Aufgabe 1: Differentialgleichungen und Systeme (Hauptvektoren)

Gegeben sei die lineare Differentialgleichung

$$u'''(t) - 4\,u''(t) + 4\,u'(t) = 9\,\mathrm{e}^{-t}\,. \tag{0.1}$$

a) Verwandeln Sie die Differentialgleichung (0.1) in ein System erster Ordnung

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{f}(t)\,.$$

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des homogenen Systems $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)$ aus Teil a).

c) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Systems aus Teil a).

Hinweis: Eine spezielle Lösung des Systems aus Teil a) kann mit dem Ansatz $\boldsymbol{x}_{\mathrm{p}}(t) = (\alpha, \beta, \gamma)^\top \cdot \mathrm{e}^{-t}$, mit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, bestimmt werden.

Lösung 1:

a) Mit den Substitutionen $u' =: v$ und $u'' = v' =: w$ erhält man das System erster Ordnung:

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{e}^{-t}\,.$$

Mit $\boxed{\boldsymbol{x}(t) := (u(t), v(t), w(t))^\top}$ und $\boxed{\boldsymbol{f}(t) := (0,0,9)^\top \mathrm{e}^{-t}}$ folgt

$$\boxed{\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{f}(t)\,, \qquad \boldsymbol{A} := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix}.}$$

b) Die charakteristische Gleichung ist

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & -4 & 4-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda \cdot \left(\lambda^2 - 4\lambda + 4\right) = 0.$$

Die Eigenwerte sind somit $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_{2,3} = 2$. Ein Eigenvektor für $\lambda_1 = 0$ ist $\boldsymbol{v}_1 = \left(1\,,\,0\,,\,0\right)^\top$. Für $\lambda_{2,3} = 2$ gibt es nur einen linear unabängigen Eigenvektor, z.B. $\boldsymbol{v}_2 = \left(1\,,\,2\,,\,4\right)^\top$. Es muss also noch ein zugehöriger Hauptvektor bestimmt werden:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{h} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Damit erhält man die allgemeine Lösung des homogenen Systems zu

$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{hom}}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{e}^{2\,t} + c_3 \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right] \cdot \mathrm{e}^{2\,t}$$

c) Für das inhomogene System erhält man mit dem Ansatz $\boldsymbol{x}_{\mathrm{p}}(t) = (\alpha, \beta, \gamma)^\top \cdot \mathrm{e}^{-t}$ nach Kürzen durch den Exponentialterm das LGS

$$\begin{pmatrix} -\alpha \\ -\beta \\ -\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Eine partikuläre Lösung des inhomogenen Systems ist damit

$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{p}}(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{e}^{-t}\,.$$

Die allgemeine Lösung ist die Summe aus der homogenen und der partikulären Lösung:

$$\boxed{\begin{aligned} \boldsymbol{x}(t) &= c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{e}^{2\,t} + c_3 \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right] \cdot \mathrm{e}^{2\,t} \\ &\quad + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{e}^{-t}\,. \end{aligned}}$$

Aufgabe 2:

a) Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$u''(x) - 16u(x) = 16x \qquad \text{mit} \qquad u(0) = 1,\ u'(0) = 4.$$

i) Überführen Sie diese gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung in ein System aus zwei Differentialgleichungen erster Ordnung,

$$\boldsymbol{y}'(x) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}(x) + \boldsymbol{g}(x), \qquad \text{mit} \qquad \boldsymbol{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}.$$

Geben Sie hierfür auch die Anfangsbedingung an.

ii) Bestimmen Sie die Lösung $\boldsymbol{y}(x)$ dieses Anfangswertproblems.

iii) Bestimmen Sie daraus die Lösung $u(x)$ der ursprünglichen Anfangswertaufgabe.

b) Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$\boldsymbol{y}'(x) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}(x) + \boldsymbol{b}, \qquad \text{mit} \qquad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

i) Bestimmen Sie ein **reelles** Fundamentalsystem des zugehörigen homogenen Problems.

ii) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Differentialgleichungssystems

$$\boldsymbol{y}'(x) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}(x) + \boldsymbol{b}.$$

Lösung 2:

a) i) Mit

$$\boldsymbol{y}(x) = \begin{pmatrix} u(x) \\ u'(x) \end{pmatrix}$$

ergibt sich

$$\boldsymbol{y}'(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 16 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{y}(x) + \begin{pmatrix} 0 \\ 16x \end{pmatrix}.$$

Die zugehörigen Anfangswerte sind $\boldsymbol{y}(0) = (1, 4)^\top$.

ii) Die Systemmatrix hat die Eigenwerte $\lambda_1 = +4$ und $\lambda_2 = -4$ mit den Eigenvektoren

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ und } \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Die Fundamentalmatrix ist damit

$$\boldsymbol{Y}(x) = \begin{pmatrix} e^{4x} & -e^{-4x} \\ 4e^{4x} & 4e^{-4x} \end{pmatrix}.$$

Die Inverse der Matrix $\boldsymbol{Y}(0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$ ist

$$\boldsymbol{Y}(0)^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Eine Lösung des Anfangswertproblems ergibt sich dann zu

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{y}(x) =& \boldsymbol{Y}(x)\boldsymbol{Y}(0)^{-1}\boldsymbol{y}(0) + \int_{t=0}^{x} \boldsymbol{Y}(x-t)\boldsymbol{Y}(0)^{-1}\boldsymbol{g}(t)\mathrm{d}t, \qquad \text{mit } \boldsymbol{g}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 16t \end{pmatrix}. \\
=& \boldsymbol{Y}(x)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_{t=0}^{x} \boldsymbol{Y}(x-t)\begin{pmatrix} 2t \\ 2t \end{pmatrix}\mathrm{d}t \\
=& e^{4x}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \int_{t=0}^{x} 2t \begin{pmatrix} e^{4(x-t)} - e^{-4(x-t)} \\ 4e^{4(x-t)} + 4e^{-4(x-t)} \end{pmatrix}\mathrm{d}t \\
=& e^{4x}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \left[2t \cdot \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -e^{4(x-t)} - e^{-4(x-t)} \\ -4e^{4(x-t)} + 4e^{-4(x-t)} \end{pmatrix}\right]_{t=0}^{x} + \\
&- \int_{t=0}^{x} 2 \cdot \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -e^{4(x-t)} - e^{-4(x-t)} \\ -4e^{4(x-t)} + 4e^{-4(x-t)} \end{pmatrix}\mathrm{d}t \\
=& e^{4x}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{x}{2}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{8}\left.\begin{pmatrix} e^{4(x-t)} - e^{-4(x-t)} \\ 4e^{4(x-t)} + 4e^{-4(x-t)} \end{pmatrix}\right|_{t=0}^{x} \\
=& e^{4x}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{8}\begin{pmatrix} e^{4x} - e^{-4x} \\ 4e^{4x} + 4e^{-4x} \end{pmatrix} \\
=& \begin{pmatrix} -x \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{9e^{4x}}{8}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{e^{-4x}}{8}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

b) i) Die Eigenwerte der Matrix $\boldsymbol{A}$ ergeben sich aus dem charakteristischen Polynom:

$$0 = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 3 & 1-\lambda & -2 \\ 2 & 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)((1-\lambda)^2 + 4)$$

$$\Rightarrow \qquad \lambda_1 = 1,\ \lambda_{2/3} = 1 \pm 2\,\mathrm{i}.$$

Die Eigenvektoren zu λ_1 und λ_2 ergeben sich aus dem charakteristischen Gleichungssystem:

$$\lambda_1 = 1: \qquad \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{array} \Leftarrow \qquad \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 1 + 2\,\mathrm{i}: \qquad \begin{array}{ccc|c} -2\,\mathrm{i} & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2\,\mathrm{i} & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & -2\,\mathrm{i} \end{array} \Leftarrow \qquad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ein reelles Fundamentalsystem ist damit gegeben durch

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}_1 =& \mathrm{e}^{\lambda_1 x}\boldsymbol{v}_1 = \mathrm{e}^x \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \\ \boldsymbol{y}_2 =& \Re\left(\mathrm{e}^{\lambda_2 x}\boldsymbol{v}_2\right) = \mathrm{e}^x \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin(2x) \\ \cos(2x) \end{pmatrix} \\ \text{und } \boldsymbol{y}_3 =& \Im\left(\mathrm{e}^{\lambda_2 x}\boldsymbol{v}_2\right) = \mathrm{e}^x \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(2x) \\ \sin(2x) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

ii) Da die Inhomogenität des Differentialgleichungssystems

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} = 2\boldsymbol{v}_1$$

ein Eigenvektor der Systemmatrix $\boldsymbol{A}$ ist, kann man als Partikulärlösung $\boldsymbol{y}_p(x) = \alpha\boldsymbol{v}_1$ ansetzen. Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt:

$$\boldsymbol{y}_p'(x) = \boldsymbol{0} \stackrel{!}{=} \alpha\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_1 = \alpha \cdot 1\boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_1 \;\Rightarrow\; \alpha = -2.$$

Damit hat man als allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung:

$$\boldsymbol{y}(x) = \boldsymbol{y}_h(x) + \boldsymbol{y}_p(x) = c_1\boldsymbol{y}_1(x) + c_2\boldsymbol{y}_2(x) + c_3\boldsymbol{y}_3(x) - 2\boldsymbol{v}_1.$$

Aufgabe 3:

a) Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$u''(x) - 16u(x) = 16x \qquad \text{mit} \qquad u(0) = 1,\ u'(0) = 4.$$

i) Überführen Sie diese gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung in ein System aus zwei Differentialgleichungen erster Ordnung,

$$\boldsymbol{y}'(x) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}(x) + \boldsymbol{g}(x), \qquad \text{mit} \qquad \boldsymbol{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}.$$

Geben Sie hierfür auch die Anfangsbedingung an.

ii) Bestimmen Sie die Lösung $\boldsymbol{y}(x)$ dieses Anfangswertproblems.

iii) Bestimmen Sie daraus die Lösung $u(x)$ der ursprünglichen Anfangswertaufgabe.

Lösung 3:

a) **i)** Mit

$$\boldsymbol{y}(x) = \begin{pmatrix} u(x) \\ u'(x) \end{pmatrix}$$

ergibt sich

$$\boldsymbol{y}'(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 16 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{y}(x) + \begin{pmatrix} 0 \\ 16x \end{pmatrix}.$$

Die zugehörigen Anfangswerte sind $\boldsymbol{y}(0) = (1, 4)^\top$.

ii) Die Systemmatrix hat die Eigenwerte $\lambda_1 = +4$ und $\lambda_2 = -4$ mit den Eigenvektoren

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ und } \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Die Fundamentalmatrix ist damit

$$\boldsymbol{Y}(x) = \begin{pmatrix} e^{4x} & -e^{-4x} \\ 4e^{4x} & 4e^{-4x} \end{pmatrix}.$$

Die Inverse der Matrix $\boldsymbol{Y}(0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$ ist

$$\boldsymbol{Y}(0)^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Lösung des Anfangswertproblems ergibt sich dann zu

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{y}(x) =& \boldsymbol{Y}(x)\boldsymbol{Y}(0)^{-1}\boldsymbol{y}(0) + \int_{t=0}^{x} \boldsymbol{Y}(x-t)\boldsymbol{Y}(0)^{-1}\boldsymbol{g}(t)\mathrm{d}t, \qquad \text{mit } \boldsymbol{g}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 16t \end{pmatrix}. \\
=& \boldsymbol{Y}(x) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_{t=0}^{x} \boldsymbol{Y}(x-t) \begin{pmatrix} 2t \\ 2t \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\
=& e^{4x} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \int_{t=0}^{x} 2t \begin{pmatrix} e^{4(x-t)} - e^{-4(x-t)} \\ 4e^{4(x-t)} + 4e^{-4(x-t)} \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\
=& e^{4x} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \left[2t \cdot \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -e^{4(x-t)} - e^{-4(x-t)} \\ -4e^{4(x-t)} + 4e^{-4(x-t)} \end{pmatrix} \right]_{t=0}^{x} + \\
& - \int_{t=0}^{x} 2 \cdot \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -e^{4(x-t)} - e^{-4(x-t)} \\ -4e^{4(x-t)} + 4e^{-4(x-t)} \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\
=& e^{4x} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{x}{2} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{8} \begin{pmatrix} e^{4(x-t)} - e^{-4(x-t)} \\ 4e^{4(x-t)} + 4e^{-4(x-t)} \end{pmatrix} \Bigg|_{t=0}^{x} \\
=& e^{4x} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{8} \begin{pmatrix} e^{4x} - e^{-4x} \\ 4e^{4x} + 4e^{-4x} \end{pmatrix} \\
=& \begin{pmatrix} -x \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{9e^{4x}}{8} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{e^{-4x}}{8} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

iii) Die Lösung des ursprünglichen (eindimensionalen) Anfangswertproblems ist die erste Komponente von $\boldsymbol{y}(x)$:

$$u(x) = \boldsymbol{y}_1(x) = -x + \frac{9e^{4x}}{8} - \frac{e^{-4x}}{8}.$$

Aufgabe 4:

Gegeben seien

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -7 & -5 & 6 \\ 9 & 8 & -9 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{g}(x) = \begin{pmatrix} x\,\mathrm{e}^{-x} \\ \mathrm{e}^{-x} \\ (x+1)\mathrm{e}^{-x} \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \boldsymbol{y}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Zu untersuchen ist das Anfangswertproblem

$$\boldsymbol{y}'(x) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}(x) + \boldsymbol{g}(x) \qquad \text{mit } \boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}_0.$$

Hinweis: Ein Eigenwert der Matrix $\boldsymbol{A}$ ist $\lambda = 2$.

a) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem des zugehörigen homogenen Problems.

b) Bestimmen Sie die Lösung des inhomogenen Anfangswertproblems.

Lösung 4:

a) Die Eigenwerte der Matrix $\boldsymbol{A}$ ergeben sich aus dem charakteristischen Polynom:

$$\begin{aligned} 0 = \det &\begin{pmatrix} -7-\lambda & -5 & 6 \\ 9 & 8-\lambda & -9 \\ 0 & 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} \\ =&(-7-\lambda)\det\begin{pmatrix} 8-\lambda & -9 \\ 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} - 9\det\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} \\ =&(-7-\lambda)((8-\lambda)(-1-\lambda)+9) - 9(-5(-1-\lambda)-6) \\ =&(-7-\lambda)(\lambda^2-7\lambda+1) - 9(5\lambda-1) \\ =&-\lambda^3 + 3\lambda + 2 \end{aligned}$$

Ein Eigenwert ist $\lambda_1 = -1$:

$$\begin{array}{r|r|r|r|r} & -1 & 0 & 3 & 2 \\ \hline & \backslash & 1 & -1 & -2 \\ \hline \lambda=-1 & -1 & 1 & 2 & 0 \end{array}$$

Die verbliebenen Eigenwerte ergeben sich als Nullstellen des Restpolynoms $-\lambda^2+\lambda+2$:

$$\lambda_{2/3} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}.$$

Die Eigenvektoren ergeben sich aus dem jeweiligen charakteristischen Gleichungssystem:

$$\lambda_2 = 2: \quad \begin{array}{rrr|r|l} -9 & -5 & 6 & 0 & \\ 9 & 6 & -9 & 0 & +I \\ 0 & 1 & -3 & 0 & \\ \hline -9 & -5 & 6 & 0 & \\ 0 & 1 & -3 & 0 & \\ 0 & 1 & -3 & 0 & -II \\ \hline -9 & -5 & 6 & 0 & \\ 0 & 1 & -3 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \end{array} \quad \Leftarrow \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = \lambda_3 = -1: \quad \begin{array}{rrr|r|l} -6 & -5 & 6 & 0 & \\ 9 & 9 & -9 & 0 & +3/2 \times I \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \\ \hline -6 & -5 & 6 & 0 & \\ 0 & 3/2 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \end{array} \quad \Leftarrow \quad \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Weitere linear unabhängige Eigenvektoren gibt es nicht. Es muss also ein Hauptvektor ermittelt werden, dieser ist Lösung des Gleichungssystems

$$(\boldsymbol{A} - (-1)\boldsymbol{E})\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}_1:$$

$$\begin{array}{rrr|r|l} -6 & -5 & 6 & 1 & \\ 9 & 9 & -9 & 0 & +3/2 \times I \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \\ \hline -6 & -5 & 6 & 1 & \\ 0 & 3/2 & 0 & 3/2 & \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \end{array} \quad \Leftarrow \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ein Fundamentalsystem ist damit gegeben durch

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}_1 =& \mathrm{e}^{\lambda_1 x}\boldsymbol{v}_1 = \mathrm{e}^{-x}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \boldsymbol{y}_2 =& \mathrm{e}^{\lambda_1 x}(\boldsymbol{w} + x\boldsymbol{v}_1) = \mathrm{e}^{-x}\begin{pmatrix} x \\ 1 \\ 1+x \end{pmatrix}, \\ \boldsymbol{y}_3 =& \mathrm{e}^{\lambda_2 x}\boldsymbol{v}_2 = \mathrm{e}^{2x}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

b) Eine Fundamentalmatrix des Systems ergibt sich aus dem Fundamentalsystem:

$$\boldsymbol{Y}(x) = (\boldsymbol{y}_1,\, \boldsymbol{y}_2,\, \boldsymbol{y}_3) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-x} & x\mathrm{e}^{-x} & -\mathrm{e}^{2x} \\ 0 & \mathrm{e}^{-x} & 3\mathrm{e}^{2x} \\ \mathrm{e}^{-x} & (1+x)\mathrm{e}^{-x} & \mathrm{e}^{2x} \end{pmatrix}.$$

An der Stelle $x = 0$ hat man

$$\boldsymbol{Y}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Um $\boldsymbol{Y}(0)^{-1}\boldsymbol{g}(t)$ und $\boldsymbol{Y}(0)^{-1}\boldsymbol{y}(0)$ zu ermitteln wird das zugehörige Gleichungssystem gelöst:

$$\begin{array}{rrr|l|r|l}
1 & 0 & -1 & t\mathrm{e}^{-t} & 1 & \\
0 & 1 & 3 & \mathrm{e}^{-t} & 0 & \\
1 & 1 & 1 & (t+1)\mathrm{e}^{-t} & 2 & -I \\ \hline
1 & 0 & -1 & t\mathrm{e}^{-t} & 1 & \\
0 & 1 & 3 & \mathrm{e}^{-t} & 0 & \\
0 & 1 & 2 & \mathrm{e}^{-t} & 1 & -II \\ \hline
1 & 0 & -1 & t\mathrm{e}^{-t} & 1 & \\
0 & 1 & 3 & \mathrm{e}^{-t} & 0 & \\
0 & 0 & -1 & 0 & 1 &
\end{array}$$

Lösung des Systems ist

$$\boldsymbol{Y}(0)^{-1}\boldsymbol{g}(t) = \begin{pmatrix} t\mathrm{e}^{-t} \\ \mathrm{e}^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

und

$$\boldsymbol{Y}(0)^{-t}\boldsymbol{y}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Damit ergibt sich dann die Lösung des Anfangswertproblems zu:

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{y}_{AWP}(x) \\
=&\boldsymbol{Y}(x)\boldsymbol{Y}(0)^{-1}\boldsymbol{y}(0) + \int\limits_{t=0}^{x} \boldsymbol{Y}(x-t)\boldsymbol{Y}(0)^{-1}\boldsymbol{g}(t)\mathrm{d}t \\
=&\boldsymbol{Y}(x)\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \\
&+ \int\limits_{t=0}^{x} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-(x-t)} & (x-t)\mathrm{e}^{-(x-t)} & -\mathrm{e}^{2(x-t)} \\ 0 & \mathrm{e}^{-(x-t)} & 3\mathrm{e}^{2(x-t)} \\ \mathrm{e}^{-(x-t)} & (1+x-t)\mathrm{e}^{-(x-t)} & \mathrm{e}^{2(x-t)} \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-t} \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\
=&3\mathrm{e}^{-x}(\boldsymbol{w} + x\boldsymbol{v}_1) - \mathrm{e}^{2x}\boldsymbol{v}_2 + \\
&+ \mathrm{e}^{-x} \int\limits_{t=0}^{x} \begin{pmatrix} x \\ 1 \\ 1+x \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\
=&\mathrm{e}^{-x}\begin{pmatrix} 0+x \\ 1+0 \\ 1+x \end{pmatrix} - \mathrm{e}^{2x}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + x\mathrm{e}^{-x}\begin{pmatrix} x \\ 1 \\ 1+x \end{pmatrix} \\
=&\mathrm{e}^{-x}\begin{pmatrix} x^2+x \\ x+1 \\ x^2+2x+1 \end{pmatrix} + \mathrm{e}^{2x}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Aufgabe 5*: Differentialgleichungssystem

Die Matrix $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{(3,3)}$ und die Vektoren $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^3$ seien wie folgt gegeben:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 4 & 4 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v} := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{w} := \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ a \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{z} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Offenbar gilt $\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} = 4\boldsymbol{v}$. Berechnen Sie

(i) $\lambda \in \mathbb{R}$ so, dass $\boldsymbol{A}\boldsymbol{z} = \lambda\, \boldsymbol{z}$ gilt, (ii) die Spur $\mathrm{Sp}(\boldsymbol{A})$ von $\boldsymbol{A}$.

Bestimmen Sie mit diesen Ergebnissen alle Eigenwerte der Matrix $\boldsymbol{A}$.

(Selbstverständlich sollen Sie **nicht** das charakteristische Polynom bestimmen und lösen!)

b) Berechnen Sie $a \in \mathbb{R}$ so, dass $(\boldsymbol{A} - 4\boldsymbol{E})\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}$ gilt. Bestimmen Sie nun alle Haupt– und Eigenvektoren von $\boldsymbol{A}$.

c) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $\boldsymbol{y}(t)$ des DGl–Systems

$$\boldsymbol{y}'(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Lösung 5:

a) i) Man berechnet ohne Schwierigkeit

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{z} = (2, 0, 2)^\top = 2\boldsymbol{z}, \quad \text{also} \quad \boxed{\lambda = 2.}$$

ii) Es gilt $\mathrm{Sp}\,(\boldsymbol{A}) = 10$.

Mit den schon bekannten Eigenwerten $\boxed{\lambda_1 := 4}$, $\boxed{\lambda_2 = 2}$ folgt noch $\lambda_3 = \mathrm{Sp}\,(\boldsymbol{A}) - \lambda_1 - \lambda_2$, also $\boxed{\lambda_3 = 4\ .}$

b) Die Gleichung

$$(\boldsymbol{A} - 4\boldsymbol{E})\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 4 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - a \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{v} - a \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \boldsymbol{v}$$

führt auf $\boxed{a = 0\,.}$

Mit diesem Wert $(a = 0)$ erfüllt $\boldsymbol{w}$ die Hauptvektorgleichung, ist also ein **Hauptvektor 2. Stufe** zum Eigenwert $\lambda = 4$.

Eigenvektoren sind $\boldsymbol{v}$ zum EW $\lambda = 4$ sowie $\boldsymbol{z}$ zum EW $\lambda = 2$.

c) Die allgemeine Lösung des DGl–Systems lautet

$$\boxed{\boldsymbol{y}(t) = \mathrm{e}^{2t} C_1\, \boldsymbol{z} + \mathrm{e}^{4t} \left(C_2\, \boldsymbol{v} + C_3(\boldsymbol{w} + t\boldsymbol{v})\right), \quad C_k \in \mathbb{R}\,.}$$

Aufgabe 6: Differentialgleichungssystem, Hauptvektoren

Gegeben sei die Matrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

sowie die Vektoren

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{u}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \boldsymbol{u}_5 = \begin{pmatrix} 9 \\ -10 \\ 8 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die Matrix-Vektor-Produkte $\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_j$, $j = 1, 2, 3, 4, 5$. Welche Eigenwerte und Hauptvektoren hat $\boldsymbol{A}$?

b) Lösen Sie das Differentialgleichungssystem

$$\boldsymbol{y}'(x) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}(x).$$

c) Lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem mit den Anfangswerten

$$\boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}_0 = (0, 9, -8, 5, -8)^\top.$$

Lösung 6:

a) Die gefragten Produkte ergeben sich zu

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_1 &= 4\boldsymbol{u}_1 \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_2 &= (1, 4, 0, 0, 0)^\top = 4\boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_1 \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_3 &= (0, -7, 0, 4, 0)^\top = 4\boldsymbol{u}_3 + \boldsymbol{u}_2 \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_4 &= (0, 14, -4, -11, 4)^\top = 4\boldsymbol{u}_4 + \boldsymbol{u}_3 \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_5 &= (18, -20, 16, -8, 16)^\top = 2\boldsymbol{u}_5. \end{aligned}$$

Damit hat $\boldsymbol{A}$ den vierfachen Eigenwert $\lambda_1 = 4$ mit Eigenvektor $\boldsymbol{u}_1$ und den einfachen Eigenwert $\lambda_5 = 2$ mit Eigenvektor $\boldsymbol{u}_5$. Die erweiterten Eigenvektoren zu λ_1 sind $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$ und $\boldsymbol{u}_4$, da jeweils gilt

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_j = \lambda_1\boldsymbol{u}_j + \boldsymbol{u}_{j-1}, \qquad j = 2, 3, 4.$$

b) Das Differentialgleichungssystem $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$ hat dann die Lösung

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}(x) =& e^{\lambda_1 x}\left(\alpha\boldsymbol{u}_1 + \beta\left(\boldsymbol{u}_2 + x\boldsymbol{u}_1\right) + \gamma\left(\boldsymbol{u}_3 + x\boldsymbol{u}_2 + \frac{x^2}{2}\boldsymbol{u}_1\right) + \right. \\ & \left. + \delta\left(\boldsymbol{u}_4 + x\boldsymbol{u}_3 + \frac{x^2}{2}\boldsymbol{u}_2 + \frac{x^3}{6}\boldsymbol{u}_1\right)\right) + \varepsilon e^{\lambda_5 x}\boldsymbol{u}_5 \\ =& e^{4x}\left(\alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} x \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} x^2/2 \\ -2+x \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix} x^3/6 \\ 4-2x+x^2/2 \\ -1 \\ -3+x \\ 1 \end{pmatrix}\right) + \varepsilon e^{2x}\begin{pmatrix} 9 \\ -10 \\ 8 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

c) Setzt man die gegebenen Anfangswerte ein, ergibt sich ein Gleichungssystem für die Integrationskonstanten:

α	β	γ	δ	ε		
1	0	0	0	9	0	
0	1	−2	4	−10	9	
0	0	0	−1	8	−8	4. Zeile
0	0	1	−3	−4	5	3. Zeile
0	0	0	1	8	−8	+3. Zeile
1	0	0	0	9	0	
0	1	−2	4	−10	9	
0	0	1	−3	−4	5	
0	0	0	−1	8	−8	
0	0	0	0	16	−16	

Hieraus ergeben sich die Koeffizienten

$$\varepsilon = -1,\ \delta = 0,\ \gamma = 1,\ \beta = 1,\ \alpha = 9$$

und damit

$$\boldsymbol{y}(x) = e^{4x}\begin{pmatrix} 9 + x + x^2/2 \\ -1 + x \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - e^{2x}\begin{pmatrix} 9 \\ -10 \\ 8 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7: Inhomogene lineare Systeme (Hauptvektoren)

Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$\boldsymbol{y}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{y}(t) + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{5t}$$

mit den Anfangswerten $\boldsymbol{y}(0) = (0,1,2)^\top$.

a) Ermitteln Sie die Fundamentalmatrix $\boldsymbol{Y}(t)$ (des homogenen Systems).

b) Berechnen Sie die Lösung des Anfangswertproblemes, indem Sie die Schritte der Variation der Konstanten explizit ausführen.

c) Berechnen Sie zusätzlich die Lösung des Anfangswertproblemes unter Nutzung der entsprechenden Formel aus der Vorlesung.

Lösung 7:

a) Die Eigenwerte der Systemmatrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

werden als Nullstellen des charakteristischen Polynoms berechnet:

$$\begin{aligned}
0 \overset{!}{=} \det \begin{pmatrix} 0-\lambda & 1 & -1 \\ -2 & 3-\lambda & -1 \\ -1 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} 0 & 1-\lambda & -1-\lambda+\lambda^2 \\ 0 & 1-\lambda & -3+2\lambda \\ -1 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\
= -1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1-\lambda+\lambda^2 \\ 1-\lambda & -3+2\lambda \end{pmatrix} &= -(1-\lambda)(-3+2\lambda+1+\lambda-\lambda^2) \\
=(1-\lambda)(\lambda^2-3\lambda+2) &= (1-\lambda)(\lambda-2)(\lambda-1) \\
\Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 2 &
\end{aligned}$$

Die Eigenvektoren sind Lösungen der charakteristischen Gleichungssysteme:

i) $\lambda_{1/2} = 1$ (weiße rechte Seite)

-1	1	-1	0	1	
-2	2	-1	0	1	$-2\times$ 1. Zeile
-1	1	0	0	0	$-$ 1. Zeile
-1	1	-1	0	1	
0	0	1	0	-1	
0	0	1	0	-1	$-$ 2. Zeile
-1	1	-1	0	1	
0	0	1	0	-1	
0	0	0	0	0	

Die einzige (linear unabhängige Lösung ist $\boldsymbol{v}_1 = (1,1,0)^\top$. Daher wird noch ein Hauptvektor $\boldsymbol{v}_2$ gesucht. Dieser ist Lösung desselben Gleichungssystems mit der rechten Seite $\boldsymbol{v}_1$ (graue Spalte). Es ergibt sich $\boldsymbol{v}_2 = (0,0,-1)^\top$ als möglicher Hauptvektor.

ii) $\lambda_3 = 2$:

-2	1	-1	0	
-2	1	-1	0	$-$ 1. Zeile
-1	1	-1	0	$-1/2\times$ 1. Zeile
-2	1	-1	0	
0	0	0	0	
0	$1/2$	$-1/2$	0	

Es ergibt sich $\boldsymbol{v}_3 = (0,1,1)^\top$. Damit ist die Fundamentalmatrix

$$\boldsymbol{Y}(t) = \left(\mathrm{e}^t \boldsymbol{v}_1,\ \mathrm{e}^t(\boldsymbol{v}_2 + \frac{t}{1!}\boldsymbol{v}_1),\ \mathrm{e}^{2t}\boldsymbol{v}_3 \right) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t & \mathrm{e}^t t & 0 \\ \mathrm{e}^t & \mathrm{e}^t t & \mathrm{e}^{2t} \\ 0 & -\mathrm{e}^t & \mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix}$$

b) Die Lösung des homogenen Systems ist damit

$$\boldsymbol{y}_h(t) = \boldsymbol{Y}(t)\boldsymbol{c} \text{ mit dem konstanten Vektor } \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^3.$$

Zur Lösung des inhomogenen Systems setzen wir den Ansatz $\boldsymbol{y}_p(t) = \boldsymbol{Y}(t)\boldsymbol{c}(t)$ mit der vektorwertigen Funktion $\boldsymbol{c}(t)$ in das inhomogene System ein:

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{Y}(t)\boldsymbol{c}(t))' &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}(t)\boldsymbol{c}(t) + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{5t} \\
\Rightarrow \quad \boldsymbol{Y}'(t)\boldsymbol{c}(t) + \boldsymbol{Y}(t)\boldsymbol{c}'(t) &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}(t)\boldsymbol{c}(t) + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{5t} \\
\Rightarrow \quad \underbrace{(\boldsymbol{Y}'(t) - \boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}(t))}_{=\boldsymbol{0}}\boldsymbol{c}(t) + \boldsymbol{Y}(t)\boldsymbol{c}'(t) &= \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{5t} \\
\Rightarrow \quad \boldsymbol{c}'(t) &= \boldsymbol{Y}(t)^{-1} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{5t}
\end{aligned}$$

Dabei wird der Ausdruck $\boldsymbol{Y}'(t) - \boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}(t)$ Null, da die Spalten von $\boldsymbol{Y}(t)$ bereits Lösungen der homogenen Gleichung ($\boldsymbol{y}'(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}(t)$) sind.
Auf die Berechnung der inversen Matrix $\boldsymbol{Y}(t)^{-1}$ wird verzichtet, stattdessen lösen

wir das Gleichungssystem $\boldsymbol{Y}(t)\boldsymbol{c}' = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5t}$:

$$\begin{array}{ccc|c|l}
e^t & e^t t & 0 & -1e^{5t} & \\
e^t & e^t t & e^{2t} & 2e^{5t} & -\text{ 1. Zeile} \\
0 & -e^t & e^{2t} & 1e^{5t} & \\
\hline
e^t & e^t t & 0 & -1e^{5t} & \\
0 & 0 & e^{2t} & 3e^{5t} & -\text{ 3. Zeile} \\
0 & -e^t & e^{2t} & 1e^{5t} & \text{2. Zeile} \\
\hline
e^t & e^t t & 0 & -1e^{5t} & \\
0 & e^t & 0 & 2e^{5t} & \\
0 & 0 & e^{2t} & 3e^{5t} & \\
\hline
\end{array}$$

Daraus ergibt sich

$$\boldsymbol{c}'(t) = \begin{pmatrix} -(2t+1)e^{4t} \\ 2e^{4t} \\ 3e^{3t} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \qquad \boldsymbol{c}(t) = \begin{pmatrix} -\frac{4t+1}{8}e^{4t} \\ \frac{1}{2}e^{4t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$$

Die Integrationskonstanten wurden hier zu Null gewählt.
Damit ist

$$\boldsymbol{y}_p(t) = \boldsymbol{Y}(t)\boldsymbol{c}(t)$$

eine Lösung des inhomogenen Systems. Die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems ist dann

$$\boldsymbol{y}_{allg}(t) = \boldsymbol{y}_p(t) + \boldsymbol{y}_h(t) = \boldsymbol{Y}(t)(\boldsymbol{c}(t) + \boldsymbol{c}).$$

Der konstante Vektor $\boldsymbol{c}$ wird durch die Anfangsbedingungen festgelegt:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} &\overset{!}{=} \boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{Y}(0)(\boldsymbol{c}(0) + \boldsymbol{c}) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/8 + c_1 \\ 1/2 + c_2 \\ 1 + c_3 \end{pmatrix} \\
\Rightarrow \qquad c_1 &= \frac{1}{8} \\
c_3 &= 0 \\
c_2 &= -\frac{3}{2}
\end{aligned}$$

Damit ist dann

$$\boldsymbol{y}_{AWP}(t) = \boldsymbol{Y}(t) \begin{pmatrix} \frac{1}{8}((-4t-1)e^{4t} + 1) \\ \frac{1}{2}(e^{4t} - 3) \\ e^{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8}(-e^{5t} + (1-12t)e^t) \\ \frac{1}{8}(7e^{5t} + (1-12t)e^t) \\ \frac{1}{2}(e^{5t} + 3e^t) \end{pmatrix} = \frac{e^{5t}}{8} \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} + $$

c) Mit der Formel

$$\boldsymbol{y}_{AWP}(t) = \boldsymbol{Y}(t)\boldsymbol{Y}(0)^{-1}\boldsymbol{y}_0 + \int_0^t \boldsymbol{Y}(t-s)\boldsymbol{Y}(0)^{-1}\boldsymbol{f}(s)\mathrm{d}s$$

ergibt sich mit

$$\boldsymbol{Y}(0)^{-1}\boldsymbol{y}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sowie

$$\boldsymbol{Y}(0)^{-1}\boldsymbol{f}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5s} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} e^{5s}$$

die Lösung des Anfangswertproblems:

$$\boldsymbol{y}_{AWP}(t) = \begin{pmatrix} e^t & e^t t & 0 \\ e^t & e^t t & e^{2t} \\ 0 & -e^t & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \int\limits_0^t \begin{pmatrix} e^{t-s} & e^{t-s}(t-s) & 0 \\ e^{t-s} & e^{t-s}(t-s) & e^{2(t-s)} \\ 0 & -e^{t-s} & e^{2(t-s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} e^{5s} \mathrm{d}s$$

$$= \begin{pmatrix} -e^t t \\ -e^t t + e^{2t} \\ e^t + e^{2t} \end{pmatrix} + \int\limits_0^t \begin{pmatrix} e^{t-s}(-1+2t-2s) \\ e^{t-s}(-1+2t-2s) + 3e^{2(t-s)} \\ -2e^{t-s} + 3e^{2(t-s)} \end{pmatrix} e^{5s} \mathrm{d}s$$

$$= \begin{pmatrix} -e^t t \\ -e^t t + e^{2t} \\ e^t + e^{2t} \end{pmatrix} + \int\limits_0^t \begin{pmatrix} e^{t+4s}(-1+2t-2s) \\ e^{t+4s}(-1+2t-2s) + 3e^{2t+3s} \\ -2e^{t+4s} + 3e^{2t+3s} \end{pmatrix} e^{5s} \mathrm{d}s$$

$$= \begin{pmatrix} -e^t t \\ -e^t t + e^{2t} \\ e^t + e^{2t} \end{pmatrix} + \frac{1}{4} e^{t+4s} \begin{pmatrix} -1+2t-2s \\ -1+2t-2s \\ -2 \end{pmatrix} \Bigg|_{s=0}^{t} - \frac{1}{4} \int\limits_0^t e^{t+4s} \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}s + \frac{1}{3} e^{2t+3s} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \Bigg|_{s=0}^{t}$$

$$= \begin{pmatrix} -e^t t \\ -e^t t + e^{2t} \\ e^t + e^{2t} \end{pmatrix} + \frac{1}{4} e^{5t} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} - \frac{1}{4} e^t \begin{pmatrix} -1+2t \\ -1+2t \\ -2 \end{pmatrix} - \frac{1}{16}(e^{5t} - e^t) \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}(e^{5t} - e^{2t}) \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= e^t \begin{pmatrix} -t + \frac{1}{4} - \frac{t}{2} - \frac{1}{8} \\ -t + \frac{1}{4} - \frac{t}{2} - \frac{1}{8} \\ 1 + \frac{1}{2} \end{pmatrix} + e^{5t} \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} + \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + 1 \\ -\frac{1}{2} + 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{e^t}{8} \begin{pmatrix} 1 - 12t \\ 1 - 12t \\ 12 \end{pmatrix} + \frac{e^{5t}}{8} \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 8: Systeme homogener linearer Differentialgleichungen

Bestimmen Sie die allgemeinen reellen Lösungen und gegebenenfalls auch die Lösungen des Anfangswertproblems der folgenden Systeme von homogenen linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Benutzen Sie dazu die Matrizenschreibweise.

i) $\begin{cases} x'(t) &= 4\,x(t)+5\,y(t) \quad , \quad x(0)=3\,, \\ y'(t) &= -x(t)-2\,y(t) \quad , \quad y(0)=1 \end{cases}$

ii) $\begin{cases} x'(t) &= 3\,x(t)-5\,y(t) \quad , \quad x(0)=-20\,, \\ y'(t) &= 5\,x(t)-3\,y(t) \quad , \quad y(0)=-24 \end{cases}$

iii) $\begin{cases} x'(t) &= 2\,x(t)-5\,y(t)\,, \\ y'(t) &= \quad x(t)+4\,y(t)\,. \end{cases}$

Lösung 8:

i) Das Differentialgleichungssystem: $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ hat die charakteristische Gleichung

$$\det \begin{pmatrix} 4-\lambda & 5 \\ -1 & -2-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 2\,\lambda - 3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1\,, \quad \lambda_2 = 3\,.$$

Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = -1$:

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_1 = -v_2 \quad \text{also z. B.} \quad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\,.$$

Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_2 = 3$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow w_1 = -5w_2 \quad \text{also z. B.} \quad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}\,.$$

Damit lautet die allgemeine Lösung

$$\underline{\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-t} + b \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{3t}\,, \quad a, b \in \mathbb{R}}\,.$$

Einsetzen der Anfangswerte $x(0) = 3$ und $y(0) = 1$:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow a = 2\,, \quad b = -1\,.$$

Lösung des Anfangswertproblems:

$$\underline{\underline{\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}_{\mathrm{AWP}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-t} + \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{3t}}}\,.$$

ii) Das Dgl.–System: $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ hat die charakteristische Gleichung

$$\det \begin{pmatrix} 3-\lambda & -5 \\ 5 & -3-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 16 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 4\,\mathrm{i}\,.$$

Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = 4\,\mathrm{i}$:

$$\begin{pmatrix} 3-4\,\mathrm{i} & -5 \\ 5 & -3-4\,\mathrm{i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{z. B.} \quad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} \mathrm{i}\,.$$

Der Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$ ist $\boldsymbol{w} = \overline{\boldsymbol{v}}$, somit ist die Menge aller komplexen Lösungen wie folgt beschrieben:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 \mathrm{e}^{4it} \boldsymbol{v} + c_2 \mathrm{e}^{-4it} \boldsymbol{w}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}$$

Eine komplexe Lösung ist

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} &= \left[\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} \mathrm{i} \right] \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,4t} \\ &= \left[\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} \mathrm{i} \right] \cdot \left[\cos(4t) + \mathrm{i}\,\sin(4t) \right] \\ &= \left[\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \cos(4t) - \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} \sin(4t) \right] + \mathrm{i} \left[\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \sin(4t) + \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} \cos(4t) \right]\,. \end{aligned}$$

Da der Real– und Imaginärteil unabhängige Lösungen des Dgl.–Systems sind, lautet die allgemeine (reelle) Lösung

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} &= a \cdot \left[\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \cos(4t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \sin(4t) \right] + b \cdot \left[\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \sin(4t) + \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} \cos(4t) \right] \\ &= \begin{pmatrix} 5a \\ 3a-4b \end{pmatrix} \cos(4t) + \begin{pmatrix} 5b \\ 4a+3b \end{pmatrix} \sin(4t)\,, \quad a, b \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

Aus den Anfangswerten $x(0) = -20$, $y(0) = -24$ folgt $a = -4$ und $b = 3$.
Lösung des Anfangswertproblems:

$$\underline{\underline{\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}_{\mathrm{AWP}} = \begin{pmatrix} -20 \\ -24 \end{pmatrix} \cos(4t) + \begin{pmatrix} 15 \\ -7 \end{pmatrix} \sin(4t)}}\,.$$

iii) Das Dgl.–System: $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ hat die Eigenwerte und Vektoren

$$\lambda_{1,2} = 3 \pm 2\,\mathrm{i}\,, \quad \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \mathrm{i}\,, \quad \boldsymbol{v}_2 = \overline{\boldsymbol{v}}_1\,.$$

Analog zu ii) ergibt sich damit

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}
&= \left[\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \mathrm{i} \right] \mathrm{e}^{(3+2\,\mathrm{i})t} \\
&= \left[\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \mathrm{i} \right] \mathrm{e}^{3t} (\cos(2t) + \,\mathrm{i} \sin(2t)) \\
&= \begin{pmatrix} -5\cos(2t) \\ \cos(2t) - 2\sin(2t) \end{pmatrix} \mathrm{e}^{3t} + \begin{pmatrix} -5\sin(2t) \\ \sin(2t) + 2\cos(2t) \end{pmatrix} \mathrm{e}^{3t}\ \mathrm{i}
\end{aligned}
$$

und daraus als Linearkombination von Real- und Imaginärteil die allgemeine Lösung:

$$
\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{3t} \cdot \left[\begin{pmatrix} -5a \\ a + 2b \end{pmatrix} \cos(2t) + \begin{pmatrix} -5b \\ -2a + b \end{pmatrix} \sin(2t) \right] \ , \quad a, b \in \mathbb{R}.
$$

Alternativ kann man die Eigenvektoren als

$$
\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 + 2i \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_2 = \overline{\boldsymbol{v}}_1\ .
$$

wählen. Die allgemeine komplexe Lösung lautet dann

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} &= c_1 \begin{pmatrix} -1 + 2\,\mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{(3+2\,\mathrm{i})t} + c_2 \begin{pmatrix} -1 - 2\,\mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{(3-2\,\mathrm{i})t} \\
= \begin{pmatrix} -c_1 + 2\,\mathrm{i}c_1 \\ c_1 \end{pmatrix} & \mathrm{e}^{3t}(\cos(2t) + \,\mathrm{i}\sin(2t)) + \begin{pmatrix} -c_2 - 2\,\mathrm{i}c_2 \\ c_2 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{3t}(\cos(2t) - \,\mathrm{i}\sin(2t)) \\
= \mathrm{e}^{3t} & \left(\cos(2t) \begin{pmatrix} -(c_1 + c_2) + 2\,\mathrm{i}(c_1 - c_2) \\ c_1 + c_2 \end{pmatrix} + \sin(2t) \begin{pmatrix} -\,\mathrm{i}(c_1 - c_2) - 2(c_1 + c_2) \\ \mathrm{i}(c_1 - c_2) \end{pmatrix} \right)
\end{aligned}
$$

Mit $a = c_1 + c_2$ und $b = i(c_1 - c_2)$ folgt für $c_1 = \overline{c_2}$ $a, b \in \mathbb{R}$. Somit erhät man eine andere Form für die allgemeine Lösung des DGL Systems:

$$
\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{3t} \left(\cos(2t) \begin{pmatrix} -a + 2b \\ a \end{pmatrix} + \sin(2t) \begin{pmatrix} -b - 2a \\ b \end{pmatrix} \right)
$$

Aufgabe 9: Lineare DGl-Systeme 1. Ordnung

Die symmetrische Matrix $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{3,3}$ erfülle $\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_1 = 3\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_2$, $\det \boldsymbol{A} = 6$ mit $\boldsymbol{v}_1 = (1,0,1)^\top$, $\boldsymbol{v}_2 = (-1,0,1)^\top$.

a) Zeigen Sie, dass $\lambda = 2$ ein Eigenwert von $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{v}_3 = (0,1,0)^\top$ ein zugehöriger Eigenvektor ist. Geben Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren von $\boldsymbol{A}$ an.

b) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t), \quad \boldsymbol{x}(0) = (1,1,1)^\top .$$

Lösung 9:

a) Aus $\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_1 = 3\boldsymbol{v}_1$ folgt dass $\boldsymbol{v}_1$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = 3$ und aus $\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_2 = 1\boldsymbol{v}_2$, dass $\boldsymbol{v}_2$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_2 = 1$ ist. Der dritte Eigenwert λ_3 ergibt sich aus

$$\det \boldsymbol{A} = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = 6 ,$$

zu $\lambda_3 = 2$.

Da $\boldsymbol{A}$ symmetrisch ist, ist der Eigenraum zu λ_3 orthogonal zu $\boldsymbol{v}_1$ und $\boldsymbol{v}_2$, dies ist etwa für $\boldsymbol{v}_3 = (0,1,0)^\top$ erfüllt.

b) Die allgemeine Lösung ist

$$\boldsymbol{x}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{3t} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{t} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{2t} .$$

mit $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

Einsetzen in die Anfangsbedingung liefert

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Mit dem Gauss–Algorithmus folgt

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

und damit $c_3 = 1$, $c_2 = 0$ und $c_1 = 1$.

Damit folgt

$$\boldsymbol{x}_{\text{AWP}}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{3t} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{2t} .$$

Aufgabe 10: Systeme linearer Differentialgleichungen

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Systems von Differentialgleichungen

$$\boldsymbol{y}\,'(x) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -3 & 5 & 1 \\ -10 & -2 & 10 \end{pmatrix} \boldsymbol{y}(x).$$

Lösung 10:

Das charakteristische Polynom der Matrix $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -3 & 5 & 1 \\ -10 & -2 & 10 \end{pmatrix}$ ist

$$\begin{aligned} p_{\boldsymbol{A}}(\lambda) = \det &\begin{pmatrix} -1-\lambda & -1 & 3 \\ -3 & 5-\lambda & 1 \\ -10 & -2 & 10-\lambda \end{pmatrix} \\ =&(-1-\lambda)\big((5-\lambda)(10-\lambda)+2\big) - (-1)\big(-3(10-\lambda) - 1\cdot(-10)\big) + 3\big(-3\cdot(-2) - (5-\lambda)\cdot(-10)\big) \\ =&(-1-\lambda)\big(\lambda^2 - 15\lambda + 52\big) + \big(3\lambda - 20\big) + 3\big(-10\lambda + 56\big) = -\lambda^3 + 14\lambda^2 - 64\lambda + 96 \end{aligned}$$

Eine Nullstelle dieses Polynoms ist $\lambda_1 = 4$:

$$\begin{array}{c|c|c|c|r|} & -1 & 14 & -64 & 96 \\ x=4 & \backslash & -4 & 40 & -96 \\ \hline & -1 & 10 & -24 & 0 \end{array}$$

und das Restpolynom ist $q(\lambda) = -\lambda^2 + 10\lambda - 24$. Dessen Nullstellen sind

$$\lambda_{2/3} = 5 \pm \sqrt{25-24} = \left\{ \begin{array}{c} 4 \\ 6 \end{array} \right. .$$

Damit hat die Matrix den doppelten Eigenwert $\lambda_1 = \lambda_2 = 4$ und den einfachen Eigenwert $\lambda_3 = 6$. Eigenvektoren zu $\lambda_1 = 4$ ergeben sich aus dem charakteristischen Gleichungssystem (rechte Seite Null)

$$\begin{array}{rrr|r|r|l} -1-4 & -1 & 3 & 0 & 1 & \mathrm{II} \\ -3 & 5-4 & 1 & 0 & 1 & \mathrm{I} - 3\times\mathrm{II} \\ -10 & -2 & 10-4 & 0 & 2 & \mathrm{III} - 6\times\mathrm{II} \\ \hline -3 & 1 & 1 & 0 & 1 & \mathrm{I} + \frac{1}{4}\times\mathrm{II} \\ 4 & -4 & 0 & 0 & -2 & \times 1/4 \\ 8 & -8 & 0 & 0 & -4 & \mathrm{III} - 2\times\mathrm{II} \\ \hline -2 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1/2 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \end{array}$$

Der einzige linear unabhängige Eigenvektor ist

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ein Hauptvektor ergibt sich aus dem obigen Gleichungssystem mit rechter Seite $\boldsymbol{v}_1$. Es müssen nur die Gauß-Schritte für die neue rechte Seite nachgeholt werden und ein möglicher Hauptvektor ist

$$\boldsymbol{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

Ein Hauptvektor zu $\lambda_3 = 6$ ergibt sich aus dem charakteristischen Gleichungssystem $(\boldsymbol{A} - 6\boldsymbol{E}_3)\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{0}$

$$\begin{array}{rrr|r|l} -7 & -1 & 3 & 0 & \mathrm{II} \\ -3 & -1 & 1 & 0 & \mathrm{I} - 3\times\mathrm{II} \\ -10 & -2 & 4 & 0 & \mathrm{III} - 4\times\mathrm{II} \\ \hline -3 & -1 & 1 & 0 & \\ 2 & 2 & 0 & 0 & \\ 2 & 2 & 0 & 0 & \mathrm{III} - \mathrm{II} \\ \hline -3 & -1 & 1 & 0 & \\ 2 & 2 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \end{array}$$

zu $\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Die allgemeine Lösung des DGL.-Sytems ist schließlich

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}(x) &= \mathrm{e}^{\lambda_1 x}\left\{c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\big[\boldsymbol{w}_2 + x\boldsymbol{v}_1\big]\right\} + c_3\mathrm{e}^{\lambda_3 x}\boldsymbol{v}_3 \\ &= \mathrm{e}^{4x}\left\{c_1\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} + c_2\left[\begin{pmatrix}0\\1/2\\1/2\end{pmatrix} + x\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right]\right\} + c_3\mathrm{e}^{6x}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{4x} & x\mathrm{e}^{4x} & \mathrm{e}^{6x} \\ \mathrm{e}^{4x} & \frac{1+2x}{2}\mathrm{e}^{4x} & -\mathrm{e}^{6x} \\ 2\mathrm{e}^{4x} & \frac{1+4x}{2}\mathrm{e}^{4x} & 2\mathrm{e}^{6x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}. \end{aligned}$$

mit Parametern c_1, c_2, $c_3 \in \mathbb{R}$ und der Fundamentalmatrix

$$\boldsymbol{Y}(x) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{4x} & x\mathrm{e}^{4x} & \mathrm{e}^{6x} \\ \mathrm{e}^{4x} & \frac{1+2x}{2}\mathrm{e}^{4x} & -\mathrm{e}^{6x} \\ 2\mathrm{e}^{4x} & \frac{1+4x}{2}\mathrm{e}^{4x} & 2\mathrm{e}^{6x} \end{pmatrix}.$$