Helmut-Schmidt-Universität
Universität der Bundeswehr Hamburg
Fakultät für Maschinenbau und Bauingenieurwesen

Prof. Dr. Thomas Carraro
M.Sc Janna Puderbach

Mathematik III/B (WI/ET) — Blatt 12

FT 2024 — Integration

Einführende Bemerkungen

- Vermeiden Sie die Verwendung von Taschenrechnern oder Online-Ressourcen.

Aufgabe 12.1: Frühere Klausuraufgabe

a) Berechnen Sie die Integrale

$$I = \int_0^{\pi} (\sin x) \cdot \mathrm{e}^{2\cos x} \mathrm{d}x \qquad \text{und} \qquad J = \int_1^2 (t^3 - 2t)\mathrm{e}^{3t^2} \mathrm{d}t.$$

b) Berechnen Sie das Integral $\int_B \sqrt{x^2+y^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, wobei B der Kreisring in der $(x,y)-$Ebene mit Mittelpunkt $(0,0)^\top$, Innenradius a und Außenradius b (mit $0 < a < b$) ist.

c) Berechnen Sie das Integral

$$\iiint_D \mathrm{e}^{5z+3y+2x} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

über dem Gebiet $D = \left\{ (x,y,z)^\top \middle| x,y,z \geq 0 \text{ und } 5z+3y+2x \leq 2 \right\}$.

Aufgabe 12.2: Parametrisierung von Integrationsbereichen

Gegeben seien die folgenden drei Körper im $\mathbb{R}^3$:

- ein Quader $Q = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 | \, 0 \leq x_1 \leq 1, \, 0 \leq x_2 \leq 1, \, -3 \leq x_3 \leq 3\}$
- eine Kugel $K = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 | \, \|\boldsymbol{x}\| \leq 1\}$
- ein Zylinder $Z = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 | \, x_1^2 + x_2^2 \leq 1, \; 0 \leq x_3 \leq 3\}$

Skizzieren und parametrisieren Sie die Schnittmenge eines jeden einzelnen dieser Körper mit den beiden folgenden Mengen:

$$M_1 = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 | \, 0 \leq \boldsymbol{x}_3\}, \; M_2 = \{\boldsymbol{x} | \, 3x_1 \leq x_3\}.$$

D. h. geben Sie die Integrationsgrenzen der zugehörigen Volumenintegrale über die Bereiche $Q \cap M_1$, $Q \cap M_2$, $K \cap M_1$, ... an.

Aufgabe 12.3: Integration in Kugelkoordinaten

Gegeben sei das Rotationsellipsoid

$$E = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^n \middle| \, x^2 + 4y^2 + z^2 \leq 9 \right\}.$$

Man berechne das Integral $\int_B (x^2+y+z^2) \mathrm{d}(x,y,z)$ unter Verwendung von

a) Zylinderkoordinaten

b) an das Ellipsoid angepasste Kugelkoordinaten:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi\cos\psi \\ \frac{r}{2}\sin\varphi\cos\psi \\ r\sin\psi \end{pmatrix}.$$

Hinweis(zu **a)**): Verwenden Sie um die $y-$Achse rotationssymmetrische Zylinderkoordinaten

$$\boldsymbol{x}(r,\varphi,y) = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ y \\ r\sin(\varphi) \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 12.4: Integration in Kugelkoordinaten

Berechnen Sie

$$I = \iiint_B \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \mathrm{d}(x,y,z),$$

wobei B das Innere der Kugel $x^2+y^2+z^2+2Ry = 0$ ist.

Hinweis: Verwenden Sie die Kugelkoordinaten

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sin\varphi\sin\theta \\ r\cos\theta \\ r\cos\varphi\sin\theta \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 12.5: Masse einer Halbkugel

Berechnen Sie die Masse einer Halbkugel mit Mittelpunkt $(0,0,0)^\top$, Radius $a>0$ sowie $z \geq 0$ und der Massendichte

a) mithilfe von Kugelkoordinaten,

b) mithilfe von Zylinderkoordinaten.

$$\rho(x,y,z) = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Hinweis: Die Masse M eines Körpers K mit Massendichte $\rho(\boldsymbol{x})$ ergibt sich aus

$$M = \int\limits_K \rho(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

Aufgabe 12.6: Volumenintegrale

Berechnen Sie

$$\int_V \frac{\mathrm{e}^{-x^2-y^2}}{1+z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

mit

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ z \geq 0\}.$$

Hinweise:

- Es empfiehlt sich die Rechnung in Zylinderkoordinaten.
- Der Integrationsbereich ist unendlich groß. Dadurch treten uneigentliche Integrale auf.

Aufgabe 12.7: Alte Klausuraufgabe

a) Berechnen Sie das Integral $\iint_D \frac{x^2}{y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, wobei D den von den Geraden $x=2$, $y=x$ und der Hyperbel $xy=1$ begrenzten Bereich des $\mathbb{R}^2$ bezeichne.

b) Gegeben sei der Körper

$$K = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2-z^2 \leq 1,\ -1 \leq z \leq 2\right\}.$$

Skizzieren Sie den Körper und berechnen Sie dessen Volumen.

Ergebnisse zu Aufgabe 12.1:

a) $I = \sinh(2),\ J = \frac{\mathrm{e}^3}{18}(5\mathrm{e}^9+4)$, **b)** $\frac{2\pi(b^3-a^3)}{3}$, **c)** $\mathrm{e}\sinh(1)/6$

Ergebnisse zu Aufgabe 12.3:

$\frac{324\pi}{5}$

Ergebnisse zu Aufgabe 12.4:

$I = \frac{4\pi R^2}{3}$

Ergebnisse zu Aufgabe 12.5:

$M = 2\pi a^3/3$

Ergebnisse zu Aufgabe 12.6:

$V = \frac{\pi^2}{2}.$

Ergebnisse zu Aufgabe 12.7:

a) $9/4$, b) 6π