Helmut-Schmidt-Universität
Universität der Bundeswehr Hamburg
Fakultät für Maschinenbau

**Prof. Dr. Thomas Carraro**
**Dr. Frank Gimbel**
**Janna Puderbach**

HELMUT SCHMIDT UNIVERSITÄT
Universität der Bundeswehr Hamburg

## Mathematik II — Übungsblatt 0

WT 2022 — Wiederholung

---

**Einführende Bemerkungen**

- Dieses Übungsblatt enthält Aufgaben angelehnt an die Klausuraufgaben.
- Achten Sie darauf, dass Sie die Notation beherschen und die Aufgaben sauber Niederschreiben.
- Vermeiden Sie die Verwendung von Taschenrechnern oder Online-Ressourcen.
- Die mit einem Stern *) markierten (Teil-)Aufgaben werden im ISA-Kurs behandelt, können und sollen aber auch von den Studierenden bearbeitet werden, die nicht am ISA-Kurs teilnehmen. Bitte laden Sie Ihre Lösungen im ILIAS hoch.

---

### Aufgabe 0.1: Matrizen

Gegeben seien folgende Matrizen und Vektoren

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 & \mathrm{i} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 1 \\ -1 & -\mathrm{i} \\ 0 & 1 \\ 2\,\mathrm{i} & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 1 & 7 \\ 4 & 6 & 7 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1-2\,\mathrm{i} \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1-\mathrm{i} \\ -2 \\ -2+\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

**a)** Welche Matrixprodukte und Matrix-Vektorprodukte sind definiert? (Zur Übung können Sie alle Produkte berechnen.)

**b)** Erklären Sie die Begriffe unitär, hermitesch, symmetrisch, orthogonal anhand der gegebenen Matrizen.

**c)** Bestimmen Sie die Transponierte, Adjungierte und komplex Konjungierte von $\boldsymbol{B}$

**d)** Bestimmen Sie die Skalarprodukte $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$ und $\langle \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_1 \rangle$.

**e)** Bestimmen Sie das Matrixprodukt $\boldsymbol{EC}$.

### Aufgabe 0.2: Lineare Gleichungssysteme

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} -1 & - & 6 & + & 3 \\ 2 & + & b+9 & - & 6 \\ 1 & + & 2b & - & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ a-4 \\ 2a \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}\,.$$

die Stufenform ist gegeben durch

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| I | $-1$ | $-6$ | 3 | 2 | |
| II’ | 0 | $b$–3 | 0 | $a$ | |
| III” | 0 | 0 | 1 | 2 | III” = III’ - 2II’ |

**a)** Geben Sie die Lösungsmenge für $b = 3$ und $a = 0$ an.

**b)** Wie ist das Bild einer Matrix definiert? Bestimmen Sie das Bild der Matrix für $b = 3$ und $a = 0$.

**c)** Wie ist der Kern einer Matrix definiert? Bestimmen Sie den Kern der Matrix für $b = 3$ und $a = 0$.

**d)** Bestimmen Sie jeweils die Dimension von Bild und Kern.

### Aufgabe 0.3: Ebenen und Geraden

Gegeben seien die folgenden Ebenen.

$$\boldsymbol{E}_1 = \frac{2}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3 = -3$$
$$\boldsymbol{E}_2 = x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$$

**a)** Geben Sie die Ebenen $\boldsymbol{E}_1$ und $\boldsymbol{E}_2$ in Hesse-Normalform an.

**b)** Erklären Sie, wann eine Ebene ein Unterraum ist. Argumentieren Sie, warum die Ebenen $\boldsymbol{E}_1$ und $\boldsymbol{E}_2$ ein Unterraum des $\mathbb{R}^3$ sind oder nicht.

**c)** Bestimmen Sie die orthogonale Projektion $\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{E}_2}$.

**d)** Bestimmen Sie den Abstand des Punktes $(1,1,1)^\top$ zur Ebene $\boldsymbol{E}_1$.

## Aufgabe 0.4: Eigenwerte

Gegeben sei die Matrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{7}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

mit dem charakteristischen Polynom

$$p(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 2).$$

Gegeben seien weiterhin die Eigenvektoren

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (-2,0,1)^\top, \\ \boldsymbol{v}_2 &= (2,1,0)^\top, \\ \boldsymbol{v}_3 &= (1,2,0)^\top. \end{aligned}$$

**a)** Bestimmen Sie alle Eigenwerte.

**b)** Zeigen Sie, dass die gegebenen Vektoren Eigenvektoren von $\boldsymbol{A}$ sind und geben Sie die zugehörigen Eigenwerte an.

**c)** Bestimmen Sie die algebraische und geometrische Vielfachheit aller Eigenwerte. Was sagen die jeweiligen Vielfachheiten über die Eigenwerte und Eigenvektoren aus?

## Aufgabe 0.5: Unterräume

Gegeben sei ein Vektorraum $\boldsymbol{V} \subset \mathbb{R}^n$ und eine Menge $\boldsymbol{U} \subset \mathbb{R}^n$

**a)** Welche Bedingungen muss $\boldsymbol{U}$ erfüllen, damit $\boldsymbol{U}$ ein Untervektorraum von $\boldsymbol{V}$ ist?

**b)** Was ist die Dimension eines Unterraumes?

**c)** Wie ist eine Basis definiert? Wie bestimmt man eine Basis?

**d)** Erklären Sie den Begriff lineare Unabhängigkeit.

**e)** Was ist eine Linearkombination?

## Aufgabe 0.6*: Komplexe Zahlen

**a)** Finden Sie alle Lösungen der Gleichung:

$$x^3 + x^2 + x = 3^3 + 3^2 + 3$$

Geben Sie alle komplexen Lösungen sowohl in kartesischen Koordinaten als auch in Polarkoordinaten an.

**b)** Nutzen Sie das Ergebnis von **a** und Substitution, um die folgende Gleichung zu lösen:

$$(x^2+1)^3 + (x^2+1)^2 + (x^2+1) = 3^3 + 3^2 + 3$$

## Aufgabe 0.7*: Funktionen

Geben Sie für die folgenden Funktionen den Definitionsbereich und Wertebereich an, in dem sie injektiv, surjektiv oder bijektiv sind.

**a)** $f_1(x) = \ln(x)$

**b)** $f_2(x) = \sin(x)$

**c)** $f_3(x) = \cos(x)$

**d)** $f_4(x) = x$

**e)** $f_5(x) = x^2$

**f)** $f_6(x) = x^3$

**g)** $f_7(x) = \mathrm{e}^x$

**h)** $f_8(x) = \frac{1}{x}$

**i)** $f_9(x) = \frac{1}{x^2}$

## Aufgabe 0.8*: Vektorwertige Funktionen

Gegeben sei die vektorwertige Funktion $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch

$$\boldsymbol{f}(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 \\ -x_1 + x_2 \end{bmatrix}$$

Zeigen Sie, dass die Funktion $\boldsymbol{f}$ bijektiv ist und bestimmen Sie die Inverse.