Helmut-Schmidt-Universität
Universität der Bundeswehr Hamburg
Fakultät für Maschinenbau und Bauingenieurwesen

Prof. Dr. Thomas Carraro
M.Sc Janna Puderbach

Mathematik II/B (WI/ET) — Blatt 2

WT 2024 — Grenzwerte, Folgen, Stetigkeit

Einführende Bemerkungen

- Vermeiden Sie die Verwendung von Taschenrechnern oder Online-Ressourcen.

Aufgabe 2.1: Grenzwertdefinition

Bestimmen Sie zu den unten angegebenen Folgen (a_n) mit dem Grenzwert a und die angegebenen Werte für k jeweils ein N so, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > N$ gilt

$$|a_n - a| < 10^{-k}.$$

a) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, $a = 0$, $k = 2$

b) $a_n = \dfrac{3n+1}{n+1}$, $a = 3$, $k = 4$

c) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n!} + 1$, $a = 1$, $k = 3$

Lösung 2.1:

a) Es soll gelten $|a_n - a| = \frac{1}{\sqrt{n}} \overset{!}{<} 10^{-2}$. Dies lässt sich umstellen zu:

$$n > \left(\frac{1}{10^{-2}}\right)^2 = 10^4 = 10000 = N.$$

b) Hier ergibt sich

$$\begin{aligned} & |a_n - a| < 10^{-4} \\ \Leftrightarrow \quad & 10^{-4} > \left| \frac{3n+1}{n+1} - 3 \right| = \frac{|-2|}{n+1} \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{n+1}{2} > 10^4 \\ \Leftrightarrow \quad & n > 20000 - 1 = 19999 = N. \end{aligned}$$

c) Für diese Folge ist $|a_n - a| = \left|\frac{(-1)^n}{n!}\right| = \frac{1}{n!}$ Mit $k = 3$ soll also gelten:

$$\frac{1}{n!} < 10^{-3} \quad \Leftrightarrow \quad n! > 1000.$$

Das ist beispielsweise erfüllt für $n > 1000 = N$. Ein kleinstmögliches N kann man durch die Untersuchung von $n!$ ermitteln. Es ist $6! = 720 < 1000$ und $7! = 7 \cdot 6! = 5040 > 1000$. Die Bedingung ist also bereits für $n > 6$ erfüllt.

Aufgabe 2.2:

a) Zeigen Sie anhand der Definition der Konvergenz, dass gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+n-12}{n^2-8} = 2\,.$$

b) Zeigen Sie: Konvergiert $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a, so konvergiert auch $\{|a_n|\}_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $|a|$.

c) Gilt die Umkehrung von b)? Begründen Sie Ihre Aussage mit einem Beweis oder einem Gegenbeispiel.

Lösung 2.2:

Lösung

Zu a) Die Aussage „a_n konvergiert gegen a“ bedeutet: Für jedes $k \in \mathbb{N} > 0$ existiert ein $N = N(k) \in \mathbb{R}$, so dass für alle $n > N$ gilt, dass $|a_n - a| < 10^{-k}$. Für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$a_n := \frac{2n^2+n-12}{n^2-8} = \frac{2(n^2-8)+(n+4)}{n^2-8} = 2 + \frac{n+4}{n^2-8}\,.$$

Damit folgt

$$|a_n - 2| = \left|\frac{n+4}{n^2-8}\right| \overset{\text{für } n\geq 3}{=} \frac{n+4}{n^2-8} = \frac{n+4}{n^2-16+8}$$

$$\overset{\text{für } n\geq 5}{<} \frac{n+4}{n^2-16} = \frac{n+4}{(n+4)(n-4)} = \frac{1}{n-4}\,.$$

Sei nun $k \in \mathbb{N}$ vorgegeben. Es gilt

$$\frac{1}{n-4} = 10^{-k} \qquad \Longleftrightarrow \qquad n = 10^k + 4\,.$$

Ist $N(k) := 4 + 10^k$, dann gilt insbesondere für alle $n > N(k)$:

$$|a_n - 2| < 10^{-k}\,.$$

Damit ist ist Behauptung bewiesen.

Zu b) Die Aussage „a_n konvergiert gegen a“ bedeutet: Für jedes $k \in \mathbb{N}$ gibt es ein $N(k) \in \mathbb{R}$, so dass für alle $n > N$ gilt, dass $|a_n - a| < 10^{-k}$. Wegen

$$||a_n| - |a|| \leq |a_n - a|\,,$$

gilt für jedes $k \in \mathbb{N}$, dass das dazugehörige $N(k)$ und jedes $n > N$ auch

$$||a_n| - |a|| < 10^{-k}$$

erfüllt, d.h. $|a_n|$ konvergiert gegen $|a|$.

Zu c) Die Umkehrung gilt nicht, zum Beispiel gilt für $a_n = (-1)^n$ sicher $|a_n| = 1 \to 1$, aber $(-1)^n$ ist nicht konvergent.

Aufgabe 2.3: Grenzwerte monotoner Folgen

Es seien $a_1 = \sqrt{2}$ und $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$. Überprüfen Sie,

a) dass (a_n) beschränkt ist,

b) dass (a_n) monoton wächst und

c) gegen die größte Lösung der Gleichung $x^2 - x - 2 = 0$ konvergiert.

Lösung 2.3:

a) Null ist sicher eine untere Schranke für alle $a_n > 0$. Eine obere Schranke ist 2. Wir untersuchen dazu das Quadrat der Folge und rechnen nach, dass $a_n^2 \leq 4$ für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$a_{n+1}^2 = 2 + a_n \overset{!}{\leq} 4$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn bereits $a_n \leq 2$ ist. Das ist für $a_1 = \sqrt{2}$ der Fall und damit auch für alle folgenden a_n.

b) Es ist zu zeigen, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n \leq a_{n+1}$.
Äquivalent dazu ist $\dfrac{a_{n+1}^2}{a_n^2} \geq 1$:

$$\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}^2}{a_n^2} &\geq \frac{2 + a_n}{2a_n} \qquad \text{(wegen } a_n \leq 2\text{)} \\
&= \frac{1}{a_n} + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \qquad \text{(wegen } a_n \leq 2\text{)}
\end{aligned}$$

c) Da a_n beschränkt und monoton ist, muss die Folge einen Grenzwert

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1}$$

besitzen. Mit diesem Grenzwert ist

$$\begin{aligned}
a^2 - a - 2 &= \lim_{n\to\infty} a_{n+1}^2 - \lim_{n\to\infty} a_n - 2 \\
&= \lim_{n\to\infty} (\sqrt{2 + a_n}^2 - a_n) - 2 \\
&= \lim_{n\to\infty} 2 - 2 = 0
\end{aligned}$$

Damit muss a eine Nullstelle des Polynoms $p(x) = x^2 - x - 2$ sein.
$p(x)$ ist ein Polynom zweiten Grades, besitzt also zwei Nullstellen. Negative Werte nimmt $p(x)$ nur zwischen den beiden Nullstellen an. Da

$$p(a_1) = p(\sqrt{2}) = -\sqrt{2} < 0$$

ist, liegt a_1 zwischen den beiden Nullstellen. Wegen der Monotonie von (a_n) muss es sich bei a also um die größere der beiden Nullstellen handeln.

Aufgabe 2.4: Funktionenlimes

a) Gegeben sei die Funktion

$$f(x) := \frac{x^3 + |x+1| + \operatorname{sign}(x+1)}{\operatorname{sign} x}, \; x \in D(f) := \mathbb{R}\,.$$

Bestimmen Sie $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to(-1)+} f(x)$ und $\lim\limits_{x\to(-1)-} f(x)$.

b) Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \frac{\sinh x}{\cosh(ax)}\,, \quad a \in \mathbb{R}\,.$$

Bestimmen Sie $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$.

Hinweise:

- Mit der zunächst als bekannt vorausgesetzten Exponentialfunktion e^x gilt

$$\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \text{und} \qquad \cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

- Die Signum-Funktion liefert das Vorzeichen des Argumentes:

$$\operatorname{sign}(z) = \begin{cases} +1 & , z \geq 0 \\ -1 & , z < 0 \end{cases}$$

Lösung 2.4:

a) **i)** Für $x > 0$ gilt $\operatorname{sign}(x) = \operatorname{sign}(1+x) = 1$ sowie $|x+1| = x+1$, damit gilt

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} (x^3 + x + 1 + 1) = 2.$$

ii) Für $-1 < x < 0$ gilt $\operatorname{sign}(x) - 1$, $\operatorname{sign}(1+x) = 1$ sowie $|x+1| = x+1$, damit gilt

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} \frac{x^3 + x + 1 + 1}{-1} = -2.$$

iii) Für $-1 < x < 0$ gilt $\operatorname{sign}(x) = -1$, $\operatorname{sign}(1+x) = 1$ sowie $|x+1| = x+1$, damit gilt

$$\lim_{x\to(-1)+} f(x) = \lim_{x\to(-1)+} \frac{x^3 + x + 1 + 1}{-1} = 0.$$

iv) Für $x < -1$ gilt $\operatorname{sign}(x) = \operatorname{sign}(1+x) = -1$ sowie $|x+1| = -(x+1)$, damit gilt

$$\lim_{x\to(-1)-} f(x) = \lim_{x\to(-1)-} \frac{x^3 - x - 1 - 1}{-1} = 2.$$

b) Die Funktion $f(x)$ ist eine ungerade Funktion:

$$f(-x) = \frac{\sinh(-x)}{\cosh(ax)} = \frac{\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-(-x)}}{\mathrm{e}^{-ax} + \mathrm{e}^{-(-ax)}} = -\frac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{ax} + \mathrm{e}^{-ax}} = -f(x)$$

Daher ist $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ und es genügt einen der beiden Grenzwerte zu berechnen.

Es wird vorausgesetzt, dass e^x stetig ist und dass gilt $\lim\limits_{x\to\infty} \mathrm{e}^x = \infty$, somit kann man den Funktionsgrenzwert durch die Substitution $z = \mathrm{e}^x$ bestimmen:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{ax} + \mathrm{e}^{-ax}} = \lim_{z\to\infty} \frac{z - \frac{1}{z}}{z^a + \frac{1}{z^a}} \\ &= \lim_{z\to\infty} \left(\frac{z}{z^a} \cdot \frac{1 - \frac{1}{z^2}}{1 + \frac{1}{z^{2a}}} \right)\end{aligned}$$

Der Grenzwert des ersten Bruches ist

$$\lim_{z\to\infty} \frac{z}{z^a} = \lim_{z\to\infty} z^{1-a} = \begin{cases} \infty, & a < 1 \\ 1, & a = 1 \\ 0, & a > 1 \end{cases}.$$

Für den zweiten Bruch hat man

$$\lim_{z\to\infty} \frac{1 - \frac{1}{z^2}}{1 + \frac{1}{z^{2a}}} = \begin{cases} 0, & a < 0 \\ \frac{1}{2}, & a = 0 \\ 1, & a > 0 \end{cases}.$$

Insgesamt ergibt sich daraus:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \begin{cases} \infty, & 0 \leq a < 1 \\ 1, & a = 1 \\ 0, & a > 1 \end{cases}$$

Für $a < 0$ hat man

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{z\to\infty} \left(\frac{z}{z^a z^{-2a}} \cdot \frac{1 - \frac{1}{z^2}}{z^{2a} + 1} \right) \\ &= \lim_{z\to\infty} \left(\frac{z}{z^{-a}} \cdot \frac{1 - \frac{1}{z^2}}{z^{2a} + 1} \right) = \begin{cases} 0, & a < -1 \\ 1, & a = -1 \\ \infty, & -1 < a < 0 \end{cases}.\end{aligned}$$

Aufgabe 2.5: Grenzwert Analyse - Definition

a) Notieren Sie die Definition des Grenzwertes und zeigen Sie, dass die Folge $a_n = \frac{1}{n}$ gegen den Grenzwert $a = 0$ konvergiert.
(Dies ist gleichbedeutend mit dem Nachweis, dass $\forall k \in \mathbb{N}$ eine Zahl $N \in \mathbb{R}$ existiert, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > N$ gilt: $|a_n - a| < 10^{-k}$).

b) Berechnen Sie den Grenzwert $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ der untenstehenden Folgen und dokumentieren Sie die Rechenregel, die Sie zur Berechnung des Grenzwertes verwendet haben (Produktregel, Einschließungssatz, Produkt beschränkter Folgen, Produkt von Nullfolgen etc).

i) $a_n = \frac{n^2 + 5n}{3n^2 + 1}$ **ii)** $a_n = \log_{10}(10n^2 - 2n) - \log_{10}(n^2 + 1)$

iii) $a_n = \frac{(n+1)!}{n! - (n+1)!}$ **iv)** $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3n}$

v) $a_n = \frac{\cos n}{n}$ **vi)** $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

vii) $a_n = \frac{2^n}{n!}$

Lösung 2.5:

a) Es ist zu zeigen: $\forall k \in \mathbb{N} : \exists N \in \mathbb{R}$:

$$|n^{-1} - 0| < 10^{-k}, \forall n > N.$$

Wählen Sie $N = 10^k$, um die Eigenschaft zu zeigen.

b) Im vorigen Aufgabenteil wurde gezeigt, dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Mit dem Ergebnis aus **a**) gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0, \text{ for all } \alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0.$$

Des Weiteren wird die Stetigkeit der Funktionen vorausgesetzt und ausgenutzt.

i) Teilen von Zähler und Nenner durch n^2 liefert

$$\frac{1 + \frac{5}{n}}{3 + \frac{1}{n^2}}$$

Der Grenzwert des Zählers ist 1, der Grenzwert des Nenners ist 3. Somit liefert die Quotientenregel für Grenzwerte das Ergebnis $a = \frac{1}{3}$.

ii)

$$\begin{aligned}\log_{10}(10n^2 - 2n) - \log_{10}(n^2 + 1) &= \log_{10} \frac{10n^2 - 2n}{n^2 + 1} \\ &= \log_{10} \frac{10 - \frac{2}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}}.\end{aligned}$$

Der Grenzwert des Arguments b des Logarithmus-Terms liefert

$$b = \lim_{n\to\infty} \frac{10 - \frac{2}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}} = 10.$$

Aufgrund der Stetigkeit der Logarithmus-Funktionen innerhalb ihres Definitionsbereichs auf $x > 0$, berechnet sich der Grenzwert zu

$$a = \lim_{n\to\infty} \log_{10} b_n = \log_{10} b = 1.$$

iii) Umformung des Bruchausdrucks liefert

$$\frac{(n+1)!}{n! - (n+1)!} = \frac{(n+1)n!}{n! - (n+1)n!} = \frac{(n+1)}{-n} = -(1 + \frac{1}{n}).$$

Unter Verwendung der Summenregel ergibt sich der Grenzwert

$$a = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n! - (n+1)!} = \lim_{n\to\infty} -(1 + \frac{1}{n}) = -1.$$

iv) Es gilt

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3n} = \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)^3$$

Der Grenzwert der Folge $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ist genau die Eulersche Zahl e.

$$b = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}\,.$$

Die Produktregel liefert dann

$$\lim_{n\to\infty} b_n^3 = \lim_{n\to\infty} b_n \lim_{n\to\infty} b_n \lim_{n\to\infty} b_n = b^3 = \mathrm{e}^3 .$$

Alternativ kann auch die Stetigkeit der Funktion x^3 ausgenutzt werden, um das Ergebnis zu erhalten.

v) Die Folge

$$a_n = \frac{\cos n}{n}$$

kann als Produkt $a_n = b_n c_n$ einer beschränkten Teilfolgen $b_n = \cos n \neq 0$ und einer Nullfolge $c_n = \frac{1}{n}$ aufgefasst werden. Entsprechend ist deren Produkt ebenfalls eine Nullfolge und der Grenzwert ist $a = 0$.

vi) Es gilt

$$\begin{aligned}\sqrt{n+1} - \sqrt{n} &= \frac{\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{\frac{1}{n}}}.\end{aligned}$$

Unter Verwendung der Produkt und Additionsregel erhalten wir den Grenzwert $a = 0$.

vii) Die Folge $a_n = \dfrac{2^n}{n!}$ kann für $n > 3$ nach oben und unten beschränkt werden

$$0 \leq \frac{2^n}{n!} = \frac{\overbrace{2\cdot 2\cdot 2 \ldots 2}^{n}}{1\cdot 2\cdot 3 \ldots n} \leq \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{2}\cdot\underbrace{\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{4}\cdots\frac{2}{n-1}}_{\leq 1}\cdot\frac{2}{n} \leq \frac{4}{n}.$$

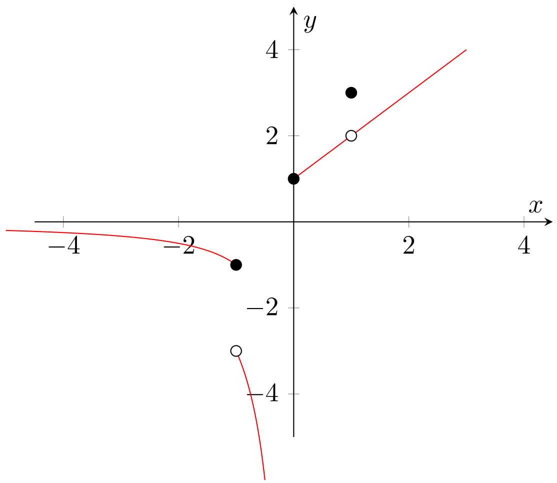
Da die Folge von oben und unten durch zwei Nullfolge beschränkt ist, erhält man mit dem Einschließungssatz den Grenzwert $a = 0$.

Aufgabe 2.6: Stetigkeit

Betrachten Sie die Funktion $y = f(x)$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{für } x \in (-\infty, -1], \\ \frac{3}{x} & \text{für } x \in (-1, 0), \\ \frac{x^2-1}{x-1} & \text{für } x \in [0,1) \cup (1, \infty), \\ 3 & \text{für } x = 1. \end{cases}$$

und deren Graphen



a) Finden Sie alle Werte an denen die Funktion unstetig ist.

b) Begründen Sie für jeden dieser Werte, weshalb die formale Definition der Stetigkeit verletzt ist.

c) Klassifizieren Sie jede der Untetigkeitsstellen als **Sprungstelle**, **hebbare Unstetigkeit** oder **Polstelle**.

Lösung 2.6:

Die Funktion ist unstetig bei

i) $x = -1$,

ii) $x = 0$,

iii) $x = 1$.

i) Die Funktion ist unstetig für $x = -1$. Diese Unstetigkeit entspricht einer Sprungstelle, da die links- und rechtsseitigen Grenzwerte existieren (sprich, auf einen endlichen Wert konvergieren), diese aber nicht übereinstimmen:

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} \frac{1}{x} = -1,$$

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} \frac{3}{x} = -3.$$

ii) Die Funktion ist unstetig bei $x = 0$. Dies ist eine Polstelle, da der linksseitiger Grenzwert nicht existiert.

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{3}{x} = -\infty,$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \to 0^+} x + 1 = 1.$$

iii) Die Unstetigkeit bei $x = 1$ ist hebbar, da deren links- und rechtsseitige Grenzwerte existieren und übereinstimmen

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \to 1^-} x + 1 = 2,$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \to 1^+} x + 1 = 2,$$

jedoch vom Funktionswert $f(1) = 3$ an der Stelle abweichen.