Helmut-Schmidt-Universität
Universität der Bundeswehr Hamburg
Fakultät für Maschinenbau und Bauingenieurwesen
Prof. Dr. Thomas Carraro

Mathematik II/B (WI/ET) — Zusatzblatt

WT 2025 — Taylor-Entwicklung

Aufgabe 1

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \ln(1+x),$$

a) Bestimmen Sie das Taylor-Polynom 3. Ordnung $T_3(x)$ von $f(x)$ um den Punkt $x_0 = 0$.

b) Geben Sie das Restglied $R_3(x;0)$ an.

c) Schätzen Sie das Restglied für $|x| < \frac{1}{2}$ ab.

Lösung:

a) Die Taylor-Entwicklung von $f(x)$ um $x_0 = 0$ ist:

$$T_3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 \cdots$$

$$\begin{aligned}
f(0) &= 0 \\
f'(x) &= \frac{1}{x+1} \quad \Rightarrow \quad f'(0) = 1 \\
f''(x) &= -\frac{1}{(x+1)^2} \quad \Rightarrow \quad f''(0) = -1 \\
f'''(x) &= \frac{2}{(x+1)^3} \quad \Rightarrow \quad f'''(0) = 2
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich das Taylor-Polynom zu

$$T_3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 \qquad = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3.$$

b) Das Restglied wird wie folgt bestimmt:

$$R_3(x;0) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}x^4,$$

wobei $-\frac{1}{2} \leq \xi \leq \frac{1}{2}$ gilt.

$$f^{(4)}(x) = -\frac{6}{(x+1)^4}.$$

Das Restglied wird damit

$$R_3(x;0) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}x^4 = -\frac{1}{4(\xi+1)^4}x^4.$$

c) Für $|x| < \frac{1}{2}$ ergibt sich $-\frac{1}{2} \leq \xi \leq \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned}
|R_3(x;0)| &= \left| -\frac{1}{4(\xi+1)^4}x^4 \right| = \frac{1}{4}\frac{1}{(\xi+1)^4}x^4 \leq \frac{1}{4}\frac{1}{(-\frac{1}{2}+1)^4}\left(\frac{1}{2}\right)^4 \\
&= \frac{1}{4}\frac{1}{(1/2)^4}\frac{1}{16} = \frac{1}{4} \cdot 16 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

D.h.

$$|R_3(x;0)| \leq \frac{1}{4}.$$

Aufgabe 2

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = e^{-2x}.$$

a) Bestimmen Sie das Taylor-Polynom 3. Ordnung $T_3(x)$ von $f(x)$ um den Punkt $x_0 = 0$.

b) Geben Sie das Restglied $R_3(x;0)$ an.

c) Schätzen Sie das Restglied für $|x| < \frac{1}{2}$ ab.

Lösung:

a) Die Taylor-Entwicklung von $f(x)$ um $x_0 = 0$ ist:

$$T_3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots$$

Berechnung der Ableitungen:

$$\begin{aligned} f(0) &= 1 \\ f'(x) &= -2e^{-2x} \quad \Rightarrow \quad f'(0) = -2 \\ f''(x) &= 4e^{-2x} \quad \Rightarrow \quad f''(0) = 4 \\ f'''(x) &= -8e^{-2x} \quad \Rightarrow \quad f'''(0) = -8 \end{aligned}$$

Damit ergibt sich das Taylor-Polynom dritter Ordnung:

$$T_3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3$$

$$T_3(x) = 1 - 2x + 2x^2 - \frac{4}{3}x^3.$$

b) Das Restglied wird durch die Lagrange-Formel gegeben:

$$R_3(x;0) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}x^4,$$

Die vierte Ableitung von $f(x)$ ist:

$$f^{(4)}(x) = 16e^{-2x}.$$

Damit folgt für das Restglied:

$$R_3(x;0) = \frac{16e^{-2\xi}}{24}x^4 = \frac{2}{3}e^{-2\xi}x^4.$$

c) Für $|x| < \frac{1}{2}$ setzen wir die obere Schranke für $e^{-2\xi}$:
Da $e^{-2\xi}$ auf $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ maximal ist für $\xi = -\frac{1}{2}$, gilt:

$$e^{-2\xi} \leq e.$$

Damit ergibt sich die Abschätzung:

$$|R_3(x;0)| \leq \frac{2}{3}e \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4.$$

$$= \frac{2}{3}e \cdot \frac{1}{16} = \frac{2e}{48} = \frac{e}{24}.$$

Also:

$$|R_3(x;0)| \leq \frac{e}{24}.$$

Aufgabe 3

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \frac{e^x}{(x+1)^2}.$$

1. Bestimmen Sie das Taylor-Polynom 2. Ordnung $T_2(x)$ von $f(x)$ um den Punkt $x_0 = 0$.
2. Geben Sie das Restglied $R_2(x;0)$ an.
3. Schätzen Sie das Restglied für $|x| < \frac{1}{3}$ ab.

Hinweis: Es ist nicht notwendig, das Restglied optimal abzuschätzen.

Lösung:

1. Die Taylor-Entwicklung von $f(x)$ um $x_0 = 0$ lautet:

$$T_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots$$

Berechnung der Ableitungen:

$$f(0) = \frac{e^0}{(0+1)^2} = 1$$
$$f'(x) = \frac{(x-1)e^x}{(x+1)^3} \quad \Rightarrow \quad f'(0) = -1$$
$$f''(x) = \frac{(x^2-2x+3)e^x}{(x+1)^4} \quad \Rightarrow \quad f''(0) = 3$$

Damit ergibt sich das Taylor-Polynom 2. Ordnung:

$$T_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 = 1 - x + \frac{3}{2}x^2.$$

2. Das Restglied ist gegeben durch:

$$R_2(x;0) = \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}x^3,$$

wobei $-\frac{1}{3} \le \xi \le \frac{1}{3}$.

Dritte Ableitung:

$$f'''(x) = \frac{(x^3-3x^2+9x-11)e^x}{(x+1)^5}.$$

3. Abschätzung des Restglieds für $|x| < \frac{1}{3}$:

$$|R_2(x;0)| = \left|\frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}x^3\right| = \left|\frac{(\xi^3-3\xi^2+9\xi-11)e^\xi}{6(\xi+1)^5}x^3\right|.$$

Da $|x| < \frac{1}{3}$, maximieren wir den Bruch für $-\frac{1}{3} \le \xi \le \frac{1}{3}$. Eine grobe Abschätzung liefert:

$$|f'''(\xi)| = \left|\frac{(\xi^3-3\xi^2+9\xi-11)e^\xi}{(\xi+1)^5}\right|$$

$$|f'''(\xi)| \le \frac{\left|\xi^3-3\xi^2+9\xi-11\right| e^\xi}{|(\xi+1)^5|}$$

$$\left|\xi^3-3\xi^2+9\xi-11\right| \le \left|\xi^3\right| + \left|-3\xi^2\right| + |9\xi| + |-11|$$

Wir wählen $\xi = \frac{1}{3}$:

$$\frac{1}{27} + \frac{1}{3} + 3 + 11 = \frac{388}{27}$$

$$(\xi+1)^5\Big|_{\xi=-\frac{1}{3}} = \left((\frac{-1}{3}) + 1\right)^5 = \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{32}{243} \approx 0.1317.$$

$$\max_\xi |f'''(\xi)| = \frac{\frac{388}{27} \cdot e^\xi}{(\xi+1)^5} = \frac{\frac{388}{27} \times 1.3956}{1024/243} = 4.76.$$

$$|R_2(x;0)| \le \frac{4.76}{6}x^3 = 0.79x^3.$$

Daraus ergibt sich die Schranke für das Restglied:

$$|R_2(x;0)| \leq 0.79 \left(\frac{1}{3}\right)^3.$$