Helmut-Schmidt-Universität
Universität der Bundeswehr Hamburg
Fakultät für Maschinenbau und Bauingenieurwesen

Prof. Dr. Thomas Carraro
M.Sc Janna Puderbach

HELMUT SCHMIDT UNIVERSITÄT
Universität der Bundeswehr Hamburg

Mathematik II/B (WI/ET) — Blatt 10

WT 2024 — Stationäre Punkte, Newton-Verfahren, Richtungsableitung

Einführende Bemerkungen

- Vermeiden Sie die Verwendung von Taschenrechnern oder Online-Ressourcen.

Aufgabe 10.1: Mehrdimensionale Kettenregel

Berechnen Sie mit Hilfe der Kettenregel die Jacobi-Matrix der Funktion

$$\boldsymbol{h}(x,y,z) = \boldsymbol{h}_2(\boldsymbol{h}_1(x,y,z))$$

mit

$$\boldsymbol{h}_1(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3xz + 2y \\ 4y^2 + \frac{1}{3}x^3 z \end{pmatrix} \text{ und } \boldsymbol{h}_2(u,v) = \begin{pmatrix} \cos(2u-3v) \\ \frac{1}{2}u + \frac{3}{2}v^2 \\ 4v + u \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 10.2: Richtungsableitungen

Gegeben sei die folgende vektorwertige Funktion

$$\boldsymbol{f}(x,y) = (\mathrm{e}^{xy}, x^2 + y^3)^\top.$$

i) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix von $\boldsymbol{f}$ in dem Punkt $\boldsymbol{P}_1 = (1,2)^\top$.

ii) Berechnen Sie die Richtungsableitung von $\boldsymbol{f}$ in Richtung $\boldsymbol{v} = (1,0)^\top$ in dem Punkt $\boldsymbol{P}_2 = (1,1)^\top$.

Aufgabe 10.3: Newton-Verfahren (alte Klausuraufgabe)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x,y,z) = z \cdot \cos(\pi \cdot (x+y)) + z^2 + y^4.$$

Gesucht sind die stationären Punkte dieser Funktion.

a) Geben Sie an, welche Bedingung ein stationärer Punkt $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ erfüllen muss.

b) Um eine Näherung für einen solchen Punkt zu berechnen, soll das dreidimensionale Newton-Verfahren angewendet werden. Auf welche Funktion wird das Newton-Verfahren angewendet?
Geben Sie die Iterationsvorschrift an.

c) Führen Sie für den Startvektor $\boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ einen Iterationsschritt durch.

d) Geben Sie ein geeignetes Abbruchkriterium des Newton-Verfahrens an. (Dieses Kriteriums ist **nicht** auszuwerten.)

Aufgabe 10.4: lokale Extrema in 3 Dimensionen

Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x,y,z) \to \frac{2\,y^3}{3} + x^2 - 2\,xy + xz - x - z + 1 \,.$$

Bestimmen Sie die stationären (kritischen) Punkte der Funktion und bestimmen Sie deren Charakteristik.
Hinweis: Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind praktisch nur numerisch zu bestimmen. Die Vorzeichen der Eigenwerte erhält man aber sehr leicht aus einer einfachen Kurvendiskussion oder Skizze.

Aufgabe 10.5: Stationäre Punkte

Gegeben sei die Funktion

$$f(x,y) = ax^2 + 2xy + ay^2 - ax - ay$$

Bestimmen Sie diejenigen $a \in \mathbb{R}$, für welche die Funktion f relative Maxima, relative Minima und Sattelpunkte besitzt und geben Sie diese an.

Aufgabe 10.6:

a) Entwickeln Sie die Funktion

$$f(x,y,z) = \cosh(x) + \mathrm{e}^{2\,xy} - \ln(-yz) + \frac{1}{y} + \frac{z}{2}$$

nach der Taylor'schen Formel um den Punkt $P = (0\,,\,-1\,,\,2)$ bis zu einschließlich zweiter Ordnung (ohne Restglied).

Ergebnisse zu Aufgabe 10.1:

$\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{h}_1}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3z & 2 & 3x \\ zx^2 & 8y & \frac{1}{3}x^3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{h}_2}(u,v) = \begin{pmatrix} -2\sin(2u-3v) & 3\sin(2u-3v) \\ \frac{1}{2} & 3v \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

Ergebnisse zu Aufgabe 10.2:

$\frac{-4x+6y+2z}{\sqrt{29}}$, $\frac{-4x\sin y+3x^2\cos y-4\sin z}{\sqrt{29}}$

Ergebnisse zu Aufgabe 10.4:

$\boldsymbol{p}_1 = (1,1,1)^\top$, $\boldsymbol{p}_2 = (1,-1,-3)^\top$

Ergebnisse zu Aufgabe 10.5:

Für $a \neq \pm 1$ ist der stationäre Punkt $\frac{a}{2(1+a)}(1,1)^\top$. Für $a = 1$ gibt es mehrere stationäre Punkte.