Helmut-Schmidt-Universität
Universität der Bundeswehr Hamburg
Fakultät für Maschinenbau und Bauingenieurwesen

**Prof. Dr. Thomas Carraro**
**Dr. Ulrike Kochan-Eilers**

HELMUT SCHMIDT UNIVERSITÄT
Universität der Bundeswehr Hamburg

## Repetitorium Mathematik ISA (WI) — Blatt 1

WT 2025 — Kurvendiskussion, Newton-Verfahren

### Einführende Bemerkungen

- Vermeiden Sie die Verwendung von Taschenrechnern oder Online-Ressourcen. Für die Newton-Aufgabe darf ein Taschenrechner verwendet werden.

### Aufgabe 1.1: Kurvendiskussion

Führen Sie eine Kurvendiskussion für die Funktion

$$f(x) = \ln(3x^2 + 2x + 1)$$

durch. Bestimmen Sie dazu:

**a)** den maximalen Definitionsbereich von $f$,

**b)** die Symmetrieachsen von $f$, d. h. Werte $\alpha \in \mathbb{R}$, so dass $f(\alpha + x) = f(\alpha - x)$,

**c)** das Verhalten von $f$ im Unendlichen,

**d)** die Nullstellen von $f$,

**e)** die Extrema und das Monotonieverhalten von $f$,

**f)** sowie die Wendepunkte und das Krümmungsverhalten von $f$.

**g)** Skizzieren Sie den Graphen von $f$.

### Lösung 1.1:

**a)** Die Funktion ist für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert, weil das Argument der Logarithmusfunktion immer positiv ist:

$$3x^2 + 2x + 1 = \left(\sqrt{3}x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1 - \frac{1}{3} > 1 - \frac{1}{3} > 0.$$

**b)** Gesucht ist ein $\alpha \in \mathbb{R}$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned}
& f(\alpha + x) = f(\alpha - x) \\
\Leftrightarrow\ & \ln(3(\alpha + x)^2 + 2(\alpha + x) + 1) = \ln(3(\alpha - x)^2 + 2(\alpha - x) + 1) \\
\Leftrightarrow\ & 3(\alpha + x)^2 + 2(\alpha + x) + 1 = 3(\alpha - x)^2 + 2(\alpha - x) + 1 \qquad \text{(Monotonie von l} \\
\Leftrightarrow\ & 6x\alpha + 2x = -6x\alpha - 2x \\
\Leftrightarrow\ & (12\alpha + 4)x = 0 \\
\Leftrightarrow\ & 12\alpha + 4 = 0
\end{aligned}$$

Also liegt die Symmetrieachse bei $\alpha = -1/3$.

**c)** Es ist

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \infty.$$

**d)** Die einzige Nullstelle des Logarithmus liegt bei 1, also muss für $f(x) = 0$ gelten:

$$1 = 3x^2 + 2x + 1 \Rightarrow x \in \{0, -2/3\}.$$

**e)** Die Nullstellen der Ableitung berechnen sich zu:

$$0 = f'(x) = \frac{1}{3x^2 + 2x + 1} \cdot (6x + 2) \ \Rightarrow\ x = -\frac{1}{3}.$$

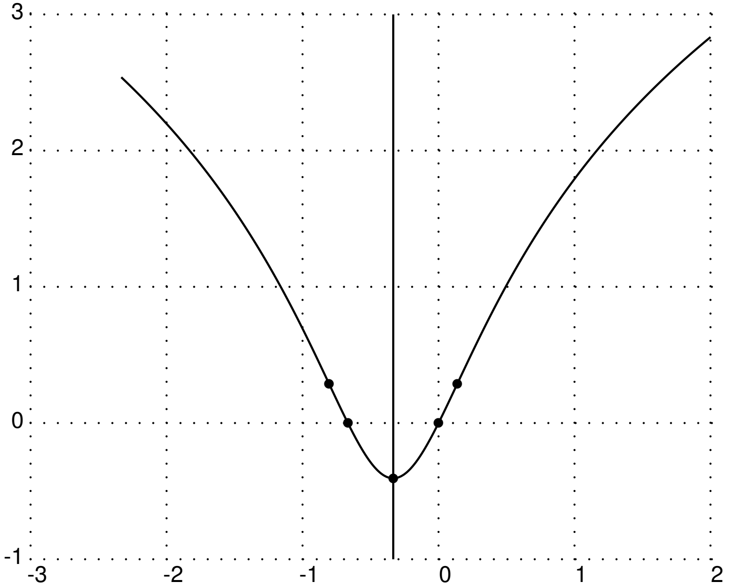
Dies ist die einzige Nullstelle der Ableitung. Da die Funktion bezüglich dieser Achse symmetrisch ist, und für $x \to \pm\infty$ gegen $\infty$ geht, liegt bei $x = -1/3$ ein Minimum.

**f)** Die Wendepunkte liegen an den Nullstellen der zweiten Ableitung:

$$\begin{aligned}
& 0 = f''(x) = \frac{6(3x^2 + 2x + 1) - (6x + 2)^2}{(3x^2 + 2x + 1)^2} = \frac{-18x^2 - 12x + 2}{(3x^2 + 2x + 1)^2} \\
\Rightarrow\ & x = \frac{-1 \pm \sqrt{2}}{3}.
\end{aligned}$$

Links von $-1/3 - \sqrt{2}/3$ ist $f''(x) < 0$, also ist die Funktion dort konkav, rechts von $-1/3 - \sqrt{2}/3$ ist $f''(x) > 0$ und die Funktion $f$ ist dort konvex. Rechts von $-1/3 + \sqrt{2}/3$ ist die Funktion wegen der Symmetrie wiederum konkav.

**g)**


3
2
1
0
-1
-3
-2
-1
0
1
2

**Aufgabe 1.2: Newton-Verfahren**

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 15x - 36.$$

**a)** Bestimmen Sie alle lokalen Extrema der Funktion $f(x)$.

**b)** Begründen Sie, weshalb $f$ zwei Nullstellen besitzt.

**c)** Führen Sie das Newton-Verfahren mit der Funktion $f$ zwei mal durch. Wählen Sie im ersten Durchlauf den Startwert $x_0 = 1$ und im zweiten Durchlauf $x_0 = -1$. Führen Sie jeweils drei Iterationsschritte durch.

**Lösung 1.2:**

**a)** Die Ableitung der Funktion $f$ ist

$$f'(x) = 3x^2 + 4x - 15.$$

Ihre Nullstellen

$$x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{49}}{3} = \begin{cases} 5/3 \\ -3 \end{cases}$$

sind die stationären Punkte der Funktion $f$.
Die zweite Ableitung der Funktion ist $f''(x) = 6x + 4$ und wegen

$$f''(x_1) = 14 > 0 \text{ und } f''(x_2) = -14 < 0$$

liegt bei $(x_1, f(x_1)) = (5/3, -1372/27)$ ein Minimum und bei $(x_2, f(x_2)) = (-3, 0)$ ein Maximum der Funktion $f$ vor.

**b)** Da $f$ links der Maximalstelle $x_2 = -3$ (die auch Nullstelle ist) sowie rechts der Minimalstelle $x_1 = 5/3$ streng monoton steigt, und sonst streng monoton fällt, besitzt $f$ lediglich die Nullstelle $x_2$ sowie (wegen $f(x_1) < 0$) eine weitere Nullstelle rechts von $x_1$.

**c)** Mit der oben berechneten Ableitung $f'(x) = 3x^2 + 4x - 15$ lautet die Iterationsvorschrift für das Newton-Verfahren:

$$x_{k+1} = x_k - (f'(x_k))^{-1} \cdot f(x_k).$$

Für die gegebenen Startwerte sind die ersten drei Iterationsschritte:

| $k$ | $x_k$ | $f(x_k)$ |
|---|---|---|
| 0 | 1.0000 | -48.0000 |
| 1 | -5.0000 | -36.0000 |
| 2 | -4.1000 | -9.8010 |
| 3 | -3.5850 | -2.5955 |

| $k$ | $x_k$ | $f(x_k)$ |
|---|---|---|
| 0 | -1.00000 | -20.00000 |
| 1 | -2.25000 | -3.51562 |
| 2 | -2.64894 | -0.81945 |
| 3 | -2.82923 | -0.19916 |

Obwohl der erste Startwert $x_0 = 1$ dichter an der Nullstelle $x = 4$ der Funktion liegt, konvergiert das Verfahren trotzdem gegen die Nullstelle $x = -3$.
Um die Nullstelle $x = 4$ dennoch zu korrekt zu finden, muss $x_0$ geeignet gewählt werden.