Helmut-Schmidt-Universität
Universität der Bundeswehr Hamburg
Fakultät für Maschinenbau und Bauingenieurwesen

Prof. Dr. Thomas Carraro
M.Sc Janna Puderbach

Mathematik II — Blatt 1

WT 2024 — Definitheit, Ähnlichkeit, Umkehrfunktionen

Einführende Bemerkungen

- Vermeiden Sie die Verwendung von Taschenrechnern oder Online-Ressourcen.

Aufgabe 1.1: Lineare Abbildung im Komplexen

Gegeben ist die lineare Abbildung $\boldsymbol{L} : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^3$ mit der Matrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1+\mathrm{i} & 1 & \mathrm{i} \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2\,\mathrm{i} & \mathrm{i} & 2\,\mathrm{i}-1 \end{pmatrix}$$

sowie der Vektor $\boldsymbol{b}_\lambda = (\lambda - \mathrm{i},\, 0,\, -2\,\mathrm{i})^\top$.

a) Geben Sie Rang($\boldsymbol{A}$) und Orthonormalbasen von Bild $\boldsymbol{A}$ sowie Kern $\boldsymbol{A}$ und (Bild $\boldsymbol{A}$)$^\perp$ an.

Hinweise:

- Der Orthogonalraum $\boldsymbol{U}^\perp$ eines Unterraumes $\boldsymbol{U} \subset \mathbb{C}^n$ enthält alle Vektoren, die senkrecht zu allen Vektoren aus $\boldsymbol{U}$ sind:

$$\boldsymbol{U}^\perp = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n |\ \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}\rangle = 0 \text{ für alle } \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{U}\}$$

- Im Komplexen gilt $(\text{Bild}\,\boldsymbol{A})^\perp = \text{Kern}(\boldsymbol{A}^*)$.

b) Für welche $\lambda \in \mathbb{C}$ ist $\boldsymbol{b}_\lambda \in \text{Bild}\,\boldsymbol{A}$ enthalten?

c) Geben Sie für beliebige $\lambda \in \mathbb{C}$ eine Zerlegung von $\boldsymbol{b}_\lambda$ in Komponenten aus Bild $\boldsymbol{A}$ und (Bild $\boldsymbol{A}$)$^\perp$ an.

d) Bestimmen Sie alle $\boldsymbol{x}_\lambda \in \mathbb{C}^4$, so dass $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_\lambda$ die orthogonale Projektion von $\boldsymbol{b}_\lambda$ auf Bild $\boldsymbol{A}$ ist.

Lösung 1.1:

a) Um eine Basis von Bild $\boldsymbol{A}$ zu bestimmen, wenden wir den Gauß-Algorithmus auf die Spaltenvektoren von $\boldsymbol{A}$ an:

$$\begin{array}{rrr|l}
1 & 0 & 1 & \\
1+\mathrm{i} & 1 & 2\,\mathrm{i} & \text{-}(1+\mathrm{i})\cdot \text{ 1. Zeile} \\
1 & 1 & \mathrm{i} & \text{-1. Zeile} \\
\mathrm{i} & 1 & 2\,\mathrm{i}-1 & \text{-}\mathrm{i}\cdot \text{ 1. Zeile} \\
\hline
1 & 0 & 1 & \\
0 & 1 & -1+\mathrm{i} & \\
0 & 1 & \mathrm{i}-1 & \text{-2. Zeile} \\
0 & 1 & \mathrm{i}-1 & \text{-2. Zeile} \\
\hline
1 & 0 & 1 & \\
0 & 1 & -1+\mathrm{i} & \\
0 & 0 & 0 & \\
0 & 0 & 0 &
\end{array}$$

Eine Basis des Bildraumes ist damit

$$\{(1,\, 0,\, 1)^\top,\, (0,\, 1,\, \mathrm{i}-1)^\top\}.$$

Diese wird noch orthonormiert:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1,\, 0,\, 1)^\top \\
\boldsymbol{w}_2 &= (0,\, 1,\, \mathrm{i}-1)^\top - \frac{1}{2}\left\langle (0,\, 1,\, \mathrm{i}-1)^\top,\, (1,\, 0,\, 1)^\top \right\rangle (1,\, 0,\, 1)^\top \\
&= \frac{1}{2}(1-\mathrm{i},\, 2,\, \mathrm{i}-1)^\top \\
\Rightarrow \qquad \boldsymbol{v}_2 &= \frac{1}{\sqrt{8}}(1-\mathrm{i},\, 2,\, \mathrm{i}-1)^\top
\end{aligned}$$

Die Vektoren $\boldsymbol{v}_1$ und $\boldsymbol{v}_2$ bilden eine Basis von Bild $\boldsymbol{A}$. Um eine Basis des Orthogonalraumes (Bild $\boldsymbol{A}$)$^\perp$ zu erhalten, setzen wir den Gram-Schmidt-Algorithmus mit einem willkürlichen Vektor – hier $\boldsymbol{e}_3$ – fort:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{w}_3 &= \boldsymbol{e}_3 - \langle \boldsymbol{e}_3,\, \boldsymbol{v}_1\rangle \boldsymbol{v}_1 - \langle \boldsymbol{e}_3,\, \boldsymbol{v}_2\rangle \boldsymbol{v}_2 \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{-1-\mathrm{i}}{8}\begin{pmatrix} 1-\mathrm{i} \\ 2 \\ \mathrm{i}-1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 \\ 1+\mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix} \\
\Rightarrow \qquad \boldsymbol{v}_3 &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1+\mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Dieser Vektor $\boldsymbol{v}_3$ bildet eine Orthonormalbasis von $(\mathrm{Bild}\boldsymbol{A})^\perp$.

Der Rang der Abbildung ist 2. Gemäß Dimensionsformel hat der Kern somit die Dimension $4-2=2$. Wir ermitteln ihn im Gauß-Verfahren:

$$\begin{array}{rrrr|r|l}
1 & 1+\mathrm{i} & 1 & \mathrm{i} & 0 & \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & \\
1 & 2\,\mathrm{i} & \mathrm{i} & 2\,\mathrm{i}-1 & 0 & \text{-1. Zeile} \\
\hline
1 & 1+\mathrm{i} & 1 & \mathrm{i} & 0 & \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & \\
0 & \mathrm{i}-1 & \mathrm{i}-1 & \mathrm{i}-1 & 0 & \text{-}(\mathrm{i}-1)\cdot\text{ 2. Zeile} \\
\hline
1 & 1+\mathrm{i} & 1 & \mathrm{i} & 0 & \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \text{-}(\mathrm{i}-1)\cdot\text{ 2. Zeile}
\end{array}$$

Wir wählen zunächst $(x_3,x_4)=(1,0)$, um den ersten Basisvektor $(\mathrm{i},\,-1,\,1,\,0)^\top$ und dann $(x_3,x_4)=(0,1)$, um den zweiten Basisvektor $(1,\,-1,\,0,\,1)^\top$ zu erhalten. Für diese beiden Vektoren liefert das Schmidtsche Verfahren:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{z}_1 &= \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathrm{i},\,-1,\,1,\,0)^\top \\
\boldsymbol{z}_2' &= (1,\,-1,\,0,\,1)^\top - \frac{1}{3}(-\mathrm{i}+1)(\mathrm{i},\,-1,\,1,\,0)^\top = \frac{1}{3}(2-\mathrm{i},\,-2-\mathrm{i},\,\mathrm{i}-1,\,3)^\top \\
\Rightarrow\quad \boldsymbol{z}_2 &= \frac{1}{\sqrt{21}}(2-\mathrm{i},\,-2-\mathrm{i},\,\mathrm{i}-1,\,3)^\top
\end{aligned}$$

b) Es ist $\boldsymbol{b}_\lambda \in \mathrm{Bild}\boldsymbol{A}$, wenn $\{\boldsymbol{b}_\lambda,\,\boldsymbol{v}_1,\,\boldsymbol{v}_2\}$ linear abhängig ist. Dies prüfen wir mittels Gauß-Verfahren nach:

$$\begin{array}{rrr|l}
1 & 0 & 1 & \text{(Vielfaches von } \boldsymbol{v}_1) \\
1-\mathrm{i} & 2 & \mathrm{i}-1 & \text{(Vielfaches von } \boldsymbol{v}_2) \\
\lambda-\mathrm{i} & 0 & -2\,\mathrm{i} & (\boldsymbol{b}_\lambda) \\
\hline
1 & 0 & 1 & \\
0 & 2 & 2\,\mathrm{i}-2 & \text{2. Zeile - }(1-\mathrm{i})\cdot\text{ 1. Zeile} \\
0 & 0 & -\lambda-\mathrm{i} & \text{3. Zeile - }(\lambda-\mathrm{i})\cdot\text{ 1. Zeile}
\end{array}$$

Die letzte Zeile verschwindet genau dann, wenn $\lambda=-\mathrm{i}$ ist, dann sind die drei Vektoren linear abhängig, es ist also

$$\boldsymbol{b}_{-\mathrm{i}} \in \mathrm{Bild}\boldsymbol{A}.$$

c) Die Projektion auf $\mathrm{Bild}\boldsymbol{A}$ wird geliefert durch

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{P}(\boldsymbol{b}_\lambda) &= \langle \boldsymbol{b}_\lambda, \boldsymbol{v}_1\rangle\,\boldsymbol{v}_1 + \langle \boldsymbol{b}_\lambda, \boldsymbol{v}_2\rangle\,\boldsymbol{v}_2 \\
&= \frac{\lambda-3\,\mathrm{i}}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \frac{\lambda(1+\mathrm{i})-1+\mathrm{i}}{8}\begin{pmatrix}1-\mathrm{i}\\2\\\mathrm{i}-1\end{pmatrix} \\
&= \frac{\lambda}{8}\begin{pmatrix}6\\2+2\,\mathrm{i}\\2\end{pmatrix} + \frac{1}{8}\begin{pmatrix}-10\,\mathrm{i}\\-2+2\,\mathrm{i}\\-14\,\mathrm{i}\end{pmatrix} = \frac{\lambda}{4}\begin{pmatrix}3\\1+\mathrm{i}\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{4}\begin{pmatrix}5\,\mathrm{i}\\1-\mathrm{i}\\7\,\mathrm{i}\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Der Anteil von $\boldsymbol{b}_\lambda$ orthogonal zu $\mathrm{Bild}\boldsymbol{A}$ ergibt sich als Differenz aus beiden:

$$\boldsymbol{b}_\lambda - \boldsymbol{P}(\boldsymbol{b}_\lambda) = \frac{\lambda}{4}\begin{pmatrix}1\\-1-\mathrm{i}\\-1\end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix}\mathrm{i}\\1-\mathrm{i}\\-\mathrm{i}\end{pmatrix}.$$

d) Es soll also gelten $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_\lambda = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{b}_\lambda)$:

$$\begin{array}{rrrr|r}
1 & 1+\mathrm{i} & 1 & \mathrm{i} & 3/4\lambda-5/4\,\mathrm{i} \\
0 & 1 & 1 & 1 & (1+\mathrm{i})/4\lambda-(1-\mathrm{i})/4 \\
1 & 2\,\mathrm{i} & \mathrm{i} & 2\,\mathrm{i}-1 & 1/4\lambda-7/4\,\mathrm{i} \\
\hline
1 & 1+\mathrm{i} & 1 & \mathrm{i} & 3/4\lambda-5/4\,\mathrm{i} \\
0 & 1 & 1 & 1 & (1+\mathrm{i})/4\lambda-(1-\mathrm{i})/4 \\
0 & 1-\mathrm{i} & 1-\mathrm{i} & 1-\mathrm{i} & \lambda/2+1/2\,\mathrm{i} \\
\hline
1 & 1+\mathrm{i} & 1 & \mathrm{i} & 3/4\lambda-5/4\,\mathrm{i} \\
0 & 1 & 1 & 1 & (1+\mathrm{i})/4\lambda-(1-\mathrm{i})/4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

Dies liefert die Partikulärloesung

$$\boldsymbol{x}_\lambda^0 = ((2-i)/4\lambda + (1-6\,\mathrm{i})/4,\,0,\,(1+i)/4\lambda-(1-i)/4,\,0)^\top$$

und damit die allgemeine Lösung:

$$\boldsymbol{x}_\lambda \in \boldsymbol{x}_\lambda^0 + \mathrm{Kern}(\boldsymbol{A}).$$

Aufgabe 1.2: Positive Definitheit

Welche der folgenden Matrizen ist positiv definit?

a) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, b) $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

c) $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ d) $\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1+\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$

Lösung 1.2:

a) $\boldsymbol{A}$ ist nicht positiv definit, etwa mit $\boldsymbol{x} = (1, -1)^\top$ ergibt sich:

$$\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{A} \boldsymbol{x} = (1, -1) \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} = -3 + 1 = -2 < 0.$$

b) Mit $\boldsymbol{x} = (1, 0, 0)^\top$ ergibt sich

$$\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{B} \boldsymbol{x} = (1, 0, 0) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Da aber für positive Definitheit mit allen $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ $\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{B} \boldsymbol{x} > 0$ gelten müsste, ist $\boldsymbol{B}$ nicht positiv definit.

c) Um positive Definitheit zu zeigen, muss für alle $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)^\top \neq \boldsymbol{0}$ $\boldsymbol{x}^\top C \boldsymbol{x} > 0$ überprüft werden:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{C} \boldsymbol{x} =& x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 \\
=& \frac{x_1^2}{2} + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + \frac{x_1^2}{2} + 2x_1x_3 + 2x_3^2 + x_3^2 \\
=& \left(\frac{x_1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}x_2 \right)^2 + \left(\frac{x_1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}x_3 \right)^2 + x_3^2
\end{aligned}$$

Damit gilt auf jeden Fall $\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{C} \boldsymbol{x} \geq 0$. Im Fall $\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{C} \boldsymbol{x} = 0$ müssen beide Klammern des letzten Ausruckes und x_3^2 gleich Null sein. Daraus folgt dann unmittelbar $x_3 = 0$ und (aus dem Verschwinden der zweiten Klammer) $x_1 = 0$ und damit (Verschwinden der ersten Klammer) auch $x_2 = 0$. Insgesamt ist also nur für $\boldsymbol{x} = 0$ auch $\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{C} \boldsymbol{x} = 0$.
Damit ist $\boldsymbol{C}$ positiv definit.

d) Mit beliebigem $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ gilt:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{D} \boldsymbol{x} =& \lambda x_1^2 + (1+\lambda)x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 \\
=& (\sqrt{\lambda}x_1)^2 + 2\sqrt{\lambda}x_1 \cdot \frac{x_2}{\sqrt{\lambda}} + \frac{x_2^2}{\lambda} + \left(1 + \lambda - \frac{1}{\lambda}\right) x_2^2 + x_3^2 \\
=& \left(\sqrt{\lambda}x_1 + \frac{x_2}{\sqrt{\lambda}} \right)^2 + x_3^2 + \frac{\lambda + \lambda^2 - 1}{\lambda} x_2^2
\end{aligned}$$

i) Falls $\frac{\lambda^2+\lambda-1}{\lambda} > 0$, ist $\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{D} \boldsymbol{x} \geq 0$ und nur für $\boldsymbol{x} = 0$ ist $\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{D} \boldsymbol{x} = 0$, also ist $\boldsymbol{D}$ positiv definit.

ii) Falls $\frac{\lambda^2+\lambda-1}{\lambda} < 0$, ist für $\boldsymbol{x} = (-1/\sqrt{\lambda}, \sqrt{\lambda}, 0)^\top$ $\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{D} \boldsymbol{x} < 0$ und damit $\boldsymbol{D}$ nicht positiv definit.

iii) Falls $\frac{\lambda^2+\lambda-1}{\lambda} = 0$ ist, verschwindet $\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{D} \boldsymbol{x}$ für $\boldsymbol{x} = (-1/\sqrt{\lambda}, \sqrt{\lambda}, 0)^\top \neq \boldsymbol{0}$, also ist $\boldsymbol{D}$ nicht positiv definit.

iv) Für $\lambda \leq 0$ ist obige Rechnung nicht möglich, aber dann gilt $(1, 0, 0)\boldsymbol{D}(1, 0, 0)^\top = \lambda \leq 0$ und $\boldsymbol{D}$ ist nicht positiv definit.

Die Bedingungen für $\frac{\gamma_\lambda}{\lambda} := \frac{\lambda^2+\lambda-1}{\lambda}$ aus i)–iii) lassen sich weiter umformen:
Zunächst ist der Zähler

$$\gamma_\lambda = \lambda^2 + \lambda - 1 = (\lambda + \frac{1}{2})^2 - \frac{5}{4}$$

und hat seine Nullstellen bei $\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.
Zwischen beiden Nullstellen ($\frac{-1-\sqrt{5}}{2} < \lambda < \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$) ist $\gamma_\lambda < 0$.
Außerhalb des Intervals ($\lambda < \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ oder $\lambda > \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$) ist $\gamma_\lambda > 0$. Insgesamt ist also $\boldsymbol{D}$
positiv definit für $\lambda > \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ und
nicht positiv definit für $\lambda \leq \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Aufgabe 1.3: Determinanten

Bestimmen Sie die Determinante der folgenden Matrix mit Hilfe des Gauß'schen Algorithmus:

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 & 0 \\ -3 & -6 & -4 & 7 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & -5 & 2 \\ -3 & -8 & -2 & 7 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

Lösung 1.3:

$$\begin{aligned}
\det \boldsymbol{B} &= \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 6 & 3 \end{pmatrix} && (\text{tausche } Z_2 \text{ und } Z_3) \\
&= -1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 6 & 3 \end{pmatrix} && (Z_4 + 2 \cdot Z_2;\ Z_5 - 2 \cdot Z_2) \\
&= -1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -1 \end{pmatrix} && (Z_4 + 3 \cdot Z_3;\ Z_5 - Z_3) \\
&= -1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -2 \end{pmatrix} && (Z_5 + Z_4) \\
&= -1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \\
&= (-1) \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot (-6) \cdot 8 = -48\ .
\end{aligned}$$

Aufgabe 1.4: Determinanten

Bestimmen Sie die Determinanten folgender Matrizen:

$$\text{a)}\quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 3 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \text{b)}\quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -7 & 8 & 3 \\ 3 & -4 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{c)}\quad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & -1 \\ -5 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{d)}\quad \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 7 & 7 \\ 4 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Lösung 1.4:

Man entwickelt solange nach Spalten oder Zeilen, die möglichst viele Nullen enthalten, bis die verbleibenden Restmatrizen leicht direkt ausgerechnet werden können:

$$\begin{aligned} \det \boldsymbol{A} &= \det \begin{pmatrix} 7 & -2 & 3 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 5 & 0 & 3 \end{pmatrix} = -4 \cdot \det \begin{pmatrix} 7 & -2 & 3 & 2 \\ -3 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} \\ &= -4 \cdot 2 \cdot \det \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \\ &= -8 \cdot \left[-3 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \right] \\ &= -8 \cdot [-3 \cdot (-2) + 2 \cdot 7] = -160\,. \end{aligned}$$

Die Matrix $\boldsymbol{B}$ ist eine Block-Dreiecksmatrix:

$$\begin{aligned} \det(\boldsymbol{B}) &= \begin{pmatrix} -2 & 3 & -7 & 8 & 3 \\ 3 & -4 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \det(-3) \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \\ &= -1 \cdot (-3) \cdot (-2) = -6\,. \end{aligned}$$

Die Matrix $\boldsymbol{C}$ ist ebenfalls eine Block-Dreiecksmatrix:

$$\det(\boldsymbol{C}) = \det \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = 5 \cdot 8 = 40\,.$$

Durch passende Zeilen- und Spaltenvertauschungen kann die Matrix $\boldsymbol{D}$ auf Blockdreiecksstruktur gebracht werden.

$$\begin{aligned} \det \boldsymbol{D} &= \det \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 7 & 7 \\ 4 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \text{(tausche } Z_1 \text{ und } Z_3\text{)} \\ &= -\det \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 & 7 \\ 5 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \text{(tausche } S_1 \text{ und } S_3\text{)} \\ &= \det \begin{pmatrix} 7 & 5 & 2 & 7 \\ 3 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 6 \end{pmatrix} = -1 \cdot 2 = -2\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 1.5: Ähnlichkeitstransformation

Gegeben sind

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 6 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ -1 \end{pmatrix} \ \text{und} \ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \beta \\ -\beta \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie – wenn möglich – α und β so, dass $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ Eigenvektoren der Matrix $\boldsymbol{A}$ sind.

b) Berechnen Sie einen weiteren (linear unabhängigen) Eigenvektor nebst zugehörigem Eigenwert.

c) Bestimmen Sie orthogonale Matrizen $\boldsymbol{Q}_i$, sowie Diagonalmatrizen $\boldsymbol{D}_i$ $(i = 1, 2, 3)$, so dass gilt

$$\boldsymbol{D}_i = \boldsymbol{Q}_i^\top \boldsymbol{B}_i \boldsymbol{Q}_i, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Dabei sind $\boldsymbol{B}_1 = \boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}_2 = \boldsymbol{A}^{-1}$ und $\boldsymbol{B}_3 = \boldsymbol{A}^3$.

Lösung 1.5:

a) Es gilt

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{A} \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6\alpha \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Wenn $\boldsymbol{a}$ Eigenvektor ist, folgt aus der ersten und dritten Komponente der Gleichung der Eigenwert -2. Für die zweite Komponente gilt dann $6\alpha \overset{!}{=} -2\alpha$, also $\alpha = 0$.
Für den zweiten Vektor $\boldsymbol{b}$ hat man

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{A} \begin{pmatrix} \beta \\ -\beta \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\beta + 4 \\ -6\beta \\ 4\beta + 2 \end{pmatrix}$$

Wir nehmen erneut an, dass $\boldsymbol{b}$ ein Eigenvektor ist.
Für $\beta \neq 0$ wäre der zugehörige Eigenwert $\lambda = 6$. (2. Komponente der Gleichung)
Aus der ersten Komponente der Gleichung folgt damit $6\beta = 2\beta + 4$, also $\beta = 1$
Aus der dritten Komponente folgt $6 = 4\beta + 2$, also $\beta = 1$.
Damit ist für $\beta = 1$ $\boldsymbol{b} = (1, -1, 1)^\top$ ein Eigenvektor von $\boldsymbol{A}$ mit dem Eigenwert 6.

b) Allgemein ergeben sich die Eigenwerte von $\boldsymbol{A}$ als Nullstellen des charakteristischen Polynoms:

$$0 \overset{!}{=} \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 4 \\ 0 & 6-\lambda & 0 \\ 4 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (6-\lambda) \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 4 \\ 4 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$
$$= (6-\lambda)((2-\lambda)^2 - 16)$$
$$\Rightarrow \quad \lambda \in \{-2,\ 6,\ 6\}$$

Ein Eigenvektor zum Eigenwert 6 ist Lösung von

$$0 \overset{!}{=} (\boldsymbol{A} - 6\boldsymbol{E})\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -4 \end{pmatrix} \boldsymbol{c}.$$

Das Gleichungssystem hat den Rang 1, die geometrische Vielfachheit des Eigenwertes 6 ist also gleich der algebraischen Vielfachheit 2.
Es ergeben sich die beiden linear unabhängigen Lösungen $\boldsymbol{c} = (1,\ 0,\ 1)^\top$ und $\boldsymbol{d} = (0,\ 1,\ 0)^\top$. (Der Vektor $\boldsymbol{b}$ ist im Eigenraum zu $\lambda = 6$ enthalten: $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c} - \boldsymbol{d}$.)

c) Zur Diagonalisierung von $\boldsymbol{B}_1 = \boldsymbol{A}$ stellt man die Matrix der normierten Eigenvektoren auf:

$$\boldsymbol{Q} = \left(\frac{\boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|}, \frac{\boldsymbol{c}}{\|\boldsymbol{c}\|}, \frac{\boldsymbol{d}}{\|\boldsymbol{d}\|} \right) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Diagonale von $\boldsymbol{D}_1$ enthält dann die Eigenwerte von $\boldsymbol{A}$:

$$\boldsymbol{D}_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

$\boldsymbol{B}_2 = \boldsymbol{A}^{-1}$ hat dieselben Eigenvektoren wie A, somit erhält man mit derselben Transformationsmatrix $\boldsymbol{Q}_2 = \boldsymbol{Q}_1$ die Diagonalmatrix der Eigenwerte von $\boldsymbol{A}^{-1}$:

$$\boldsymbol{D}_2 = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix}.$$

Auch $\boldsymbol{B}_3 = \boldsymbol{A}^3$ hat dieselben Eigenvektoren $\boldsymbol{v} \in \{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}\}$:

$$\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{v} = \boldsymbol{A}^2\lambda\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{A}\lambda\boldsymbol{v} = \lambda^2\lambda\boldsymbol{v} = \lambda^2\boldsymbol{v}.$$

Es ist also $\boldsymbol{Q}_3 = \boldsymbol{Q}_1$ und die zugehörige Diagonalmatrix enthält die dritte Potenz der Eigenwerte von $\boldsymbol{A}$:

$$\boldsymbol{D}_3 = \begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & 0 \\ 0 & 0 & 216 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 1.6: Umkehrfunktion

Gegeben seien die folgenden Funktionen

i) $f_1(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$,

ii) $f_2(x) = \frac{1}{x^2-1}$,

iii) $f_3(x) = \sin(x)$,

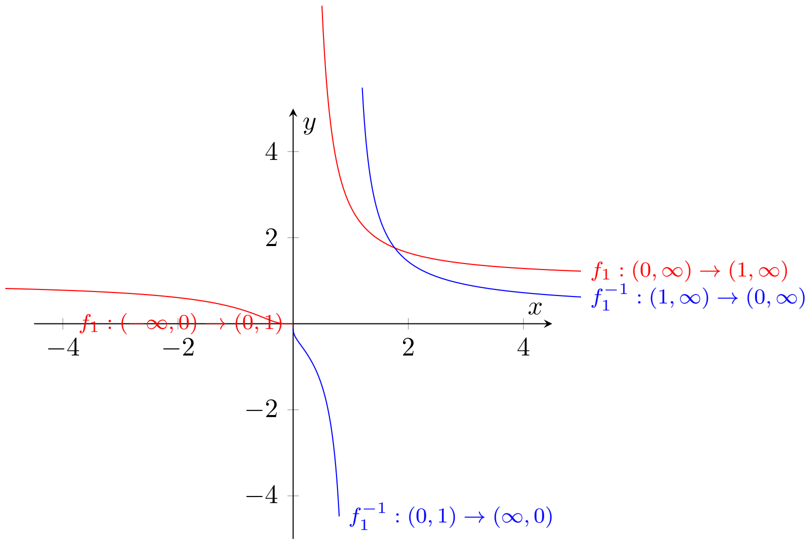
iv) $f_4(x) = \tan(x)$.

a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich und den Wertebereich.

b) Bestimmen Sie die Einschränkung des Definitionsbereichs und Wertebereichs, so dass die Funktionen bijektiv sind. (Betrachten Sie, falls nötig, den Hauptzweig.)

c) Bestimmen Sie die inverse Funktion.

d) Skizzieren Sie die Funktion sowie deren inverse Funktion.



Lösung 1.6:

i) Die Funktion $f_1(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ ist definiert für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Die erste Ableitung ist $-\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} < 0$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Daher ist f_1 streng monoton fallend auf jedem Zweig, also injektiv. Die Funktion hat den Grenzwert

$$\lim_{x \to \pm\infty} f_1(x) = 1.$$

Daher ist die Funktion surjektiv in dem Wertebereich $(0,1) \cup (1,\infty)$. Die Funktion f_1 ist eine bijektive Abbildung $f_1 : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to (0,1) \cup (1,\infty)$. Die Umkehrfunktion kann berechnet werden als

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = y, \quad y = \left\{ (0,1) \quad \text{für} x < 0, (1,\infty) \text{für} x > 0, \right.$$

$$\frac{1}{x} = \ln(y),$$

$$x = \frac{1}{\ln(y)}, \quad (\ln(y) \neq 0).$$

Die Umkehrfunktion erhalten wir durch vertauschen der Variablennamen

$$f_1^{-1}(x) = \frac{1}{\ln(x)}.$$

ii) Die Funktion $f_2(x) = \frac{1}{x^2-1}$ ist nicht definiert für $x = \pm 1$. Der Definitionsbereich ist $(-\infty,-1) \cup (-1,1) \cup (1,\infty)$. Der Wertebereich ist $(-\infty,-1] \cup (0,\infty)$. Die erste Ableitung

$$f_2'(x) = -\frac{2x}{(x^2-1)^2}$$

ist positiv für $x \in (-\infty,-1)$ und $x \in (-1,0)$. Daher ist sie monoton steigend. Sie ist negativ für $x \in (0,1)$ und $x \in (1,\infty)$ und daher monoton fallend. Die Abbildung $f_2 : (0,1) \to (-\infty,-1] \cup (1,\infty) \to \cup(0,\infty)$ ist bijektiv und die Umkehrfunktion kann berechnet werden als

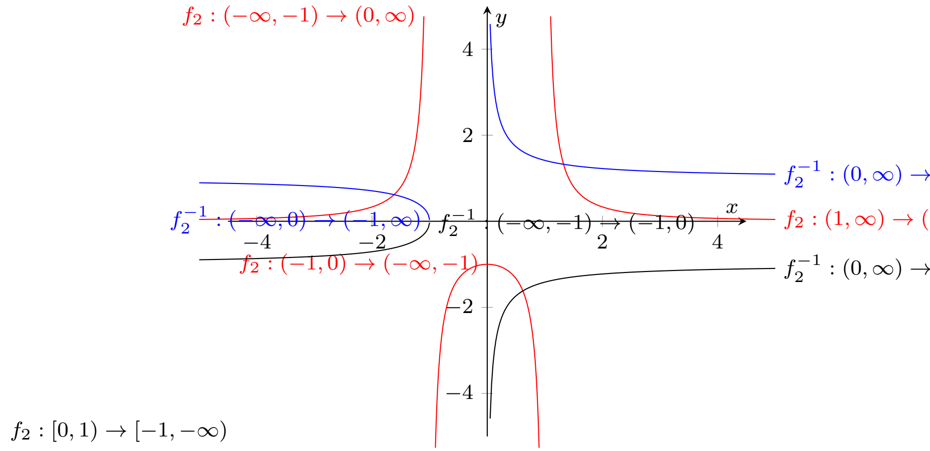
$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2-1} &= y, \\ x^2 - 1 &= \frac{1}{y}, \\ x^2 &= \frac{1}{y} + 1, \\ x &= \sqrt{\frac{1}{y} + 1}. \end{aligned}$$

Die Umkehrfunktion ergibt sich dann durch Vertauschen der Variablennamen

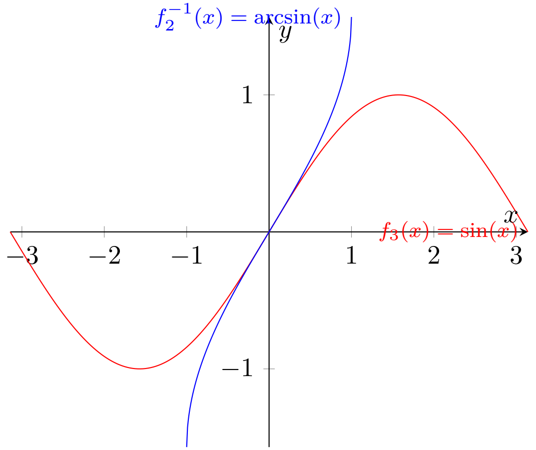
$$f_2^{-1}(x) = \sqrt{\frac{1+x}{x}}.$$

Analog können wir den negativen Zweig invertieren. Wir schränken den Definitionsbereich ein zu $(-\infty,-1) \cup (-1,0)$. Die Abbildung $f_2 : (-\infty,-1) \cup (-1,0) \to (-\infty,-1] \cup (0,\infty)$ ist bijektiv und die Umkehrfunktion kann wie oben berechnet werden, aber wir ziehen die negative Quadratwurzel. Die Umkehrfunktion des negativen Zweiges ist:

$$f_2^{-1}(x) = -\sqrt{\frac{1}{x} + 1}.$$

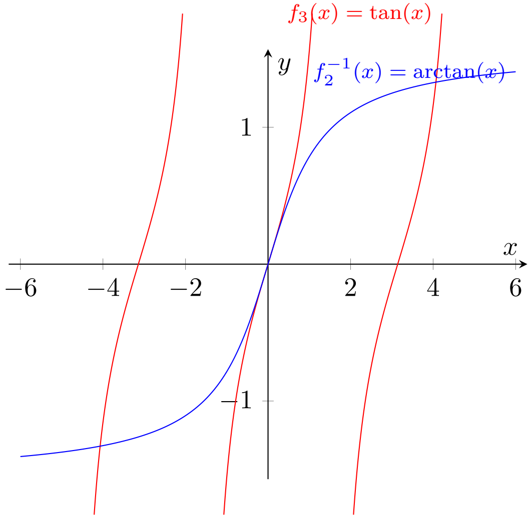


iii) Die Funktion $\arcsin(x)$ ist die Umkehrfunktion von $\sin(x)$, wenn nur der Hauptwert betrachtet wird. Nach Definition, schränken wir den Definitionsbereich von $\sin(x)$ ein auf $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, während der Wertebereich $[-1, 1]$ ist. Die erste Ableitung von $\sin(x)$ ist $\cos(x) \geq 0$ für alle $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, daher ist die Funktion monoton steigend und folglich injektiv. Als Abbildung $f_3 : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ ist die



Funktion bijektiv.

iv) Die Funktion $\arctan(x)$ ist die Umkehrfunktion von $\tan(x)$, wenn nur der Hauptwert betrachtet wird. Nach Definition beschränken wir den Definitionsbereich von $\tan(x)$ auf $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, während der Wertebereich $(-\infty, \infty)$ ist. Die erste Ableitung von $\tan(x)$ ist $\frac{1}{\cos^2(x)} > 0$ für alle $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, daher ist die Funktion monoton steigend und folglich injektiv. Als Abbildung $f_3 : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to (-\infty, \infty)$



ist sie bijektiv

Aufgabe 1.7: Umkehrfunktion

Gegeben seien die folgenden Funktionen. Geben Sie den Definitionsbereich an (betrachten Sie dabei den Hauptwert der Funktion) und überprüfen Sie, ob die Funktionen invertierbar sind. Bestimmen Sie jeweils die inverse Funktion.

i) $f(x) = 2x - 1$.

ii) $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$.

iii) $f(x) = (x-1)^{\frac{1}{3}}$.

iv) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$.

v) $f(x) = \log_2(x+3)$.

vi) $f(x) = 2 + \mathrm{e}^{x-1}$.

vii) $f(x) = \arccos(x^{-2})$.

Lösung 1.7:

i) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 1$ ist bijektiv und daher invertierbar. Um die Umkehrfunktion zu bestimmen, löst man die Gleichung $y = \dfrac{x+1}{2}$ für die Variable x. Es gilt

$$\begin{aligned} 2x - 1 &= y, \\ 2x &= y + 1, \\ x &= \frac{y+1}{2}. \end{aligned}$$

Das Ergebnis erhalten wir durch Vertauschen der Variablennamen. Beide Funktionen sind auf dem Definitionsbereich $\mathbb{R}$ definiert.

ii) Die Funktion $x^{\frac{1}{3}}$ ist definiert für $x \in \mathbb{R}$. Für die erste Ableitung gilt $\frac{1}{3}x^{-2/3} \geq 0$ für $x \in \mathbb{R}$, daher ist die Funktion streng monoton steigend und folglich injektiv. Außerdem ist die Funktion surjektiv auf $\mathbb{R}$, weil sie nicht beschränkt ist. Daher ist die Funktion bijektiv und damit invertierbar. Die Umkehrfunktion x^3 hat den gleichen Definitionsbereich $\mathbb{R}$.

iii) Die Funktion $(x-1)^{1/3}$ ist ebenso wie die vorherige Funktion bijektiv. Die Umkehrfunktion kann berechnet werden durch

$$\begin{aligned} (x-1)^{\frac{1}{3}} &= y, \\ x - 1 &= y^3, \\ x &= y^3 + 1 \end{aligned}$$

mit dem Definitionsbereich $\mathbb{R}$.

iv) Die Funktion $\dfrac{x}{x+1}$ ist definiert für $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Die Funktion hat die Grenzwerte

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 1.$$

Daher ist sie surjektiv auf dem Wertebereich $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$. Die Funktion f ist eine bijektive Abbildung $f : (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty) \to (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$. Da die Ableitung

$$f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} > 0, \quad \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

stets positiv ist, ist die Funktion streng monoton steigend auf dem Definitionsbereich. Die Umkehrfunktion wird berechnet durch

$$\begin{aligned} \frac{x}{x+1} &= y \\ x &= (x+1)y \\ x(1-y) &= y \\ x &= \frac{y}{1-y}, \end{aligned}$$

Die Funktion ist definiert für $x \in \mathbb{R} \setminus \{+1\}$.

v) Die Funktion $\log_2(x+3)$ ist definiert für $x+3 > 0 \Rightarrow x > -3$. Sie ist streng monoton steigend. Die Abbildung $f : (-3, +\infty) \to \mathbb{R}$ ist bijektiv. Die Umkehrfunktion kann berechnet werden als

$$\begin{aligned} \log_2(x+3) &= y, \\ 2^{\log_2(x+3)} &= 2^y, \\ x + 3 &= 2^y, \\ x &= 2^y - 3, \end{aligned}$$

Die Funktion ist definiert auf $\mathbb{R}$ und der Wertebereich ist $(-3, +\infty)$.

vi) Die Funktion $2 + \mathrm{e}^{x-1}$ ist definiert auf $x \in \mathbb{R}$. Die Abbildung $f : \mathbb{R} \to (2, +\infty)$ ist bijektiv, weil die Ableitung stets positiv ist $f'(x) = \mathrm{e}^{x-1} > 0$. Die Umkehrfunktion ist

$$\begin{aligned} 2 + \mathrm{e}^{x-1} &= y \\ \mathrm{e}^{x-1} &= y - 2 \\ \ln \mathrm{e}^{x-1} &= \ln(y-2) \\ x &= \ln(y-2) + 1, \end{aligned}$$

welche definiert ist auf $x \in (2, +\infty)$ und der Wertebereich ist $\mathbb{R}$.

vii) Die Funktion $\arccos(x)$ ist die Umkehrfunktion von $\cos(x)$, wenn man nur den Hauptwert der Funktion betrachtet. Nach Definition beschränken wir den Definitionsbereich von $\cos(x)$ auf $0 \leq x \leq \pi$, dann ist der Wertebereich $[-1, 1]$. Damit ist der Definitionsbereich von $\arccos(x)$ gegeben durch $[-1, 1]$ und der Wertebereich ist $[0, \pi]$. Für die Funktion $\arccos(x^{-2})$ ist der Definitionsbereich der Definitionsbereich der zusammengesetzten Funktion. Der Definitionsbereich der inneren Funktion x^{-2} ist $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Der Definitionsbereich der äußeren Funktion $\arccos(w)$ wie oben bemerkt, ist $w \in [-1, 1]$, daher muss $w := x^{-2} \geq -1$ gelten, was immer wahr ist. Es gilt $x^{-2} \leq 1 \Rightarrow x^2 \geq 1 \Rightarrow x \geq 1 \wedge x \leq -1$. Der Wertebereich der zusammengesetzten Funktion $\arccos(x^{-2})$ ist $[0, \pi]$, weil das der Wertebereich der äußeren Funktion ist.
Zu untersuchen bleibt die Monotonie der zusammengesetzten Funktion. Da die Funktion x^{-2} nicht-monoton ist, können wir daraus keine Aussage über die Monotonie der zusammengesetzten Funktion treffen. Die Ableitung von arccos ist

$$(\arccos(w))' = -\frac{1}{\sqrt{1 - w^2}}.$$

Für die Ableitung der zusammengesetzten Funktion benutzen wir die Kettenregel. Damit erhalten wir die Ableitung

$$\begin{aligned} \left(\arccos(x^{-2})\right)' &= -\frac{1}{\sqrt{1 - (x^{-2})^2}}\,(-2x^{-3}), \\ &= \frac{2}{\sqrt{1 - (x^{-4})}}\,x^{-3}, \end{aligned}$$

welche ungerade ist. Daher ist die zusammengesetzte Funktion $\arccos(x^{-2})$ nicht-monoton. Um die Umkehrfunktion zu bestimmen müssen wir den Definitionsbereich in zwei Teile teilen, in denen die Funktion jeweils monoton ist. Damit definieren wir zwei Zweige der Funktion. Die Funktion ist monoton, wenn wir sie auf den Definitionsbereich für den x-positiven Zweig auf $[1, \infty)$ einschränken und für den x-negativen Zweig auf $(-\infty, -1]$ einschränken. Die Umkehrfunktion wird berechnet durch

$$\begin{aligned} \arccos(x^{-2}) &= y, \\ \cos(\arccos x^{-2}) &= \cos(y), \\ x^{-2} &= \cos(y), \\ x &= \pm\frac{1}{\sqrt{\cos(y)}}. \end{aligned}$$

Durch Vertauschen der Variablennamen erhalten wir die Umkehrfunktion

$$y = \pm\frac{1}{\sqrt{\cos(x)}}.$$

Diese Funktion ist die zusammengesetzte Funktion mit dem Definitionsbereich, der die Bedingungen

$$\cos(x) > 0$$

und $x \in [0, \pi]$ erfüllt. Dies ist der Definitionsbereich für den Hauptwert von $\cos(x)$. Daraus ergibt sich die Bedingung $x \in [0, \frac{\pi}{2})$. Der Wertebereich ist der Wertebereich der äußeren Funktion. Also $[1, +\infty]$ für den positiven Zweig und $(-\infty, -1]$ für den negativen Zweig.