Helmut-Schmidt-Universität
Universität der Bundeswehr Hamburg
Fakultät für Maschinenbau und Bauingenieurwesen

Prof. Dr. Thomas Carraro
M.Sc Janna Puderbach

Mathematik II/B (WI/ET) — Blatt 4

WT 2024 — Regel von L'Hospital, Differenzieren, Kurven

Einführende Bemerkungen

- Vermeiden Sie die Verwendung von Taschenrechnern oder Online-Ressourcen.

Aufgabe 4.1: Differenzieren

a) Bestimmen Sie jeweils die erste Ableitung. (Eventuell notwendige Beschränkungen des Definitionsgebietes sind nicht angegeben.)

$$f_9(t) = \sinh(t) - \cosh(2t), \qquad f_{10}(t) = (t-3)^4 \sinh(t),$$
$$f_{11}(t) = t^2\, e^{-2t} \sin(3t), \qquad f_{12}(t) = \sqrt{t}\, e^{2t},$$
$$f_{13}(t) = \sin^3\left(e^{2t^2} + t^5\right), \qquad f_{14}(t) = \sqrt{2\,t^2+1},$$
$$f_{15}(t) = \ln(t) - \ln(5t), \qquad f_{16}(t) = \ln(t^2) - \ln(t^5).$$

b) Bestimmen Sie die n–te Ableitung folgender Funktionen.

$$f_{21}(t) = \sin(3t), \qquad f_{22}(t) = t\, e^{2t}$$
$$f_{23}(t) = t \cdot \cos(t), \qquad f_{24}(t) = t\, \ln(2t)$$

Aufgabe 4.2: Vektor- und Matrixwertige Funktionen

Gegeben seien

$$\boldsymbol{A}(t) = \begin{pmatrix} t & t^2 \\ \sqrt{t} & t^5 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{B}(t) = \begin{pmatrix} \sin t & \cos t \\ e^t & \cosh t \end{pmatrix},$$
$$\boldsymbol{c}(t) = \left(t^3,\, \sqrt{t^5},\, \frac{1}{t}\right)^\top, \qquad \boldsymbol{d}(t) = \left(e^{-t^2},\, \sin(\sqrt{t}),\, \tanh(t/2)\right)^\top.$$

Berechnen Sie

a) $\frac{d}{dt}\Big(\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{B}(t)\Big)$ und

b) $\frac{d}{dt}\Big(\boldsymbol{c}(t) \times \boldsymbol{d}(t)\Big)$

auf die folgenden beiden Arten:

- Indem sie vor der Differentiation die Produkte $\boldsymbol{AB}$ bzw. $\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}$ bilden und die Ergebnisfunktionen ableiten.
- Indem Sie zunächst die Ableitungen der einzelnen Funktionen bilden und diese dann gemäß einer Produktregel verrechnen.

Aufgabe 4.3: Minimaler Abstand

Gegeben seien die folgenden Funktionen

i) $f_1(x) = x^2 + 1,$ **ii)** $f_2(x) = \ln(x).$

a) Skizzieren Sie die Funktionen f_1 und f_2.

b) Bestimmen Sie den minimalen vertikalen Abstand beider Funktionsgraphen

$$d = \min\ \left\{|f_1(x) - f_2(x)|;\, x \in \mathbb{R}^+\right\}.$$

Aufgabe 4.4: Monotonieverhalten

Untersuchen Sie das Monotonieverhalten der folgenden Funktionen. Geben Sie dazu alle Intervalle an, in denen die Funktion monoton steigend bzw. monoton fallend ist.

a) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$

b) $g(x) = -\cos(x) - 2\sin(x/2)$

Aufgabe 4.5: Optimierungsproblem

Ein Poster muss mit einer Gesamtfläche von $\bar{A} = 64000\ \text{mm}^2$ gedruckt werden. Es muss 10 mm Seitenränder und 25 mm obere und untere Ränder haben. Welche Höhe und Breite ergeben die maximale Druckfläche?

Aufgabe 4.6: Tangenten

a) Bestimmen Sie die Geradengleichungen (in der Form $ax + by = c$) der Tangenten an den Nullstellen der Funktionen

$$\varphi_1(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6, \qquad \varphi_2(x) = x^2 \text{ und } \varphi_3(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{für } x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & \text{für } x < 0 \end{cases}.$$

b) Geben Sie alle Punkte (x–Werte) an, in denen die Tangenten von $f(x) = x^2$ und $g(x) = x^3$ parallel sind.

c) Stellen Sie den Verlauf der beiden vektorwertigen Funktionen

$$\boldsymbol{v}(t) = \begin{pmatrix} t \\ \varphi_3(t) \end{pmatrix} \qquad \text{mit } \varphi_3(t) \text{ aus Aufgabenteil } \mathbf{a)}$$

und

$$\boldsymbol{w}(s) = \begin{pmatrix} s \cdot |s| \\ s \end{pmatrix}.$$

im selben Graphen dar.
Berechnen Sie – wo möglich – die Ableitungen beider Funktionen $\boldsymbol{v}(t)$ und $\boldsymbol{w}(s)$.

Hinweis: Die Funktion $\boldsymbol{w}(s)$ lässt sich analog zu $\varphi_3(t)$ mit Hilfe einer Fallunterscheidung auch ohne die Betragsfunktion darstellen.

Aufgabe 4.7: Regel von L'Hospital

Berechnen Sie mit Hilfe der Regel von L'Hospital die Grenzwerte

$$A = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\tan x}{x} \right), \qquad B = \lim_{x \to 0} \left(\frac{1 - \cosh x}{x^3} \right), \qquad C = \lim_{x \to 1} \left(\frac{\ln x}{\sin(\pi x)} \right)$$

Ergebnisse zu Aufgabe 4.1:

a) $f_9'(2) \approx -50.818$, $f_{10}'(2) \approx -10.745$, $f_{11}'(2) \approx 0.2315$, $f_{12}'(2) \approx 173.73$, $f_{13}'(2) \approx -2039.7$,
$f_{14}'(2) = 4/3$, $f_{15}'(2) = 0$, $f_{16}'(2) = -3/2$
b) $f_{22}^{(n)}(t) = (n + 2t)2^{n-1}\mathrm{e}^{2t}$, $f_{24}^{(n)}(t) = (-1)^n (n-2)! t^{-(n-1)}$.

Ergebnisse zu Aufgabe 4.2:

a) $\begin{pmatrix} t\cos t + t^2\mathrm{e}^t + \sin t + 2t\mathrm{e}^t & -t\sin t + t^2 \sinh t + \cos t + 2t\cosh t \\ \sqrt{t}\cos t + t^5\mathrm{e}^t + \frac{\sin t}{2\sqrt{t}} + 5t^4\mathrm{e}^t & -\sqrt{t}\sin t + t^5 \sinh t + \frac{\cos t}{2\sqrt{t}} + 5t^4\cosh t \end{pmatrix}$.

b) $\begin{pmatrix} \frac{5}{2}t^{3/2}\tanh\frac{t}{2} + \frac{t^{5/2}}{2\cosh^2\frac{t}{2}} - \frac{\cos\sqrt{t}}{2t^{3/2}} + \frac{\sin\sqrt{t}}{t^2} \\ -2\mathrm{e}^{-t^2} - \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{t^2} - 3t^2\tanh\frac{t}{2} - \frac{t^3}{2\cosh^2\frac{t}{2}} \\ 3t^2\sin\sqrt{t} + \frac{t^{5/2}\cos\sqrt{t}}{2} - \frac{5}{2}t^{3/2}\mathrm{e}^{-t^2} + 2t^{7/2}\mathrm{e}^{-t^2} \end{pmatrix}$

Ergebnisse zu Aufgabe 4.5:

Die maximale Druckfläche beträgt: $A_{\max} = 32000\ \mathrm{mm}^2$.

Ergebnisse zu Aufgabe 4.6:

a) Nullstellen: $\varphi_1(1) = \varphi_1(-2) = \varphi(3) = 0$, $\varphi_2(0) = 0$, $\varphi_3(0) = 0$

Ergebnisse zu Aufgabe 4.7:

$A = 1$, $B = \pm\infty$, $C = -1/\pi$