

Mathematik II/B (WI/ET)

Blatt 1

WT 2025

Grenzwerte, Folgen, Stetigkeit

Einführende Bemerkungen

- Vermeiden Sie die Verwendung von Taschenrechnern oder Online-Ressourcen.
-

Aufgabe 1.1: Grenzwertdefinition

Bestimmen Sie zu den unten angegebenen Folgen (a_n) mit dem Grenzwert a und den angegebenen Werten für k jeweils ein N so, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > N$ gilt

$$|a_n - a| < 10^{-k}.$$

a) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}, a = 0, k = 2$

b) $a_n = \frac{3n+1}{n+1}, a = 3, k = 4$

c) $a_n = \frac{(-1)^n}{n!} + 1, a = 1, k = 3$

Lösung 1.1:

a) Es soll gelten $|a_n - a| = \frac{1}{\sqrt{n}} \stackrel{!}{<} 10^{-2}$. Dies lässt sich umstellen zu:

$$n > \left(\frac{1}{10^{-2}}\right)^2 = 10^4 = 10000 = N.$$

b) Hier ergibt sich

$$\begin{aligned} |a_n - a| &< 10^{-4} \\ \Leftrightarrow 10^{-4} &> \left| \frac{3n+1}{n+1} - 3 \right| = \frac{|-2|}{n+1} \\ \Leftrightarrow \frac{n+1}{2} &> 10^4 \\ \Leftrightarrow n &> 20000 - 1 = 19999 = N. \end{aligned}$$

c) Für diese Folge ist $|a_n - a| = \left| \frac{(-1)^n}{n!} \right| = \frac{1}{n!}$. Mit $k = 3$ soll also gelten:

$$\frac{1}{n!} < 10^{-3} \quad \Leftrightarrow \quad n! > 1000.$$

Das ist beispielsweise erfüllt für $n > 1000 = N$. Ein kleinstmögliches N kann man durch die Untersuchung von $n!$ ermitteln. Es ist $6! = 720 < 1000$ und $7! = 7 \cdot 6! = 5040 > 1000$. Die Bedingung ist also bereits für $n > 6$ erfüllt.

Aufgabe 1.2:

a) Zeigen Sie anhand der Definition der Konvergenz, dass gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + n - 12}{n^2 - 8} = 2.$$

b) Zeigen Sie: Konvergiert $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ gegen a , so konvergiert auch $\{|a_n|\}_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $|a|$.

c) Gilt die Umkehrung von b)? Begründen Sie Ihre Aussage mit einem Beweis oder einem Gegenbeispiel.

Lösung 1.2:**Lösung**

Zu a) Die Aussage „ a_n konvergiert gegen a “ bedeutet: Für jedes $k \in \mathbb{N} > 0$ existiert ein $N = N(k) \in \mathbb{R}$, so dass für alle $n > N$ gilt, dass $|a_n - a| < 10^{-k}$. Für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$a_n := \frac{2n^2 + n - 12}{n^2 - 8} = \frac{2(n^2 - 8) + (n + 4)}{n^2 - 8} = 2 + \frac{n + 4}{n^2 - 8}.$$

Damit folgt

$$|a_n - 2| = \left| \frac{n + 4}{n^2 - 8} \right| \stackrel{\text{für } n \geq 3}{=} \frac{n + 4}{n^2 - 8} = \frac{n + 4}{n^2 - 16 + 8}$$

$$\stackrel{\text{für } n \geq 5}{<} \frac{n + 4}{n^2 - 16} = \frac{n + 4}{(n + 4)(n - 4)} = \frac{1}{n - 4}.$$

Sei nun $k \in \mathbb{N}$ vorgegeben. Es gilt

$$\frac{1}{n - 4} = 10^{-k} \quad \Longleftrightarrow \quad n = 10^k + 4.$$

Ist $N(k) := 4 + 10^k$, dann gilt insbesondere für alle $n > N(k)$:

$$|a_n - 2| < 10^{-k}.$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

Zu b) Die Aussage „ a_n konvergiert gegen a “ bedeutet: Für jedes $k \in \mathbb{N}$ gibt es ein $N(k) \in \mathbb{R}$, so dass für alle $n > N$ gilt, dass $|a_n - a| < 10^{-k}$. Wegen

$$||a_n| - |a|| \leq |a_n - a|,$$

gilt für jedes $k \in \mathbb{N}$, dass das dazugehörige $N(k)$ und jedes $n > N$ auch

$$||a_n| - |a|| < 10^{-k}$$

erfüllt, d.h. $|a_n|$ konvergiert gegen $|a|$.

Zu c) Die Umkehrung gilt nicht, zum Beispiel gilt für $a_n = (-1)^n$ sicher $|a_n| = 1 \rightarrow 1$, aber $(-1)^n$ ist nicht konvergent.

Aufgabe 1.3: Grenzwerte monotoner Folgen

Es seien $a_1 = \sqrt{2}$ und $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ für $n = 1, 2, 3, \dots$. Zeigen Sie,

- a) dass (a_n) beschränkt ist,
- b) dass (a_n) monoton wächst und
- c) gegen die größte Lösung der Gleichung $x^2 - x - 2 = 0$ konvergiert.

Lösung 1.3:

- a) Null ist sicher eine untere Schranke für alle $a_n > 0$. Eine obere Schranke ist 2. Wir untersuchen dazu das Quadrat der Folge und rechnen nach, dass $a_n^2 \leq 4$ für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$a_{n+1}^2 = 2 + a_n \stackrel{!}{\leq} 4$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn bereits $a_n \leq 2$ ist. Das ist für $a_1 = \sqrt{2}$ der Fall und damit auch für alle folgenden a_n .

- b) Es ist zu zeigen, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n \leq a_{n+1}$.

Äquivalent dazu ist $\frac{a_{n+1}^2}{a_n^2} \geq 1$:

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}^2}{a_n^2} &\geq \frac{2 + a_n}{2a_n} \quad (\text{wegen } a_n \leq 2) \\ &= \frac{1}{a_n} + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \quad (\text{wegen } a_n \leq 2) \end{aligned}$$

- c) Da a_n beschränkt und monoton ist, muss die Folge einen Grenzwert

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}$$

besitzen. Mit diesem Grenzwert ist

$$\begin{aligned} a^2 - a - 2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}^2 - \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - 2 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2 + a_n}^2 - a_n) - 2 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 2 - 2 = 0 \end{aligned}$$

Damit muss a eine Nullstelle des Polynoms $p(x) = x^2 - x - 2$ sein.

$p(x)$ ist ein Polynom zweiten Grades, besitzt also zwei Nullstellen. Negative Werte nimmt $p(x)$ nur zwischen den beiden Nullstellen an. Da

$$p(a_1) = p(\sqrt{2}) = -\sqrt{2} < 0$$

ist, liegt a_1 zwischen den beiden Nullstellen. Wegen der Monotonie von (a_n) muss es sich bei a also um die größere der beiden Nullstellen handeln.

Aufgabe 1.4: Funktionenlimes

a) Gegeben sei die Funktion

$$f(x) := \frac{x^3 + |x+1| + \operatorname{sign}(x+1)}{\operatorname{sign} x}, \quad x \in D(f) := \mathbb{R}.$$

Bestimmen Sie $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow (-1)+} f(x)$ und $\lim_{x \rightarrow (-1)-} f(x)$.

b) Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \frac{\sinh x}{\cosh(ax)}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Bestimmen Sie $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$.

Hinweise:

- Mit der zunächst als bekannt vorausgesetzten Exponentialfunktion e^x gilt

$$\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{und} \quad \cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

- Die Signum-Funktion liefert das Vorzeichen des Argumentes:

$$\operatorname{sign}(z) = \begin{cases} +1 & , z \geq 0 \\ -1 & , z < 0 \end{cases}$$

Lösung 1.4:

a) i) Für $x > 0$ gilt $\operatorname{sign}(x) = \operatorname{sign}(1+x) = 1$ sowie $|x+1| = x+1$, damit gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} (x^3 + x + 1 + 1) = 2.$$

ii) Für $-1 < x < 0$ gilt $\operatorname{sign}(x) = -1$, $\operatorname{sign}(1+x) = 1$ sowie $|x+1| = x+1$, damit gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{x^3 + x + 1 + 1}{-1} = -2.$$

iii) Für $-1 < x < 0$ gilt $\operatorname{sign}(x) = -1$, $\operatorname{sign}(1+x) = 1$ sowie $|x+1| = x+1$, damit gilt

$$\lim_{x \rightarrow (-1)+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)+} \frac{x^3 + x + 1 + 1}{-1} = 0.$$

iv) Für $x < -1$ gilt $\operatorname{sign}(x) = \operatorname{sign}(1+x) = -1$ sowie $|x+1| = -(x+1)$, damit gilt

$$\lim_{x \rightarrow (-1)-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)-} \frac{x^3 - x - 1 - 1}{-1} = 2.$$

b) Die Funktion $f(x)$ ist eine ungerade Funktion:

$$f(-x) = \frac{\sinh(-x)}{\cosh(ax)} = \frac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{e^{-ax} + e^{-(-ax)}} = -\frac{e^x - e^{-x}}{e^{ax} + e^{-ax}} = -f(x)$$

Daher ist $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ und es genügt einen der beiden Grenzwerte zu berechnen.

Es wird vorausgesetzt, dass e^x stetig ist und dass gilt $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$, somit kann man den Funktionsgrenzwert durch die Substitution $z = e^x$ bestimmen:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^{ax} + e^{-ax}} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z - \frac{1}{z}}{z^a + \frac{1}{z^a}} \\ &= \lim_{z \rightarrow \infty} \left(\frac{z}{z^a} \cdot \frac{1 - \frac{1}{z^2}}{1 + \frac{1}{z^{2a}}} \right) \end{aligned}$$

Der Grenzwert des ersten Bruches ist

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z}{z^a} = \lim_{z \rightarrow \infty} z^{1-a} = \begin{cases} \infty, & a < 1 \\ 1, & a = 1 \\ 0, & a > 1 \end{cases}.$$

Für den zweiten Bruch hat man

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{z^2}}{1 + \frac{1}{z^{2a}}} = \begin{cases} 0, & a < 0 \\ \frac{1}{2}, & a = 0 \\ 1, & a > 0 \end{cases}.$$

Insgesamt ergibt sich daraus:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \begin{cases} \infty, & 0 \leq a < 1 \\ 1, & a = 1 \\ 0, & a > 1 \end{cases}$$

Für $a < 0$ hat man

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \lim_{z \rightarrow \infty} \left(\frac{z}{z^a z^{-2a}} \cdot \frac{1 - \frac{1}{z^2}}{z^{2a} + 1} \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow \infty} \left(\frac{z}{z^{-a}} \cdot \frac{1 - \frac{1}{z^2}}{z^{2a} + 1} \right) = \begin{cases} 0, & a < -1 \\ 1, & a = -1 \\ \infty, & -1 < a < 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

Aufgabe 1.5: Grenzwert Analyse - Definition

- a) Notieren Sie die Definition des Grenzwertes und zeigen Sie, dass die Folge $a_n = \frac{1}{n}$ gegen den Grenzwert $a = 0$ konvergiert.
(Dies ist gleichbedeutend mit dem Nachweis, dass $\forall k \in \mathbb{N}$ eine Zahl $N \in \mathbb{R}$ existiert, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > N$ gilt: $|a_n - a| < 10^{-k}$).

- b) Berechnen Sie den Grenzwert $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ der untenstehenden Folgen und dokumentieren Sie die Rechenregel, die Sie zur Berechnung des Grenzwertes verwendet haben (Produktregel, Einschließungssatz, Produkt beschränkter Folgen, Produkt von Nullfolgen etc).

$$\text{i)} \quad a_n = \frac{n^2 + 5n}{3n^2 + 1} \quad \text{ii)} \quad a_n = \log_{10}(10n^2 - 2n) - \log_{10}(n^2 + 1)$$

$$\text{iii)} \quad a_n = \frac{(n+1)!}{n! - (n+1)!} \quad \text{iv)} \quad a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3n}$$

$$\text{v)} \quad a_n = \frac{\cos n}{n} \quad \text{vi)} \quad a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

$$\text{vii)} \quad a_n = \frac{2^n}{n!}$$

Lösung 1.5:

- a) Es ist zu zeigen: $\forall k \in \mathbb{N} : \exists N \in \mathbb{R} :$

$$|n^{-1} - 0| < 10^{-k}, \forall n > N.$$

Wählen Sie $N = 10^k$, um die Eigenschaft zu zeigen.

- b) Im vorigen Aufgabenteil wurde gezeigt, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Mit dem Ergebnis aus a) gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0, \text{ for all } \alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0.$$

Des Weiteren wird die Stetigkeit der Funktionen vorausgesetzt und ausgenutzt.

- i) Teilen von Zähler und Nenner durch n^2 liefert

$$\frac{1 + \frac{5}{n}}{3 + \frac{1}{n^2}}$$

Der Grenzwert des Zählers ist 1, der Grenzwert des Nenners ist 3. Somit liefert die Quotientenregel für Grenzwerte das Ergebnis $a = \frac{1}{3}$.

- ii)

$$\begin{aligned} \log_{10}(10n^2 - 2n) - \log_{10}(n^2 + 1) &= \log_{10} \frac{10n^2 - 2n}{n^2 + 1} \\ &= \log_{10} \frac{10 - \frac{2}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}}. \end{aligned}$$

Der Grenzwert des Arguments b des Logarithmus-Terms liefert

$$b = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10 - \frac{2}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}} = 10.$$

Aufgrund der Stetigkeit der Logarithmus-Funktionen innerhalb ihres Definitionsbereichs auf $x > 0$, berechnet sich der Grenzwert zu

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} \log_{10} b_n = \log_{10} b = 1.$$

- iii) Umformung des Bruchausdrucks liefert

$$\frac{(n+1)!}{n! - (n+1)!} = \frac{(n+1)n!}{n! - (n+1)n!} = \frac{(n+1)}{-n} = -(1 + \frac{1}{n}).$$

Unter Verwendung der Summenregel ergibt sich der Grenzwert

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n! - (n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} -(1 + \frac{1}{n}) = -1.$$

- iv) Es gilt

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3n} = \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)^3$$

Der Grenzwert der Folge $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ist genau die Eulersche Zahl e .

$$b = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Die Produktregel liefert dann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n^3 = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b^3 = e^3.$$

Alternativ kann auch die Stetigkeit der Funktion x^3 ausgenutzt werden, um das Ergebnis zu erhalten.

v) Die Folge

$$a_n = \frac{\cos n}{n}$$

kann als Produkt $a_n = b_n c_n$ einer beschränkten Teilfolge $b_n = \cos n \neq 0$ und einer Nullfolge $c_n = \frac{1}{n}$ aufgefasst werden. Entsprechend ist deren Produkt ebenfalls eine Nullfolge und der Grenzwert ist $a = 0$.

vi) Es gilt

$$\begin{aligned} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} &= \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{\frac{1}{n}}}. \end{aligned}$$

Unter Verwendung der Produkt und Additionsregel erhalten wir den Grenzwert $a = 0$.

vii) Die Folge $a_n = \frac{2^n}{n!}$ kann für $n > 3$ nach oben und unten beschränkt werden

$$0 \leq \frac{2^n}{n!} = \frac{\overbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \dots 2}^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \leq \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{2} \cdot \underbrace{\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{4} \dots \frac{2}{n-1}}_{\leq 1} \cdot \frac{2}{n} \leq \frac{4}{n}.$$

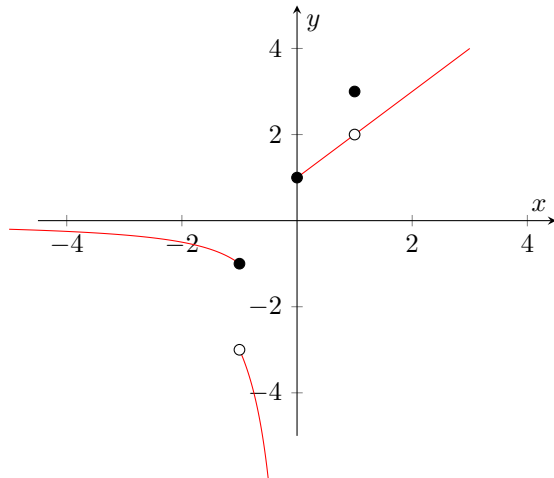
Da die Folge von oben und unten durch zwei Nullfolge beschränkt ist, erhält man mit dem Einschließungssatz den Grenzwert $a = 0$.

Aufgabe 1.6: Stetigkeit

Betrachten Sie die Funktion $y = f(x)$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{für } x \in (-\infty, -1], \\ \frac{3}{x} & \text{für } x \in (-1, 0), \\ \frac{x^2-1}{x-1} & \text{für } x \in [0, 1) \cup (1, \infty), \\ 3 & \text{für } x = 1. \end{cases}$$

und deren Graphen



- Finden Sie alle Werte an denen die Funktion unstetig ist.
- Begründen Sie für jeden dieser Werte, weshalb die formale Definition der Stetigkeit verletzt ist.
- Klassifizieren Sie jede der Unstetigkeitsstellen als **Sprungstelle**, **hebbare Unstetigkeit** oder **Polstelle**.

Lösung 1.6:

Die Funktion ist unstetig bei

- $x = -1$,
- $x = 0$,
- $x = 1$.

- Die Funktion ist unstetig für $x = -1$. Diese Unstetigkeit entspricht einer Sprungstelle, da die links- und rechtsseitigen Grenzwerte existieren (sprich, auf einen endlichen Wert konvergieren), diese aber nicht übereinstimmen:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{x} = -1,$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{3}{x} = -3.$$

- Die Funktion ist unstetig bei $x = 0$. Dies ist eine Polstelle, da der linksseitiger Grenzwert nicht existiert.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3}{x} = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x + 1 = 1.$$

- Die Unstetigkeit bei $x = 1$ ist hebbar, da deren links- und rechtsseitige Grenzwerte existieren und übereinstimmen

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} x + 1 = 2,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} x + 1 = 2,$$

jedoch vom Funktionswert $f(1) = 3$ an der Stelle abweichen.

Ergebnisse zu Aufgabe 1.1:

a) $N = 10000$, b) $N = 19999$, c) $N = 6$

Ergebnisse zu Aufgabe 1.2:

c) Betrachten Sie $a_n = (-1)^n$.

Ergebnisse zu Aufgabe 1.3:

a)/b) Es ist z. B. $0 < a_n \leq 2$.

Ergebnisse zu Aufgabe 1.4:

a) $\lim_{x \rightarrow 0 \pm} f(x) = \pm 2$, $\lim_{x \rightarrow -1 \pm} f(x) = 1 \pm (-1)$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \begin{cases} 0, & |a| > 1 \\ 1, & |a| = 1 \\ \infty, & |a| < 1 \end{cases}$

Ergebnisse zu Aufgabe 1.5:

b)

i) $a = \frac{1}{3}$

ii) $a = 1$

iii) $a = -1$

iv) $a = e^3$

v) $a = 0$

vi) $a = 0$

vii) $a = 0$