Helmut-Schmidt-Universität
Universität der Bundeswehr Hamburg
Fakultät für Maschinenbau und Bauingenieurwesen

Prof. Dr. Thomas Carraro
Dr. Ulrike Kochan-Eilers

HELMUT SCHMIDT UNIVERSITÄT
Universität der Bundeswehr Hamburg

Mathematik II/B (WI/ET) — Blatt 1

WT 2025 — Funktionsgraphen, Grenzwerte, Folgen, Differenzieren

Einführende Bemerkungen

- Vermeiden Sie die Verwendung von Taschenrechnern oder Online-Ressourcen.

Aufgabe 1.1:

Stellen Sie jede der folgenden Funktionen einzeln in einem Koordinatensystem dar, beschriften Sie die Datenachsen und heben Sie signifikante Werte hervor (z.B. Maxima/Minima, Nullstellen, usw.).

a) $p_1(x) = 2x - 1$

b) $p_2(x) = (x-2)^2 - 1$

c) $p_3(x) = x^3$

d) $p_4(x) = -x^3$

e) $f_1(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$

f) $f_2(x) = -\cos(x)$

g) $f_3(x) = \sin(x)$

h) $f_4(x) = \tan x$

i) $g_1(x) = \sqrt{x}$

j) $g_2(x) = \dfrac{1}{x}$

k) $g_3(x) = \dfrac{1}{x^2}$

l) $h_1(x) = \ln x$

m) $h_2(x) = \ln x + 1$

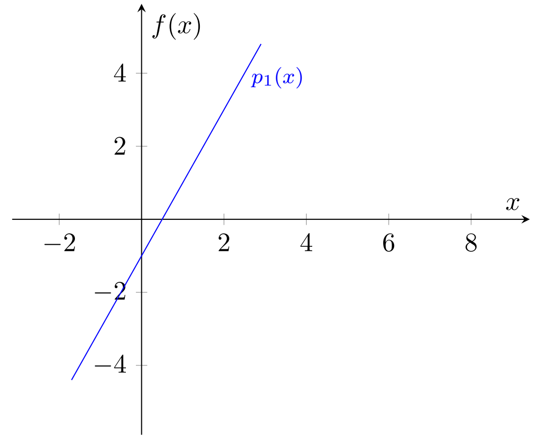
n) $h_3(x) = \ln(x+1)$

o) $i_1(x) = \exp(x)$

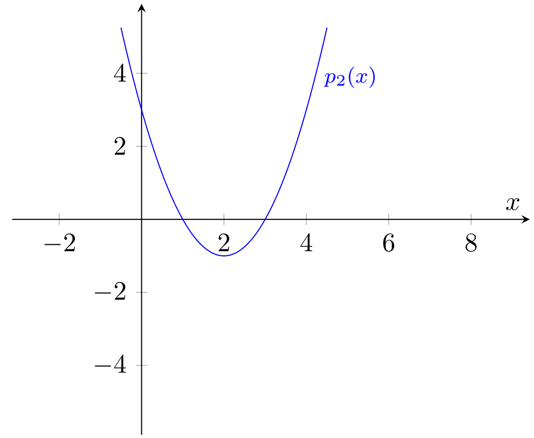
p) $i_2(x) = \exp(-x)$

Lösung 1.1:

a) $p_1(x) = 2x - 1$

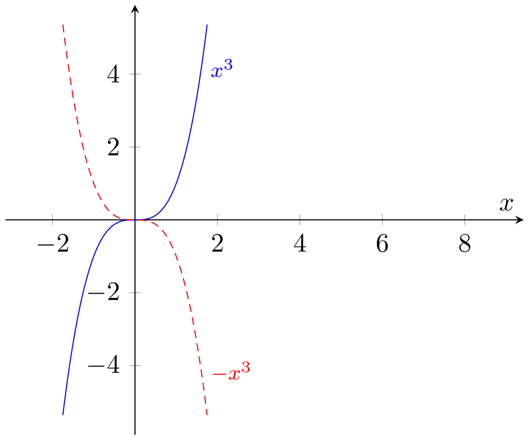


b) $p_2(x) = (x-2)^2 - 1$



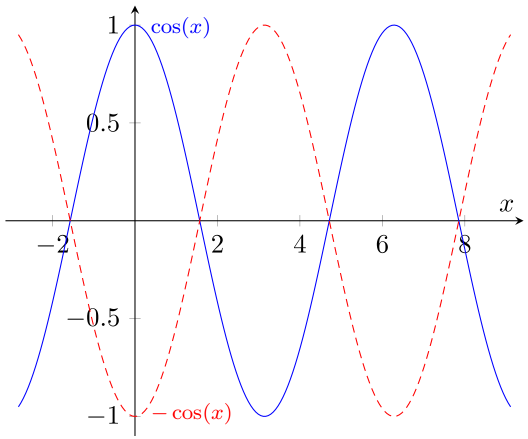
c) $p_3(x) = x^3$

d) $p_4(x) = -x^3$

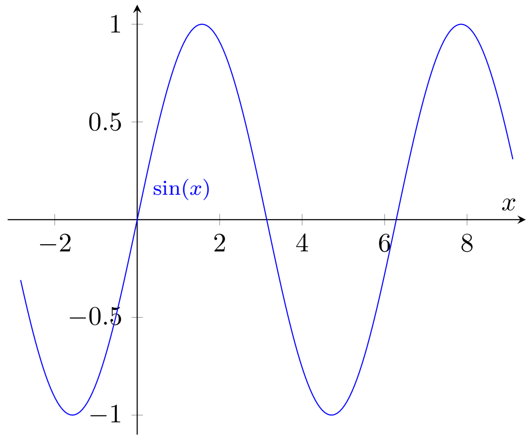


e) $f_1(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x)$

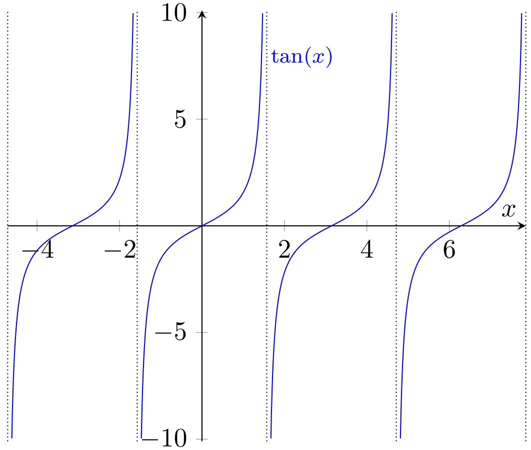
f) $f_2(x) = -\cos(x)$



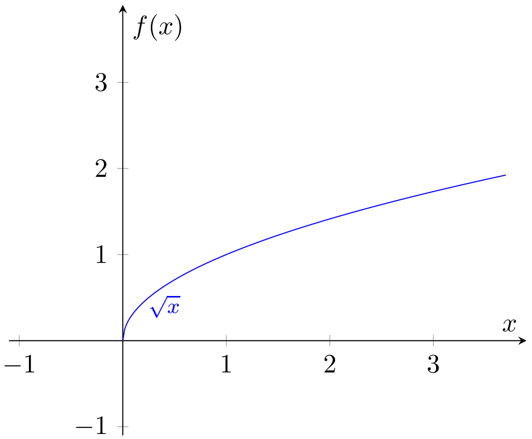
g) $f_3(x) = \sin(x)$



h) $f_4(x) = \tan x$

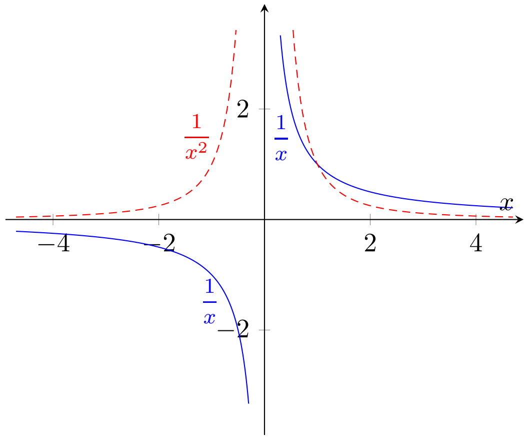


i) $g_1(x) = \sqrt{x}$

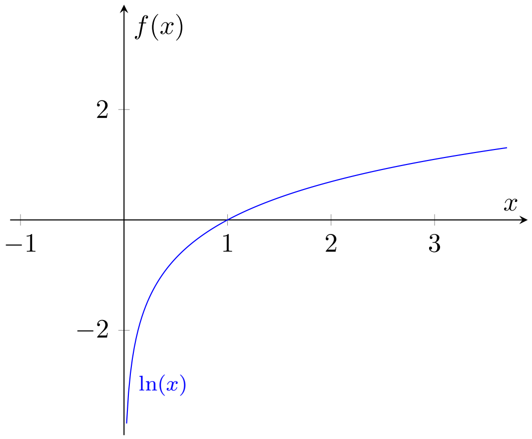


j) $g_2(x) = \frac{1}{x}$

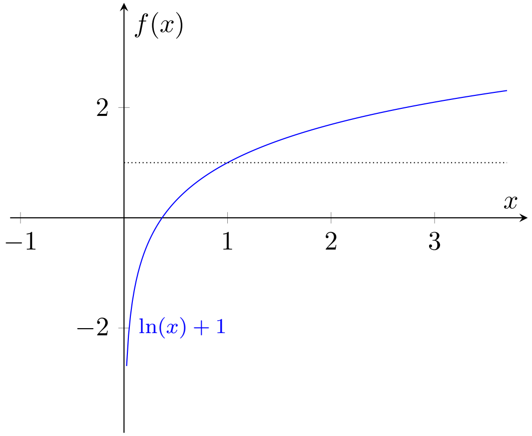
k) $g_3(x) = \frac{1}{x^2}$



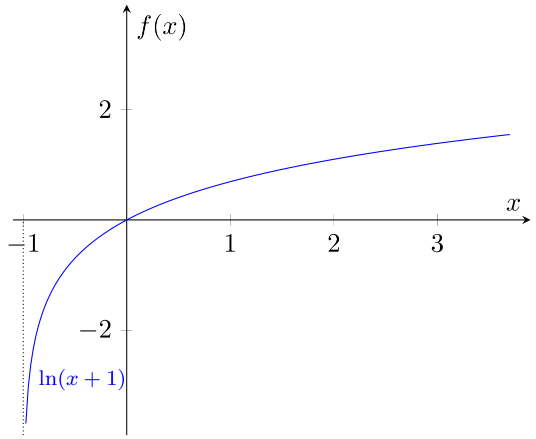
l) $h_1(x) = \ln x$



m) $h_2(x) = \ln x + 1$

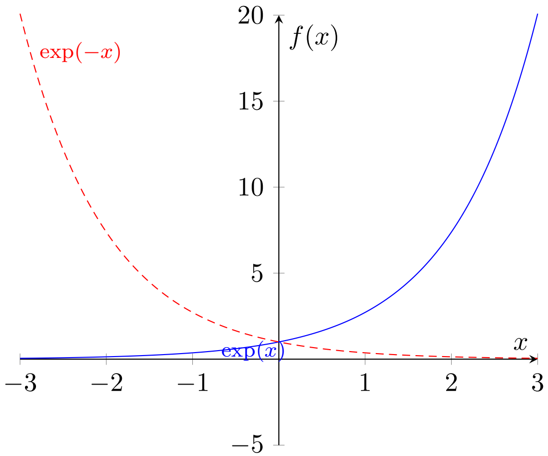


n) $h_3(x) = \ln(x+1)$



o) $i_1(x) = \exp(x)$

p) $i_2(x) = \exp(-x)$



Aufgabe 1.2: Grenzwertdefinition

Bestimmen Sie zu den unten angegebenen Folgen (a_n) mit dem Grenzwert a und den angegebenen Werten für k jeweils ein N so, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > N$ gilt

$$|a_n - a| < 10^{-k}.$$

a) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, $a = 0$, $k = 2$

b) $a_n = \dfrac{3n+1}{n+1}$, $a = 3$, $k = 4$

c) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n!} + 1$, $a = 1$, $k = 3$

Lösung 1.2:

a) Es soll gelten $|a_n - a| = \frac{1}{\sqrt{n}} \overset{!}{<} 10^{-2}$. Dies lässt sich umstellen zu:

$$n > \left(\frac{1}{10^{-2}}\right)^2 = 10^4 = 10000 = N.$$

b) Hier ergibt sich

$$\begin{aligned} & |a_n - a| < 10^{-4} \\ \Leftrightarrow \quad & 10^{-4} > \left|\frac{3n+1}{n+1} - 3\right| = \frac{|-2|}{n+1} \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{n+1}{2} > 10^4 \\ \Leftrightarrow \quad & n > 20000 - 1 = 19999 = N. \end{aligned}$$

c) Für diese Folge ist $|a_n - a| = \left|\frac{(-1)^n}{n!}\right| = \frac{1}{n!}$. Mit $k = 3$ soll also gelten:

$$\frac{1}{n!} < 10^{-3} \quad \Leftrightarrow \quad n! > 1000.$$

Das ist beispielsweise erfüllt für $n > 1000 = N$. Ein kleinstmögliches N kann man durch die Untersuchung von $n!$ ermitteln. Es ist $6! = 720 < 1000$ und $7! = 7 \cdot 6! = 5040 > 1000$. Die Bedingung ist also bereits für $n > 6$ erfüllt.

Aufgabe 1.3:

a) Zeigen Sie anhand der Definition der Konvergenz, dass gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+n-12}{n^2-8} = 2\,.$$

b) Zeigen Sie: Konvergiert $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a, so konvergiert auch $\{|a_n|\}_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $|a|$.

c) Gilt die Umkehrung von b)? Begründen Sie Ihre Aussage mit einem Beweis oder einem Gegenbeispiel.

Lösung 1.3:

Lösung

Zu a) Die Aussage „a_n konvergiert gegen a“ bedeutet: Für jedes $k \in \mathbb{N} > 0$ existiert ein $N = N(k) \in \mathbb{R}$, so dass für alle $n > N$ gilt, dass $|a_n - a| < 10^{-k}$. Für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$a_n := \frac{2n^2+n-12}{n^2-8} = \frac{2(n^2-8)+(n+4)}{n^2-8} = 2 + \frac{n+4}{n^2-8}\,.$$

Damit folgt

$$|a_n - 2| = \left|\frac{n+4}{n^2-8}\right| \overset{\text{für } n\geq 3}{=} \frac{n+4}{n^2-8} = \frac{n+4}{n^2-16+8}$$

$$\overset{\text{für } n\geq 5}{<} \frac{n+4}{n^2-16} = \frac{n+4}{(n+4)(n-4)} = \frac{1}{n-4}\,.$$

Sei nun $k \in \mathbb{N}$ vorgegeben. Es gilt

$$\frac{1}{n-4} = 10^{-k} \qquad \Longleftrightarrow \qquad n = 10^k + 4\,.$$

Ist $N(k) := 4 + 10^k$, dann gilt insbesondere für alle $n > N(k)$:

$$|a_n - 2| < 10^{-k}\,.$$

Damit ist ist Behauptung bewiesen.

Zu b) Die Aussage „a_n konvergiert gegen a“ bedeutet: Für jedes $k \in \mathbb{N}$ gibt es ein $N(k) \in \mathbb{R}$, so dass für alle $n > N$ gilt, dass $|a_n - a| < 10^{-k}$. Wegen

$$||a_n| - |a|| \leq |a_n - a|\,,$$

gilt für jedes $k \in \mathbb{N}$, dass das dazugehörige $N(k)$ und jedes $n > N$ auch

$$||a_n| - |a|| < 10^{-k}$$

erfüllt, d.h. $|a_n|$ konvergiert gegen $|a|$.

Zu c) Die Umkehrung gilt nicht, zum Beispiel gilt für $a_n = (-1)^n$ sicher $|a_n| = 1 \to 1$, aber $(-1)^n$ ist nicht konvergent.

Aufgabe 1.4: Differenzieren (Schulstoff)

Bestimmen Sie jeweils die erste Ableitung der folgenden Funktionen:

$$f_1(t) = -\frac{1}{2}t^2 - 2t + 6\,, \qquad f_2(t) = \sqrt[3]{t} + 1\,, \qquad f_3(t) = \sin(\frac{t}{4\pi})\,,$$
$$f_4(t) = e^{t^2}\,, \qquad f_5(t) = (\ln(t))^2\,, \qquad f_6(t) = \ln(e^t)\,,$$
$$f_7(t) = t^3\ln(t) - \frac{1}{2}t^2\,, \qquad f_8(t) = \ln(\sqrt{t})\,, \qquad f_9(t) = \sin(t)\cdot t^2\,,$$
$$f_{10}(t) = \frac{1}{2}(t^2-2)^2.$$

Lösung 1.4:

$$f_1'(t) = -t - 2 = -(t+2)\,,$$
$$f_2'(t) = (t^{\frac{1}{3}} + 1)' = \frac{1}{3}t^{-\frac{2}{3}}\,,$$
$$f_3'(t) = \frac{1}{4\pi}\cdot\cos(\frac{t}{4\pi})\,,$$
$$f_4'(t) = 2te^{t^2}\,,$$
$$f_5'(t) = \frac{2\ln(t)}{t}\,,$$
$$f_6'(t) = (t)' = 1\,,$$
$$f_7'(t) = 3t^2\ln(t) + t^2 - t = t^2(3\ln(t)+1) - t\,,$$
$$f_8'(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\frac{1}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{2t}\,,$$
$$f_9'(t) = \cos(t)t^2 + \sin(t)2t = t(2\sin(t) + t\cos(t))\,,$$
$$f_{10}'(t) = 2t(t^2-2).$$

Aufgabe 1.5: Differenzieren (Schulstoff)

Bestimmen Sie jeweils die erste Ableitung. Zur Kontrolle sind die Werte der Ableitung an Kontrollpunkten angegeben. (Eventuell notwendige Beschränkungen des Definitionsgebietes sind nicht angegeben.)

$f_1(t) = 3t^4 - 4t + 7\,,\qquad f_2(t) = (2t-3)^4\,,\qquad f_3(t) = t^3\,(t+3)^4\,,$

$f_4(t) = 3\,\cos(2t)\,,\qquad f_5(t) = \sin^2(3t)\,,\qquad f_6(t) = \tan(2-t/2)\,,$

$f_7(t) = \dfrac{2t-3}{(t+2)^3}\,,\qquad f_8(t) = \dfrac{4t\,\sin(t)}{\cos(2t)}\,,\qquad f_9(t) = t^2 e^{\sqrt{t}}\,,$

$f_{10}(t) = \sqrt{t\sqrt{t\sqrt{t}}},\qquad f_{11}(t) = e^{\frac{1}{1+t^2}}\,,\qquad f_{12}(t) = \tan(t)\,,$

$f_{13}(t) = \dfrac{t+\cos(t)\sin(t)}{2}\,,\qquad f_{14}(t) = \dfrac{t^2-t+2}{2t+3}\,,\qquad f_{15}(t) = \dfrac{\sin^2(t)}{\cos(t)}.$

Lösung 1.5:

$$f_1'(t) = 3\cdot 4\cdot t^3 - 4 = 12t^3 - 4\,,$$

$$f_2'(t) = 4\cdot(2t-3)^3\cdot 2 = 8(2t-3)^3\,,$$

$$\begin{aligned} f_3'(t) &= 3t^2\cdot(t+3)^4 + t^3\cdot 4(t+3)^3 \\ &= t^2(t+3)^3\big(3(t+3)+4t\big) = t^2(t+3)^3(7t+9)\,, \end{aligned}$$

$$f_4'(t) = 3\cdot 2\cdot(-\sin(2t)) = -6\sin(2t)\,,$$

$$f_5'(t) = 2\sin(3t)\cdot 3\cos(3t) = 6\sin(3t)\cos(3t)\,,$$

$$f_6'(t) = \frac{1}{\cos^2(2-t/2)}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{-1}{2\cos^2(2-t/2)}\,,$$

$$f_7'(t) = \frac{2(t+2)^3 - (2t-3)\cdot 3(t+2)^2}{(t+2)^6} = \frac{13-4t}{(t+2)^4}\,,$$

$$\begin{aligned} f_8'(t) &= \frac{(4t\cos(t)+4\sin(t))\cos(2t) - 4t\sin(t)\cdot 2(-\sin(2t))}{\cos^2(2t)} \\ &= \frac{4}{\cos^2(2t)}\cdot\left(t\cos(t)\cos(2t) + \sin(t)\cos(2t) + 2t\sin(t)\sin(2t)\right) \\ &= \frac{4}{\cos^2(2t)}\cdot\big(t\cos^3(t) - t\cos(t)\sin^2(t) + \cos^2(t)\sin(t) - \sin^3(t) + 4t\sin^2(t)\cos(t)\big) \\ &= \frac{4}{\cos^2(2t)}\cdot\big(t\cos^3(t) + 3t\cos(t)\sin^2(t) + \sin(t) - 3\sin^3(t)\big) \\ &= \frac{4}{\cos^2(2t)}\cdot\big(3t\cos(t) - 2t\cos^3(t) + \sin(t) - 3\sin^3(t)\big)\,, \end{aligned}$$

$$f_9'(t) = 2te^{\sqrt{t}} + t^2\frac{1}{2\sqrt{t}}e^{\sqrt{t}}\,,$$

$$f_{10}'(t) = \frac{d}{dt}\left(t^{7/8}\right) = \frac{7}{8}t^{-1/8} = \frac{7}{8\sqrt[8]{t}}\,,$$

$$f_{11}'(t) = e^{\frac{1}{1+t^2}}\cdot\frac{-2t}{(1+t^2)^2}\,,$$

$$f_{12}'(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\sin t}{\cos t}\right) = \frac{\cos t\cos t - (-\sin t)\sin t}{\cos^2 t} = \frac{1}{\cos^2 t}\,,$$

$$f_{13}'(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(-\sin t\sin t + \cos t\cos t\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \sin^2 t + \cos^2 t\right) = \cos^2 t.$$

$$f'_{14}(t) = \frac{(2t-1)(2t+3) - 2 \cdot (t^2 - t + 2)}{(2t+3)^2} = \frac{2t^2 + 6t - 7}{(2t+3)^2}$$

$$f'_{15}(t) = \frac{d}{dt}\left(\tan t \cdot \sin t\right) = \frac{1}{\cos^2 t}\sin t + \tan t \cos t = \frac{\tan t}{\cos t} + \sin t$$