Helmut-Schmidt-Universität
Universität der Bundeswehr Hamburg
Fakultät für Maschinenbau und Bauingenieurwesen

Prof. Dr. Thomas Carraro
M.Sc Janna Puderbach

Mathematik III/B (WI/ET) — Blatt 12

FT 2024 — Integration

Einführende Bemerkungen

- Vermeiden Sie die Verwendung von Taschenrechnern oder Online-Ressourcen.

Aufgabe 12.1: Frühere Klausuraufgabe

a) Berechnen Sie die Integrale

$$I = \int_0^\pi (\sin x) \cdot e^{2\cos x} dx \qquad \text{und} \qquad J = \int_1^2 (t^3 - 2t)e^{3t^2} dt.$$

b) Berechnen Sie das Integral $\int_B \sqrt{x^2+y^2} dx dy$, wobei B der Kreisring in der $(x,y)-$Ebene mit Mittelpunkt $(0,0)^\top$, Innenradius a und Außenradius b (mit $0 < a < b$) ist.

c) Berechnen Sie das Integral

$$\iiint_D e^{5z+3y+2x} dx dy dz$$

über dem Gebiet $D = \left\{ (x,y,z)^\top \middle| x,y,z \geq 0 \text{ und } 5z+3y+2x \leq 2 \right\}$.

Lösung 12.1:

a) Im ersten Integral substituieren wir

$$u(x) = 2\cos x, \qquad du = -2\sin x dx.$$

Eingesetzt ergibt das

$$I = \int_0^\pi \sin x e^{2\cos x} dx$$
$$= -\frac{1}{2} \int_{u(0)}^{u(\pi)} e^u du = -\frac{1}{2} \left[e^u\right]_{u=2}^{-2} = \frac{e^2 - e^{-2}}{2} = \sinh(2).$$

Zur Berechnung des zweiten Integrals integrieren wir partiell:

$$J = \int_1^2 \underbrace{(t^2-2)}_{u} \underbrace{te^{3t^2}}_{v'} = \Bigg[\underbrace{(t^2-2)}_{u} \underbrace{\left(\frac{1}{6}e^{3t^2}\right)}_{v}\Bigg]_1^2 - \int_1^2 \underbrace{2t}_{u'} \underbrace{\frac{1}{6}e^{3t^2}}_{v} dt$$
$$= \frac{1}{3}e^{12} + \frac{1}{6}e^3 - \frac{2}{36}e^{3t^2}\Big|_1^2 = \frac{e^3}{6}\left(2e^9+1\right) + \frac{1}{18}\left(e^3 - e^{12}\right)$$
$$= \frac{e^3}{18}\left(5e^9+4\right).$$

b) Es bietet sich eine Berechnung in Polarkoordinaten an:

$$\int_B \sqrt{x^2+y^2} dx dy = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=a}^{b} r r dr d\varphi = 2\pi \frac{b^3 - a^3}{3}.$$

c) Wir integrieren in kartesischen Koordinaten, wobei zu beachten ist, dass die Integrationsgrenzen für z von x und y abhängen und die für y von x. Deswegen ist die Integrationsreihenfolge – nachdem sie einmal gewählt wurde – festgelegt. Die oberen Integrationsgrenzen resultieren aus der Ebenengleichung $2x+3y+5z=2$:

$$
\begin{aligned}
\int\limits_D e^{5z+3y+2x} \mathrm{d}(x,y,z) &= \int\limits_{x=0}^{1} e^{2x} \int\limits_{y=0}^{\frac{2-2x}{3}} e^{3y} \int\limits_{z=0}^{\frac{2-2x-3y}{5}} e^{5z} \mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&= \int\limits_{x=0}^{1} e^{2x} \int\limits_{y=0}^{\frac{2-2x}{3}} e^{3y} \left[\frac{e^{5z}}{5}\right]_{z=0}^{\frac{2-2x-3y}{5}} \mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{5} \int\limits_{x=0}^{1} e^{2x} \int\limits_{y=0}^{\frac{2-2x}{3}} e^{3y} \left(e^{2-2x-3y} - 1\right) \mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{5} \int\limits_{x=0}^{1} e^{2x} \left[e^{2-2x} y - \frac{e^{3y}}{3}\right]_{y=0}^{\frac{2-2x}{3}} \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{15} \int\limits_{x=0}^{1} \left(e^2(2-2x) - e^2 + e^{2x}\right) \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{15} \left[e^2(x-x^2) + \frac{1}{2} e^{2x}\right]_{x=0}^{1} = \frac{e^2-1}{30}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 12.2: Parametrisierung von Integrationsbereichen

Gegeben seien die folgenden drei Körper im $\mathbb{R}^3$:

- ein Quader $Q = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 |\, 0 \le x_1 \le 1,\, 0 \le x_2 \le 1,\, -3 \le x_3 \le 3\}$
- eine Kugel $K = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 |\, \|\boldsymbol{x}\| \le 1\}$
- ein Zylinder $Z = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 |\, x_1^2 + x_2^2 \le 1,\; 0 \le x_3 \le 3\}$

Skizzieren und parametrisieren Sie die Schnittmenge eines jeden einzelnen dieser Körper mit den beiden folgenden Mengen:

$$M_1 = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 |\, 0 \le \boldsymbol{x}_3\},\; M_2 = \{\boldsymbol{x} |\, 3x_1 \le x_3\}.$$

D. h. geben Sie die Integrationsgrenzen der zugehörigen Volumenintegrale über die Bereiche $Q \cap M_1$, $Q \cap M_2$, $K \cap M_1$, ... an.

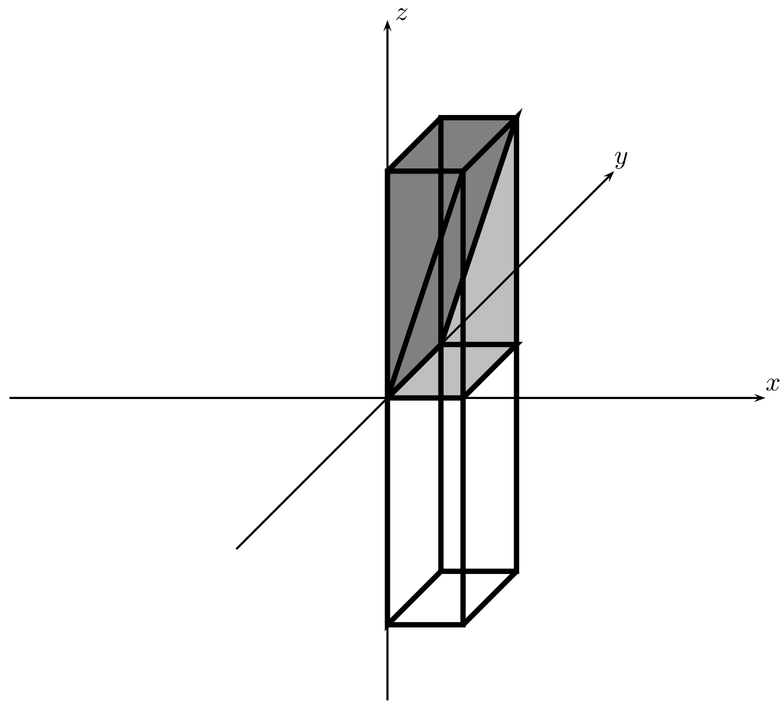
Lösung 12.2:

M_1 beschreibt den oberen Halbraum $z \ge 0$. M_2 beschreibt die Menge der Punkte oberhalb der Ebene $z = 3x$. Für die Schnittmengen mit den drei Körpern hat man jeweils:

- Für den Quader:

$$Q \cap M_1 = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 |\, 0 \le x_1 \le 1,\, 0 \le x_2 \le 1,\, 0 \le x_3 \le 3\}$$
$$Q \cap M_2 = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 |\, 0 \le x_1 \le 1,\, 0 \le x_2 \le 1,\, 3x_1 \le x_3 \le 3\}$$

Für $Q \cap M_2$ muss man keine Fallunterscheidung der x_3-Grenzen vornehmen, da die Obergrenze des Quaders ($z = 3$) die Ebene $3y = z$ nur an der Kante des Quaders schneidet.



- Für die Kugel:

$$K \cap M_1 = \Big\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 |\, -1 \le x_1 \le +1,\, -\sqrt{1-x_1^2} \le x_2 \le +\sqrt{1-x_1^2},\, 0 \le x_3 \le \sqrt{1-x_2^2}$$

Die zweite Schnittmenge $K \cap M_2$ besteht aus zwei Bereichen: B_1 der Bereich, der von oben durch die Kugeloberfläche und von unten durch die Ebene $3x = z$ begrenzt wird.
B_2, der von oben und von unten durch die Kugeloberfläche begrenzt wird, da die Ebenbe dort außerhalb der Kugel liegt.
Für die Schnittkurve der Kugeloberfläche $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ mit der Ebene $3x = z$ gilt

$$x^2 + y^2 + 9x^2 = 1$$
$$\Leftrightarrow \qquad x = \pm\sqrt{\frac{1-y^2}{10}}$$

Damit darf y nur Werte zwischen -1 und $+1$ annehmen.

B_1 lässt sich somit parametrisieren als

$$B_1 = \Big\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 | -1 \le x_2 \le 1, -\sqrt{\frac{1-x_2^2}{10}} \le x_1 \le \sqrt{\frac{1-x_2^2}{10}}, \\ 3x_1 \le x_3 \le \sqrt{1-x_1^2-x_2^2} \Big\}$$

Für den zweiten Teil von $K \cap M_2$ ergibt sich

$$B_2 = \Big\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 | -1 \le x_2 \le 1, -\sqrt{1-x_2^2} \le x_1 \le -\sqrt{\frac{1-x_2^2}{10}}, \\ -\sqrt{1-x_1^2-x_2^2} \le x_3 \le \sqrt{1-x_1^2-x_2^2} \Big\}$$

Eine Parametrisierung in Kugelkoordinaten, deren z-Achse ($\tilde{z}$ in der Skizze) senkrecht auf der Ebene $3x = z$ steht, wäre für diesen Körper deutlich einfacher. Die entsprechende Rotation um die y-Achse wird durch die (orthogonale) Matrix

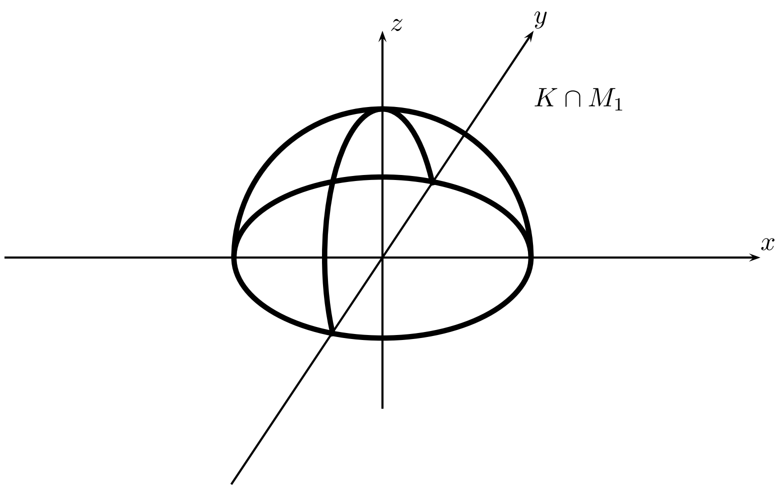
$$\boldsymbol{R} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & \sqrt{10} & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

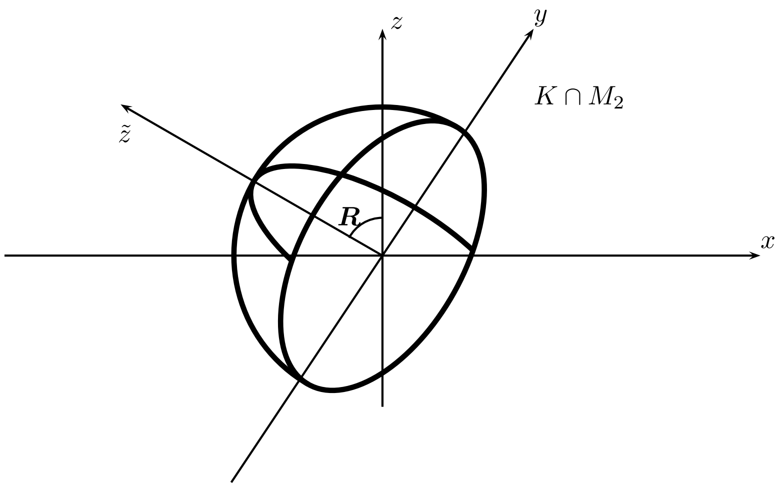
beschrieben. Damit ergibt sich dann

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}(r,\theta,\varphi) &= \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix} \\ &= \frac{r}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi - 3\cos\theta \\ \sin\theta\sin\varphi \\ 3\sin\theta\cos\varphi + \cos\theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und weiter

$$K \cap M_2 = \{\boldsymbol{x}(r,\theta,\varphi) | \, 0 \le r \le 1, \, 0 \le \theta \le \pi/2, \, 0 \le \varphi \le 2\pi\}\,.$$





- Für den Zylinder nutzen wir die Parametrisierung in Zylinderkoordinaten

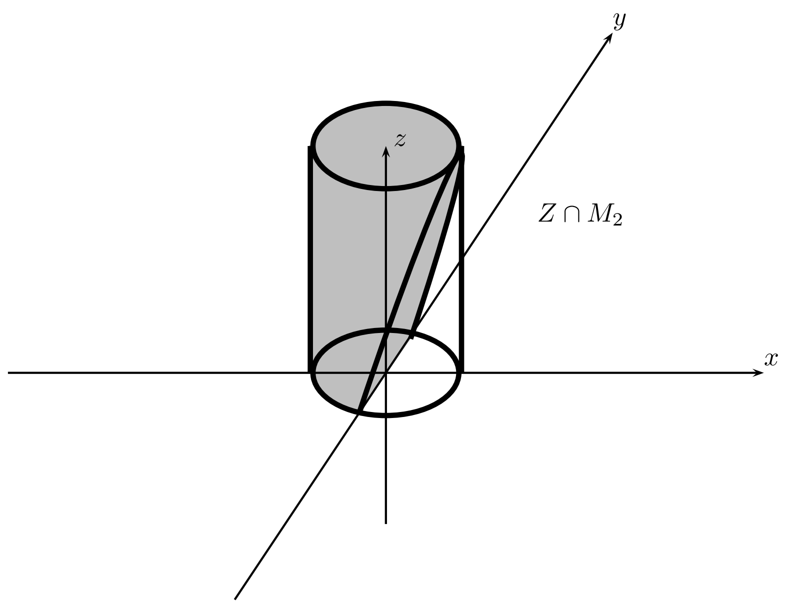
$$\boldsymbol{x}(r,\varphi,z) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$$

Die erste Menge $Z \cap M_1$ stimmt mit dem Zylinder überein.

$$\begin{aligned} Z = Z \cap M_1 &= \{\boldsymbol{x}(r,\varphi,z) | 0 \le r \le 1, \, 0 \le \varphi \le 2\pi, \, 0 \le z \le 3\} \\ Z \cap M_2 &= \{\boldsymbol{x}(r,\varphi,z) | 0 \le r \le 1, \, 0 \le \varphi \le 2\pi, \, z_0(r,\varphi) \le z \le 3\} \end{aligned}$$

Dabei berücksichtigt $z_0(r,\varphi)$, dass die Ebene $3x = z$ den Zylinderboden in der Mitte schneidet. Dies führt dazu, dass für positive x die Untergrenze des Integrationsbereichs von der Ebene beschrieben wird und für negative x durch den Zylinderboden $z = 0$:

$$z_0(r,\varphi) = \begin{cases} 0, & \text{für } \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2} \\ 3r\cos(\varphi), & \text{sonst} \end{cases} .$$



Aufgabe 12.3: Integration in Kugelkoordinaten

Berechnen Sie
$$I = \iiint\limits_B \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \mathrm{d}(x,y,z),$$
wobei B das Innere der Kugel $x^2+y^2+z^2+2Ry=0$ ist.

Hinweis: Verwenden Sie die Kugelkoordinaten
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sin\varphi\sin\theta \\ r\cos\theta \\ r\cos\varphi\sin\theta \end{pmatrix}.$$

Lösung 12.3:

Zunächst wird der Rand des Bereiches B untersucht:
$$0 = x^2+y^2+z^2+2Ry = x^2+(y+R)^2+z^2-R^2.$$
B ist also eine Kugel mit Radius R um den Mittelpunkt $(0,-R,0)$. In den gegebenden Kugelkoordinaten hat man dann folgende Integrationsbereiche:

- $\varphi \in [0, 2\pi]$, da die Kugel B rotationssymmetrisch bezüglich der y-Achse ist und φ einen Winkel um eben diese Achse beschreibt.
- $\theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$, da die Kugel B im negativen y-Bereich liegt.
- An den Grenzen für r soll gelten
$$\begin{aligned} 0 =& x^2+y^2+z^2+2Ry \\ =& r^2\sin^2\varphi\sin^2\theta + r^2\cos^2\theta + r^2\cos^2\varphi\sin^2\theta + 2Rr\cos\theta \\ =& r^2\sin^2\theta + r^2\cos^2\theta + 2Rr\cos\theta = r^2 + 2Rr\cos\theta \\ \Rightarrow \qquad r =& 0 \text{ oder } r = -2R\cos\theta (>0, \text{ da } \cos\theta < 0) \end{aligned}$$
  Der Integrationsbereich ist also $r \in [0,\ -2R\cos\theta]$.

Das Integral berechnet sich damit zu
$$\begin{aligned} I =& \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{\theta=\pi/2}^{\pi} \int\limits_{r=0}^{-2R\cos\theta} \frac{1}{r} r^2 \sin\theta \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi \\ =& 2\pi \int\limits_{\theta=\pi/2}^{\pi} \frac{(-2R\cos\theta)^2}{2} \sin\theta\mathrm{d}\theta = 4\pi R^2 \left. \frac{-\cos^3\theta}{3} \right|_{\pi/2}^{\pi} = \frac{4\pi R^2}{3}. \end{aligned}$$

Aufgabe 12.4: Masse einer Halbkugel

Berechnen Sie die Masse einer Halbkugel mit Mittelpunkt $(0,0,0)^\top$, Radius $a > 0$ sowie $z \geq 0$ und der Massendichte

a) mithilfe von Kugelkoordinaten,

b) mithilfe von Zylinderkoordinaten.

$$\rho(x,y,z) = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Hinweis: Die Masse M eines Körpers K mit Massendichte $\rho(\boldsymbol{x})$ ergibt sich aus

$$M = \int\limits_K \rho(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

Lösung 12.4:

a) Es bietet sich die Rechnung in Kugelkoordinaten an. Wegen der Bedingung $z \geq 0$ wird θ auf das Intervall $[0,\, \pi/2]$ eingeschränkt.

$$M = \int\limits_{\theta=0}^{\pi/2}\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi}\int\limits_{r=0}^{a} \rho \cdot r^2 \sin\theta \mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta = \int\limits_{\theta=0}^{\pi/2}\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi}\int\limits_{r=0}^{a} \frac{r\cos\theta}{r\sin\theta} r^2 \sin\theta \mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{a^3}{3} \cdot 2\pi \int\limits_{\theta=0}^{\pi/2} \cos\theta \mathrm{d}\theta = \frac{2\pi a^3}{3}.$$

b) Aus der Beziehung $a^2 = r^2 + z^2$ erhalten wir $0 < r < \sqrt{a^- z^2}$. In Zylinderkoordinaten erhalten wir das Integral

$$\begin{aligned} M &= \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{z=0}^{a}\int_{r=0}^{\sqrt{a^2-z^2}} \frac{z}{r} r \mathrm{d}r\mathrm{d}z\mathrm{d}\varphi \\ &= \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{z=0}^{a}\int_{r=0}^{\sqrt{a^2-z^2}} z \mathrm{d}r\mathrm{d}z\mathrm{d}\varphi \\ &= \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{z=0}^{a} z\sqrt{a^2-z^2}\mathrm{d}z\mathrm{d}\varphi \end{aligned}$$

Mit der Substitution $u = a^2 - z^2$ erhalten wir

$$\begin{aligned} M &= \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{u=a^2}^{0} -\frac{1}{2}\sqrt{u}\mathrm{d}u\mathrm{d}\varphi \\ &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{1}{3}a^3 \mathrm{d}\varphi \\ &= \frac{2\pi a^3}{3}. \end{aligned}$$

Aufgabe 12.5: Volumenintegrale

Berechnen Sie
$$\int_V \frac{\mathrm{e}^{-x^2-y^2}}{1+z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
mit
$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ z \geq 0\}.$$

Hinweise:

- Es empfiehlt sich die Rechnung in Zylinderkoordinaten.
- Der Integrationsbereich ist unendlich groß. Dadurch treten uneigentliche Integrale auf.

Lösung 12.5:

Es werden Zylinderkoordinaten (r, φ, z) verwandt: $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = z$. Dann gilt
$$\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,z)}\right| = r\,.$$
Es folgt
$$V' = \{(r,\varphi,z) : \quad r \in [0,\infty), \quad \varphi \in [0,2\pi], \quad z \in [0,\infty)\}$$
$$\begin{aligned}
\int_V \frac{\mathrm{e}^{-x^2-y^2}}{1+z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \int_{V'} \frac{\mathrm{e}^{-r^2}}{1+z^2} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z \\
&= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^\infty\left(\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-r^2} r}{1+z^2}\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^\infty\left[\frac{-\mathrm{e}^{-r^2}}{2(1+z^2)}\right]_0^\infty \mathrm{d}z\right)\mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^\infty \frac{1}{2(1+z^2)}\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2}\arctan z\right]_0^\infty \mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^{2\pi}\frac{\pi}{4}\mathrm{d}\varphi = \frac{\pi^2}{2}\,.
\end{aligned}$$

Aufgabe 12.6: Alte Klausuraufgabe

a) Berechnen Sie das Integral $\iint_D \frac{x^2}{y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, wobei D den von den Geraden $x = 2$, $y = x$ und der Hyperbel $xy = 1$ begrenzten Bereich des $\mathbb{R}^2$ bezeichne.

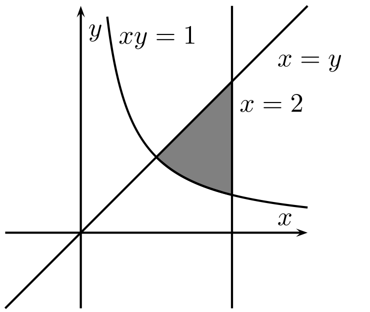
b) Gegeben sei der Körper

$$K = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 - z^2 \le 1,\ -1 \le z \le 2\right\}.$$

Skizzieren Sie den Körper und berechnen Sie dessen Volumen.

Lösung 12.6:

a) Der Integrationsbereich hat die folgende Gestalt:



D ist Normalbereich bezüglich x,

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{x} \le y \le x, \quad 1 \le x \le 2 \right\}.$$

Es gilt

$$\iint_D \frac{x^2}{y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_1^2 \left(\int_{1/x}^x \frac{x^2}{y^2}\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

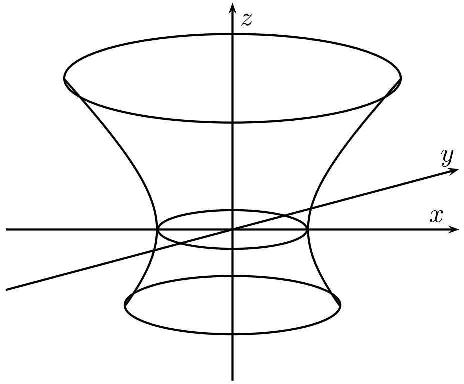
$$= \int_1^2 x^2 \cdot \left[\frac{-1}{y} \right]_{y=1/x}^{y=x} \mathrm{d}x$$

$$= \int_1^2 \left(-x + x^3\right) \mathrm{d}x = \frac{9}{4}.$$

b) Die Ungleichung in der Definition des Integrationsgebietes lässt sich schreiben als

$$x^2 + y^2 \le 1 + z^2.$$

Skizze:



Das Volumen berechnet man in Zylinderkoordinaten,

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi, \qquad z = z.$$

Die zugehörige Funktionaldeterminante ist $\left|\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \varphi, z)}\right| = r$. Das Volumen ist:

$$\int_{z=-1}^2 \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{\sqrt{1+z^2}} r \,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z = \int_{z=-1}^2 2\pi \frac{1+z^2}{2}\mathrm{d}z$$

$$= \pi \left(3 + \left[\frac{z^3}{3}\right]_{z=-1}^2 \right)$$

$$= \pi \left(3 + \frac{8}{3} + \frac{1}{3} \right) = 6\pi.$$