (für $t \rightarrow +\infty$ und für $t \rightarrow -\infty$) der Bahnrichtung r_2/r_1 und Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{r}}$ des Satelliten an.

Lösung 3.5:

- a) Die Geschwindigkeit ist

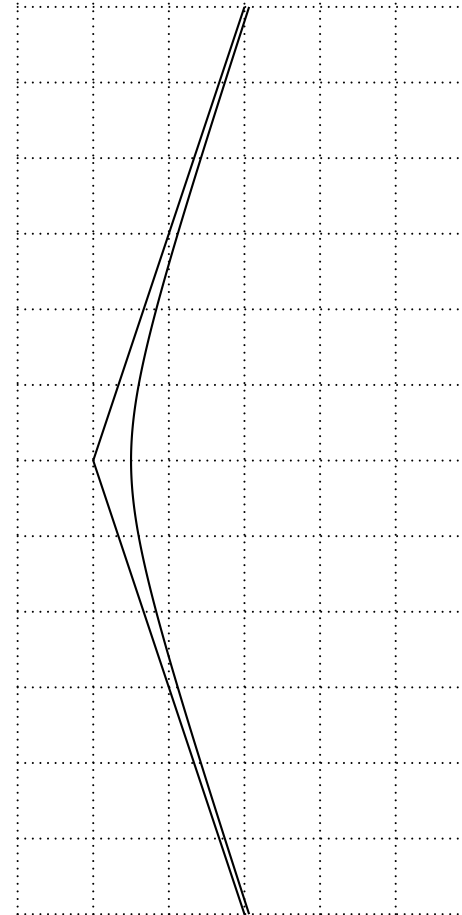
$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, 3 \right)^\top.$$

- b) Es ist

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{r_2}{r_1} &= \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{3t}{\sqrt{1+t^2}} \\ &= \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{3 \operatorname{sign}(t)}{\sqrt{\frac{1}{|t|^2} + 1}} = \pm 3 \end{aligned}$$

Die Bahn verläuft also asymptotisch in Richtung der beiden Geraden $\operatorname{span}\{(1, \pm 3)^\top\}$.
Für die Geschwindigkeit gilt passend dazu

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \dot{\mathbf{r}}(t) = (\pm 1, 3)^\top.$$



Ergebnisse zu Aufgabe 3.1:

- $f'(x) = x^x (\ln(x) + 1)$
- $g'(x) = x^{3^x} \left(\ln(3) 3^x \ln(x) + \frac{3^x}{x} \right)$
- $h'(x) = x^{\cos(x)} \left(\frac{\cos(x)}{x} - \ln(x) \sin(x) \right)$

Ergebnisse zu Aufgabe 3.2:

- a) stetig, nicht stetig fortsetzbar, stetig fortsetzbar, stetig fortsetzbar
b) g ist stetig fortsetzbar in 0 und $+3$ und nicht stetig fortsetzbar in -3 .

Ergebnisse zu Aufgabe 3.3:

$f'_1(2) = 92,$	$f'_2(2) = 8,$	$f'_3(2) = 11500,$
$f'_4(\pi/3) = -3\sqrt{3},$	$f'_5(\pi/3) = 0,$	$f'_6(4 + 2\pi) = -1/2,$
$f'_7(2) = 5/256,$	$f'_8(\pi/3) = \frac{20\pi}{3} - 4\sqrt{3},$	$f'_9(4) = 12e^2,$
$f'_{10}(256) = \frac{7}{16},$	$f'_{11}(2) = -\frac{4e^{1/5}}{25},$	$f'_{12}(\pi/3) = 4,$
$f'_{13}(\pi/3) = \frac{1}{4},$	$f'_{14}(2) = \frac{13}{49},$	$f'_{15}(\pi/3) = \frac{5\sqrt{3}}{2}$

Ergebnisse zu Aufgabe 3.5:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{r_2(t)}{r_1(t)} = 3, \quad \lim_{t \rightarrow \pm \infty} \dot{\mathbf{r}}(t) = (\pm 1, 3)^\top$$