Aufgabe 1: Bernoulli'sche Differentialgleichung

Eine Differentialgleichung der Form

$$u'(x) = f(x) \cdot u(x) + g(x) \cdot \Big(u(x)\Big)^n$$

heißt **Bernoulli'sche Differentialgleichung**. Sie läßt sich mit Hilfe der Substitution

$$z(x) = \Big(u(x)\Big)^{1-n}$$

in eine lineare Differentialgleichung für $z(x)$ überführen.
Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung für $y(x)$

$$y' = \frac{-2}{x} \cdot y + x^2 \cdot y^2 \; .$$

Lösung 1:

Die Bernoulli'sche Differentialgleichung teilt man zuerst durch $\Big(u(x)\Big)^n$:

$$\frac{u'(x)}{\Big(u(x)\Big)^n} = f(x) \cdot \frac{1}{u(x)} + g(x)$$

Nun substituiert man $z(x) = \dfrac{1}{u(x)} = \Big(u(x)\Big)^{1-n}$
Es gilt

$$z'(x) = (1-n) \cdot \Big(u(x)\Big)^{-n} \cdot u'(x) = (1-n) \cdot \frac{u'(x)}{\Big(u(x)\Big)^n}$$

Somit wird die Bernoulli'sche Differentialgleichung in die folgende inhomogene lineare Dgl überführt:

$$\frac{z'(x)}{1-n} = f(x) \cdot z(x) + g(x)$$

Für die gegebene DGl $\quad y'(x) = \dfrac{-2}{x}\, y + x^2 \cdot y^2 \quad$ gilt

$$u(x) = y(x),\; n = 2,\; f(x) = \frac{-2}{x},\; g(x) = x^2$$

Diese Gleichung geht also durch die Substitution $z(x) = (y(x))^{-1} = \dfrac{1}{y(x)}$ in eine inhomogene lineare Dgl. für $z(x)$

$$-z'(x) = -\frac{2}{x} \cdot z + x^2 \; ,$$

über. Durch Trennung der Veränderlichen und Variation der Konstanten erhält man die folgende Lösung

$$\underline{z(x) = C \cdot x^2 - x^3} \; .$$

Die Rücksubstitution ergibt die gesuchte Lösung für $y(x)$:

$$\underline{\underline{y(x) = \frac{1}{C \cdot x^2 - x^3}}} \; .$$

Aufgabe 2: Definitionsbereich der Lösung einer Dgl.

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'(x) = 2\,x\,y^2$$

und die spezielle Lösung für den Anfangswert $y(0) = 4$.
Wie groß ist der maximale Definitionsbereich dieser Lösung?

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$\cos(x) \cdot y'(x) = \sin(x) \cdot y(x).$$

Lösung 2:

a) Die Dgl. ist vom trennbaren Typ

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y^2} = \int 2x\ \mathrm{d}x \Rightarrow \frac{y^{-1}}{-1} = x^2 + C \quad \vee \quad y = 0$$

und hat die allgemeine Lösung

$$\underline{y(x) = \frac{-1}{x^2 + C} \quad , \quad C \in \mathbb{R} \quad \text{bzw. } y = 0}$$

Der Anfangswert $y(0) = 4$ ergibt mit $C = -\frac{1}{4}$ die Lösung

$$\underline{y_{\mathrm{AWP}}(x) = \frac{-1}{x^2 - \frac{1}{4}}} \quad .$$

Die Lösung ist nur im Bereich $\frac{-1}{2} < x < \frac{1}{2}$ definiert und hat an den Rändern bei $x = \pm\frac{1}{2}$ Polstellen.

b) Lösen der hom. lin. DGl.

$$\cos(x) \cdot y'(x) = \sin(x) \cdot y(x)$$

durch Trennung der Veränderlichen:

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\ \mathrm{d}x \Rightarrow \ln(|y|) = -\ln\big(|\cos(x)|\big) + \tilde{C} \quad \vee \quad y = 0$$

also

$$y(x) = \frac{C}{\cos(x)}, C \in \mathbb{R}\ .$$

Aufgabe 3: Differentialgleichungen 1. Ordnung

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung folgender Differentialgleichungen:

i) $$y'(x) = (2\,x + 3\,y + 4)^{-4} - \frac{2}{3}$$

ii) $$u'(t) = \sqrt{\frac{t}{u}} + \frac{u}{t}\ , \quad t > 0\ .$$

iii) $$w'(s) = \frac{2}{s}\,w + 15\,s^4 \quad .$$

Lösung 3:

i) Mit der Substitution $z(x) = 2\,x + 3\,y(x) + 4$ erhält man

$$y(x) = \frac{z(x) - 2\,x - 4}{3} \Rightarrow y'(x) = \frac{1}{3}(z'(x) - 2)$$

Eingesetzt in die Dgl, ergibt sich

$$z'(x) - 2 = 3\left(z^{-4} - \frac{2}{3}\right) \quad .$$

Daraus folgt

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 3z^{-4}\ .$$

Trennung der Variablen:

$$\int z^4\ \mathrm{d}z = \int 3\ \mathrm{d}x \Rightarrow \frac{z^5}{5} = 3\,x + c \Rightarrow z(x) = (15\,x + C)^{1/5} \text{ mit } C = 5c \in \mathbb{R}\ .$$

Rücksubstitution:

$$y(x) = \frac{(15\,x + C)^{1/5} - 2x - 4}{3}\ .$$

ii) Mit der Substitution $z(x) = \dfrac{u(t)}{t}$ erhält man

$$u(t) = tz(t) \Rightarrow u'(t) = z(t) + tz'(t)$$

Einsetzen in die Dgl liefert dann

$$z + tz' = \frac{1}{\sqrt{z}} + z \quad \Rightarrow \quad z' = \frac{1}{t\,\sqrt{z}}$$

Trennung der Variablen:

$$\int \sqrt{z}\ \mathrm{d}z = \int \frac{1}{t}\ \mathrm{d}t \Rightarrow \frac{2}{3}\,z^{3/2} = \ln|t| + c \Rightarrow z(t) = \left(\frac{3\ \ln|t|}{2} + C\right)^{2/3} \text{ mit } C = \frac{3\,c}{2} \in \mathbb{R}\ .$$

Rücksubstitution:

$$\frac{u(t)}{t} = \left(\frac{3\ \ln|t|}{2} + C\right)^{2/3} \Rightarrow u(t) = t\cdot\left(\frac{3\ \ln(t)}{2} + C\right)^{2/3} \text{ mit } C \in \mathbb{R},\ t > 0.$$

iii) Zunächst löst man die homogene lin. Dgl.:

$$w'(s) = \frac{2}{s}\,w$$

$$w_{\mathrm{h}}(s) = C\cdot \mathrm{e}^{\left(\int \frac{2}{s}\ \mathrm{d}s\right)} = C\cdot\mathrm{e}^{2\ \ln|s|} = C\mathrm{e}^{\ln(s^2)} = C\,s^2\ .$$

Damit erhält man den Produktansatz für die inhomogen lin. Dgl. $w(s) = z(s)\,s^2$ Mit $w'(s) = z'\,s^2 + z\cdot 2\,s$ wird die inhomogene Gleichung wie folgt umgeformt:

$$z'\,s^2 + z\,2\,s = \frac{2}{s}\,z\,s^2 + 15\,s^4 \Rightarrow z' = 15\,s^2 \Rightarrow z = 5\,s^3 + C\ .$$

Damit erhält man die Lösung

$$w(s) = C\,s^2 + 5\,s^5\ .$$

Aufgabe 4: Trennung der Veränderlichen und Anfangswertproblem

a) Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung

$$tf'(t) = f(t) + te^{f(t)/t}$$

b) Bestimmen Sie die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$y''(x) - 2y'(x) - 3y(x) = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 6.$$

Lösung 4:

a) Die Gleichung lautet

$$f'(t) = \frac{f(t)}{t} + e^{f(t)/t}$$

und hat somit die Form $f'(t) = F\left(f(t)/t\right)$.

Mit der Substitution $z(t) = \dfrac{f(t)}{t}$, $f(t) = tz(t)$, $f'(t) = z(t) + tz'(t)$ erhält man:

$$z + tz' = z + e^z\,, \text{ also } \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{t}e^z.$$

Trennung der Variablen liefert

$$\int e^{-z}\mathrm{d}z = \int \frac{1}{t}\,dt,$$

also $-e^{-z} = \ln|t| + C$ und damit $z = -\ln(-\ln|t| - C)$. Rücktransformation auf die alten Variablen ergibt

$$f(t) = tz(t) = -t\ln(-\ln|t| - C) \text{ mit } C \in \mathbb{R}.$$

b) Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 3$ sind $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 3$.

Die allgemeine Lösung ist

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x} \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Aus den Anfangsbedingungen $y(0) = c_1 + c_2 \stackrel{!}{=} 0$ und $y'(0) = -c_1 + 3c_2 \stackrel{!}{=} 6$ folgt das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrl} c_1 & + & c_2 & = 0, \\ -c_1 & + & 3c_2 & = 6 \end{array}$$

mit Lösung $c_2 = 3/2$ und $c_1 = -3/2$. Damit ist

$$y(x) = -\frac{3}{2}e^{-x} + \frac{3}{2}e^{3x}.$$

Aufgabe 5: Homogene lineare Differentialgleichungen

Bestimmen Sie die allgemeinen reellen Lösungen folgender homogener linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten mit Hilfe geeigneter Ansätze für $u(t)$:

i) $u'' - 7\,u' + 10\,u = 0\ .$ **ii)** $7\,u'' + 28\,u' + 91\,u = 0\ .$

iii) $u''' - 3\,u'' = 0\ .$ **iv)** $u'''' + 8\,u'' + 16\,u = 0\ .$

Lösung 5:

Der Ansatz ist jedesmal $u(t) = \alpha\,\mathrm{e}^{\lambda\,t}\ ,\quad \alpha, \lambda = \mathrm{const} \in \mathbb{C}\ .$

i) Die charkt. Gl. ist: $\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2\ ,\quad \lambda_2 = 5\ .$

$$\Rightarrow\ \underline{u(t) = a\,\mathrm{e}^{2\,t} + b\,\mathrm{e}^{5\,t}\ ,\quad a, b \in \mathbb{R}}\ .$$

ii) Die charkt. Gl. ist: $\lambda^2 + 4\lambda + 13 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -2 \pm 3\,\mathrm{i}\ .$

$$\Rightarrow\ \underline{u(t) = \mathrm{e}^{-2\,t}\left(a\,\cos(3t) + b\,\sin(3t)\right)\ ,\quad a, b \in \mathbb{R}}\ .$$

iii) Die charkt. Gl. ist: $\lambda^3 - 3\lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 0\ ,\quad \lambda_3 = 3\ .$

$$\Rightarrow\ \underline{u(t) = a + b\,t + c\,\mathrm{e}^{3\,t}\ ,\quad a, b, c \in \mathbb{R}}\ .$$

iv) Die charkt. Gl. ist: $\lambda^4 + 8\lambda^2 + 16 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 2\,\mathrm{i}\ ,\quad \lambda_{3,4} = -2\,\mathrm{i}\ .$

$$\Rightarrow\ \underline{u(t) = (a + b\,t)\cdot\cos(2t) + (c + d\,t)\cdot\sin(2t)\ ,\quad a, b, c, d \in \mathbb{R}}\ .$$

Aufgabe 6: Inhomogene lineare Differentialgleichungen

Bestimmen Sie von folgenden inhomogenen linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten jeweils die allgemeine reelle Lösung, indem Sie zunächst die zugehörige homogene lineare Differentialgleichung allgemein lösen und eine spezielle (partikuläre) Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung mit Hilfe von geeigneten Ansätzen bestimmen.

a) $y''(x) - 5\,y'(x) + 6\,y(x) = r_k(x)$ mit

i) $r_1 = 108\,x^2$, **ii)** $r_2 = 7\,\mathrm{e}^{3x}$, **iii)** $r_3 = 18 + 14\,\mathrm{e}^{3x}$.

b) $y'''(x) + 25\,y'(x) = s_k(x)$ mit

i) $s_1 = 150\,x$, **ii)** $s_2 = \sin(x)$,
iii) $s_3 = \sin(5x) - 200\,x$, **iv)** $s_4 = 6\,\sin(3x)\,\cos(2x)$.

Hinweis: Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt $\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$.

c) $y''(x) - 2\,y'(x) = t_k(x)$ mit

i) $t_1 = 4\,\mathrm{e}^{2x}$, **ii)** $t_2 = \cosh(2x)$.

Lösung 6:

a) Zunächst die zugehörige homogene lineare Differentialgleichung:
Die charkt. Gl. ist: $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2\,,\ \lambda_2 = 3$.

$$\Rightarrow \quad \underline{y_\mathrm{h}(x) = a\,\mathrm{e}^{2x} + b\,\mathrm{e}^{3x}\ ,\quad a, b \in \mathbb{R}} \ .$$

i) Faustregelansatz:

$$y_\mathrm{p} = A + B\,x + C\,x^2 \Rightarrow ; y_\mathrm{p}' = B + 2C\,x \text{ und } y_\mathrm{p}'' = 2C \ .$$

Einsetzen in die Differentialgleichung:

$$2C - 5\cdot(B + 2C\,x) + 6\cdot\left(A + B\,x + C\,x^2\right) = 108\,x^2 \ .$$

Koeffizientenvergleich:

$$\begin{aligned} 1:&\quad 2\,C - 5\,B + 6\,A = 0\\ x:&\quad -10\,C + 6\,B = 0\\ x^2:&\quad 6\,C = 108 \qquad \Rightarrow C = 18\,,\quad B = 30\quad A = 19\,. \end{aligned}$$

Partikuläre Lösung der inhomogen linearen Differentialgleichung:

$$\Rightarrow \quad \underline{y_\mathrm{p}(x) = 19 + 30\,x + 18\,x^2} \ .$$

Allgemeine Lösung der inhomogen linearen Differentialgleichung:

$$\Rightarrow \underline{\underline{y(x) = y_\mathrm{h} + y_\mathrm{p} = a\,\mathrm{e}^{2x} + b\,\mathrm{e}^{3x} + 19 + 30\,x + 18\,x^2\ ,\quad a, b \in \mathbb{R}}} \ .$$

ii) Faustregelansatz: $y_\mathrm{p} = A\,x\,\mathrm{e}^{3x}$ „x–spendieren“.
Eingesetzt:

$$\big((6A + 9A\,x) - 5\cdot(A + 3A\,x) + 6\cdot A\,x\big)\cdot\mathrm{e}^{3x} = 7\,\mathrm{e}^{3x} \Rightarrow A = 7 \text{ und } 0 = 0\ .$$

Partikuläre Lösung: $\underline{y_\mathrm{p}(x) = 7x\,\mathrm{e}^{3x}}$.

Allgemeine Lösung: $\underline{\underline{y(x) = y_\mathrm{h} + y_\mathrm{p} = a\,\mathrm{e}^{2x} + b\,\mathrm{e}^{3x} + 7x\,\mathrm{e}^{3x}\ ,\quad a, b \in \mathbb{R}}}$.

iii) Faustregelansätze für beide Summanden der Inhomogenität einzeln.
Ansatz für $r = 18$: $y_{\mathrm{p}_1} = A \Rightarrow \underline{y_{\mathrm{p}_1}(x) = 3}$.
Für $r = 14\,\mathrm{e}^{3x}$ ergibt sich nach ii) : $\underline{y_{\mathrm{p}_2}(x) = 14x\,\mathrm{e}^{3x}}$.
Allgemeine Lösung: $\underline{\underline{y(x) = y_\mathrm{h} + y_{\mathrm{p}_1} + y_{\mathrm{p}_2} = a\,\mathrm{e}^{2x} + b\,\mathrm{e}^{3x} + 3 + 14x\,\mathrm{e}^{3x}\ ,\quad a, b \in \mathbb{R}}}$.

b) Das charakteristische Polynom der Differentialgleichung ist $\lambda^3 + 25\lambda$ mit den Nullstellen $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2/3} = \pm 5\,\mathrm{i}$. Die zugehörige homogene lineare Differentialgleichung hat damit die allgemeine (reelle) Lösung

$$\underline{y_\mathrm{h}(x) = a\,\cos(5x) + b\,\sin(5x) + c\ ,\quad a, b, c \in \mathbb{R}} \ .$$

i) Faustregelansatz: $y_\mathrm{p} = A\,x + B\,x^2$ („x–spendieren“). Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt

$$\begin{aligned} & y'''(x) + 25y'(x)\\ =& 0 + 25(A + 2Bx) \stackrel{!}{=} 150x\\ \Rightarrow\quad A =& 0,\ B = 3\\ \Rightarrow\quad y_\mathrm{p} =& 3\,x^2\\ \Rightarrow\quad y(x) =& y_\mathrm{h} + y_\mathrm{p} = a\,\cos(5x) + b\,\sin(5x) + c + 3\,x^2\ ,\quad a, b, c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

ii)

1. Lösungsweg

Faustregelansatz: $y_\mathrm{p}(x) = \mathrm{Im}(A\cdot\mathrm{e}^{ix})$

Einsetzen in die Differentialgleichung:

$$A \cdot (i^3 + 25i) \cdot e^{ix} = e^{ix} \Rightarrow A = \frac{1}{-i + 25i} = \frac{1}{24i} = \frac{-i}{24}$$

Somit gilt

$$y_p = \mathrm{Im}\left(\frac{-i}{24} \cdot (\cos(x) + i \sin(x))\right) = -\frac{1}{24} \cos(x)$$

2. Lösungsweg

Faustregelansatz: $y_p = A \cos(x) + B \sin(x) \Rightarrow \underline{y_p(x) = -\frac{1}{24} \cos(x)}$. Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt

$$\begin{aligned} & y'''(x) + 25y'(x) \\ & = A \sin(x) - B \cos(x) + 25(-A \sin(x) + B \cos(x)) \stackrel{!}{=} \sin(x) \\ \Rightarrow \quad & -24A = 1, \ 24B = 0 \\ \Rightarrow \quad & y_p = -\frac{1}{24} \cos(x) \end{aligned}$$

Beide Wege liefern dann die allgemeine Lösung

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{y(x) = y_h + y_p = a \cos(5x) + b \sin(5x) + c - \frac{1}{24} \cos(x) , \quad a, b, c \in \mathbb{R}}} .$$

iii) Faustregelansätze für beide Summanden einzeln:

Ansatz für $s = \sin(5x) = \mathrm{Im}(e^{i5x})$: $y_{p_1} = \mathrm{Im}(Axe^{i5x})$ („x–spendieren“) liefert nach Einsetzen in die DGL

$$A \cdot (3 \cdot (5i)^2 \cdot e^{i5x} + x \cdot (5i)^3 \cdot e^{i5x} + 25 \cdot (e^{i5x} + x \cdot 5i \cdot e^{i5x})) = e^{i5x}$$

$$A \cdot (-75 - 125ix + 25 + 125ix) = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{-50}$$

$$\Rightarrow y_{p_1} = \mathrm{Im}\left(\frac{1}{-50} x e^{i5x}\right) = -\frac{1}{50} x \sin(5x)$$

Alternativ kann mann den Ansatz $Ax \cos(5x) + Bx \sin(5x)$ benutzen. Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt

$$\begin{aligned} & y'''(x) + 25y'(x) \\ & = -3 \cdot 25A \cos(5x) + 125Ax \sin(5x) - 3 \cdot 25B \sin(5x) - 125Bx \cos(5x) + \\ & \quad + 25(A \cos(5x) - 5Ax \sin(5x) + B \sin(5x) + 5Bx \cos(5x)) \stackrel{!}{=} \sin(5x) \\ \Rightarrow \quad & \sin(5x) = (-75A + 25A) \cos(5x) + (-75B + 25B) \sin(5x) \\ \Rightarrow \quad & A = 0, \ B = -\frac{1}{50} \\ \Rightarrow \quad & y_{p1} = -\frac{1}{50} \sin(x) \end{aligned}$$

Für $s = -200$ ergibt sich die spezielle Lösung nach i) zu $\underline{y_{p_2} = -4x^2}$.

$$\underline{\underline{y(x) = y_h + y_{p_1} + y_{p_2} = a \cos(5x) + b \sin(5x) + c - \frac{1}{50} x \sin(5x) - 4x^2 , \quad a, b, c \in \mathbb{R}}}$$

iv) Die Inhomogenität ist $s_4 = 6 \sin(3x) \cos(2x) = 3 \big(\sin(x) + \sin(5x)\big)$.

Nach ii) und iii) ist damit die spezielle Lösung: $\underline{y_p = -\frac{1}{8} \cos(x) - \frac{3}{50} x \sin(5x)}$.

$$\underline{\underline{y(x) = y_h + y_p = a \cos(5x) + b \sin(5x) + c - \frac{1}{8} \cos(x) - \frac{3}{50} x \sin(5x) , \quad a, b, c \in \mathbb{R}}} .$$

c) Das charakteristische Polynom $\lambda^2 - 2\lambda$ hat die Nullstellen $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$. Damit ist die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen linearen Differentialgleichung

$$\underline{y_h(x) = a + b e^{2x} , \quad a, b \in \mathbb{R}} .$$

i) Faustregelansatz $y_p = A x e^{2x}$ („x–spendieren“) $\Rightarrow \underline{y_p = 2x e^{2x}}$.

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{y(x) = y_h + y_p = a + b e^{2x} + 2x e^{2x} , \quad a, b \in \mathbb{R}.}}$$

ii) Die Inhomogenität ist $t_2 = \cosh(2x) = \frac{1}{2} e^{2x} + \frac{1}{2} e^{-2x}$.

Faustregelansätze für beide Summanden einzeln:

Für $t = \frac{1}{2} e^{2x}$ ergibt sich nach i) $\underline{y_{p_1}(x) = \frac{1}{4} x e^{2x}}$.

Ansatz für $t = \frac{1}{2} e^{-2x}$: $y = A e^{-2x}$ (**kein** „x–spendieren“ !) $\Rightarrow \underline{y_{p_2} = \frac{1}{16} e^{-2x}}$.

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{y(x) = y_h + y_{p_1} + y_{p_2} = a + b e^{2x} + \frac{1}{4} x e^{2x} + \frac{1}{16} e^{-2x} , \quad a, b \in \mathbb{R}}}$$

Aufgabe 7: Differentialgleichungen erster Ordnung

a) Klassifizieren Sie die Differentialgleichung 1. Ordnung

$$u'(t) = \frac{-2\,u(t)}{t} + 5\,t^2\ , \quad t > 0\ ,$$

und bestimmen Sie dann alle Lösungen der Differentialgleichung.

b) Lösen Sie das Anfangswertproblem für $t > 0$

$$u'(t) = \left(\frac{2\,u(t)}{t}\right)^2 + \frac{u(t)}{t}\ , \quad u(1) = -2\ .$$

Lösung 7:

a) Klassifikation: explizit, linear, variable Koeffizienten, inhomogen.
(Hinweis: Mindestens die 3 letzten Eigenschaften müssen benannt sein!)
Die homogene lineare Dgl. $u'(t) = -2\,u(t)/t$ ist eine trennbare Dgl.

$$\int \frac{1}{u}\ \mathrm{d}u = \int \frac{-2}{t}\ \mathrm{d}t \Rightarrow u_h(t) = \frac{c}{t^2}\ .$$

Die Lösung der inhomogen linearen Dgl. erhält man mit dem Produktansatz

$$u_{allg}(t) = c(t)/t^2\ .$$

Das Einsetzen in die inhomogene Gleichung ergibt

$$\frac{-2}{t^3}\cdot c(t) + c'(t)\cdot\frac{1}{t^2} = \frac{-2\,\frac{c(t)}{t^2}}{t} + 5\,t^2 \Rightarrow c'(t) = 5\,t^4\ .$$

Die Integration ergibt die Funktion $c(t)$ und dann die allgemeine Lösung

$$c(t) = t^5 + C \Rightarrow \underline{\underline{u_{allg}(t) = t^3 + \frac{C}{t^2}}}\ .$$

b) Die Substitution $z(t) = u(t)/t$ ergibt $u(t) = tz(t)$, $u'(t) = z(t) + tz'(t)$. Eingesetzt in die Dgl. erhält man

$$z + tz' = \left(2\,z\right)^2 + z \Rightarrow z' = \frac{4\,z^2}{t}\ .$$

Die trennbare Dgl. für $z(t)$ hat die Lösung $z(t) = -1/(4\,\ln(t) + C)$. Rücksubstitution ergibt die allgemeine Lösung

$$u(t) = z(t)\cdot t = \frac{-t}{4\,\ln(t) + C}\ .$$

Einsetzen der Anfangswerte ergibt $C = 1/2$ und damit die Lösung des AWPs zu

$$\underline{\underline{u_{\mathrm{AWP}}(t) = \frac{-2\,t}{8\,\ln(t) + 1}}}\ .$$

Aufgabe 8: Lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung

Bestimmen Sie die allgemeinen L"osungen der folgenden Differentialgleichungen:

a) $y^{(4)} + 4y = 0,$

b) $y^{(4)} + 2y''' + y'' = 12x,$

c) $y'' + 4y' + 5y = 8\sin t,$

d) $y'' - 4y' + 4y = \mathrm{e}^{2x}.$

Lösung 8:

a) Es ist $p(\lambda) = \lambda^4 + 4$, die Nullstellen sind $\lambda_\ell = \sqrt{2}\mathrm{e}^{i(2\ell+1)\pi/4}$ für $\ell = 0, 1, 2, 3$, also

$$\lambda_0 = 1 + i, \lambda_1 = -1 + i, \lambda_2 = -1 - i, \lambda_3 = 1 - i$$

Ein reelles Fundamentalsystem ist

$$\{e^x \cos x, e^x \sin x, \mathrm{e}^{-x} \cos x, \mathrm{e}^{-x} \sin x\}$$

Die allgemeine Lösung lautet also

$$y(x) = c_1 e^x \cos x + c_2 e^x \sin x + c_3 \mathrm{e}^{-x} \cos x + c_4 \mathrm{e}^{-x} \sin x \text{ mit } c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}.$$

b) Das Polynom $p(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^3 + \lambda^2$ hat die Nullstellen
$\lambda_{1/2} = 0$ (doppelte Nullstelle), $\lambda_{3/4} = -1$ (ebenfalls doppelt).
Ein Fundamentalsystem ist also $\{1, x, \mathrm{e}^{-x}, x\mathrm{e}^{-x}\}$.
Für die Partikulärlösung ist der Ansatz $y_p(x) = (ax + b)x^2 = ax^3 + bx^2$ sinnvoll.

$$y_p'(x) = 3ax^2 + 2bx, y_p''(x) = 6ax + 2b, y_p^{(3)}(x) = 6a \text{ und } y_p^{(4)}(x) = 0$$

Eingesetzt in die DGL:

$$0 + 12a + 6ax + 2b = 12x$$

Koeffizientenvergleich liefert dann $a = 2$, $b = -6a = -12$. Die allgemeine Lösung der Gleichung ist

$$y(x) = c_1 + c_2 x + c_3 \mathrm{e}^{-x} + c_4 x \mathrm{e}^{-x} - 12x^2 + 2x^3 \text{ mit } c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}.$$

c) Das Polynom $p(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda + 5$ hat die Nullstellen

$$\lambda_1 = -2 + i, \lambda_2 = -2 - i$$

Die homogene Lösung ist dann

$$y_h = C_1 \mathrm{e}^{-2t+it} + C_2 \mathrm{e}^{-2t-it} = \mathrm{e}^{-2t}(C_1(\cos t + i \sin t) + C_2(\cos t - i \sin t))$$

$$= \mathrm{e}^{-2t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t), \text{ wobei } C_1 = \overline{C_2} = \frac{ic_1 + c_2}{2}$$

Eine Partikulärlösung berechnet man für die rechte Seite $8 \sin t = \mathrm{Im}(8\mathrm{e}^{it})$ mit dem Ansatz $y_p(t) = \mathrm{Im}(a\mathrm{e}^{it})$.
Man erhält durch Einsetzen in die DGL

$$a(-1 + 4i + 5)\mathrm{e}^{it} = 8\mathrm{e}^{it} \Rightarrow a = \frac{2}{1+i} = 1 - i$$

Damit ist

$$y_p(t) = \mathrm{Im}((1 - i)\mathrm{e}^{it}) = \mathrm{Im}\left((1 - i)(\cos t + i \sin t)\right) = \sin t - \cos t$$

eine Partikulärlösung . Die allgemeine Lösung der Gleichung ist

$$y(t) = \mathrm{e}^{-2t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t) + \sin t - \cos t.$$

d) Es ist $p(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2$.
Das Polynom hat die doppelte Nullstelle $\lambda = 2$.
Ein Fundamentalsystem ist daher $\{\mathrm{e}^{2x}, x\mathrm{e}^{2x}\}$.
Mit dem Ansatz $y_p(x) = ax^2\mathrm{e}^{2x}$ folgt

$$y_p'(x) = a(2x^2 + 2x)\mathrm{e}^{2x}, \; y_p''(x) = a(4x^2 + 8x + 2)\mathrm{e}^{2x}$$

Das Einsetzen in die DGL liefert somit

$$a\mathrm{e}^{2x}(4x^2 + 8x + 2 - 8x^2 - 8x + 4x^2) = \mathrm{e}^{2x}$$

Daraus folgt $a = 1/2$.
Die allgemeine Lösung lautet

$$y(x) = \left(c_1 + c_2 x + \frac{1}{2}x^2\right) \mathrm{e}^{2x} \text{ mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 9: Lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung

Bestimmen Sie die allgemeinen Lösungen der folgenden Differentialgleichungen. Falls Anfangswerte gegeben sind, ermitteln Sie auch die Lösung des Anfangswertproblems.

a) $y'' + 6y' + 8y = 0$,

b) $y'' + 2y' + 5y = 17\sin(2x)$.

c) $y''(x) - 2y'(x) - 3y(x) = 4\mathrm{e}^x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 6$,

d) $y''(x) + 5y'(x) + 6y(t) = 3\mathrm{e}^{3x}$,

e) $y''(x) - y'(x) - 2y(x) = 4x\mathrm{e}^x$.

f) $y''' + y'' - y' - y = 3\mathrm{e}^{-2x}$,

Lösung 9:

a) Das charakteristische Polynom $p(\lambda) = \lambda^2 + 6\lambda + 8$ hat die Nullstellen $\lambda_1 = -2$ und $\lambda_2 = -4$. Damit ist

$$y(x) = c_1\mathrm{e}^{-2x} + c_2\mathrm{e}^{-4x} \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

b) Das charakteristische Polynom $p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 5$ hat die Nullstellen $\lambda_{1/2} = -1 \pm \sqrt{1-5} = -1 \pm 2i$. Damit hat man das reelle Fundamentalsystem

$$\left\{\mathrm{e}^{-x}\cos(2x), \mathrm{e}^{-x}\sin(2x)\right\}.$$

Um die Partikulärlösung der inhomogenen Gleichung zu finden gibt es zwei Möglichkeiten:

Reeller Ansatz
Ein Ansatz für eine Partikulärlösung ist

$$y_p(x) = A\cos(2x) + B\sin(2x).$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert:

$$\begin{aligned} 17\sin(2x) &\overset{!}{=} -4A\cos(2x) - 4B\sin(2x) - 4A\sin(2x) + 4B\cos(2x) + 5A\cos(2x) + 5B\sin(2x) \\ &= (-4A + 4B + 5A)\cos(2x) + (-4B - 4A + 5B)\sin(2x). \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich führt dann zum linearen Gleichungssystem für A und B:

$$\begin{aligned} \cos(2x): &\quad A + 4B &= 0 \\ \sin(2x): &\quad -4A + B &= 17 \end{aligned}$$

Mit der Lösung $B = 1$ und $A = -4$ haben wir die Partikulärlösung

$$y_p(x) = -4\cos(2x) + \sin(2x)$$

Alternativ: Komplexer Ansatz:
Der Ansatz für eine Partikulärlösung ist

$$y_p(x) = \mathrm{Im}(b\mathrm{e}^{i2x})$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert:

$$b((-4)\mathrm{e}^{i2x} + 4i\mathrm{e}^{i2x} + 5\mathrm{e}^{i2x}) \overset{!}{=} 17\mathrm{e}^{i2x}$$

Daraus folgt $b = \dfrac{17}{1+4i} = 1 - 4i$. Damit haben wir die Partikulärlösung

$$y_p(x) = \mathrm{Im}((1-4i)\cdot(\cos(2x) + i\sin(2x))) = -4\cos(2x) + \sin(2x)$$

Die Gesamtlösung lautet also

$$y(x) = \sin(2x) - 4\cos(2x) + c_1\mathrm{e}^{-x}\cos(2x) + c_2\mathrm{e}^{-x}\sin(2x).$$

c) Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 3$ sind $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 3$. Eine Partikulärlösung der inhomogenen Gleichung berechnet man mit dem Ansatz $y_p(x) = ae^x$, es folgt $-4ae^x \overset{!}{=} 4e^x$ und damit $a = -1$. Die allgemeine Lösung ist

$$y_{allg}(x) = -e^x + c_1\mathrm{e}^{-x} + c_2\mathrm{e}^{3x} \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Aus den Anfangsbedingungen $y(0) = -1 + c_1 + c_2 \overset{!}{=} 0$ und $y'(0) = -1 - c_1 + 3c_2 \overset{!}{=} 6$ folgt das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} c_1 \quad + \quad c_2 &= 1, \\ -c_1 \quad + \quad 3c_2 &= 7 \end{aligned}$$

mit Lösung $c_2 = 2$ und $c_1 = -1$. Damit ist

$$y_{AWP}(x) = -e^x - \mathrm{e}^{-x} + 2\mathrm{e}^{3x}.$$

d) Man berechnet zuerst die Lösungen der homogenen Gleichung

$$y'' + 5y' + 6y = 0.$$

Das charakteristische Polynom $p(\lambda) = \lambda^2 + 5\lambda + 6$ hat die Nullstellen $\lambda_1 = -2$ und $\lambda_2 = -3$. Ein Fundamentalsystem ist $\{\mathrm{e}^{-2x}, \mathrm{e}^{-3x}\}$. Nun braucht man noch eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung. Diese berechnet man mit dem Ansatz $y_p(x) = a\mathrm{e}^{3x}$ mit $a \in \mathbb{R}$. Einsetzen in die inhomogene DGl liefert $(9 + 15 + 6)a\mathrm{e}^{3x} = 3\mathrm{e}^{3x}$, also $a = 1/10$. Die allgemeine Lösung der Gleichung ist

$$y(x) = c_1\mathrm{e}^{-2x} + c_2\mathrm{e}^{-3x} + \frac{1}{10}\mathrm{e}^{3x} \text{ mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

e) Das Polynom $p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 2$ hat die Nullstellen $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = -1$, dies ergibt das Fundamentalsystem $\{\mathrm{e}^{2x}, \mathrm{e}^{-x}\}$. Der Ansatz für die Partikulärlösung ist $y_p(x) = (ax+b)e^x$. Mit $y_p'(x) = (ax+a+b)e^x$ und $y_p'' = (ax+2a+b)e^x$ folgt

$$\mathrm{e}^x(ax + 2a + b - (ax + a + b) - 2(ax + b)) = 4x\mathrm{e}^x$$

$$-2ax + a - 2b = 4x$$

Koeffizientenvergleich liefert dann $a = -2$ und $2b = a$, $b = -1$. Damit hat man die allgemeine Lösung

$$y(x) = c_1\mathrm{e}^{2x} + c_2\mathrm{e}^{-x} - (2x+1)e^x \text{ mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

f) Das charakteristische Polynom ist $p(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 - \lambda - 1$. Eine Nullstelle kann man raten, zum Beispiel $\lambda_1 = 1$. Polynomdivision oder Anwendung des Horner–Schemas liefert dann

$$p(\lambda) = (\lambda - 1)\big(\lambda^2 + 2\lambda + 1\big),$$

damit ist $\lambda_2 = -1$ eine weitere, und zwar doppelte, Nullstelle. Folglich hat die homogene Gleichung das Fundamentalsystem

$$\big\{\mathrm{e}^x, \mathrm{e}^{-x}, x\mathrm{e}^{-x}\big\}.$$

Zur Berechnung einer Partikulärlösung benutzt man den Ansatz $y_p(x) = a\mathrm{e}^{-2x}$. Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$a\mathrm{e}^{-2x}\big(-8 + 4 + 2 - 1\big) \stackrel{!}{=} 3\mathrm{e}^{-2x}$$

und damit $a = -1$. Die allgemeine Lösung ist also

$$y(x) = -\mathrm{e}^{-2x} + c_1\mathrm{e}^x + c_2\mathrm{e}^{-x} + c_3x\mathrm{e}^{-x} \quad \text{mit } c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 10: LR-Kreis

Ein Stromkreis habe einen Widerstand von $R = 0.8$ Ohm und eine Selbstinduktion von $L = 4$ Henry. Bis zur Zeit $t_0 = 0$ fließe kein Strom. Dann wird eine Spannung von $U = 5$ Volt angelegt. Nach 5 Sekunden wird die Spannung abgeschaltet. Berechnen Sie den Stromverlauf $I(t)$ für $0 \le t \le 5$ und $t > 5$.
Hinweis: In diesem Stromkreis gilt $L\dot{I}(t) + RI(t) = U(t)$

Lösung 10:

Es gilt gilt die Differentialgleichung

$$L\dot{I}(t) + RI(t) = U(t)$$

Für $0 \le t \le 5$ gilt $U(t) = 5$. Die Trennung der Variablen führt zu

$$\int \frac{dI}{U - RI} = \int \frac{1}{L}\, dt, \Rightarrow -\frac{1}{R} \ln |U - RI(t)| = \frac{1}{L} t + c_1\,, \quad c_1 \in \mathbb{R}\,.$$

Auflösen nach $I(t)$ liefert (mit $c_2 = \mathrm{e}^{c_1}$)

$$U - RI(t) = c_2 e^{-Rt/L}$$

und somit

$$I(t) = \frac{1}{R}\big(U - c_2 e^{-Rt/L}\big)\,.$$

Einsetzen der Anfangsbedingung $I(0) = 0$ ergibt $c_2 = U$ und

$$I(t) = \frac{U}{R}\big(1 - e^{-R/Lt}\big)\,.$$

Einsetzen der gegebenen Zahlenwerte ergibt die Lösung

$$I(t) = 6.25\left(1 - e^{-0.2t}\right) \text{ für } 0 < t < 5\,.$$

Im Zeitraum $t > 5$ ist $U(t) = 0$ und der Anfangsstrom ist

$$I(5) = I_0 = 6.25\left(1 - e^{-1}\right)\,.$$

Die Lösung der Differentialgleichung ist

$$\int \frac{dI}{I} = -\int \frac{R}{L} dt \Rightarrow \ln |I(t)| = -\frac{R}{L} t + c_3$$

und damit

$$I(t) = c_4 e^{-Rt/L}\,.$$

Aus $I(t_0) = I_0$ folgt

$$I(t) = I_0 e^{-R(t-t_0)/L}\,.$$

Einsetzen der Zahlenwerte ergibt die Lösung

$$I(t) = 6.25\big(1 - e^{-1}\big)e^{-0.2(t-5)} \text{ für } t > 5\,.$$