Helmut-Schmidt-Universität
Universität der Bundeswehr Hamburg
Fakultät für Maschinenbau

Prof. Dr. Thomas Carraro
Dr. Frank Gimbel
Janna Puderbach

Mathematik II — **Hörsaalübung 9**

WT 2022 — Differentialrechnung in $\mathbb{R}^n$

Einführende Bemerkungen

- Vermeiden Sie die Verwendung von Taschenrechnern oder Online-Ressourcen.
- Die mit einem Stern *) markierten (Teil-)Aufgaben entfallen in diesem Trimester. Stattdessen werden einzelne Online-Aufgaben im ILIAS-Kurs kenntlich gemacht, zu denen Sie dort Ihre Lösungswege zur Korrektur hochladen können.
- Die mit zwei Sternen **) markierten (Teil-)Aufgaben richten sich an Studierende, die die übrigen Aufgaben bereits gelöst haben und die Inhalte weiter vertiefen möchten.

Aufgabe 9.1*:

a) Entwickeln Sie die Funktion

$$f(x,y,z) = \cosh(x) + \mathrm{e}^{2\,xy} - \ln(-yz) + \frac{1}{y} + \frac{z}{2}$$

nach der Taylor'schen Formel um den Punkt $P = (0\,,\,-1\,,\,2)$ bis zu einschließlich zweiter Ordnung (ohne Restglied).

b) Bestimmen Sie die Taylor-Entwicklung 2. Grades um den Punkt $y_0 = \frac{4}{3}$ für die Umkehrfunktion $g^{-1}(y)$ von $g(x) = \frac{x^3}{3} + x$ (ohne Restglied).

Hinweis: Die Umkehrfunktion ist **nicht** explizit zu bestimmen!

c) Führen Sie zur Bestimmung einer Näherungslösung des Gleichungssystems

$$y = \mathrm{e}^{-x^2}\,, \quad y = -(x-1)^2 + 2$$

einen Iterationsschritt des **zweidimensionalen** Newton-Verfahrens mit dem Startvektor $(x_0, y_0) = (0,0)$ durch.

Lösung 9.1:

Lösung:

Zu a) Mit $\boldsymbol{x}_0 = (0\,,\,-1\,,\,2)^\top$ gilt:

$$\begin{aligned}
f &= \cosh(x) + \mathrm{e}^{2\,xy} - \ln(-yz) + \frac{1}{y} + \frac{z}{2} &&\Rightarrow & f(\boldsymbol{x}_0) &= 2 - \ln(2)\,.\\
f_x &= \sinh(x) + 2y\,\mathrm{e}^{2\,xy} &&\Rightarrow & f_x(\boldsymbol{x}_0) &= -2\,,\\
f_y &= 2x\,\mathrm{e}^{2\,xy} - \frac{1}{y} - \frac{1}{y^2} &&\Rightarrow & f_y(\boldsymbol{x}_0) &= 0\,,\\
f_z &= -\frac{1}{z} + \frac{1}{2} &&\Rightarrow & f_z(\boldsymbol{x}_0) &= 0\,,\\
f_{xx} &= \cosh(x) + 4\,y^2\,\mathrm{e}^{2\,xy} &&\Rightarrow & f_{xx}(\boldsymbol{x}_0) &= 5\,,\\
f_{xy} &= 4\,xy\,\mathrm{e}^{2\,xy} + 2\mathrm{e}^{2\,xy} &&\Rightarrow & f_{xy}(\boldsymbol{x}_0) &= 2\,,\\
f_{xz} &= 0 &&\Rightarrow & f_{xz}(\boldsymbol{x}_0) &= 0\,,\\
f_{yy} &= 4\,x^2\,\mathrm{e}^{2\,xy} + \frac{1}{y^2} + \frac{2}{y^3} &&\Rightarrow & f_{yy}(\boldsymbol{x}_0) &= -1\,,\\
f_{yz} &= 0 &&\Rightarrow & f_{yz}(\boldsymbol{x}_0) &= 0\,,\\
f_{zz} &= \frac{1}{z^2} &&\Rightarrow & f_{yz}(\boldsymbol{x}_0) &= \frac{1}{4}\,.
\end{aligned}$$

Damit lautet das Taylor–Polynom 2. Grades

$$\begin{aligned}
T_2(x,y,z) =& 2 - \ln(2) - 2\,x + \frac{5}{2}\,x^2 + 2x(y+1)\\
&- \frac{1}{2}(y+1)^2 + \frac{1}{8}\,(z-2)^2\,.
\end{aligned}$$

Zu b) Mit

$$g^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) = 1\,,\ (g^{-1})'\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{1}{g'(1)} = \frac{1}{2}$$

und

$$(g^{-1})''\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{-g''(1)}{\left(g'(1)\right)^3} = -\frac{1}{4}$$

folgt

$$T_2\left(y;\frac{4}{3}\right) = 1 + \frac{1}{2}\left(y-\frac{4}{3}\right) - \frac{1}{8}\left(y-\frac{4}{3}\right)^2 .$$

Zu c) Für $\boldsymbol{F}(x,y) = (y - \mathrm{e}^{-x^2}, y + (x-1)^2 - 2)^\top$ gilt

$$\boldsymbol{J_F}(x,y) = \begin{pmatrix} 2x\mathrm{e}^{-x^2} & 1 \\ 2(x-1) & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{J_F}(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{F}}^{-1}(0,0) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Das Newton-Verfahren liefert

$$\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{0} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}.$$

Aufgabe 9.2: Mehrdimensionale Kettenregel

Berechnen Sie mit Hilfe der Kettenregel die Jacoboi-Matrix der Funktion

$$\boldsymbol{h}(x,y,z) = \boldsymbol{h}_2(\boldsymbol{h}_1(x,y,z))$$

mit

$$\boldsymbol{h}_1(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3xz + 2y \\ 4y^2 + \frac{1}{3}x^3 z \end{pmatrix} \text{ und } \boldsymbol{h}_2(u,v) = \begin{pmatrix} \cos(2u - 3v) \\ \frac{1}{2}u + \frac{3}{2}v^2 \\ 4v + u \end{pmatrix}.$$

Lösung 9.2:

Wir berechnen zunächst die Jacobi-Matrizen der einzelnen Funktionen:

$$\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{h}_1}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3z & 2 & 3x \\ zx^2 & 8y & \frac{1}{3}x^3 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{h}_2}(u,v) = \begin{pmatrix} -2\sin(2u-3v) & 3\sin(2u-3v) \\ \frac{1}{2} & 3v \\ 1 & 4 \end{pmatrix},$$

und daraus mit Hilfe der Kettenregel die Ableitung der Funktion $\boldsymbol{h}$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{J_h}(x,y,z) &= \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{h}_2}(\boldsymbol{h}_1)\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{h}_1}(x,y,z) \\ &= \begin{pmatrix} -2\sin(a) & 3\sin(a) \\ \frac{1}{2} & 12y^2 + x^3 z \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3z & 2 & 3x \\ zx^2 & 8y & \frac{1}{3}x^3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (x^2-2)3z\sin(a) & (6y-1)4\sin(a) & (x^2-6)x\sin(a) \\ \frac{3}{2}z + 12x^2y^2z + x^5z^2 & 1 + 96y^3 + 8x^3yz & \frac{3}{2}x + 4x^3y^2 + \frac{1}{3}x^6 z \\ z(3+4x^2) & 32y + 2 & x(3 + \frac{4}{3}x^2) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

mit $a := 6xz + 4y - 12y^2 - x^3 z$.

Aufgabe 9.3*: Newton-Verfahren

Gegeben seien die beiden Kurven in der oberen Halbebene

$$(y-3)^2 - x = 3 \text{ und } xy = 4, \quad y \geq 0 .$$

a) Skizzieren Sie die beiden Kurven und lesen Sie aus Ihrer Skizze eine nicht-ganzzahlige Näherung für den Schnittpunkt ab.

b) Um den Schnittpunkt numerisch zu bestimmen, führen Sie **einen** Iterationsschritt mit dem **zweidimensionalen** Newton–Verfahren durch, wobei Sie den Punkt $(x_0, y_0) := (1,5) \in \mathbb{N}^2$ als Startwert benutzen.

c) Hat sich die Näherung durch den Newtonschritt aus Teil b) gegenüber dem Startwert (x_0, y_0) verbessert? Kurze Begründung!

Lösung 9.3:

Zu a)

Der Schnittpunkt der beiden Kurven liegt in der Nähe von $(x,y) = (0.80\,, 4.9)$.

Zu b) Der Startwert sei $(x_0\,, y_0) = (1,5)$. Das nichtlineare Gleichungssytem ist

$$\boldsymbol{f}(x,y) = \begin{pmatrix} (y-3)^2 - x - 3 \\ xy - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Damit ist die Matrix der ersten partiellen Ableitungen

$$\mathrm{D}\,\boldsymbol{f}(x,y) = \begin{pmatrix} -1 & 2y - 6 \\ y & x \end{pmatrix} .$$

Der erste Newton–Schritt lautet mit eingesetzten Zahlenwerten

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-1 & 4\\5 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix} - \frac{1}{-21}\begin{pmatrix}1 & -4\\-5 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}17/21\\104/21\end{pmatrix} .\end{aligned}$$

Zu c) Die (euklidische) Norm des Funktionswertes ist kleiner geworden:

$$\boldsymbol{f}(x_0, y_0) = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} , \qquad \boldsymbol{f}(x_1\,,\, y_1) = \begin{pmatrix}0.0023\\0.0091\end{pmatrix} .$$

Alternativ: Ja, denn die verbesserte Näherung liegt viel dichter an dem aus der Zeichnung abgelesenen Wert als die Ausgangsnäherung.

Aufgabe 9.4*: Newton-Verfahren

Zur Berechnung eines Extremums der Funktion

$$f\,(x, y) = \int_0^x \left(\frac{\sin(\pi t)}{\pi t} - \frac{1}{3}\right)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{\pi^2}\sin\left(\pi\frac{x}{y}\right)$$

soll das Newton-Verfahren angewandt werden. Bestimmen Sie mit Hilfe **eines Schrittes** des Newton-Verfahrens eine Näherung für ein Extremum von f in der Nähe von $(1, 2)$.
Hinweis: Es gibt keine geschlossene Darstellung des Integrals.

Lösung 9.4:

Für die partiellen Ableitungen gilt

$$f_x = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} - \frac{1}{3} + \frac{1}{\pi y}\cos\left(\pi\frac{x}{y}\right) ,$$

$$f_y = \frac{-x}{\pi y^2}\cos\left(\pi\frac{x}{y}\right) ,$$

$$f_{xx} = \frac{\cos(\pi x)}{x} - \frac{\sin(\pi x)}{\pi x^2} - \frac{1}{y^2}\sin\left(\pi\frac{x}{y}\right) ,$$

$$f_{xy} = \frac{-1}{\pi y^2}\cos\left(\pi\frac{x}{y}\right) + \frac{x}{y^3}\sin\left(\pi\frac{x}{y}\right) ,$$

$$f_{yy} = \frac{2x}{\pi y^3}\cos\left(\pi\frac{x}{y}\right) - \frac{x^2}{y^4}\sin\left(\pi\frac{x}{y}\right)$$

und damit

$$\begin{pmatrix}\tilde{x}\\\tilde{y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\frac{-5}{4} & \frac{1}{8}\\ \frac{1}{8} & \frac{-1}{16}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\\frac{4}{3}\end{pmatrix} .$$

Aufgabe 9.5*: Lokale Extrema in 2 Dim.

Gegeben sei die Funktion $f \in \operatorname{Abb}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ mit

$$f(x, y) = (x + y)^2 - 4\,(x + y - 2) + y^3 - 3y.$$

Bestimmen Sie alle stationären (kritischen) Punkte dieser Funktion und geben Sie an, ob es sich dabei um lokale Minima, Maxima oder Sattelpunkte handelt, oder ob der Charakter des stationären Punktes nicht durch die Hesse–Matrix entschieden werden kann.

Lösung 9.5:

Die stationären Punkte erhält man aus

$$\mathbf{grad}\, f(x, y) = \begin{pmatrix}2\,(x + y) - 4\\ 2\,(x + y) - 4 + 3\,y^2 - 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

zu $P_1 = (3, -1)$ und $P_2 = (1, 1)$. Die Hesse–Matrix der Funktion f lautet:

$$\boldsymbol{H}_f(x, y) = \begin{pmatrix}2 & 2\\2 & 2 + 6\,y\end{pmatrix} .$$

Für den Punkt P_1 ergibt sich damit

$$\boldsymbol{H}_f(3, -1) = \begin{pmatrix}2 & 2\\2 & -4\end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = \det(\boldsymbol{H}_f) = -12 < 0 ,$$

Damit haben die Eigenwerte verschiedene Vorzeichen und es handelt sich um einen Sattelpunkt. Entsprechend erhält man für den Punkt P_2, dass

$$\boldsymbol{H}_f(1, 1) = \begin{pmatrix}2 & 2\\2 & 8\end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = \det(\boldsymbol{H}_f) = 12 > 0,\ \operatorname{Sp}(\boldsymbol{H}_f) = 10 > 0 .$$

Damit sind beide Eigenwerte positiv und es handelt sich um ein Minimum.

Aufgabe 9.6*: Taylor-Entwicklung

Gegeben seien die beiden Funktionen $\mathbb{R} \xrightarrow{r} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = -\,e^{y+1-x^2} \qquad \text{und} \qquad \boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos(\pi \cdot t) \\ \ln t - \sin^2(\pi \cdot t) \end{pmatrix}.$$

a) Geben Sie die Taylorentwicklung zweiter Ordnung $T_{2,f}$ der Funktion f um den Punkt $\boldsymbol{x}_0 = (1,\,0)^\top$ an.

b) Geben Sie die Taylorentwicklung zweiter Ordnung $\boldsymbol{T}_{2,r}$ der Funktion $\boldsymbol{r}$ um den Punkt $t_0 = 1$ an. (Entwickeln Sie dazu die Komponenten r_1 und r_2 der Funktion $\boldsymbol{r} = (r_1, r_2)^\top$ separat.)

c) Bilden Sie durch Verkettung beider Funktionen die Funktion

$$g(t) := f \circ \boldsymbol{r}(t).$$

d) Verketten Sie ebenso die beiden Taylor-Polynome

$$\tilde{g}(t) := T_{2,f} \circ \boldsymbol{T}_{2,r}(t).$$

e) Vergleichen Sie g und $\tilde{g}$ und die Taylorpolynome erster Ordung dieser beiden Funktionen.

Lösung 9.6:

a) Die ersten beiden Ableitungen von f ergeben sich zu

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= -\,e^{y+1-x^2} & &\Rightarrow & f(1,0) &= -\,1 \\
\boldsymbol{J}_f(x,y) &= -\,e^{y+1-x^2}(-2x,\,1) & &\Rightarrow & \boldsymbol{J}_f(1,0) &= (2,-1) \\
\boldsymbol{H}_f(x,y) &= -\,e^{y+1-x^2}\begin{pmatrix} 4x^2-2 & -2x \\ -2x & 1 \end{pmatrix} & &\Rightarrow & \boldsymbol{H}_f(1,0) &= \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

und damit ist das Taylorpolynom zweiter Ordnung um den Entwicklungspunkt $(1,0)^\top$:

$$\begin{aligned}
T_{2,f}(x,y) =& f(1,0) + \boldsymbol{J}_f(1,0)\begin{pmatrix} x-1 \\ y-0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(x-1,\, y-0)\boldsymbol{H}_f(1,0)\begin{pmatrix} x-1 \\ y-0 \end{pmatrix} \\
=& -1 + 2(x-1) - y + \frac{1}{2}\left(-2(x-1)^2 + 2\cdot 2(x-1)y - 1\cdot y^2\right) \\
=& -1 + 2(x-1) - y - (x-1)^2 + 2(x-1)y - \frac{y^2}{2}.
\end{aligned}$$

b) Für $\boldsymbol{r}$ ergeben sich die Ableitungen zu

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r}(t) &= \begin{pmatrix} \cos(\pi t) \\ \ln t - \sin^2(\pi t) \end{pmatrix} & &\Rightarrow & \boldsymbol{r}(1) &= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\boldsymbol{r}'(t) &= \begin{pmatrix} -\pi \sin(\pi t) \\ \frac{1}{t} - 2\pi \sin(\pi t)\cos(\pi t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\pi \sin(\pi t) \\ \frac{1}{t} - \pi \sin(2\pi t) \end{pmatrix} & &\Rightarrow & \boldsymbol{r}'(1) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
\boldsymbol{r}''(t) &= \begin{pmatrix} \pi^2 \cos(\pi t) \\ -\frac{1}{t^2} - 2\pi^2 \cos(2\pi t) \end{pmatrix} & &\Rightarrow & \boldsymbol{r}''(t) &= \begin{pmatrix} -\pi^2 \\ -1 - 2\pi^2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

und das Taylorpolynom zu:

$$\begin{aligned}
T_{2,\boldsymbol{r}} =& \boldsymbol{r}(1) + (t-1)\boldsymbol{r}'(1) + \frac{1}{2}(t-1)^2\boldsymbol{r}''(1) \\
=& \begin{pmatrix} -1 - \frac{1}{2}\pi^2(t-1)^2 \\ (t-1) - \frac{1}{2}(1+2\pi^2)(t-1)^2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

c) Es ist

$$g(t) = -e^{\ln t - \sin^2(\pi t) + 1 - \cos^2(\pi t)} = -e^{\ln t} = -t.$$

d) Die Verkettung der beiden Taylor-Polynome hingegen ergibt:

$$\begin{aligned}
\tilde{g}(t) =& -1 + 2\left(-2 - \frac{1}{2}\pi^2(t-1)^2\right) - (t-1)\left(1 - \frac{1}{2}(1+2\pi^2)(t-1)\right) + \\
& - \left(-2 - \frac{1}{2}\pi^2(t-1)^2\right)^2 + \\
& + 2\left(-2 - \frac{1}{2}\pi^2(t-1)^2\right)(t-1)\left(1 - \frac{1}{2}(1+2\pi^2)(t-1)\right) + \\
& - \frac{1}{2}(t-1)^2\left(1 - \frac{1}{2}(1+2\pi^2)(t-1)\right)^2 \\
=& -9 - 5(t-1) + \left(2\pi^2 + 2\right)(t-1)^2 + \frac{1}{2}(t-1)^3 + \left(\frac{1}{4}\pi^4 - \frac{1}{8}\right)(t-1)^4
\end{aligned}$$

e) Anders als man vermuten könnte, ist die exakt ermittelte Funktion $g(t)$ weit weniger kompliziert als die Näherungsfunktion $\tilde{g}(t)$. Auch die beiden linearen Taylorpolynome um den Punkt $t = 1$ unterscheiden sich deutlich:

$$T_{1,g}(t) = g(t) = -t, \qquad T_{1,\tilde{g}}(t) = -9 - 5(t-1).$$

Anders wäre dies, wenn man die Funktion f statt um $\boldsymbol{x}_0 = (1,0)^\top$ um den Punkt $\boldsymbol{r}(t_0) = (-1,0)^\top$ entwickeln würde. Dann wären zumindest $T_{1,g}$ und $T_{1,\tilde{g}}$ identisch, denn

$$\begin{aligned}
T_{2,f}(x,y) =& f(-1,0) + \boldsymbol{J}_f(-1,0)\begin{pmatrix} x+1 \\ y-0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(x+1,\, y-0)\boldsymbol{H}_f(-1,0)\begin{pmatrix} x+1 \\ y-0 \end{pmatrix} \\
=& -1 - 2(x+1) - y + \frac{1}{2}\left(-2(x+1)^2 - 2\cdot 2(x+1)y - 1\cdot y^2\right) \\
=& -1 - 2(x+1) - y - (x+1)^2 - 2(x+1)y - \frac{y^2}{2}.
\end{aligned}$$

und für die Verkettung der beiden Polynome hätten wir dann

$$\begin{aligned}
\tilde{g}(t) =& -1 - 2\left(-\frac{1}{2}\pi^2(t-1)^2\right) - (t-1)\left(1 - \frac{1}{2}(1+2\pi^2)(t-1)\right) + \\
& - \left(-\frac{1}{2}\pi^2(t-1)^2\right)^2 + \\
& + 2\left(-\frac{1}{2}\pi^2(t-1)^2\right)(t-1)\left(1 - \frac{1}{2}(1+2\pi^2)(t-1)\right) + \\
& - \frac{1}{2}(t-1)^2\left(1 - \frac{1}{2}(1+2\pi^2)(t-1)\right)^2 \\
=& -1 - (t-1) + 2\pi^2(t-1)^2 + \left(2\pi^2 + \frac{1}{2}\right)(t-1)^3 + \\
& - \left(\pi^2 + \frac{7}{4}\pi^4 + \frac{1}{8}\right)(t-1)^4\,.
\end{aligned}$$

Somit ist $T_{1,\tilde{g}} = -1 - (t-1) = -t = T_{1,g}$.

Aufgabe 9.7: Online Aufgabe

Bearbeiten Sie die aktuelle Online-Aufgabe im ILIAS-Kurs.
Beachten Sie, dass Sie dort auch die Lösungswege zu einzelnen Aufgaben zur Korrektur hochladen können.