Helmut-Schmidt-Universität
Universität der Bundeswehr Hamburg
Fakultät für Maschinenbau

Prof. Dr. Thomas Carraro
Dr. Frank Gimbel

ISA: Ing. Studienkompetenzen — Blatt 4

WT 2022

Aufgabe 4.1: Schwerpunkt und Trägheitsmoment einer Kreisscheibe

Gegeben sei die Kreisscheibe

$$K = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 | \quad \|\boldsymbol{x}\|_2 \leq 2\}$$

mit der Massendichte $\rho(x, y) = x^2 + 4$.

a) Berechnen Sie die Masse $M = \int_K \rho(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x}$ der Kreisscheibe. Führen Sie die Rechnung in kartesischen Koordinaten durch.

b) Berechnen Sie ebenso den Schwerpunkt

$$\boldsymbol{s} = \frac{1}{M} \int_K \rho(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{x} \mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

Führen Sie die Rechnung in Polarkoordinaten $\boldsymbol{x}(r, \varphi) = (r \cos \varphi, \, r \sin \varphi)^\top$ aus.

c) Berechnen Sie das Trägheitsmoment bezüglich der x-Achse

$$\Theta_y = \int_K \rho(x, y) y^2 \mathrm{d}(x, y).$$

Hinweise:

- Für $\alpha \in \mathbb{R}$ gelten die folgenden Zusammenhänge:

$$\begin{aligned} \cos(2\alpha) &= \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1 \\ \sin(2\alpha) &= 2\sin(\alpha)\cos(\alpha) \\ \sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) &= 1. \end{aligned}$$

- Für Aufgabenteil **a)** kann die Substitution $x = 2\sin(u)$ hilfreich sein.

Lösung 4.1:

a) Das Integrationsgebiet wird definiert durch

$$2 \geq \|\boldsymbol{x}\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Wir stellen dies nach y um:

$$\begin{aligned} 4 &\geq x^2 + y^2 \\ \Rightarrow \quad 4 - x^2 &\geq y^2 \\ \Rightarrow \quad \sqrt{4 - x^2} &\geq y \text{ und } -\sqrt{4 - x^2} \leq y \end{aligned}$$

Die zulässigen x-Werte sind damit durch $-2 \leq x \leq 2$ gegeben. Das Integral für die Masse ist nun

$$\begin{aligned} M = \int_K \rho(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}x &= \int_{x=-2}^{2} \int_{y=-\sqrt{4-x^2}}^{+\sqrt{4-x^2}} (x^2 + 4) \mathrm{d}y \mathrm{d}x \\ &= \int_{x=-2}^{2} (x^2 + 4) \left[+\sqrt{4 - x^2} - (-\sqrt{4 - x^2}) \right] \mathrm{d}x \\ &= 2 \int_{x=-2}^{2} (x^2 + 4) \sqrt{4 - x^2} \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Dieses Integral lässt sich durch die Substitution

$$x = 2\sin u, \; \mathrm{d}x = 2\cos u \mathrm{d}u, \; u \in [-\pi/2, \pi/2]$$

umformen zu

$$
\begin{aligned}
M =& 2 \int\limits_{u=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (4\sin^2 u + 4)\sqrt{4 - 4\sin^2 u} \cdot 2\cos u \mathrm{d}u \\
=& 32 \int\limits_{u=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 u + 1)\cos u \cos u \mathrm{d}u = 32 \int\limits_{u=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Big((\sin u \cos u)^2 + \cos^2 u\Big)\mathrm{d}u \\
=& 32 \int\limits_{u=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\left(\frac{1}{2}\sin(2u)\right)^2 + \frac{1}{2}(\cos^2 u + 1 - \sin^2 u)\right)\mathrm{d}u \\
=& 32 \int\limits_{u=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin^2(2u) + 1 - \cos^2(2u)}{8} + \frac{\cos(2u) + 1}{2}\right)\mathrm{d}u \\
=& 32 \int\limits_{u=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 - \cos(4u)}{8} + \frac{\cos(2u) + 1}{2}\right)\mathrm{d}u = 32 \cdot \left[\frac{5u}{8} - \frac{\sin(4u)}{32} + \frac{\sin(2u)}{4}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\
=& 20\pi
\end{aligned}
$$

b) Die Rechnung in Polarkoordinaten ist einfacher. Wir belassen die Gleichung in ihrer vektoriellen Form:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{s} =& \frac{1}{M} \int\limits_K \rho(\boldsymbol{x}) \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix} \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \frac{1}{M} \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{r=0}^{2} (r^2\cos^2\varphi + 4) \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi \\
=& \frac{1}{M} \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \left(\left(\frac{2^5}{5}\cos^2\varphi + 4\frac{2^3}{3}\right)\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}\right)\mathrm{d}\varphi \\
=& \frac{32}{5M} \int\limits_{0}^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos^3\varphi \\ \cos^2\varphi\sin\varphi \end{pmatrix}\mathrm{d}\varphi, \quad \text{Der zweite Teil wird Null, wegen} \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \cos(\varphi)\mathrm{d}\varphi = 0. \\
=& \frac{32}{5M} \int\limits_{0}^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos\varphi - \cos\varphi\sin^2\varphi \\ \cos^2\varphi\sin\varphi \end{pmatrix}\mathrm{d}\varphi \\
=& \frac{32}{5M} \begin{pmatrix} \sin\varphi - \frac{\sin^3\varphi}{3} \\ -\frac{\cos^3\varphi}{3} \end{pmatrix}\Bigg|_0^{2\pi} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Dieses Ergebnis war zu erwarten, da die Massendichte nicht von y abhängt und bezüglich x symmetrisch ist ($\rho(x) = \rho(-x)$).

c) Alternativ zur obigen Integrationsreihenfolge integrieren wir hier zuerst nach φ:

$$
\begin{aligned}
\Theta_y =& \int\limits_0^2 \int\limits_0^{2\pi} (r^2\cos^2\varphi + 4)(r\sin\varphi)^2 r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r \\
=& \int\limits_0^2 \int\limits_0^{2\pi} \Big(r^4\cos^2\varphi\sin^2\varphi + 4r^2\sin^2\varphi\Big)\mathrm{d}\varphi r\mathrm{d}r \\
=& \int\limits_0^2 \left(r^4 \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{4}\sin^2(2\varphi)\mathrm{d}\varphi + 4r^2\pi\right) r\mathrm{d}r \\
=& \int\limits_0^2 \left(\frac{1}{4}r^5\pi + 4\pi r^3\right)\mathrm{d}r = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{2^6}{6} + \pi \cdot 2^4 \\
=& \pi\left(\frac{8}{3} + 16\right) = \frac{56\pi}{3}.
\end{aligned}
$$