

Mathematik II/B (WI/ET)

Blatt 10

WT 2024 Stationäre Punkte, Newton-Verfahren, Richtungsableitung

---

Einführende Bemerkungen

- Vermeiden Sie die Verwendung von Taschenrechnern oder Online-Ressourcen.
- 

Aufgabe 10.1: Mehrdimensionale Kettenregel

Berechnen Sie mit Hilfe der Kettenregel die Jacobi-Matrix der Funktion

$$\mathbf{h}(x, y, z) = \mathbf{h}_2(\mathbf{h}_1(x, y, z))$$

mit

$$\mathbf{h}_1(x, y, z) = \begin{pmatrix} 3xz + 2y \\ 4y^2 + \frac{1}{3}x^3z \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{h}_2(u, v) = \begin{pmatrix} \cos(2u - 3v) \\ \frac{1}{2}u + \frac{3}{2}v^2 \\ 4v + u \end{pmatrix}.$$

Lösung 10.1:

Wir berechnen zunächst die Jacobi-Matrizen der einzelnen Funktionen:

$$\mathbf{J}_{\mathbf{h}_1}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 3z & 2 & 3x \\ zx^2 & 8y & \frac{1}{3}x^3 \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{J}_{\mathbf{h}_2}(u, v) = \begin{pmatrix} -2\sin(2u - 3v) & 3\sin(2u - 3v) \\ \frac{1}{2} & 3v \\ 1 & 4 \end{pmatrix},$$

und daraus mit Hilfe der Kettenregel die Ableitung der Funktion  $\mathbf{h}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{\mathbf{h}}(x, y, z) &= \mathbf{J}_{\mathbf{h}_2}(\mathbf{h}_1) \mathbf{J}_{\mathbf{h}_1}(x, y, z) \\ &= \begin{pmatrix} -2\sin(a) & 3\sin(a) \\ \frac{1}{2} & 12y^2 + x^3z \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3z & 2 & 3x \\ zx^2 & 8y & \frac{1}{3}x^3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (x^2 - 2)3z\sin(a) & (6y - 1)4\sin(a) & (x^2 - 6)x\sin(a) \\ \frac{3}{2}z + 12x^2y^2z + x^5z^2 & 1 + 96y^3 + 8x^3yz & \frac{3}{2}x + 4x^3y^2 + \frac{1}{3}x^6z \\ z(3 + 4x^2) & 32y + 2 & x(3 + \frac{4}{3}x^2) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

mit  $a := 6xz + 4y - 12y^2 - x^3z$ .

---

### Aufgabe 10.2: Richtungsableitungen

Gegeben sei die folgende vektorwertige Funktion

$$\mathbf{f}(x, y) = (\mathrm{e}^{xy}, x^2 + y^3)^\top.$$

- i) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix von  $\mathbf{f}$  in dem Punkt  $\mathbf{P}_1 = (1, 2)^\top$ .
- ii) Berechnen Sie die Richtungsableitung von  $\mathbf{f}$  in Richtung  $\mathbf{v} = (1, 0)^\top$  in dem Punkt  $\mathbf{P}_2 = (1, 1)^\top$ .

### Lösung 10.2:

- i) Die Jacobi-Matrix ist

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_{1,x} & f_{1,y} \\ f_{2,x} & f_{2,y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \mathrm{e}^{xy} & x \mathrm{e}^{xy} \\ 2x & 3y^2 \end{pmatrix}$$

Die Jacobi-Matrix ausgewertet in dem Punkt  $\mathbf{P}_1 = (1, 2)^\top$  ist

$$\mathbf{J}(\mathbf{P}_1) = \begin{pmatrix} 2 \mathrm{e}^2 & \mathrm{e}^2 \\ 2 & 12 \end{pmatrix}$$

- ii) Um die Richtungsableitung zu bestimmen, benötigen wir einen Einheitsvektor. Da der gegebene Vektor  $\mathbf{v}$  bereits Einheitslänge hat, kann die Richtungsableitung berechnet werden durch

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{h}}(\mathbf{x}) = \mathbf{J}(\mathbf{x})\mathbf{v} = (y \mathrm{e}^{xy}, 2x)^\top$$

Die Richtungsableitung ausgewertet in dem Punkt  $\mathbf{P}_2$  ist

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{h}}(\mathbf{P}_2) = (\mathrm{e}, 2)^\top.$$

---

### Aufgabe 10.3: Newton-Verfahren (alte Klausuraufgabe)

Gegeben sei die Funktion  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$f(x, y, z) = z \cdot \cos(\pi \cdot (x + y)) + z^2 + y^4.$$

Gesucht sind die stationären Punkte dieser Funktion.

- a) Geben Sie an, welche Bedingung ein stationärer Punkt  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  erfüllen muss.
- b) Um eine Näherung für einen solchen Punkt zu berechnen, soll das dreidimensionale Newton-Verfahren angewendet werden. Auf welche Funktion wird das Newton-Verfahren angewendet?  
Geben Sie die Iterationsvorschrift an.
- c) Führen Sie für den Startvektor  $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  einen Iterationsschritt durch.
- d) Geben Sie ein geeignetes Abbruchkriterium des Newton-Verfahrens an. (Dieses Kriteriums ist **nicht** auszuwerten.)

### Lösung 10.3:

- a) In einem stationären Punkt muss der Gradient der Funktion  $f$  verschwinden:

$$\mathbf{0} \stackrel{!}{=} \nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} -\pi z \sin(\pi(x + y)) \\ -\pi z \sin(\pi(x + y)) + 4y^3 \\ \cos(\pi(x + y)) + 2z \end{pmatrix}$$

- b) Das Newton-Verfahren wird auf die Funktion  $\mathbf{F}(x, y, z) = \nabla f(x, y, z)$  angewendet. Die Ableitung dieser Funktion ist

$$\begin{aligned} \mathbf{F}'(x, y, z) &= H_f(x, y, z) \\ &= \begin{pmatrix} -\pi^2 z \cos(\pi(x + y)) & -\pi^2 z \cos(\pi(x + y)) & -\pi \sin(\pi(x + y)) \\ -\pi^2 z \cos(\pi(x + y)) & -\pi^2 z \cos(\pi(x + y)) + 12y^2 & -\pi \sin(\pi(x + y)) \\ -\pi \sin(\pi(x + y)) & -\pi \sin(\pi(x + y)) & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Zu gegebenem Startwert  $\mathbf{x}_0$  wird die folgende Iteration durchgeführt:

Für  $j = 0, 1, 2, \dots$ :

- i) Löse das lineare Gleichungssystem  $\mathbf{F}'(\mathbf{x}_j)\Delta\mathbf{x} = -\mathbf{F}(\mathbf{x}_j)$  nach  $\Delta\mathbf{x}$  auf.
- ii) Berechne nächste Iteration  $\mathbf{x}_{j+1} = \mathbf{x}_j + \Delta\mathbf{x}$ .

- c) Für den gegebenen Startvektor  $\mathbf{x}_0 = (\frac{1}{2}, 1, 0)^\top$  ergibt sich zunächst

$$\mathbf{F}\left(\frac{1}{2}, 1, 0\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{F}'\left(\frac{1}{2}, 1, 0\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \pi \\ 0 & 12 & \pi \\ \pi & \pi & 2 \end{pmatrix}.$$

Die Lösung des Gleichungssystems  $\mathbf{F}'(\mathbf{x}_0)\Delta\mathbf{x} = -\mathbf{F}(\mathbf{x}_0)$  ergibt

$$\Delta\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

und als nächsten Iterationsschritt

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + \Delta\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} \\ \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- d) Geeignete Abbruchkriterien sind etwa  $\|\mathbf{F}(\mathbf{x}_k)\| < \varepsilon$  oder  $\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}\| < \varepsilon$  mit fest vorgegebenem  $\varepsilon > 0$ .  
Desweiteren empfiehlt es sich, die Iteration nach  $N$  Schritten (z. B.  $N = 1000$ ) abzurechnen, auch wenn das Abbruchkriterium nicht erfüllt ist.
-

#### Aufgabe 10.4: lokale Extrema in 3 Dimensionen

Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y, z) \rightarrow \frac{2y^3}{3} + x^2 - 2xy + xz - x - z + 1.$$

Bestimmen Sie die stationären (kritischen) Punkte der Funktion und bestimmen Sie deren Charakteristik.

**Hinweis:** Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind praktisch nur numerisch zu bestimmen. Die Vorzeichen der Eigenwerte erhält man aber sehr leicht aus einer einfachen Kurvendiskussion oder Skizze.

#### Lösung 10.4:

Die stationären Punkte sind die Nullstellen des Gradienten

$$\mathbf{grad} f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x - 2y + z - 1 \\ 2y^2 - 2x \\ x - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aus der dritten Komponente folgt  $x = 1$  und damit aus der zweiten  $y = \pm 1$  und aus der ersten die zugehörigen  $z$ -Werte. Die stationären Punkte sind

$$\mathbf{p}_1 = (1, 1, 1)^\top \text{ und } \mathbf{p}_2 = (1, -1, -3)^\top.$$

Die Hesse-Matrix der Funktion  $f$  ist

$$\mathbf{H}_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 4y & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Für den Punkt  $\mathbf{p}_1$  erhält man das charakteristische Polynom

$$P(\lambda) = \det(\mathbf{H}_f(1, 1, 1) - \lambda \mathbf{E}) = \det \begin{pmatrix} 2 - \lambda & -2 & 1 \\ -2 & 4 - \lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 - \lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 3\lambda - 4.$$

Dies Polynom hat keine glatten Nullstellen. Eine exakte Bestimmung könnte zum Beispiel mit dem Newton-Verfahren erfolgen.

Für die Frage nach der Charakteristik des stationären Punktes benötigt man aber nur die Vorzeichen, die leicht aus einer sehr groben Kurvendiskussion zu entnehmen sind. Mit

$$P(-1) = 6, \quad P(0) = -4, \quad P(2) = 6 \text{ und } P(t) \rightarrow -\infty \text{ für } t \rightarrow \infty$$

erhält man nach dem Zwischenwertsatz einen negativen und zwei positive Nullstellen, d. h. es handelt sich um einen Sattelpunkt.

Entsprechend erhält man für den zweiten stationären Punkt  $\mathbf{p}_2$  das charakteristische Polynom

$$P(\lambda) = -\lambda^3 - 2\lambda^2 + 13\lambda + 4$$

Seine stationären Punkte liegen bei  $\lambda$  mit

$$0 \stackrel{!}{=} P'(\lambda) = -3\lambda^2 - 4\lambda + 13 \Leftrightarrow \lambda_{\pm} = \frac{-2 \pm \sqrt{43}}{3}.$$

Da gilt  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} P(\lambda) = -\infty$  liegt bei  $\lambda_+ > 0$  ein Maximum vor, dessen Wert wegen  $P(0) = 4 > 0$  größer Null ist:  $P(\lambda_+) > 0$ . Rechts davon liegt eine Nullstelle des Polynoms. Aufgrund der Monotonie von  $P$  im Intervall  $[\lambda_-, \lambda_+]$  liegen die weiteren Nullstellen im Negativen. Es handelt sich bei dem stationären Punkt also auch um einen Sattelpunkt.

---

### Aufgabe 10.5: Stationäre Punkte

Gegeben sei die Funktion

$$f(x, y) = ax^2 + 2xy + ay^2 - ax - ay$$

Bestimmen Sie diejenigen  $a \in \mathbb{R}$ , für welche die Funktion  $f$  relative Maxima, relative Minima und Sattelpunkte besitzt und geben Sie diese an.

### Lösung 10.5:

In stationären Punkten muss der Gradient der Funktion Null werden:

$$\mathbf{0} = \nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2ax + 2y - a \\ 2x + 2ay - a \end{pmatrix}$$

$2a$	$2$	$a$	wir vertauschen die 1. und 2. Zeile
$2$	$2a$	$a$	
$2$	$2a$	$a$	$-a \cdot 1.$ Zeile
$2a$	$2$	$a$	
$2$	$2a$	$a$	$: 2$
$0$	$2 - 2a^2$	$a$	$: (2 - 2a^2), \text{ für } a^2 \neq 1$
$1$	$a$	$\frac{a}{2}$	
$0$	$1$	$\frac{a(1-a)}{2(1-a^2)}$	

Dann ist

$$y = \frac{a(1-a)}{2(1+a)(1-a)} = \frac{a}{2(1+a)}$$

$$x = \frac{a}{2} - a \cdot \frac{a}{2(1+a)} = \frac{a(1+a-a)}{2(1+a)} = \frac{a}{2(1+a)}.$$

Für  $a \neq \pm 1$  liegt der einzige kritische Punkt der Funktion also bei

$$\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} \frac{a}{2(1+a)} \\ \frac{a}{2(1+a)} \end{pmatrix}.$$

Für  $a = +1$  hat das obige Gleichungssystem die Lösung  $(t, \frac{1}{2} - t)$  ( $t \in \mathbb{R}$ ).

Für  $a = -1$  hat das Gleichungssystem keine Lösung und damit  $f$  keinen stationären Punkt.

Zur Charakterisierung der stationären Punkte benötigen wir die Hesse-Matrix:

$$\mathbf{H}_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2a & 2 \\ 2 & 2a \end{pmatrix}.$$

Ihre Determinante ist  $\det(\mathbf{H}_f) = 4(a^2 - 1)$ . Wir unterscheiden zunächst die drei Fälle:

- i)  $-1 < a < 1$ : Für die Determinante gilt  $\det(\mathbf{H}_f) < 0$ . Da die Determinante aus dem Produkt der Eigenwerte berechnet wird, folgt daraus, dass die Eigenwerte verschiedene Vorzeichen haben.  $\mathbf{H}_f$  ist indefinit und  $\mathbf{x}_0$  ist ein Sattelpunkt.
- ii)  $a < -1$ : Für die Determinante gilt  $\det(\mathbf{H}_f) > 0$ . Daraus folgt, dass die Eigenwerte gleiches Vorzeichen haben. Da die Spur  $\text{Sp}(\mathbf{H}_f) = 4a$  in diesem Fall negativ ist, sind die beiden Eigenwerte negativ. Also ist  $\mathbf{H}_f$  negativ definit und die Funktion  $f$  hat ein Maximum in  $\mathbf{x}_0$ .
- iii)  $1 < a$ : Sowohl die Determinante, als auch die Spur sind positiv. Deswegen sind beide Eigenwerte positiv und bei  $\mathbf{x}_0$  ist ein Minimum.

Für  $a = 1$  gilt  $\det(\mathbf{H}_f) = 0$ , also ist mindestens ein Eigenwert gleich Null. In diesem Fall gilt

$$f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2 - x - y = (x + y)^2 - (x + y) = \left(x + y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}.$$

In allen stationäre Punkten  $(t, \frac{1}{2} - t)^\top$  ist der quadratische Term  $(x + y - \frac{1}{2})^2$  gleich Null, aber in allen anderen Punkten ist er positiv. Deshalb liegt in diesen stationären Punkten ein Minimum vor. Diese Punkte befinden sich auf einer Geraden, auf der  $f$  konstant ist.

Insgesamt besitzt die Funktion  $f$  also

- für  $a < -1$  ein Maximum in  $\mathbf{x}_0 = \frac{a}{2(1+a)}(1, 1)^\top$ .
- für  $a = -1$  keinen stationären Punkt.
- für  $-1 < a < 1$  einen Sattelpunkt in  $\mathbf{x}_0 = \frac{a}{2(1+a)}(1, 1)^\top$ .
- für  $a = 1$  die Minimalstellen  $(t, \frac{1}{2} - t)^\top$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .
- für  $1 < a$  ein Minimum in  $\mathbf{x}_0 = \frac{a}{2(1+a)}(1, 1)^\top$ .

**Aufgabe 10.6:**

a) Entwickeln Sie die Funktion

$$f(x, y, z) = \cosh(x) + e^{2xy} - \ln(-yz) + \frac{1}{y} + \frac{z}{2}$$

nach der Taylor'schen Formel um den Punkt  $P = (0, -1, 2)$  bis zu einschließlich zweiter Ordnung (ohne Restglied).

**Lösung 10.6:**

Zu a) Mit  $\mathbf{x}_0 = (0, -1, 2)^\top$  gilt:

$$f = \cosh(x) + e^{2xy} - \ln(-yz) + \frac{1}{y} + \frac{z}{2} \Rightarrow f(\mathbf{x}_0) = 2 - \ln(2).$$

$$f_x = \sinh(x) + 2y e^{2xy} \Rightarrow f_x(\mathbf{x}_0) = -2,$$

$$f_y = 2x e^{2xy} - \frac{1}{y} - \frac{1}{y^2} \Rightarrow f_y(\mathbf{x}_0) = 0,$$

$$f_z = -\frac{1}{z} + \frac{1}{2} \Rightarrow f_z(\mathbf{x}_0) = 0,$$

$$f_{xx} = \cosh(x) + 4y^2 e^{2xy} \Rightarrow f_{xx}(\mathbf{x}_0) = 5,$$

$$f_{xy} = 4xy e^{2xy} + 2e^{2xy} \Rightarrow f_{xy}(\mathbf{x}_0) = 2,$$

$$f_{xz} = 0 \Rightarrow f_{xz}(\mathbf{x}_0) = 0,$$

$$f_{yy} = 4x^2 e^{2xy} + \frac{1}{y^2} + \frac{2}{y^3} \Rightarrow f_{yy}(\mathbf{x}_0) = -1,$$

$$f_{yz} = 0 \Rightarrow f_{yz}(\mathbf{x}_0) = 0,$$

$$f_{zz} = \frac{1}{z^2} \Rightarrow f_{zz}(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{4}.$$

Damit lautet das Taylor-Polynom 2. Grades

$$T_2(x, y, z) = 2 - \ln(2) - 2x + \frac{5}{2}x^2 + 2x(y + 1)$$

$$- \frac{1}{2}(y + 1)^2 + \frac{1}{8}(z - 2)^2.$$


---