Helmut-Schmidt-Universität
Universität der Bundeswehr Hamburg
Fakultät für Maschinenbau und Bauingenieurwesen

Prof. Dr. Thomas Carraro
M.Sc Janna Puderbach

Mathematik II/B (WI/ET) — Blatt 4

WT 2024 — L'Hospital, Differenzieren, Kurvendiskussion

Einführende Bemerkungen

- Vermeiden Sie die Verwendung von Taschenrechnern oder Online-Ressourcen.

Aufgabe 4.1: Differenzieren

a) Bestimmen Sie jeweils die erste Ableitung. (Eventuell notwendige Beschränkungen des Definitionsgebietes sind nicht angegeben.)

$$f_9(t) = \sinh(t) - \cosh(2t), \qquad f_{10}(t) = (t-3)^4 \sinh(t),$$
$$f_{11}(t) = t^2 \,\mathrm{e}^{-2t} \sin(3t), \qquad f_{12}(t) = \sqrt{t}\,\mathrm{e}^{2t},$$
$$f_{13}(t) = \sin^3\left(\mathrm{e}^{2t^2} + t^5\right), \qquad f_{14}(t) = \sqrt{2\,t^2+1},$$
$$f_{15}(t) = \ln(t) - \ln(5t), \qquad f_{16}(t) = \ln(t^2) - \ln(t^5).$$

Hinweis: Es gilt $\frac{d}{dx}(\ln(x)) = \frac{1}{x}$.

b) Bestimmen Sie die vierte Ableitung folgender Funktionen, wobei Sie das geeignete Zusammenfassen von Termen nicht vergessen sollten.

$$f_{17}(t) = (t-3)^4 - (2t+1)^5, \qquad f_{18}(t) = (t+1)\sin(2t)$$
$$f_{19}(t) = (t^3-1)\,\mathrm{e}^{2t}, \qquad f_{20}(t) = \sin(3t)\,\mathrm{e}^{-t}$$

Hinweis: Nutzen Sie gegebenen Falls die Leibniz-Regel zur Berechnung höherer Ableitungen. Diese hat dieselbe Gestalt wie der binomische Lehrsatz:

$$(f(t)\cdot g(t))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(t)\cdot g^{(n-k)}(t)$$

Z. B. für $n=2:\ (f(t)\cdot g(t))'' = f(t)g''(t) + 2f'(t)g'(t) + f''(t)g(t)$

c) Bestimmen Sie die n–te Ableitung folgender Funktionen.

$$f_{21}(t) = \sin(3t), \qquad f_{22}(t) = t\,\mathrm{e}^{2t}$$
$$f_{23}(t) = t\cdot\cos(t), \qquad f_{24}(t) = t\,\ln(2t)$$

Aufgabe 4.2: Funktionenlimes

Man bestimme den Limes der folgenden Funktionen

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}$

b) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{\sin(x)}{x}$

c) $\lim\limits_{x\to \infty} x\ln(x)$

Aufgabe 4.3: Bogenlänge

Die Bogenlänge des Graphen einer stetig differenzierbaren Funktion $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ auf dem Interval $[a,b]$ wird definiert als

$$L = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x.$$

Berechnen Sie die Bogenlänge der folgenden Funktionen:

a) $f_1(x) = \sqrt{4-x^2}$ auf $[-2,2]$

b) $f_2(x) = x^2$ auf $[0,b]$

Aufgabe 4.4: Vektor- und Matrixwertige Funktionen

Gegeben seien

$$\boldsymbol{A}(t) = \begin{pmatrix} t & t^2 \\ \sqrt{t} & t^5 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{B}(t) = \begin{pmatrix} \sin t & \cos t \\ \mathrm{e}^t & \cosh t \end{pmatrix},$$
$$\boldsymbol{c}(t) = \left(t^3,\ \sqrt{t^5},\ \frac{1}{t}\right)^\top, \qquad \boldsymbol{d}(t) = \left(\mathrm{e}^{-t^2},\ \sin(\sqrt{t}),\ \tanh(t/2)\right)^\top.$$

Berechnen Sie

a) $\frac{d}{dt}\Big(\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{B}(t)\Big)$ und

b) $\frac{d}{dt}\Big(\boldsymbol{c}(t)\times\boldsymbol{d}(t)\Big)$

auf die folgenden beiden Arten:

- Indem sie vor der Differentiation die Produkte $\boldsymbol{AB}$ bzw. $\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}$ bilden und die Ergebnisfunktionen ableiten.
- Indem Sie zunächst die Ableitungen der einzelnen Funktionen bilden und diese dann gemäß einer Produktregel verrechnen.

Aufgabe 4.5: Minimaler Abstand

Gegeben seien die folgenden Funktionen

i) $f_1(x) = x^2 + 1,$ **ii)** $f_2(x) = \ln(x).$

a) Skizzieren Sie die Funktionen f_1 und f_2.

b) Bestimmen Sie den minimalen vertikalen Abstand beider Funktionsgraphen

$$d = \min\ \{|f_1(x) - f_2(x)|;\ x\in\mathbb{R}\}\,.$$

Aufgabe 4.6: Optimierungsproblem

Ein Poster muss mit einer Gesamtfläche von $\bar{A} = 64000\ \mathrm{mm}^2$ gedruckt werden. Es muss 10 mm Seitenränder und 25 mm obere und untere Ränder haben. Welche Höhe und Breite ergeben die maximale Druckfläche?

Aufgabe 4.7: Tangenten

a) Bestimmen Sie die Geradengleichungen (in der Form $ax + by = c$) der Tangenten an den Nullstellen der Funktionen

$$\varphi_1(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6, \qquad \varphi_2(x) = x^2 \text{ und } \varphi_3(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{für } x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & \text{für } x < 0 \end{cases}\,.$$

b) Geben Sie alle Punkte ($x-$Werte) an, in denen die Tangenten von $f(x) = x^2$ und $g(x) = x^3$ parallel sind.

c) Stellen Sie den Verlauf der beiden vektorwertigen Funktionen

$$\boldsymbol{v}(t) = \begin{pmatrix} t \\ \varphi_3(t) \end{pmatrix} \qquad \text{mit } \varphi_3(t) \text{ aus Aufgabenteil } \textbf{a)}$$

und

$$\boldsymbol{w}(s) = \begin{pmatrix} s\cdot|s| \\ s \end{pmatrix}.$$

im selben Graphen dar.
Berechnen Sie – wo möglich – die Ableitungen beider Funktionen $\boldsymbol{v}(t)$ und $\boldsymbol{w}(s)$.

Hinweis: Die Funktion $\boldsymbol{w}(s)$ lässt sich analog zu $\varphi_3(t)$ mit Hilfe einer Fallunterscheidung auch ohne die Betragsfunktion darstellen.

Aufgabe 4.8: Regel von L'Hospital

Berechnen Sie mit Hilfe der Regel von L'Hospital die Grenzwerte

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2\sin x}{\tan x - x}$, b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\mathrm{e}^x - x)}{\ln(\cos x)}$,

c) $\lim\limits_{x\to\infty} x(2\arctan x - \pi)$, d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x^x-1}$.

Aufgabe 4.9: Regel von L'Hospital

Berechnen Sie mit Hilfe der Regel von L'Hospital die Grenzwerte

$$A = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right), \qquad B = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cosh x}{x^3}\right), \qquad C = \lim_{x\to 1}\left(\frac{\ln x}{\sin(\pi x)}\right)$$

Aufgabe 4.10: Asymptoten

Man bestimme die (waagerechten bzw. senkrekten bzw.ß schrägen) Asymptoten der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = \frac{x}{4+x^2}$

b) $g(x) = e^{-x^2}$

c) $h(x) = \frac{x^2-3x}{2x-2}$

d) $l(x) = x^2 e^{-x}$

Aufgabe 4.11: Kurvendiskussion

Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich, die Symmetrie, alle Nullstellen, sowie Art und Lage der kritischen Punkte und Wendepunkte der rellen Funktion

$$f(x) = x\sqrt{16-x^2}.$$

Aufgabe 4.12: Kurvendiskussion

Führen Sie eine Kurvendiskussion für die Funktion

$$f(x) = \ln(3x^2 + 2x + 1)$$

durch. Bestimmen Sie dazu:

a) den maximalen Definitionsbereich von f,

b) die Symmetrieachsen von f, d. h. Werte $\alpha \in \mathbb{R}$, so dass $f(\alpha + x) = f(\alpha - x)$,

c) das Verhalten von f im Unendlichen,

d) die Nullstellen von f,

e) die Extrema und das Monotonieverhalten von f,

f) sowie die Wendepunkte und das Krümmungsverhalten von f.

g) Skizzieren Sie den Graphen von f.

Ergebnisse zu Aufgabe 4.1:

a) $f_9'(2) \approx -50.818$, $f_{10}'(2) \approx -10.745$, $f_{11}'(2) \approx 0.2315$, $f_{12}'(2) \approx 173.73$, $f_{13}'(2) \approx -2039.7$,
$f_{14}'(2) = 4/3$, $f_{15}'(2) = 0$, $f_{16}'(2) = -3/2$
b) $f_{17}^{(4)} = -24(160t + 79)$, $f_{18}^{(4)} = -32\cos(2t) + 16(t+1)\sin(2t)$, $f_{19}^{(4)} = (16t^3 + 96t^2 + 144t + 32)\mathrm{e}^{2t}$,
$f_{20}^{(4)} = (28\sin(3t) + 96\cos(3t))\mathrm{e}^{-t}$

Ergebnisse zu Aufgabe 4.2:

Ergebnisse zu Aufgabe 4.4:

a) $\begin{pmatrix} t\cos t + t^2\mathrm{e}^t + \sin t + 2t\mathrm{e}^t & -t\sin t + t^2\sinh t + \cos t + 2t\cosh t \\ \sqrt{t}\cos t + t^5\mathrm{e}^t + \frac{\sin t}{2\sqrt{t}} + 5t^4\mathrm{e}^t & -\sqrt{t}\sin t + t^5\sinh t + \frac{\cos t}{2\sqrt{t}} + 5t^4\cosh t \end{pmatrix}$.

b) $\begin{pmatrix} \frac{5}{2}t^{3/2}\tanh\frac{t}{2} + \frac{t^{5/2}}{2\cosh^2\frac{t}{2}} - \frac{\cos\sqrt{t}}{2t^{3/2}} + \frac{\sin\sqrt{t}}{t^2} \\ -2\mathrm{e}^{-t^2} - \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{t^2} - 3t^2\tanh\frac{t}{2} - \frac{t^3}{2\cosh^2\frac{t}{2}} \\ 3t^2\sin\sqrt{t} + \frac{t^{5/2}\cos\sqrt{t}}{2} - \frac{5}{2}t^{3/2}\mathrm{e}^{-t^2} + 2t^{7/2}\mathrm{e}^{-t^2} \end{pmatrix}$

Ergebnisse zu Aufgabe 4.6:

Die maximale Druckfläche beträgt: $A_{\max} = 32000\ \mathrm{mm}^2$.

Ergebnisse zu Aufgabe 4.7:

a) Nullstellen: $\varphi_1(1) = \varphi_1(-2) = \varphi(3) = 0$, $\varphi_2(0) = 0$, $\varphi_3(0) = 0$

Ergebnisse zu Aufgabe 4.8:

a) 3, **b)** -1, **c)** -2, **d)** 2

Ergebnisse zu Aufgabe 4.9:

$A = 1$, $B = \pm\infty$, $C = -1/\pi$

Ergebnisse zu Aufgabe 4.10:

Ergebnisse zu Aufgabe 4.11:

$D(f) = [-4, 4]$, f ist ungerade, Nullstellen: $x = 0, \pm 4$, Extrema bei $x = \pm 2\sqrt{2}$,
Wendepunkt bei $x = 0$

Ergebnisse zu Aufgabe 4.12:

b) $\alpha = -1/3$, **d)** $0, -2/3$, **e)** Minimum bei $-1/3$, **f)** Wendepunkte bei $-1/3 \pm \sqrt{2}/3$