Helmut-Schmidt-Universität
Universität der Bundeswehr Hamburg
Fakultät für Maschinenbau

Prof. Dr. Thomas Carraro

Mathematik II-III — Alte Klausuraufgaben

WT-FT 2022

Aufgabe 1.1: Stationäre Punkte

Gegeben sei die Funktion

$$f(x,y) := \frac{1}{y} - \frac{1}{x} - 4x + y.$$

Finde alle stationären Punkte und bestimme, ob sie lokale Minima, Maxima oder Sattelpunkte sind.

Lösung 1.1:

Die stationären Punkte sind die Lösungen des folgenden Gleichungssystems

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = 0 \qquad &\Rightarrow \qquad \frac{1}{x^2} - 4 = 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = 0 \qquad &\Rightarrow \qquad -\frac{1}{y^2} + 1 = 0 \end{aligned}$$

Die Lösungen sind $x_{1,2} = \pm\frac{1}{2}$ und $y_{1,2} = \pm 1$.
Es gibt also 4 stationäre Punkte, nämlich $(\frac{1}{2},1), (\frac{1}{2},-1), (-\frac{1}{2},1), (-\frac{1}{2},-1)$.
Die Hessische Matrix ist:

$$\begin{pmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{xy}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{x^3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{y^3} \end{pmatrix}.$$

Charakterisierung der stationären Punkte:

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -16 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{Sattelpunkt}$$

$$\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -16 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \text{Maximum}$$

$$\boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{Minimum}$$

$$\boldsymbol{x}_4 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \text{Sattelpunkt}$$

Aufgabe 1.2: Differentialgleichungen

a) Es sei das folgende Anfangswertproblem für $y(t)$ gegeben

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 1 - h(t-1), \qquad y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$$

Berechnen Sie die Lösung mit Hilfe der Laplace-Transformation. Drücken Sie die Lösung in den Bereichen $0 \le t < 1$ und $t \ge 1$ ohne die Heaviside-Funktion aus.

b) Es sei das folgende Anfangswertproblem für $u(t)$ gegeben

$$u''(t) + 4u'(t) + 4u(t) = 8e^{-2t}, \qquad u(0) = 2,\ y(0) = 2.$$

Berechnen Sie die Lösung mit Hilfe des Exponentialansatzes.

Lösung 1.2:

a) Mit $\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$ ist die Laplace-Transformation des AWP

$$\begin{aligned}
s^2Y(s) - 1 + 3(sY(s)) + 2Y(s) &= \frac{1}{s} - \frac{e^{-s}}{s} \\
Y(s)(s^2+3s+2) &= \frac{1}{s} - \frac{e^{-s}}{s} + \frac{s}{s} \\
&= \frac{1}{(s+1)(s+2)} \cdot \left(\frac{1+s-e^{-s}}{s}\right) \\
&= \frac{1+s}{(s+1)(s+2)s} - \frac{e^{-s}}{(s+1)(s+2)s} \\
&= \frac{1}{(s+2)s} - \frac{e^{-s}}{(s+1)(s+2)s}
\end{aligned}$$

Durch Partialbruchzerlegung des ersten und zweiten Terms erhält man

$$\begin{aligned}
\frac{1}{s(s+2)} &= \frac{1}{2}\frac{1}{s} - \frac{1}{2}\frac{1}{s+2} \\
\frac{1}{s(s+2)(s+1)} &= \frac{1}{2}\frac{1}{s} + \frac{1}{2}\frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+1}
\end{aligned}$$

Daraus folgt,

$$\begin{aligned}
Y(s) &= \frac{1}{2}\frac{1}{s} - \frac{1}{2}\frac{1}{s+2} - \left(\frac{1}{2}\frac{1}{s} + \frac{1}{2}\frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+1}\right)e^{-s} \\
\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2}\frac{1}{s} - \frac{1}{2}\frac{1}{s+2}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\left(\frac{1}{2}\frac{1}{s} + \frac{1}{2}\frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+1}\right)e^{-s}\right\} \\
y(t) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2t} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2(t-1)} - e^{-(t-1)}\right)h(t-1) \\
y(t) &= \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2t} & 0 \le t < 1 \\ -\frac{e^{-2t}}{2}(1+e^2) + e^{-(t-1)} & t \ge 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

b) Das charakteristische Polynom ist

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -2.$$

Die Lösung der homogenen Differentialgleichung lautet also

$$u_h(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-2t}$$

Wir raten eine bestimmte Lösung gemäß der rechten Seite

$$8e^{-2t} \Rightarrow u_p = Ct^2e^{-2t} \qquad\qquad \Rightarrow u_p = 4t^2e^{-2t}$$

Die allgemeine Lösung lautet

$$u(t) = u_h(t) + u_p(t) = (c_1 + c_2 t + 4t^2)e^{-2t}.$$

Aus $u(0) = 2$ folgt $c_1 = 2$ und aus $u'(0) = 2$ folgt $c_2 = 6$ also,

$$u(t) = (2 + 6t + 4t^2)e^{-2t}.$$

Aufgabe 1.3: Integrale in $\mathbb{R}^3$

Man betrachte die Kugel

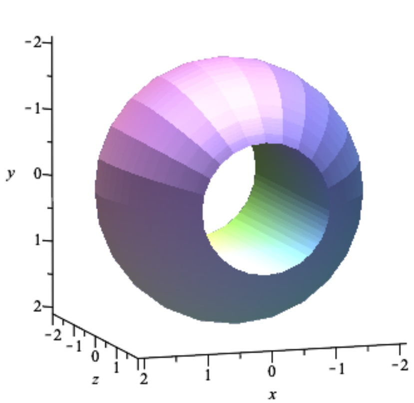
$$K := \left\{(x,y,z)^\top \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq 4\right\}.$$

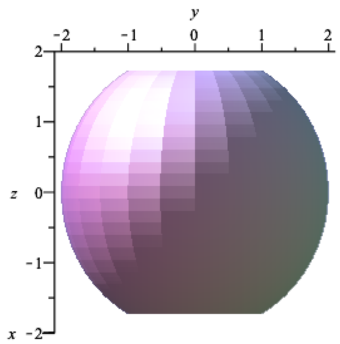
Das Volume des Zylinders

$$Z := \left\{(x,y,z)^\top \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \leq 1\right\}$$

wird von der Kugel abgezogen. Bestimmen Sie das Volumen des resultierenden Körpers.

Hinweis: Man verwendet Zylinderkoordinaten. Das Volumen einer Kugel mit dem Radius R ist $\frac{4}{3}\pi R^3$.





Lösung 1.3:

Wir berechnen zunächst das Volumen des extrahierten Zylinders über der Ebene (x,y), bezeichnet mit G. Dazu verwenden wir die zylindrischen Koordinaten und die entsprechenden Transformationen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix}.$$

wobei $r \in [0,1]$, $\varphi \in [0,2\pi)$ und da wir nur das Volumen oberhalb der (x,y)-Ebene berechnen, $z \geq 0$. Die obere Grenze für z wird aus der Kugelgleichung wie folgt berechnet:

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2 &\leq 4 \\ r^2+z^2 &\leq 4 \\ z &\leq \sqrt{4-r^2} \end{aligned}$$

Daraus folgt,

$$G = \left\{(r,\varphi,z) : 1 \leq r \leq 2,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi,\ 0 \leq z \leq \sqrt{4-r^2}\right\}.$$

Das Volumen wird durch Integration des Volumenelements in zylindrischen Koordinaten wie folgt berechnet

$$\begin{aligned} \iiint_G r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z &= \int_0^{2\pi}\int_1^2\int_0^{\sqrt{4-r^2}} r\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi}\int_1^2 r\int_0^{\sqrt{4-r^2}} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r \\ &= \int_0^{2\pi}\int_1^2 r\sqrt{4-r^2}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi \overset{t:=4-r^2}{=} \int_0^{2\pi} -\frac{1}{2}\int_3^0 \sqrt{t}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\varphi \\ &= 2\pi\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Das Volumen der Kugel nach Abzug des Zylinders Z ist das Integral mal zwei, weil wir nur den oberen Teil des Körpers integriert haben

$$K \setminus Z = 4\sqrt{3}\pi.$$