Helmut-Schmidt-Universität
Universität der Bundeswehr Hamburg
Fakultät für Maschinenbau

Prof. Dr. Thomas Carraro
Dr. Frank Gimbel
Janna Puderbach

HELMUT SCHMIDT UNIVERSITÄT
Universität der Bundeswehr Hamburg

Mathematik II — Blatt 10

WT 2022 — Integration

Einführende Bemerkungen

- Vermeiden Sie die Verwendung von Taschenrechnern oder Online-Ressourcen.
- Die mit einem Stern *) markierten (Teil-)Aufgaben entfallen in diesem Trimester. Stattdessen werden einzelne Online-Aufgaben im ILIAS-Kurs kenntlich gemacht, zu denen Sie dort Ihre Lösungswege zur Korrektur hochladen können.
- Die mit zwei Sternen **) markierten (Teil-)Aufgaben richten sich an Studierende, die die übrigen Aufgaben bereits gelöst haben und die Inhalte weiter vertiefen möchten.

Aufgabe 10.1:

a) **zur partiellen Integration**

$$\int u(t)\cdot v'(t)\;\mathrm{d}t \;=\; u(t)\cdot v(t) - \int u'(t)\cdot v(t)\;\mathrm{d}t$$

Berechnen Sie Stammfunktionen der beiden Funktionen

i) $(2t-1)\,\cos(t)$, **ii)** $\left(t^2+t-5\right)\mathrm{e}^{t/2}$.

b) **zur Substitution**

$$\int f\big(g(t)\big)\cdot g'(t)\;\mathrm{d}t \;=\; \int f(z)\;\mathrm{d}z \text{ mit } z=g(t)\;,\quad \mathrm{d}z = g'(t)\,\mathrm{d}t$$

Berechnen Sie Stammfunktionen von

i) $4\,t\,\mathrm{e}^{t^2}$ **ii)** $\dfrac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{e}^{\sqrt{t}}$.

Lösung 10.1:

a) i) Mit $u(t)=(2t-1)\,,\; u'(t)=2$ und $v'(t)=\cos(t)\,,\; v(t)=\sin(t)$ erhält man

$$\int (2t-1)\,\cos(t)\,\mathrm{d}t \;=\; (2t-1)\sin(t) - \int 2\sin(t)\,\mathrm{d}t \;=\; (2t-1)\sin(t)+2\cos(t)+C\,.$$

ii) Mit $u(t)=t^2+t-5\,,\; u'(t)=2t+1$ und $v'(t)=\mathrm{e}^{t/2}\,,\; v(t)=2\,\mathrm{e}^{t/2}$ für die erste partielle Integration und mit $u(t)=4t+2\,,\; u'(t)=4$ und $v'(t)=\mathrm{e}^{t/2}\,,\; v(t)=2\,\mathrm{e}^{t/2}$ für die zweite erhält man

$$\begin{aligned}
\int \left(t^2+t-5\right)\mathrm{e}^{t/2}\;\mathrm{d}t &= \left(t^2+t-5\right)2\,\mathrm{e}^{t/2} - \int (2t+1)\,2\,\mathrm{e}^{t/2}\;\mathrm{d}t \\
&= \left(2\,t^2+2\,t-10\right)\mathrm{e}^{t/2} - (4t+2)\,2\,\mathrm{e}^{t/2} + \int 4\cdot 2\,\mathrm{e}^{t/2}\;\mathrm{d}t \\
&= \left(2\,t^2-6\,t-14\right)\mathrm{e}^{t/2} + 16\,\mathrm{e}^{t/2} + C \\
&= \left(2\,t^2-6\,t+2\right)\mathrm{e}^{t/2} + C\,.
\end{aligned}$$

b) i) Mit $z=t^2$ und $\mathrm{d}z=2\,t\;\mathrm{d}t$ erhält man

$$\int 4\,t\,\mathrm{e}^{t^2}\;\mathrm{d}t \;=\; \int 2\,\mathrm{e}^{z}\;\mathrm{d}z \;=\; 2\,\mathrm{e}^{z}+C \;=\; 2\,\mathrm{e}^{t^2}+C\,.$$

ii) Mit $z=\sqrt{t}$ und $\mathrm{d}z=\dfrac{1}{2\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ erhält man

$$\int \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{e}^{\sqrt{t}}\;\mathrm{d}t \;=\; 2\int \mathrm{e}^{z}\;\mathrm{d}z \;=\; 2\mathrm{e}^{z}+C \;=\; 2\mathrm{e}^{\sqrt{t}}+C\,.$$

Aufgabe 10.2: Integration

a) Berechnen Sie folgende Integrale mittels partieller Integration:

$$\int x\cdot\sin x\,\mathrm{d}x,\qquad \int \sin^2(x)\,\mathrm{d}x,\qquad \int x^2\mathrm{e}^{1-x}\,\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x,\qquad \int_0^{\pi/4} \frac{x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$$

b) Berechnen Sie folgende Integrale mittels einer geeigneten Substitution:

$$\int_1^2 \frac{3x^2+7}{x^3+7x-2}\,\mathrm{d}x, \qquad \int_\pi^{3\pi/2} x^2\cos(x^3+2)\,\mathrm{d}x, \qquad \int_1^2 \frac{1}{x}\mathrm{e}^{1+\ln x}\,\mathrm{d}x$$

$$\int_{1/4}^1 \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x, \qquad \int \cosh^2 x \sinh x\,\mathrm{d}x$$

Lösung 10.2:

a) **i)**

$$\int \underbrace{x}_{u}\underbrace{\sin x}_{v'}\,\mathrm{d}x = \underbrace{x}_{u}\underbrace{(-\cos x)}_{v} - \int \underbrace{1}_{u'}\cdot\underbrace{(-\cos x)}_{v}$$
$$= -x\cos x + \int \cos x = -x\cos x + \sin x + C$$

ii)

$$\int \underbrace{\sin x}_{u}\underbrace{\sin x}_{v'}\,\mathrm{d}x = \underbrace{\sin x}_{u}\underbrace{(-\cos x)}_{v} - \int \underbrace{\cos x}_{u'}\underbrace{(-\cos x)}_{v}\,\mathrm{d}x$$
$$= -\sin x\cos x + \int \underbrace{\cos x\cos x}_{=1-\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$$
$$= -\sin x\cos x + \int 1\,\mathrm{d}x - \int \sin^2 x\,\mathrm{d}x$$
$$\Rightarrow \qquad 2\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x = -\sin x\cos x + x + 2C$$
$$\Rightarrow \qquad \int \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{x-\sin x\cos x}{2} + C$$

Alternativ kann man die Beziehung $\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1-\cos(2x))$ (siehe Formelsammlung) nutzen. Damit bekommt man:

$$\int \sin^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int(1-\cos(2x))\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\sin(2x)\right) + C$$

Dies lässt sich mithilfe von $\sin(x)\cos(x) = \frac{1}{2}\sin(x)$ in die andere Darstellung der Lösung umwandeln.

iii)

$$\int \underbrace{x^2}_{u}\underbrace{\mathrm{e}^{1-x}}_{v'}\,\mathrm{d}x = \underbrace{x^2}_{u}\underbrace{(-\mathrm{e}^{1-x})}_{v} - \int \underbrace{2x}_{u'=u_2}\underbrace{(-\mathrm{e}^{1-x})}_{v=v_2'}\,\mathrm{d}x$$
$$= -x^2\mathrm{e}^{1-x} - \underbrace{2x}_{u_2}\underbrace{\mathrm{e}^{1-x}}_{v_2} + \int \underbrace{2}_{u_2'}\underbrace{\mathrm{e}^{1-x}}_{v_2}\,\mathrm{d}x$$
$$= -(x^2+2x)\mathrm{e}^{1-x} - 2\mathrm{e}^{1-x} + C = -(x^2+2x+2)\mathrm{e}^{1-x} + C$$

iv)

$$\int \underbrace{x}_{u}\underbrace{\frac{1}{\cos^2 x}}_{v'}\,\mathrm{d}x = \underbrace{x}_{u}\underbrace{\tan x}_{v} - \int \underbrace{1}_{u'}\underbrace{\tan x}_{v}\,\mathrm{d}x$$
$$= x\tan x + \ln|\cos x| + C$$

v) $\left[x\tan x + \ln|\cos x|\right]_{x=0}^{\pi/4} = \frac{\pi}{4} + \ln\frac{1}{\sqrt{2}} - 0 = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$

b) **i)** Mit $y = x^3+7x-2$ und $\mathrm{d}y = (3x^2+7)\,\mathrm{d}x$ hat man:

$$\int_1^2 \frac{3x^2+7}{x^3+7x-2}\,\mathrm{d}x = \int_{y(1)}^{y(2)} \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \Big[\ln|y|\Big]_6^{20} = \ln\frac{20}{6} = \ln\frac{10}{3}$$

ii) Hier wählt man $y = x^3+2$ und erhält daraus $\mathrm{d}y = 3x^2\,\mathrm{d}x$ und setzt ein:

$$\frac{1}{3}\int_\pi^{3\pi/2} 3x^2\cos(x^3+2)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int_{y(\pi)}^{y(3\pi/2)} \cos(y)\,\mathrm{d}y$$
$$= \frac{1}{3}\left(\sin\left(\left(\frac{3\pi}{2}\right)^3 + 2\right) - \sin(\pi^3+2)\right)$$

iii) Mit $y = 1+\ln x$ und $\mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}x}{x}$ hat man

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\mathrm{e}^{1+\ln x}\,\mathrm{d}x = \int_{y(1)}^{y(2)} \mathrm{e}^y\,\mathrm{d}y = \mathrm{e}^{1+\ln 2} - \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$$

iv) Wir wählen $y = \sqrt{x}$. Damit folgt (für $x > 0$):

$$x = y^2 \Rightarrow \mathrm{d}x = 2y\,\mathrm{d}y$$

und schließlich

$$\int\limits_{1/4}^{1} \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{y(1/4)}^{y(1)} \mathrm{e}^y \cdot 2y\,\mathrm{d}y = 2\int\limits_{1/2}^{1} y\mathrm{e}^y\,\mathrm{d}y$$

$$= \left[2y\mathrm{e}^y\right]_{1/2}^{1} - 2\int\limits_{1/2}^{1} \mathrm{e}^y\,\mathrm{d}y \text{ (partielle Integration)}$$

$$= 2\mathrm{e} - \sqrt{\mathrm{e}} - 2(\mathrm{e} - \sqrt{\mathrm{e}}) = \sqrt{\mathrm{e}}$$

v) Mit $y = \cosh x$ und $\mathrm{d}y = \sinh x\,\mathrm{d}x$ hat man

$$\int \cosh^2 x \sinh x\,\mathrm{d}x = \int y^2\,\mathrm{d}y = \frac{y^3}{3} + C = \frac{\cosh^3 x}{3} + C$$

Aufgabe 10.3: Fehlersuche

Behauptung:

$$\int\limits_{-2}^{2} x^2\,\mathrm{d}x = 0$$

Beweis: Mit der Substitution $t = x^2 \Rightarrow \mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x$ gilt:

$$\int\limits_{-2}^{2} x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\limits_{-2}^{2} x \cdot 2x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\limits_{4}^{4} \sqrt{t}\,\mathrm{d}t = 0\,.$$

Wo steckt der Fehler?

Lösung 10.3:

Der Fehler liegt bei der „naiven“ Ersetzung von x durch $\sqrt{t}$. Die Umkehrung von $t = x^2$ ist:

$$\begin{array}{lll} x = -\sqrt{t} & \text{für} & x < 0 \\ x = +\sqrt{t} & \text{für} & x \geq 0 \end{array}.$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} \int\limits_{-2}^{2} x^2\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int\limits_{-2}^{0} x \cdot 2x\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2} x \cdot 2x\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int\limits_{4}^{0} -\sqrt{t}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{4} +\sqrt{t}\,\mathrm{d}t \\ &= \int\limits_{0}^{4} \sqrt{t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{2}{3}t^{3/2}\right]_0^4 = \frac{2}{3} \cdot 8 = \frac{16}{3}\,, \end{aligned}$$

was das richtige Ergebnis ist.

Aufgabe 10.4: Frühere Klausuraufgabe

Berechnen Sie die Integrale

i) $I_1 = \int\limits_0^1 (2x-1)\cosh(x)\mathrm{d}x,$

ii) $I_2 = \int \frac{\sin(x)\mathrm{e}^{\tan x}}{\cos^3(x)}\mathrm{d}x$

Lösung 10.4:

i) Partielles Integrieren ergibt

$$\begin{aligned} I_1 &= \int\limits_0^1 (2x-1)\cosh(x)\mathrm{d}x \\ &= \left[(2x-1)\sinh(x)\right]_0^1 - \int\limits_0^1 2\sinh(x)\mathrm{d}x \\ &= \sinh(1) - 2\cosh(1) + 2 = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e} - \mathrm{e}^{-1} - 2\mathrm{e} - 2\mathrm{e}^{-1} + 4\right) \\ &= \frac{4 - \mathrm{e} - 3\mathrm{e}^{-1}}{2}. \end{aligned}$$

ii) Wir substituieren zunächst $u = \tan x$, $\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}$ und integrieren dann partiell:

$$\begin{aligned} I_2 &= \int u\mathrm{e}^u\mathrm{d}u = u\mathrm{e}^u - \int \mathrm{e}^u\mathrm{d}u \\ &= (u-1)\mathrm{e}^u + C = (\tan(x) - 1)\mathrm{e}^{\tan(x)} + C. \end{aligned}$$

Aufgabe 10.5: Partialbruchzerlegung

Berechnen Sie mit Hilfe der Partialbruchzerlegung die unbestimmten Integrale folgender Funktionen:

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$, b) $f(x) = \dfrac{x^2}{(x-3)^3}$,

c) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{(x+1)(x-2)^2}$, d) $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)(x^2+x+1)}$.

Lösung 10.5:

Zu a) Die Funktion f lässt sich darstellen als

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}\,.$$

Durch Multiplikation mit dem Hauptnenner erhält man

$$x^2 - x - 1 = A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-2)(x-1)$$

Einsetzen der Nullstellen des Hauptnenners in die Gleichung liefert:
für $x = 1: \quad -1 = A\cdot(-1)\cdot(-2) \Rightarrow A = -\frac{1}{2}$
für $x = 2: \quad B = -1$
für $x = 3: \quad 5 = C\cdot 2 \Rightarrow C = \frac{5}{2}$.

Es folgt

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\ln|x-1| - \ln|x-2| + \frac{5}{2}\ln|x-3| + C\,.$$

Zu b) Die Funktion f lässt sich darstellen als

$$f(x) = \frac{x^2}{(x-3)^3} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x-3)^2} + \frac{C}{(x-3)^3}\,.$$

Durch Multiplikation mit dem Hauptnenner erhält man

$$x^2 = A(x-3)^2 + B(x-3) + C$$

Es folgt Einsetzen der Nullstelle des Hauptnenners in die Gleichung liefert für $x = 3$ den Wert $C = 9$ und Koeffizientenvergleich für x^2 liefert $A = 1$. Nun wählen wir noch $x = 4$ und erhalten die Gleichung $16 = A + B + C \Rightarrow B = 16$.

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \ln|x-3| - \frac{6}{x-3} - \frac{9}{2(x-3)^2} + C\,.$$

Zu c) Hier existiert eine Partialbruchzerlegung der Form

$$f(x) = \frac{x^2+1}{(x+1)(x-2)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2}\,.$$

Durch Multiplikation mit dem Hauptnenner erhält man

$$x^2 + 1 = A(x-2)^2 + B(x+1)(x-2) + C(x+1)$$

Einsetzen der Nullstellen des Hauptnenners in die Gleichung liefert:
für $x = -1: \quad 2 = A\cdot 9 \Rightarrow A = \frac{2}{9}$
für $x = 2: \quad 5 = C\cdot 3 \Rightarrow C = \frac{5}{3}$.

Mithilfe des Koeffizientenvergleichs für die Potenz x^2 erhält man $1 = A + B \Rightarrow B = 1 - A = \frac{7}{9}$.
Folglich ist

$$f(x) = \frac{2}{9(x+1)} + \frac{7}{9(x-2)} + \frac{5}{3(x-2)^2}\,,$$

und

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{9}\ln|x+1| + \frac{7}{9}\ln|x-2| - \frac{5}{3(x-2)} + C\,.$$

Zu d) Der Faktor $x^2 + x + 1$ hat hier keine reellen Nullstellen und kann deshalb nicht in Linearfaktoren zerlegt werden (zumindest nicht in $\mathbb{R}$). Deshalb benutzt man den Ansatz

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx + C}{x^2+x+1}\,.$$

Durch Multiplikation mit dem Hauptnenner erhält man

$$1 = A(x^2+x+1) + (Bx+C)(x-1)$$

Einsetzen der reellen Nullstelle des Hauptnenners in die Gleichung liefert für $x = 1$ die Gleichung $1 = 3\cdot A \Rightarrow A = \frac{1}{3}$ und Koeffizientenvergleich für x^2 liefert $0 = A + B \Rightarrow B = -\frac{1}{3}$. Nun wählen wir noch $x = 0$ und erhalten $1 = A - C \Rightarrow C = A - 1 = -\frac{2}{3}$.

Damit ist $f(x) = \dfrac{1}{3(x-1)} - \dfrac{x+2}{3(x^2+x+1)}$. Das Integral über $\dfrac{x+2}{x^2+x+1}$ berechnet man mit der Substitution $u = x + \frac{1}{2}$,

$$\begin{aligned}
\int \frac{x+2}{x^2+x+1}\mathrm{d}x &= \int \frac{x+2}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{u+\frac{3}{2}}{u^2+\frac{3}{4}}\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{2u}{u^2+\frac{3}{4}}\mathrm{d}u + \frac{3}{2}\int \frac{1}{u^2+\frac{3}{4}}\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2}\ln\left|u^2+\frac{3}{4}\right| + \frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\int \frac{1}{\frac{4u^2}{3}+1}\mathrm{d}u, \quad \text{substituiere } z = 2u/\sqrt{3} \\
&= \frac{1}{2}\ln\left|u^2+\frac{3}{4}\right| + \sqrt{3}\int \frac{1}{z^2+1}\mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{2}\ln\left|u^2+\frac{3}{4}\right| + \sqrt{3}\arctan(z) + C \\
&= \frac{1}{2}\ln\left|u^2+\frac{3}{4}\right| + \sqrt{3}\arctan\left(\frac{2u}{\sqrt{3}}\right) + C \\
&= \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \sqrt{3}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C
\end{aligned}$$

Damit gilt

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C\,.$$

Aufgabe 10.6:

a) Bestimmen Sie drei verschiedene (reelle) Nullstellen der Ableitung der Funktion

$$f\,:\,\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\,,\; f(x) = \int_0^{x^3} \mathrm{e}^{t^4}\cdot(t^2-t-2)\,dt\,.$$

Hinweis: Das Integral **nicht** berechnen!

b) Gegeben seien die Funktionen (Das Integral **nicht** berechnen!)

$$F(x) := \int_0^x \frac{\sinh t^2}{t^2}\,\mathrm{e}^{t^2}\,dt, \qquad G(x) := \mathrm{e}^{-2x^2}, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Berechnen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{x\to\infty} G(x)\cdot F(x)$.
Hinweis: Regel von L'Hospital.

c) Bestimmen Sie die **reelle** Partialbruchzerlegung von

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)}\,.$$

Lösung 10.6:

Lösung

Zu a) Mit dem Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung und der Kettenregel folgt:

$$\begin{aligned}
\left(\int_0^{x^3} \mathrm{e}^{t^4}\cdot(t^2-t-2)\,\mathrm{d}t\right)' &= \left(\mathrm{e}^{(x^3)^4}\cdot\left((x^3)^2-(x^3)-2\right)\right)\cdot 3\,x^2 \\
&= 3\,\mathrm{e}^{x^{12}}\cdot x^2\cdot\left(x^6-x^3-2\right)
\end{aligned}$$

Der erste Term wird nie Null, d.h. die Nullstellen sind die Nullstellen der beiden letzten Terme:

$$x = 0 \text{ (doppelt)}\,,\quad x = -1\,,\quad x = \sqrt[3]{2}\,.$$

Zu b) Wir betrachten als Erstes

$$f(t) = \frac{\sinh t^2}{t^2}\,\mathrm{e}^{t^2} = \frac{\left(\mathrm{e}^{t^2}-\mathrm{e}^{-t^2}\right)\cdot\mathrm{e}^{t^2}}{2t^2} = \frac{\mathrm{e}^{t^2}-1}{2t^2}$$

$$\lim_{x\to 0} f(t) \overset{\text{l'Hosp.}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{4t\mathrm{e}^{2t^2}}{4t} = 1$$

$$\lim_{x\to\infty} f(t) \overset{\text{l'Hosp.}}{=} \lim_{x\to\infty}\mathrm{e}^{2t^2} = +\infty$$

Die Funktion $f(t)$ ist positiv für $t\in(0,\infty)$. Dadurch entspricht $F(x)$ der Fläche zwischen dem Funktionsgraphen von $f(t)$, der t-Achse und den Geraden $t=0$ und $t=x$. Da für $t\to\infty$ die Funktion $f(t)$ uneingeschränkt wächst, gilt auch für die Fläche $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = \infty$.

Mit dem Grenzwert

$$\lim_{x\to\infty} G(x) = \mathrm{e}^{-2x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\mathrm{e}^{2x^2}} = 0$$

ist der Ausdruck $\lim\limits_{x\to\infty} G(x)\cdot F(x) = 0\cdot\infty$ unbestimmt. Wir behandeln ihn mit der Regel von l'Hospital:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} G(x)\cdot F(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{F(x)}{\frac{1}{G(x)}} &= \lim_{x\to\infty}\frac{F'(x)}{4x\mathrm{e}^{2x^2}} \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{\sinh x^2}{4x^3\mathrm{e}^{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{x^2}-\mathrm{e}^{-x^2}\right)}{4x^3\mathrm{e}^{x^2}} \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{1-\mathrm{e}^{-2x^2}}{8x^3} = 0\,.
\end{aligned}$$

Zu c) Der Faktor x^2+x+1 hat keine reellen Nullstellen und kann deshalb nicht in Linearfaktoren zerlegt werden (zumindest nicht in $\mathbb{R}$). Deshalb verwendet man den Ansatz

$$f(x)=\frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}.$$

Durch Multiplikation mit dem Hauptnenner erhält man

$$1=A(x^2+x+1)+(Bx+C)(x-1)$$

Einsetzen der reellen Nullstelle des Hauptnenners in die Gleichung liefert für $x=1$ die Gleichung $1=3\cdot A\Rightarrow A=\frac{1}{3}$ und Koeffizientenvergleich für x^2 liefert $0=A+B\Rightarrow B=-\frac{1}{3}$. Nun wählen wir noch $x=0$ und erhalten $1=A-C\Rightarrow C=A-1=-\frac{2}{3}$.

Damit ist $f(x)=\dfrac{1}{3(x-1)}-\dfrac{x+2}{3(x^2+x+1)}$.

Aufgabe 10.7: Bogenlänge

Die Bogenlänge des Graphen einer stetig differenzierbaren Funktion $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ auf dem Interval $[a,b]$ wird definiert als

$$L=\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x.$$

Berechnen Sie die Bogenlänge der folgenden Funktionen:

a) $f_1(x)=\sqrt{4-x^2}$ auf $[-2,2]$

b) $f_2(x)=x^2$ auf $[0,b]$

Lösung 10.7:

a)

$$L_1=\int_{-2}^{2}\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}\right)^2}\,\mathrm{d}x=\int_{-2}^{2}\sqrt{\frac{4-x^2+x^2}{4-x^2}}\,\mathrm{d}x$$
$$=\int_{-2}^{2}\frac{2}{\sqrt{4-x^2}}\,\mathrm{d}x=2\lim_{a\to2}\int_0^a\frac{2}{\sqrt{4-x^2}}\,\mathrm{d}x$$

Wir behandeln dabei das uneigentliche Integral als Grenzwert und nutzen die Symmetrie aus.

Weiter berechnen wir das unbestimmte Integral $\int\frac{2}{\sqrt{4-x^2}}\,\mathrm{d}x$ mit der Substitution $x=2\sin\varphi$ für $-\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$, $\mathrm{d}x=2\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi$.

$$\int\frac{2}{\sqrt{4-4\sin^2\varphi}}2\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi=\int\frac{1}{|\cos\varphi|}\cdot2\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi$$
$$=\int2\,\mathrm{d}\varphi\quad\left(\cos\varphi\ge0\text{ für }-\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}\right)$$
$$=2\varphi+C=2\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)+C$$

$$L_1=2\lim_{a\to2}\int_0^a\frac{2}{\sqrt{4-x^2}}\,\mathrm{d}x=2\lim_{a\to2}2\left[\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\right]_0^a$$
$$=4\lim_{a\to2}\arcsin\left(\frac{a}{2}\right)=4\arcsin(1)=2\pi$$

b)

$$L_2=\int_0^b\sqrt{1+(2x)^2}\,\mathrm{d}x\quad\left(\text{substituiere }2x=\sinh t,\ \mathrm{d}x=\frac{1}{2}\cosh t\,\mathrm{d}t\right)$$
$$=\int_0^{t_0}\sqrt{1+\sinh^2t}\cdot\frac{1}{2}\cosh t\,\mathrm{d}t\quad(t_0=\operatorname{Arsinh}(2b))$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{t_0}\cosh^2t\,\mathrm{d}t\overset{(*)}{=}\frac{1}{2}\cdot\left.\frac{t+\sinh t\cosh t}{2}\right|_0^{t_0}=\frac{t_0+\sinh t_0\cdot\sqrt{1+\sinh^2t_0}}{4}$$
$$=\frac{\operatorname{Arsinh}(2b)+2b\cdot\sqrt{1+4b^2}}{4}$$

(*) wegen

$$\int\cosh^2(t)\,\mathrm{d}t=\int\left(\frac{\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t}}{2}\right)^2\mathrm{d}t=\int\frac{\mathrm{e}^{2t}+2+\mathrm{e}^{-2t}}{4}\,\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{4}\left(\frac{\mathrm{e}^{2t}}{2}+\frac{\mathrm{e}^{-2t}}{2}+2t\right)+C=\frac{1}{2}\left(\frac{(\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{-t})\cdot(\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t})}{4}+t\right)+C$$
$$=\frac{1}{2}(\sinh(t)\cdot\cosh(t)+t)+C.$$

Aufgabe 10.8: Online Aufgabe

Bearbeiten Sie die aktuelle Online-Aufgabe im ILIAS-Kurs.
Beachten Sie, dass Sie dort auch die Lösungswege zu einzelnen Aufgaben zur Korrektur hochladen können.