

Aufgabe 1.1: Stationäre Punkte

Gegeben sei die Funktion

$$f(x, y) := \frac{1}{y} - \frac{1}{x} - 4x + y.$$

Finde alle stationären Punkte und bestimme, ob sie lokale Minima, Maxima oder Sattelpunkte sind.

Aufgabe 1.2: Differentialgleichungen

- a) Es sei das folgende Anfangswertproblem für $y(t)$ gegeben

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 1 - h(t-1), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

Berechnen Sie die Lösung mit Hilfe der Laplace-Transformation. Drücken Sie die Lösung in den Bereichen $0 \leq t < 1$ und $t \geq 1$ ohne die Heaviside-Funktion aus.

- b) Es sei das folgende Anfangswertproblem für $u(t)$ gegeben

$$u''(t) + 4u'(t) + 4u(t) = 8e^{-2t}, \quad u(0) = 2, \quad y(0) = 2.$$

Berechnen Sie die Lösung mit Hilfe des Exponentialansatzes.

Aufgabe 1.3: Integrale in \mathbb{R}^3

Man betrachte die Kugel

$$K := \{(x, y, z)^\top \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}.$$

Das Volume des Zylinders

$$Z := \{(x, y, z)^\top \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

wird von der Kugel abgezogen. Bestimmen Sie das Volumen des resultierenden Körpers.

Hinweis: Man verwendet Zylinderkoordinaten. Das Volumen einer Kugel mit dem Radius R ist $\frac{4}{3}\pi R^3$.

