Helmut-Schmidt-Universität
Universität der Bundeswehr Hamburg
Fakultät für Maschinenbau und Bauingenieurwesen

Prof. Dr. Thomas Carraro
M.Sc Janna Puderbach

Mathematik II/B (WI/ET) — Blatt 11

WT 2024 — Stationäre Punkte, Newton-Verfahren, Richtungsableitung

Einführende Bemerkungen

- Vermeiden Sie die Verwendung von Taschenrechnern oder Online-Ressourcen.

Aufgabe 11.1: alte Klausuraufgabe

Gegeben sei die Funktion

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad \text{mit } g(x, y) = (y - x^2)(y - 2x^2).$$

a) Zeigen Sie, dass die Funktion $g(x, y)$ auf allen Geraden durch den Ursprung $(0, 0)$ lokale Minima hat.

b) Hat die Funktion $g(x, y)$ im Ursprung ein lokales Minimum?
Hinweis: Untersuchen Sie die Funktion längs der Kurve $\boldsymbol{q}(t) = (t, 3t^2/2)^\top$.

c) Berechnen Sie das Taylor-Polynom zweiten Grades der Funktion $g(x, y)$ im Punkt $(1, 1)$.

Lösung 11.1:

a) Eine Gerade durch den Ursprung kann durch $\boldsymbol{k}(t) = (at, bt)^\top, \quad t \in \mathbb{R}$ parametrisiert werden. Der Funktionsverlauf längs dieser Geraden ist dann

$$\varphi(t) = g(\boldsymbol{k}(t)) = (bt - a^2t^2)(bt - 2a^2x^2) = 2a^4t^4 - 3a^2bt^3 + b^2t^2$$

mit $\varphi'(t) = 8a^4t^3 - 9a^2bt^2 + 2b^2t$ und $\varphi''(t) = 24a^4t^2 - 18a^2b^2t + 2b^2$.
Wegen $\varphi'(0) = 0$ und $\varphi''(0) = 2b^2 > 0$ liegt für $b \neq 0$ ein Minimum der Funktion im Ursprung vor.
Falls $b = 0$ und $a \neq 0$ ist, hat man $\varphi(t) = 2a^4t^4$. Auch diese Funktion hat im Ursprung ihr Minimum.

b) Nähert man sich dem Ursprung auf der Kurve $\boldsymbol{q}(t) = (t, 3t^2/2)^\top, \quad t \in \mathbb{R}$, hat man

$$\psi(t) = g(\boldsymbol{q}(t)) = \left(\frac{3t^2}{2} - t^2\right)\left(\frac{3t^2}{2} - 2t^2\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) t^4 = -\frac{t^4}{4} < 0 \text{ für } t > 0.$$

In jeder Umgebung von $(0, 0)^\top$ hat man also auch Funktionswerte $g(x, y) < 0$. Im Ursprung kann also kein Minimum vorliegen.

c) Wir benötigen die ersten beiden Ableitungen von $g(x, y)$:

$$\begin{aligned}
g(x, y) &= (y - x^2)(y - 2x^2) && \Rightarrow \quad g(1, 1) = 0 \\
\nabla g(x, y) &= \begin{pmatrix} -2x(y - 2x^2) - 4x(y - x^2) \\ (y - 2x^2) + (y - x^2) \end{pmatrix} && \Rightarrow \quad \nabla g(1, 1) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \\
\boldsymbol{H}_g(x, y) &= \begin{pmatrix} -2y + 12x^2 - 4y + 12x^2 & -6x \\ -6x & 2 \end{pmatrix} && \Rightarrow \quad \boldsymbol{H}_g(1, 1) = \begin{pmatrix} 18 & -6 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

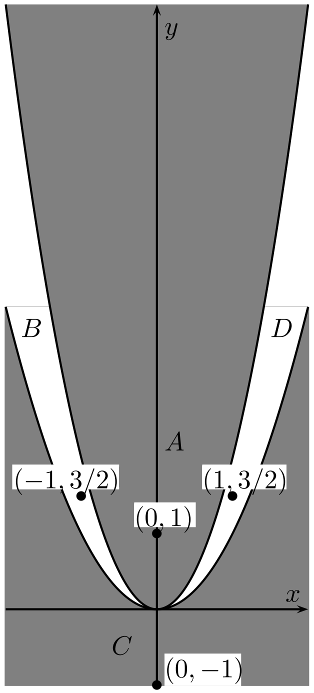
Das Taylorpolynom ist damit

$$\begin{aligned}
T_2(x, y) &= g(1, 1) + \nabla g(1, 1) \cdot \begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(x - 1, y - 1)\boldsymbol{H}_g(1, 1)\begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 1 \end{pmatrix} \\
&= 2(x - 1) - (y - 1) + 9(x - 1)^2 + (y - 1)^2 - 6(x - 1)(y - 1).
\end{aligned}$$

Zusatzüberlegungen zum Sattelpunkt $(0, 0)$: Es werden die Äquipotentiallinien $f(x, y) = 0$ betrachtet:

$$\begin{aligned}
& f(x, y) = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & 0 = (y - x^2)(y - 2x^2) \\
\Leftrightarrow \quad & y = x^2 \text{ oder } y = 2x^2
\end{aligned}$$

Diese teilen die Ebene in vier Bereiche A, B, C, D. (siehe Skizze)



Da $f(x,y)$ stetig ist, ist die Funktion in jedem dieser Bereiche jeweils überall größer oder überall kleiner Null. Wir prüfen die Vorzeichen an einzelnen Punkten nach:

$$\begin{aligned}
A: &\qquad f(0,1) = 1 > 0 \\
B: &\qquad f(-1,3/2) = -\frac{1}{4} < 0 \\
C: &\qquad f(0,-1) = 1 > 0 \\
D: &\qquad f(1,3/2) = -\frac{1}{4} < 0
\end{aligned}$$

Da nun jede Umgebung U des Punktes $(0,0)^\top$ Teile aller vier Mengen A, B, C und D enthält, nimmt die Funktion $f(x,y)$ auch in U stets beide Vorzeichen an. Dies entspricht aber genau der Definition eines Sattelpunktes.

Aufgabe 11.2: Taylor–Polynom & Extrema in 2 Dimensionen

a) Berechnen Sie das Taylor–Polynom 2. Grades der Funktion $f(x,y) = (2x - 3y) \cdot \sin(3x - 2y)$ zum Entwicklungspunkt $\boldsymbol{x}_0 = (0,0)^{\mathrm{T}}$.

b) Ermitteln Sie die Extrema der Funktion $f(x,y) = 2x^3 - 3xy + 2y^3 - 3$.

Lösung 11.2:

a)

Aufgabe 11.3: Bereichsintegrale

Berechnen Sie

a) $I := \int\limits_D x^2\,y + x\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ mit $D := [-2,2] \times [1,3]$.

b) $J := \int\limits_G x\mathrm{d}(x,y)$ mit dem durch die Kurven

$$x = 0,\ y = 2x \text{ und } y = \frac{1}{a}\,x^2 + a\ ,\ a > 0$$

berandeten Flächenstück G.

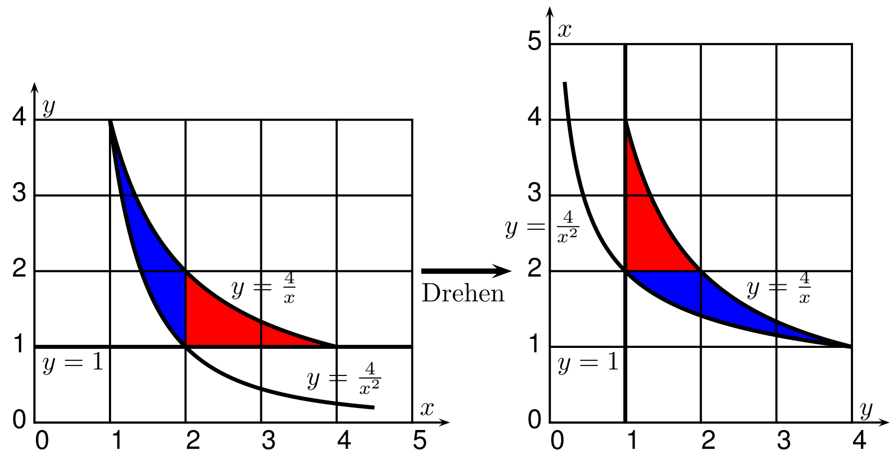
c) Betrachten Sie das zweifache Integral

$$I := \int_{x=1}^{2}\int_{y=4/x^2}^{4/x} xy^2 \mathrm{e}^{x^2y^2/4}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_{x=2}^{4}\int_{y=1}^{4/x} xy^2 \mathrm{e}^{x^2y^2/4}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

i) Skizzieren Sie den Integrationsbereich und vertauschen Sie die Integrationsreihenfolge.

ii) Berechnen Sie das Integral.

Hinweis: zu c) Die Integrationsbereiche B_1 und B_2 beider Einzelintegrale sind in folgender Skizze blau und rot markiert. Die y-Grenzen hängen von x ab und speziell die untere y-Grenze wird für beide Bereiche durch unterschiedliche Funktion beschrieben. ($y = \frac{4}{x^2}$ und $y = 1$)
Das Ändern der Integrationsreihenfolge entspricht dem Drehen der Skizze (rechts).
Nun werden die Ober und Untergrenzen für x in beiden Integrationsbereichen von der jeweils selben Funktion (y-abhängig) beschrieben. Daher kann man nun beide Integrale zusammenfassen.



Lösung 11.3:

Zu a)

$$I = \int\limits_1^3 \int\limits_{-2}^2 \left(x^2\,y + x\right)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = \int\limits_1^3 \left[\frac{x^3}{3}\,y + \frac{x^2}{2}\right]_{x=-2}^2 \mathrm{d}y$$

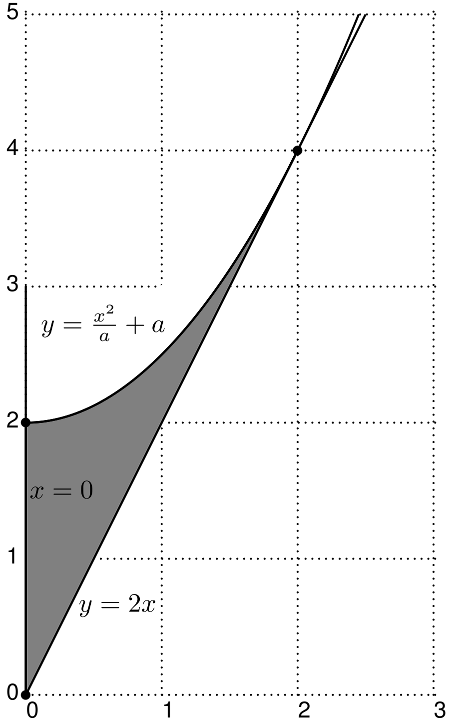
$$= \frac{16}{3}\cdot \int\limits_1^3 y\ \mathrm{d}y = \frac{16}{3}\cdot 4 = \boxed{\frac{64}{3}\ .}$$

Anmerkung: Man hätte den Summanden x gleich weglassen können, da eine ungerade Funktion über einen symmetrischen Bereich integriert immer Null ergibt.

Zu b) Es werden zunächst die Schnittpunkte der Parabel mit der Geraden bestimmt:

$$\frac{1}{a}x^2 + a = 2x \quad \Rightarrow \quad (x-a)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1/2} = a\,.$$

Die Kurven berühren sich somit im Punkt $P = (a, 2a)$.



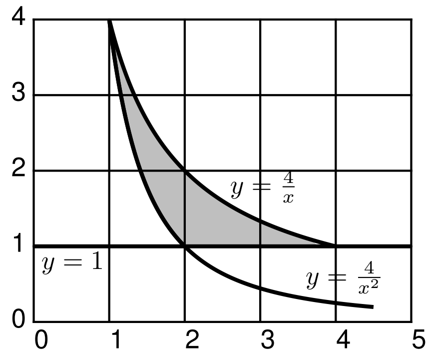
Somit ergibt sich für den Integralwert:

$$J = \iint_G x \mathrm{d}(x,y) = \int_{x=0}^{a} x \int_{y=2x}^{\frac{1}{a}x^2+a} \mathrm{d}\, y \mathrm{d}x \;= \int_{x=0}^{a} x \left(\frac{1}{a}x^2 + a - 2x\right) \mathrm{d}x$$

$$= \int_{x=0}^{a} \left(\frac{1}{a}x^3 + ax - 2x^2\right) \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{4a}x^4 + \frac{1}{2}ax^2 - \frac{2}{3}x^3\right]_0^a$$

$$= \frac{1}{4}a^3 + \frac{1}{2}a^3 - \frac{2}{3}a^3 = \boxed{\frac{1}{12}a^3\,.}$$

Zu c)



Mit $y = \dfrac{4}{x^2} \Rightarrow x = \dfrac{2}{\sqrt{y}}$ und $y = \dfrac{4}{x} \Rightarrow x = \dfrac{4}{y}$ erhält man den Integrationsbereich

$$D = \left\{(x,y)\,|\, 1 \le y \le 4, \frac{2}{\sqrt{y}} \le x \le \frac{4}{y}\right\}.$$

Das Integral ist

$$I = \int_1^4 \int_{2/\sqrt{y}}^{4/y} xy^2\, \mathrm{e}^{x^2y^2/4}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

mit dem Integralwert

$$I = \int_1^4 \left[2\mathrm{e}^{x^2y^2/4}\right]_{x=2/\sqrt{y}}^{4/y} \mathrm{d}y = \int_1^4 \left[2\mathrm{e}^4 - 2\mathrm{e}^y\right]\mathrm{d}y$$

$$= 6\mathrm{e}^4 - 2\mathrm{e}^4 + 2\mathrm{e} = 4\mathrm{e}^4 + 2\mathrm{e}.$$

Aufgabe 11.4: Newton-Verfahren

Zur Berechnung eines kritischen Punktes der Funktion

$$f(x,y) = \int_0^x \left(\frac{\sin(\pi t)}{\pi t} - \frac{1}{3} \right) \mathrm{d}t + \frac{1}{\pi^2} \sin\left(\pi \frac{x}{y}\right)$$

soll das Newton-Verfahren angewandt werden. Bestimmen Sie mit Hilfe **eines Schrittes** des Newton-Verfahrens eine Näherung für einen kritischen Punkt von f in der Nähe von $(1,2)$.

Hinweis: Es gibt keine geschlossene Darstellung des Integrals.

Lösung 11.4:

Mit dem Newton-Verfahren einen kritischen Punkt anzunähern bedeutet, die Nullstellen des Gradienten anzunähern. Die Iterationsvorschrift lautet dann

$$\boldsymbol{x}^{k+1} = \boldsymbol{x}^k - \boldsymbol{J}_{\nabla f}^{-1}(\boldsymbol{x}^k) \cdot \nabla f(\boldsymbol{x}^k)$$

Wir wählen den Startvektor $\boldsymbol{x}^0 = (1,2)^T$. Der Gradient ergibt sich aus den ersten partiellen Ableitungen:

$$f_x = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} - \frac{1}{3} + \frac{1}{\pi y} \cos\left(\pi \frac{x}{y}\right),$$

$$f_y = \frac{-x}{\pi y^2} \cos\left(\pi \frac{x}{y}\right).$$

Es gilt dann:

$$\nabla f(1,2) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Jacobi-Matrix des Gradienten, ergibt sich dann aus den zweiten partiellen Ableitungen:

$$f_{xx} = \frac{\cos(\pi x)}{x} - \frac{\sin(\pi x)}{\pi x^2} - \frac{1}{y^2} \sin\left(\pi \frac{x}{y}\right),$$

$$f_{xy} = \frac{-1}{\pi y^2} \cos\left(\pi \frac{x}{y}\right) + \frac{x}{y^3} \sin\left(\pi \frac{x}{y}\right),$$

$$f_{yy} = \frac{2x}{\pi y^3} \cos\left(\pi \frac{x}{y}\right) - \frac{x^2}{y^4} \sin\left(\pi \frac{x}{y}\right).$$

Damit erhalten wir die Jacobi-Matrix

$$\boldsymbol{J}_f(1,2) = \begin{pmatrix} \frac{-5}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{-1}{16} \end{pmatrix}$$

Es gilt dann:

$$\boldsymbol{x}^1 = \boldsymbol{x}^0 \underbrace{-\boldsymbol{J}_{\nabla f}^{-1}(\boldsymbol{x}^0) \cdot \nabla f(\boldsymbol{x}^0)}_{\boldsymbol{\Delta x}}$$

mit der Lösung $\boldsymbol{\Delta x}$ des linearen Gleichungssystems

$$\boldsymbol{J}_{\nabla \boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{\Delta x} = -\nabla f(\boldsymbol{x}^0):$$

$$\begin{array}{cc|c|l} \frac{-5}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{3} & \\ \frac{1}{8} & \frac{-1}{16} & 0 & +\frac{1}{10} \times I \\ \hline \frac{-5}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{3} & \\ 0 & \frac{-4}{80} & \frac{1}{30} & \end{array}$$

Daraus ergibt sich

$$\boldsymbol{\Delta x} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$$

und damit

$$\boldsymbol{x}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 11.5: Taylor–Entwicklung in 2 Dim.

Gegeben seien $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = \mathrm{e}^{xy} + x + y$ und $\boldsymbol{a} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom 2. Grades von f für den Entwicklungspunkt $(0,0)$.

b) Bestimmen Sie die Richtungsableitung $\partial_{\boldsymbol{a}} f$ von f in Richtung $\boldsymbol{a}$ im Punkt $(0,0)$.

Lösung 11.5:

a) Mit den partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned}
f_x &= y\,\mathrm{e}^{xy} + 1 && \Rightarrow \quad f_x(0,0) = 1\ , \\
f_y &= x\,\mathrm{e}^{xy} + 1 && \Rightarrow \quad f_y(0,0) = 1\ , \\
f_{xx} &= y^2\,\mathrm{e}^{xy} && \Rightarrow \quad f_{xx}(0,0) = 0\ , \\
f_{xy} &= xy\,\mathrm{e}^{xy} + \mathrm{e}^{xy} && \Rightarrow \quad f_{xy}(0,0) = 1\ , \\
f_{yy} &= x^2\,\mathrm{e}^{xy} && \Rightarrow \quad f_{yy}(0,0) = 0
\end{aligned}$$

folgt

$$T_{f,2}(x,y) \;=\; 1 + x + y + \frac{2}{2}xy \;=\; 1 + x + y + xy\ .$$

b) Es ist

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{a}}(0,0) \;=\; \langle \nabla f(0,0), \boldsymbol{a} \rangle \;=\; f_x(0,0)\cdot a_1 + f_y(0,0)\cdot a_2 \;=\; a_1 + a_2 \;=\; -\frac{1}{5}\ .$$

Aufgabe 11.6: Schwerpunkt und Trägheitsmoment einer Kreisscheibe

Gegeben sei die Kreisscheibe

$$K = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 | \quad \left\| \boldsymbol{x} - (0,2)^\top \right\|_2 \leq 2\}$$

mit der Massendichte $\rho(x,y) = x^2 + 4$.

a) Berechnen Sie die Masse $M = \int_K \rho(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x}$ der Kreisscheibe. Führen Sie die Rechnung in kartesischen Koordinaten durch.

b) Berechnen Sie ebenso den Schwerpunkt

$$\boldsymbol{s} = \frac{1}{M} \int_K \rho(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{x} \mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

Führen Sie die Rechnung in den verschobenen Polarkoordinaten $\boldsymbol{x}(r,\varphi) = (r\cos\varphi,\ 2 + r\sin\varphi)^\top$ aus.

c) Berechnen Sie das Trägheitsmoment bezüglich der x-Achse

$$\Theta_y = \int_K \rho(x,y) y^2 \mathrm{d}(x,y).$$

Lösung 11.6:

a) Das Integrationsgebiet wird definiert durch

$$2 \geq \left\| \boldsymbol{x} - (0,2)^\top \right\|_2 = \sqrt{x^2 + (y-2)^2}.$$

Wir stellen dies nach y um:

$$\begin{aligned}
& 4 \geq x^2 + (y-2)^2 \\
\Rightarrow \quad & 4 - x^2 \geq (y-2)^2 \\
\Rightarrow \quad & \sqrt{4-x^2} \geq y - 2 \text{ und } -\sqrt{4-x^2} \leq y-2 \\
\Rightarrow \quad & 2 + \sqrt{4-x^2} \geq y \text{ und } 2 - \sqrt{4-x^2} \leq y.
\end{aligned}$$

Die zulässigen x-Werte sind damit durch $-2 \leq x \leq 2$ gegeben. Das Integral für die Masse ist nun

$$\begin{aligned}
M = \int_K \rho(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}x &= \int_{x=-2}^{2} \int_{y=2-\sqrt{4-x^2}}^{2+\sqrt{4-x^2}} (x^2+4) \mathrm{d}y \mathrm{d}x \\
&= \int_{x=-2}^{2} (x^2+4) \left[2 + \sqrt{4-x^2} - (2 - \sqrt{4-x^2}) \right] \mathrm{d}x \\
&= 2 \int_{x=-2}^{2} (x^2+4)\sqrt{4-x^2} \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Dieses Integral lässt sich durch die Substitution

$$x = 2\sin u,\ \mathrm{d}x = 2\cos u \mathrm{d}u,\ u \in [-\pi/2, \pi/2]$$

umformen zu

$$\begin{aligned}
M &= 2 \int_{u=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (4\sin^2 u + 4)\sqrt{4 - 4\sin^2 u} \cdot 2\cos u \mathrm{d}u \\
&= 32 \int_{u=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 u + 1)\cos u \cos u \mathrm{d}u = 32 \int_{u=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left((\sin u \cos u)^2 + \cos^2 u \right) \mathrm{d}u \\
&= 32 \int_{u=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\left(\frac{1}{2}\sin(2u) \right)^2 + \frac{1}{2}(\cos^2 u + 1 - \sin^2 u) \right) \mathrm{d}u \\
&= 32 \int_{u=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin^2(2u) + 1 - \cos^2(2u)}{8} + \frac{\cos(2u)+1}{2} \right) \mathrm{d}u \\
&= 32 \int_{u=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1-\cos(4u)}{8} + \frac{\cos(2u)+1}{2} \right) \mathrm{d}u = 32 \cdot \left[\frac{5u}{8} - \frac{\sin(4u)}{32} + \frac{\sin(2u)}{4} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= 20\pi
\end{aligned}$$

b) Die Rechnung in Polarkoordinaten ist einfacher. Wir belassen die Gleichung in ihrer vektoriellen Form:

$$\boldsymbol{s} = \frac{1}{M}\int\limits_K \rho(\boldsymbol{x}) \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ 2 + r\sin\varphi \end{pmatrix} \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \frac{1}{M}\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi}\int\limits_{r=0}^{2} (r^2\cos^2\varphi + 4) \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ 2 + r\sin\varphi \end{pmatrix} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi$$

$$= \frac{1}{M}\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \left(\left(\frac{2^4}{4}\cos^2\varphi + 4\frac{2^2}{2}\right)\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \left(\frac{2^5}{5}\cos^2\varphi + 4\frac{2^3}{3}\right)\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}\right) \mathrm{d}\varphi$$

$$= \frac{1}{M}(4\cdot\pi + 8\cdot 2\pi)\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{32}{5M}\int\limits_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos^3\varphi \\ \cos^2\varphi\sin\varphi \end{pmatrix} \mathrm{d}\varphi$$

$$= \frac{20\pi}{M}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{32}{5M}\int\limits_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos\varphi - \cos\varphi\sin^2\varphi \\ \cos^2\varphi\sin\varphi \end{pmatrix} \mathrm{d}\varphi$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{32}{5M}\left.\begin{pmatrix} \sin\varphi - \frac{\sin^3\varphi}{3} \\ -\frac{\cos^3\varphi}{3} \end{pmatrix}\right|_0^{2\pi} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Dieses Ergebnis war zu erwarten, da die Massendichte nicht von y abhängt und bezüglich x symmetrisch ist ($\rho(x) = \rho(-x)$).

c) Alternativ zur obigen Integrationsreihenfolge integrieren wir hier zuerst nach φ:

$$\Theta_y = \int\limits_0^2\int\limits_0^{2\pi} (r^2\cos^2\varphi + 4)(2 + r\sin\varphi)^2 r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r$$

$$= \int\limits_0^2\int\limits_0^{2\pi} \Big(4r^2\cos^2\varphi + 4r^3\sin\varphi\cos^2\varphi + r^4\cos^2\varphi\sin^2\varphi +$$

$$+ 16 + 16r\sin\varphi + 4r^2\sin^2\varphi\Big)\mathrm{d}\varphi r\mathrm{d}r$$

$$= \int\limits_0^2 \left(4r^2\pi + 0 + r^4\int\limits_0^{2\pi}\frac{1}{4}\sin^2(2\varphi)\mathrm{d}\varphi + 16\cdot 2\pi + 0 + 4r^2\pi\right) r\mathrm{d}r$$

$$= \int\limits_0^2 \left(8\pi r^3 + \frac{1}{4}r^5\pi + 32\pi r\right)\mathrm{d}r = 2\pi 2^4 + \frac{\pi}{4}\cdot\frac{2^6}{6} + 16\pi\cdot 2^2$$

$$= 96\pi + \frac{8}{3}\pi = \frac{296\pi}{3}.$$

Aufgabe 11.7: Bereichsintegrale

Gegeben sei das Doppelintegral

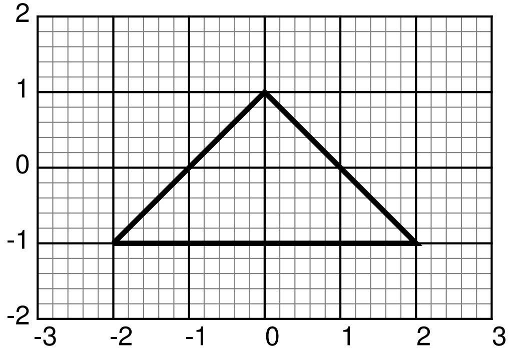
$$I := \int_{-1}^{1} \int_{y-1}^{1-y} \frac{y + x^3}{4} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \; .$$

a) Skizzieren Sie den von den Grenzen beschriebenen Teilbereich der x-y–Ebene.

b) Berechnen Sie das Integral.

Lösung 11.7:

a) Der Bereich ist durch die Geraden $x = y-1 \Rightarrow y = x+1$ und $x = 1-y \Rightarrow y = x+1$, sowie durch die Geraden $y = -1$ und formal auch $y = 1$, eingeschlossen. Das ist ein Dreieck:



b)

$$I = \int_{-1}^{1} \int_{y-1}^{1-y} \frac{y}{4} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y + \int_{-1}^{1} \int_{y-1}^{1-y} \frac{x^3}{4} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \; .$$

Der zweite Summand ist Null, da eine in x ungerade Funktion über einen zur y–Achse symmetrischen Bereich integriert wird (aber auch ohne Beachtung der Symmetrie ist die Berechnung einfach!).

Damit ist

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^{1} \frac{y}{4} \int_{y-1}^{1-y} 1 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_{-1}^{1} \frac{y}{4} \cdot \Big[x \Big]_{x=y-1}^{1-y} \, \mathrm{d}x \\ &= \int_{-1}^{1} \frac{y}{4} \cdot \Big((1-y) - (y-1) \Big) \, \mathrm{d}y \\ &= \int_{-1}^{1} \frac{y - y^2}{2} \, \mathrm{d}y \; = \; -\frac{1}{3} \; . \end{aligned}$$

Aufgabe 11.8: Kegelvolumen

Gegeben sei ein Kegel als

$$\mathbf{K} = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : z = +\sqrt{x^2+y^2} \right\}$$

der durch

$$z = +\sqrt{x^2+y^2}$$

eingeschlossen ist.

a) Bestimmen Sie das Volumen des Kegels für $z = 2$ mittels Integration in Zylinderkoordinaten.

b) Gegeben sei die Dichtefunktion

$$\rho(x,y,z) = x + 2y + z^2$$

Bestimmen Sie die Masse des Kegels.

Lösung 11.8:

a) Wir transformieren von kartesischen Koordinaten in Zylinderkoordinaten.

$$x = r\cos(\varphi), \quad y = r\sin(\varphi), \quad z = z$$

Die Integrationsgrenzen sind dann gegeben durch

$$0 \le r \le 2, \quad r \le z \le 2, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi$$

Die Jacobi-Determinate ist r.

Damit erhalten wir das Integral.

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \int_r^2 \int_0^{2\pi} r \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}z \mathrm{d}r &= 2\pi \int_0^2 \int_r^2 r \mathrm{d}z \mathrm{d}r \\
&= 2\pi \int_0^2 rz \Big|_r^2 \mathrm{d}r \\
&= \int_0^2 (2-r) r \mathrm{d}r \\
&= 2\pi \left(\frac{2r^2}{2}\Big|_0^2 - \frac{r^3}{3}\Big|_0^2 \right) \\
&= 2\pi(4 - \frac{8}{3}) \\
&= \frac{8}{3}\pi
\end{aligned}$$

Damit ist das Volumen des gegebenen Kegels $\frac{8}{3}\pi$.

b)

$$\begin{aligned}
\int_K x + 2y + z^2 \mathrm{d}V &= \int_0^2 \int_r^2 \int_0^{2\pi} (r\cos(\varphi + 2r\sin(\varphi) + z^2) r \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}z \mathrm{d}r \\
&= \int_0^2 \int_r^2 \left(r\sin(\varphi)\Big|_0^{2\pi} - 2r\cos(\varphi)\Big|_0^{2\pi} + z^2\varphi\Big|_0^{2\pi} \right) r \mathrm{d}z \mathrm{d}r \\
&= \int_0^2 \int_r^2 2\pi z^2 r \mathrm{d}z \mathrm{d}r \\
&= \int_0^2 2\pi r \frac{z^3}{3}\Big|_r^2 \mathrm{d}r \\
&= \int_0^2 \frac{16\pi r}{3} - \frac{2\pi r^4}{3} \mathrm{d}r \\
&= \frac{8\pi r^2}{3}\Big|_0^2 - \frac{2\pi r^5}{3}\Big|_0^2 \\
&= \frac{32\pi}{5}
\end{aligned}$$

Aufgabe 11.9:

Gegeben sei ein Kreisring

$$R = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 | 1 \le \|\boldsymbol{x}\| \le 2 \right\}$$

Weiterhin sei die Funktion

$$f(x,y) = \mathrm{e}^{x^2+y^2}\, y^2$$

gegeben. Bestimmen Sie das Integral $I = \int_R f(x,y)\mathrm{d}(x,y)$.

Lösung 11.9:

Wir stellen das Integral in Polarkoordinaten dar.

$$x = r\cos(\varphi), \quad y = r\sin(\varphi)$$

Es gilt dann:

$$\begin{aligned}
I &= \int_1^2 \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{r^2}\, r^2 \sin(\varphi) \cdot r \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}r \\
&= \int_1^2 \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{r^2}\, r^3 \sin(\varphi) \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}r \\
&= \int_1^2 \mathrm{e}^{r^2}\, r^3 (\frac{1}{2}(\varphi - \sin(\varphi)\cos(\varphi))\Big|_0^{2\pi} \mathrm{d}r \\
&= \pi \int_1^2 \mathrm{e}^{r^2}\, r^3 \mathrm{d}r \\
&= \pi \int_1^4 \mathrm{e}^{u}\, u \cdot \frac{1}{2} \mathrm{d}u \\
&= \frac{\pi}{2} \left(\mathrm{e}^u\, u\Big|_1^4 - \int_1^4 \mathrm{e}^u\, \mathrm{d}r \right) \\
&= \frac{\pi}{2} \left(\mathrm{e}^u\, u\Big|_1^4 - \mathrm{e}^u\, \Big|_1^4 \right) \\
&= \frac{3\,\mathrm{e}^4\,\pi}{2}
\end{aligned}$$