Aufgabe 1: Ableitungen

Man berechne die erste Ableitung der folgenden Funktionen

a) $f(x) = x^x$

b) $g(x) = x^{3^x}$

c) $h(x) = x^{\cos(x)}$

Aufgabe 2: Bewegung

Ein Elektron bewegt sich mit der Geschwindigkeit

$$v(t) = e^{\cosh(3t^2+2t+1)},$$

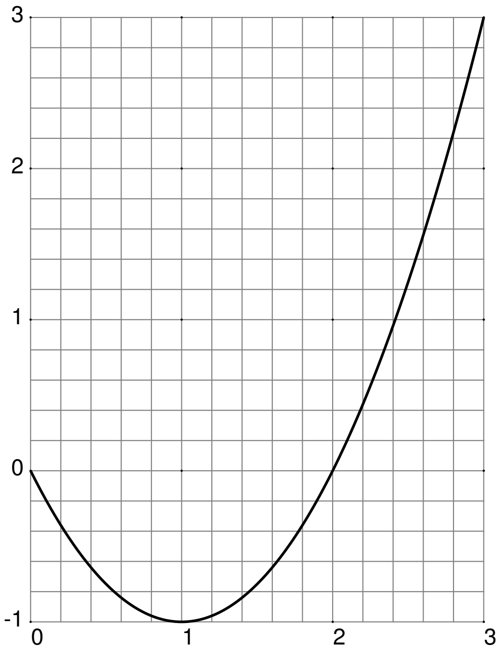
wobei t in Sekunden gegeben ist.

a) Wie hoch ist seine Beschleunigung nach $t = 10 Sekunden$?

b) Kommt das Elektron jemals zur Ruhe? Man begründe die Antwort.

Aufgabe 3: Sekantensteigung

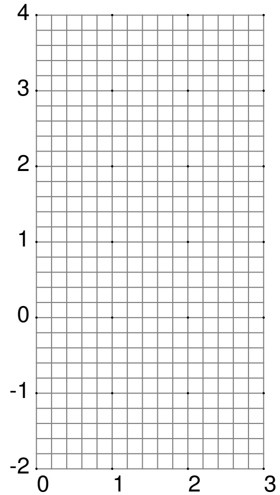
a) Gegeben ist der Funktionsgraph der Funktion f.



Zeichnen Sie an den Punkten

$$(x_j, y_j) \text{ mit } x_j = j,\ y_j = f(x_j) \text{ für } j = 0, 1, 2, 3$$

Steigungsdreiecke mit $\Delta x = 1$ an den Funktionsgraphen und berechnen Sie aus x- und y-Achsenabschnitt die Sekantensteigung $s(x_j)$.
Wiederholen Sie dies für $\Delta x = \frac{1}{2}$ und für $\Delta x = \frac{1}{4}$. Skizzieren Sie die so berechneten Steigungswerte im zweiten Graphen.



b) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $f(x) = x^2 - 2x$ anhand der Definition als Grenzwert eines Differenzenquotienten. Skizzieren Sie auch diese im zweiten Graphen.

Aufgabe 4: Taylor-Entwicklung in einer Variablen

Bestimmen Sie die Taylor-Entwicklung zweiter Ordnung der Exponentialfunktion e^x um den Punkt $x_0 = 0$ in dem Intervall $0 \leq x \leq 1$ einschließlich des Restgliedtermes. Zeigen Sie damit die Abschätzung:

$$\mathrm{e} \leq 3.$$

Aufgabe 5: Asymptoten

Man bestimme die (waagerechten bzw. senkrekten bzw.ß schrägen) Asymptoten der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = \frac{x}{4+x^2}$

b) $g(x) = e^{-x^2}$

c) $h(x) = \frac{x^2-3x}{2x-2}$

d) $l(x) = x^2 e^{-x}$

Aufgabe 6: Partielle Ableitungen

Bestimmen Sie zu jeder der folgenden Funktionen $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die ersten und zweiten Ableitungen

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_n} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix}.$$

$$f(x,y) = \mathrm{e}^{2xy^2} \qquad g(x,y) = x^2\sin(2x+y)$$
$$h(x,y) = \sin(2x)\cos(3y) \qquad k(x,y,z) = xy^2z^3$$
$$l(x,y) = \frac{xy}{xy-1}$$

Aufgabe 7: alte Klausuraufgabe

Gegeben sei die Funktion

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad \text{mit } g(x,y) = (y-x^2)(y-2x^2).$$

a) Zeigen Sie, dass die Funktion $g(x,y)$ auf allen Geraden durch den Ursprung $(0,0)$ lokale Minima hat.

b) Hat die Funktion $g(x,y)$ im Ursprung ein lokales Minimum?
Hinweis: Untersuchen Sie die Funktion längs der Kurve $\boldsymbol{q}(t) = (t, 3t^2/2)^\top$.

c) Berechnen Sie das Taylor-Polynom zweiten Grades der Funktion $g(x,y)$ im Punkt $(1,1)$.

Aufgabe 8: alte Klausuraufgabe

Gegeben sei die Funktion

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad \text{mit } g(x,y) = (y-x^2)(y-2x^2).$$

a) Zeigen Sie, dass die Funktion $g(x,y)$ auf allen Geraden durch den Ursprung $(0,0)$ lokale Minima hat.

b) Hat die Funktion $g(x,y)$ im Ursprung ein lokales Minimum?
Hinweis: Untersuchen Sie die Funktion längs der Kurve $\boldsymbol{q}(t) = (t, 3t^2/2)^\top$.

Aufgabe 9:

Bestimmen und klassifizieren Sie alle stationären Punkte der Funktion

$$g(x,y) = 3x^2 - 2xy - \frac{y^3}{6}.$$

Aufgabe 10: Differentiation

a) Geben Sie Konstanten b, c, $d \in \mathbb{R}$ an, damit die Funktion

$$g(x) = \begin{cases} bx^3 + cx^2 + d & \text{für } x \le 1 \\ \ln x & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

auf $\mathbb{R}$ zweimal differenzierbar ist.
Ist $g(x)$ für diese Wahl auch dreimal differenzierbar?

b) Überprüfen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x\sin(1/x) & \text{für } x \ne 0, \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

in $x = 0$ stetig ist, aber *nicht* differenzierbar.
Hinweis: Betrachten Sie zur Untersuchung der Differenzierbarkeit die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n = \frac{1}{n\pi + \pi/2}$.

c) Die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x^2\sin(1/x) & \text{für } x \ne 0, \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

ist in $x = 0$ differenzierbar. Ist die Ableitung dort stetig? Hinweis: Betrachten Sie die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n = \frac{1}{2n\pi}$.

Aufgabe 11: Differentiation

a) Geben Sie Konstanten b, c, $d \in \mathbb{R}$ an, damit die Funktion

$$g(x) = \begin{cases} bx^3 + cx^2 + d & \text{für } x \le 1 \\ \ln x & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

auf $\mathbb{R}$ zweimal differenzierbar ist.
Ist $g(x)$ für diese Wahl auch dreimal differenzierbar?

b**) Die Funktion

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f(x)=\begin{cases}x^2\sin(1/x) & \text{für } x\neq 0,\\ 0 & \text{für } x=0\end{cases}$$

ist in $x=0$ differenzierbar. Ist die Ableitung dort stetig? Hinweis: Betrachten Sie die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n=\frac{1}{2n\pi}$.

Aufgabe 12: Differentiation

a) Geben Sie Konstanten b, c, $d\in\mathbb{R}$ an, damit die Funktion

$$g(x)=\begin{cases} bx^3+cx^2+d & \text{für } x\leq 1\\ \ln x & \text{für } x>1\end{cases}$$

auf $\mathbb{R}$ zweimal differenzierbar ist.
Ist $g(x)$ für diese Wahl auch dreimal differenzierbar?

b**) Die Funktion

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f(x)=\begin{cases}x^2\sin(1/x) & \text{für } x\neq 0,\\ 0 & \text{für } x=0\end{cases}$$

ist in $x=0$ differenzierbar. Ist die Ableitung dort stetig? Hinweis: Betrachten Sie die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n=\frac{1}{2n\pi}$.

Aufgabe 13: Differenzieren

a) Bestimmen Sie jeweils die erste Ableitung. (Eventuell notwendige Beschränkungen des Definitionsgebietes sind nicht angegeben.)

$$f_9(t)=\sinh(t)-\cosh(2t),\qquad f_{10}(t)=(t-3)^4\,\sinh(t),$$
$$f_{11}(t)=t^2\,\mathrm{e}^{-2t}\,\sin(3t),\qquad f_{12}(t)=\sqrt{t}\,\mathrm{e}^{2t},$$
$$f_{13}(t)=\sin^3\left(\mathrm{e}^{2t^2}+t^5\right),\qquad f_{14}(t)=\sqrt{2\,t^2+1},$$
$$f_{15}(t)=\ln(t)-\ln(5t),\qquad f_{16}(t)=\ln(t^2)-\ln(t^5).$$

Hinweis: Es gilt $\dfrac{d}{dx}(\ln(x))=\dfrac{1}{x}$.

b) Bestimmen Sie die vierte Ableitung folgender Funktionen, wobei Sie das geeignete Zusammenfassen von Termen nicht vergessen sollten.

$$f_{17}(t)=(t-3)^4-(2t+1)^5,\qquad f_{18}(t)=(t+1)\,\sin(2t)$$
$$f_{19}(t)=(t^3-1)\,\mathrm{e}^{2t},\qquad f_{20}(t)=\sin(3t)\,\mathrm{e}^{-t}$$

Hinweis: Nutzen Sie gegebenen Falls die Leibniz-Regel zur Berechnung höherer Ableitungen. Diese hat dieselbe Gestalt wie der binomische Lehrsatz:

$$(f(t)\cdot g(t))^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}(t)\cdot g^{(n-k)}(t)$$

Z. B. für $n=2:\ (f(t)\cdot g(t))''=f(t)g''(t)+2f'(t)g'(t)+f''(t)g(t)$

c) Bestimmen Sie die n–te Ableitung folgender Funktionen.

$$f_{21}(t)=\sin(3t),\qquad f_{22}(t)=t\,\mathrm{e}^{2t}$$
$$f_{23}(t)=t\cdot\cos(t),\qquad f_{24}(t)=t\,\ln(2t)$$

Aufgabe 14: Differenzieren

Bestimmen Sie jeweils die erste Ableitung. Zur Kontrolle sind die Werte der Ableitung an Kontrollpunkten angegeben. (Eventuell notwendige Beschränkungen des Definitionsgebietes sind nicht angegeben.)

$$f_1(t)=3t^4-4t+7\,,\qquad f_2(t)=(2t-3)^4\,,\qquad f_3(t)=t^3\,(t+3)^4$$
$$f_4(t)=3\,\cos(2t)\,,\qquad f_5(t)=\sin^2(3t)\,,\qquad f_6(t)=\tan(2-t/2)$$
$$f_7(t)=\frac{2t-3}{(t+2)^3}\,,\qquad f_8(t)=\frac{4t\,\sin(t)}{\cos(2t)}\,,\qquad f_9(t)=t^2\mathrm{e}^{\sqrt{t}}$$
$$f_{10}(t)=\sqrt{t\sqrt{t\sqrt{t}}}\,,\qquad f_{11}(t)=\mathrm{e}^{\frac{1}{1+t^2}}\,,\qquad f_{12}(t)=\tan(t)$$
$$f_{13}(t)=\frac{t+\cos(t)\sin(t)}{2}\,,\qquad f_{14}(t)=\frac{t^2-t+2}{2t+3}\,,\qquad f_{15}(t)=\frac{\sin^2(t)}{\cos(t)}$$

Aufgabe 15: Kurvendiskussion, Taylorentwicklung

Gegeben sei die Funktion

$$f(x)=\mathrm{e}^{-x^2/2}(2x-3).$$

a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich von f.

b) Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion f.

c) Bestimmen Sie eine Asymptote von f, also eine Gerade $g(x)=a+bx$ mit

$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-g(x))=0.$$

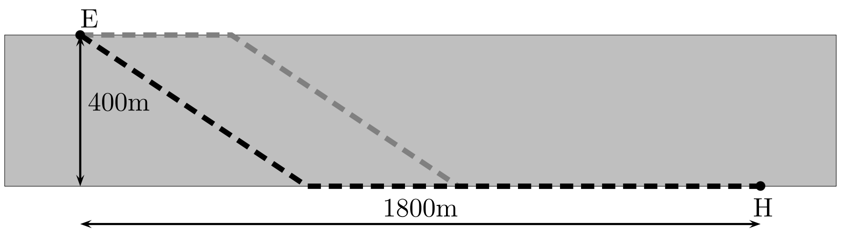
d) Bestimmen Sie die kritischen Punkte der Funktion f und charakterisieren Sie diese **ohne** Berechnung der zweiten Ableitung.

e) Geben Sie die Taylorentwicklung in den Extrempunkten bis zum Grad 2 an.

f) Skizzieren Sie die Funktion, die Asymptote, sowie die Taylorapproximationen.

Aufgabe 16: Optimierungsaufgabe

Ein Elektrizitätswerk (E) liegt an einem 400 Meter breiten geradlinig verlaufenden Fluss. Es soll eine Leitung zu einem 1800 Meter flussabwärts auf der anderen Flussseite gelegenen Haus (H) verlegt werden.
Ein Meter Leitung zu Wasser kosten das dreifache eines Meters Leitung zu Land. Welche Leitungsführung verursacht die geringsten Kosten?



Aufgabe 17: Optimierungsaufgabe

Die Abmessungen einer Konservendose (Höhe H Dezimeter und Durchmesser D Dezimeter) mit einem Liter Inhalt sollen so bestimmt werden, dass der Blechverbrauch minimal wird.

a) Stellen Sie eine Formel für die benötigte Fläche an Blech (in Quadratdezimetern) auf, nehmen Sie dabei als benötigte Fläche ...

  i) ... die tatsächlich verarbeitete Blechfläche $A_t(D, H)$ an (ohne Verschnitt).

  ii) ... die insgesamt verbrauchte Fläche $A_v(D, H)$ an (inklusive einem jeweils quadratischen Blech für Deckel und Boden).

b) Eliminieren Sie in den Funktionen $A_*(D, H)$ unter Ausnutzung der Volumenformel eine der beiden Größen.

c) Bestimmen Sie für beide Funktionen die Werte, die zu minimalem Blechverbrauch führen.

Aufgabe 18: Stationäre Punkte

Gegeben sei die Funktion

$$f(x, y) = x^3 + x^2 y - y^2 - 4y.$$

Finde alle stationären Punkte und bestimme, ob sie lokale Minima, Maxima oder Sattelpunkte sind.

Aufgabe 19: Extremwerte

a) Ermitteln Sie die kritischen Punkte der Funktion

$$f(x, y) = (1 + 2x - y)^2 + (2 - x + y)^2 + (1 + x - y)^2$$

und bestimmen Sie, ob es sich um Maxima, Minima oder Sattelpunkte handelt.

b) Ermitteln Sie ebenso die kritischen Punkte der Funktionen

$$g(x, y, z) = x^2 + xz + y^2$$
$$h(x, y) = (y^2 - x^2)\mathrm{e}^{\frac{x^2+y^2}{2}}$$

und bestimmen Sie, ob es sich um Maxima, Minima oder Sattelpunkte handelt.

Aufgabe 20: lokale Extrema in 3 Dimensionen

Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x, y, z) \to \frac{2\,y^3}{3} + x^2 - 2\,xy + xz - x - z + 1\ .$$

Bestimmen Sie die stationären (kritischen) Punkte der Funktion und bestimmen Sie deren Charakteristik.
Hinweis: Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind praktisch nur numerisch zu bestimmen. Die Vorzeichen der Eigenwerte erhält man aber sehr leicht aus einer einfachen Kurvendiskussion oder Skizze.

Aufgabe 21: Stationäre Punkte

Gegeben sei die Funktion

$$f(x, y) = ax^2 + 2xy + ay^2 - ax - ay$$

Bestimmen Sie diejenigen $a \in \mathbb{R}$, für welche die Funktion f relative Maxima, relative Minima und Sattelpunkte besitzt und geben Sie diese an.

Aufgabe 22: Folgenkonvergenz

Untersuchen Sie die nachfolgenden Folgen auf Konvergenz und bestimmten Sie – wenn möglich – den Grenzwert:

$$a_n = \frac{2n^2+3n}{2n^2+7} \qquad b_n = \frac{2n^3-2}{5n^2-1}$$

$$c_n = \frac{2n^2+7n+(-1)^n}{5n+2} - \frac{2n^3-2}{5n^2-1}, \qquad d_n = \left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$$

$$e_n = n\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}\right) \qquad f_n = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \text{ (mit ganzzahligem } x)$$

$$g_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n+1}$$

Hinweise:
- Setzen Sie voraus, dass f_n konvergiert und ermitteln Sie den Grenzwert.
- Benutzen Sie zur Untersuchung von g_n das Ergebnis für f_n.

Aufgabe 23: Funktionenlimes

a) Gegeben sei die Funktion

$$f(x) := \frac{x^3+|x+1|+\operatorname{sign}(x+1)}{\operatorname{sign} x}, \; x \in D(f) := \mathbb{R}\,.$$

Bestimmen Sie $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to (-1)+} f(x)$ und $\lim\limits_{x\to (-1)-} f(x)$.

b) Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \frac{\sinh x}{\cosh(ax)}\,, \quad a \in \mathbb{R}\,.$$

Bestimmen Sie $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$.

Hinweise:
- Mit der zunächst als bekannt vorausgesetzten Exponentialfunktion e^x gilt

$$\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \text{und} \qquad \cosh x := \frac{e^x+e^{-x}}{2}.$$

- Die Signum-Funktion liefert das Vorzeichen des Argumentes:

$$\operatorname{sign}(z) = \begin{cases} +1 & , z \geq 0 \\ -1 & , z < 0 \end{cases}$$

Aufgabe 24: Funktionenlimes

Man bestimme den Limes der folgenden Funktionen

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}$

b) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{\sin(x)}{x}$

c) $\lim\limits_{x\to \infty} x\ln(x)$

Aufgabe 25: Grenzwertdefinition

Bestimmen Sie zu den unten angegebenen Folgen (a_n) mit dem Grenzwert a und die angegebenen Werte für k jeweils ein N so, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > N$ gilt

$$|a_n - a| < 10^{-k}.$$

a) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, $a = 0$, $k = 2$

b) $a_n = \dfrac{3n+1}{n+1}$, $a = 3$, $k = 4$

c) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n!} + 1$, $a = 1$, $k = 3$

Aufgabe 26: Grenzwerte monotoner Folgen

Es seien $a_1 = \sqrt{2}$ und $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$. Überprüfen Sie,

a) dass (a_n) beschränkt ist,

b) dass (a_n) monoton wächst und

c) gegen die größte Lösung der Gleichung $x^2 - x - 2 = 0$ konvergiert.

Aufgabe 27: Grenzwert Analyse - Definition

a) Notieren Sie die Definition des Grenzwertes und zeigen Sie, dass die Folge $a_n = \dfrac{1}{n}$ gegen den Grenzwert $a = 0$ konvergiert.
(Dies ist gleichbedeutend mit dem Nachweis, dass $\forall k \in \mathbb{N}$ eine Zahl $N \in \mathbb{R}$ existiert, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > N$ gilt: $|a_n - a| < 10^{-k}$).

b) Berechnen Sie den Grenzwert $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ der untenstehenden Folgen und dokumentieren Sie die Rechenregel, die Sie zur Berechnung des Grenzwertes verwendet haben (Produktregel, Einschließungssatz, Produkt beschränkter Folgen, Produkt von Nullfolgen etc).

i) $a_n = \dfrac{n^2+5n}{3n^2+1}$ **ii)** $a_n = \log_{10}(10n^2-2n) - \log_{10}(n^2+1)$

iii) $a_n = \dfrac{(n+1)!}{n!-(n+1)!}$ **iv)** $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{3n}$

v) $a_n = \dfrac{\cos n}{n}$ **vi)** $a_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

vii) $a_n = \dfrac{2^n}{n!}$

Aufgabe 28: Integration

a) Berechnen Sie folgende Integrale mittels partieller Integration:

$$\int x\cdot\sin x\,\mathrm{d}x, \qquad \int \sin^2(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \int x^2\mathrm{e}^{1-x}\,\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x, \qquad \int_0^{\pi/4} \frac{x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$$

b) Berechnen Sie folgende Integrale mittels einer geeigneten Substitution:

$$\int_1^2 \frac{3x^2+7}{x^3+7x-2}\,\mathrm{d}x, \qquad \int_\pi^{3\pi/2} x^2\cos(x^3+2)\,\mathrm{d}x, \qquad \int_1^2 \frac{1}{x}\mathrm{e}^{1+\ln x}\,\mathrm{d}x$$

$$\int_{1/4}^1 \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x, \qquad \int \cosh^2 x\sinh x\,\mathrm{d}x$$

Aufgabe 29: Frühere Klausuraufgabe

a) Berechnen Sie die Integrale

$$I = \int_0^\pi (\sin x)\cdot\mathrm{e}^{2\cos x}\mathrm{d}x \qquad \text{und} \qquad J = \int_1^2 (t^3-2t)\mathrm{e}^{3t^2}\,\mathrm{d}t.$$

b) Berechnen Sie das Integral $\int_B \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, wobei B der Kreisring in der (x,y)−Ebene mit Mittelpunkt $(0,0)^\top$, Innenradius a und Außenradius b (mit $0<a<b$) ist.

c) Berechnen Sie das Integral

$$\iiint_D \mathrm{e}^{5z+3y+2x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

über dem Gebiet $D = \left\{(x,y,z)^\top \,\middle|\, x,y,z\geq 0 \text{ und } 5z+3y+2x\leq 2\right\}$.

Aufgabe 30:

a) **zur partiellen Integration**

$$\int u(t)\cdot v'(t)\ \mathrm{d}t \ = \ u(t)\cdot v(t) - \int u'(t)\cdot v(t)\ \mathrm{d}t$$

Berechnen Sie Stammfunktionen der beiden Funktionen

i) $(2t-1)\cos(t)$, **ii)** $\left(t^2+t-5\right)\mathrm{e}^{t/2}$.

b) **zur Substitution**

$$\int f\big(g(t)\big)\cdot g'(t)\ \mathrm{d}t \ = \ \int f(z)\ \mathrm{d}z \text{ mit } z=g(t)\ , \quad \mathrm{d}z = g'(t)\,\mathrm{d}t$$

Berechnen Sie Stammfunktionen von

i) $4\,t\,\mathrm{e}^{t^2}$ **ii)** $\dfrac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{e}^{\sqrt{t}}$.

Aufgabe 31:

a) Bestimmen Sie die folgenden Integrale

$$\int (x^2+3x-4)\mathrm{d}x \quad , \quad \int_{x=-4}^{4} (x^3-x)\mathrm{d}x$$

$$\int_{x=-1}^{3} \left(5x^4+\frac{x^3}{3}+2\right)\mathrm{d}x \quad , \quad \int \left(x^2+7x-\frac{x^5}{5}\right)\mathrm{d}x.$$

b) Bestimmen Sie desweiteren

$$\int \cos(x)\mathrm{d}x \quad , \quad \int_{x=2}^{8} \frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

$$\int_{x=0}^{2\pi} \sin(x)\mathrm{d}x \quad , \quad \int_{x=0}^{\pi/2} \cos(x)\mathrm{d}x.$$

Aufgabe 32: Schwerpunkt und Trägheitsmoment einer Kreisscheibe

Gegeben sei die Kreisscheibe

$$K = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 | \quad \left\|\boldsymbol{x} - (0,2)^\top\right\|_2 \leq 2\}$$

mit der Massendichte $\rho(x,y) = x^2 + 4$.

a) Berechnen Sie die Masse $M = \int\limits_K \rho(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ der Kreisscheibe. Führen Sie die Rechnung in kartesischen Koordinaten durch.

b) Berechnen Sie ebenso den Schwerpunkt

$$\boldsymbol{s} = \frac{1}{M}\int\limits_K \rho(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

Führen Sie die Rechnung in den verschobenen Polarkoordinaten $\boldsymbol{x}(r,\varphi) = (r\cos\varphi,\, 2 + r\sin\varphi)^\top$ aus.

c) Berechnen Sie das Trägheitsmoment bezüglich der x-Achse

$$\Theta_y = \int\limits_K \rho(x,y)y^2\mathrm{d}(x,y).$$

Aufgabe 33: Bogenlänge

Die Bogenlänge des Graphen einer stetig differenzierbaren Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ auf dem Interval $[a,b]$ wird definiert als

$$L = \int\limits_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x.$$

Berechnen Sie die Bogenlänge der folgenden Funktionen:

a) $f_1(x) = \sqrt{4 - x^2}$ auf $[-2,2]$

b) $f_2(x) = x^2$ auf $[0,b]$

Aufgabe 34: Integration in Kugelkoordinaten

Gegeben sei das Rotationsellipsoid

$$E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, x^2 + 4y^2 + z^2 \leq 9\right\}.$$

Man berechne das Integral $\int\limits_B (x^2 + y + z^2)\mathrm{d}(x,y,z)$ unter Verwendung von

a) Zylinderkoordinaten

b) an das Ellipsoid angepasste Kugelkoordinaten:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi\cos\psi \\ \frac{r}{2}\sin\varphi\cos\psi \\ r\sin\psi \end{pmatrix}.$$

Hinweis(zu **a)**): Verwenden Sie um die $y-$Achse rotationssymmetrische Zylinderkoordinaten

$$\boldsymbol{x}(r,\varphi,y) = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ y \\ r\sin(\varphi) \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 35: Integration in Kugelkoordinaten

Berechnen Sie

$$I = \int\!\!\int\limits_B\!\!\int \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathrm{d}(x,y,z),$$

wobei B das Innere der Kugel $x^2 + y^2 + z^2 + 2Ry = 0$ ist.

Hinweis: Verwenden Sie die Kugelkoordinaten

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sin\varphi\sin\theta \\ r\cos\theta \\ r\cos\varphi\sin\theta \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 36: Masse einer Halbkugel

Berechnen Sie die Masse einer Halbkugel mit Mittelpunkt $(0,0,0)^\top$, Radius $a > 0$ sowie $z \geq 0$ und der Massendichte

$$\rho(x,y,z) = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Hinweis: Die Masse M eines Körpers K mit Massendichte $\rho(\boldsymbol{x})$ ergibt sich aus

$$M = \int\limits_K \rho(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

Aufgabe 37: Bereichsintegrale

Berechnen Sie

a) $I := \int\limits_D x^2\, y + x \;\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ mit $D := [-2, 2] \times [1, 3]$.

b) $J := \int\limits_G x \mathrm{d}(x, y)$ mit dem durch die Kurven

$$x = 0,\; y = 2x \text{ und } y = \frac{1}{a}\, x^2 + a\ ,\ a > 0$$

berandeten Flächenstück G.

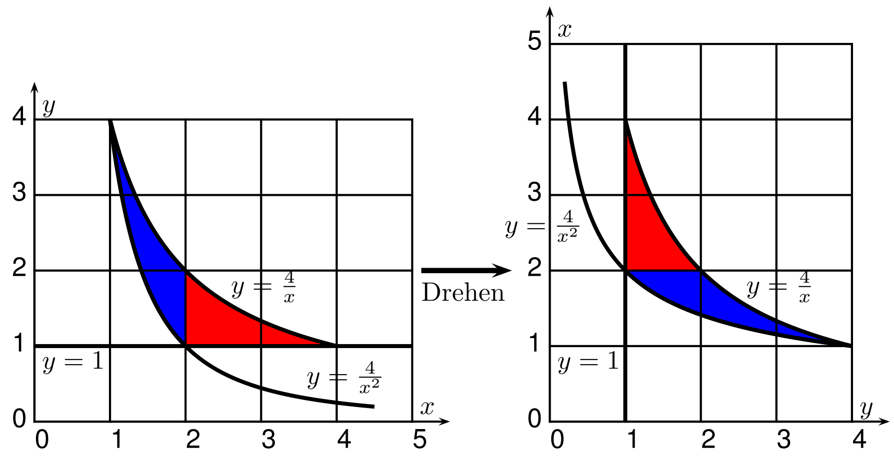
c) Betrachten Sie das zweifache Integral

$$I := \int_{x=1}^{2} \int_{y=4/x^2}^{4/x} xy^2 \mathrm{e}^{x^2y^2/4}\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x + \int_{x=2}^{4} \int_{y=1}^{4/x} xy^2 \mathrm{e}^{x^2y^2/4}\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x.$$

i) Skizzieren Sie den Integrationsbereich und vertauschen Sie die Integrationsreihenfolge.

ii) Berechnen Sie das Integral.

Hinweis: **zu c)** Die Integrationsbereiche B_1 und B_2 beider Einzelintegrale sind in folgender Skizze blau und rot markiert. Die y-Grenzen hängen von x ab und speziell die untere y-Grenze wird für beide Bereiche durch unterschiedliche Funktion beschrieben. ($y = \frac{4}{x^2}$ und $y = 1$)
Das Ändern der Integrationsreihenfolge entspricht dem Drehen der Skizze (rechts).
Nun werden die Ober und Untergrenzen für x in beiden Integrationsbereichen von der jeweils selben Funktion (y-abhängig) beschrieben. Daher kann man nun beide Integrale zusammenfassen.



Aufgabe 38: Flächeninhalt, Rotationskörper

a) Skizzieren Sie den Bereich $B \subset \mathbb{C}$ mit

$$B = \{|z + \bar{z}| + |z - \bar{z}| \leq 4\} \cap \{0 \leq \mathrm{Re}(z) \leq 1\}$$

in der Gauß'schen Ebene.

b) Interpretieren Sie B als Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ und berechnen Sie den Flächeninhalt.

c) Berechnen Sie ebenso den Schwerpunkt $\boldsymbol{x}_s$ des Bereichs B.

d) Berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers, der durch Rotation von B um die y-Achse entsteht.

Aufgabe 39: Bereichsintegrale

Gegeben sei das Doppelintegral

$$I := \int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{y-1}^{1-y} \frac{y + x^3}{4}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ .$$

a) Skizzieren Sie den von den Grenzen beschriebenen Teilbereich der x-y–Ebene.

b) Berechnen Sie das Integral.

Aufgabe 40*: Integration in $\mathbb{R}^2$

Berechnen Sie den Wert des Integrals

$$\int\limits_B f_j(x,y)\mathrm{d}(x,y), \qquad j = 1,\, 2$$

auf dem Bereich $B = [0,\, \pi] \times [0,\, \mathrm{e} - 1]$ für die beiden Funktionen

$$f_1(x,y) = \frac{\sin x}{1+y}, \qquad f_2(x,y) = x(y+1)^{x-1}.$$

Aufgabe 41: Wiederholung: Schwerpunkt und Trägheitsmoment

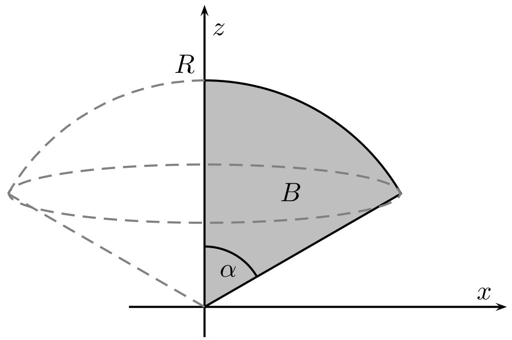
Gegeben sei der Kreissektor B in der x–z–Ebene in Abhängigkeit von den Parametern

$$R > 0 \text{ und } 0 < \alpha \leq \pi \; .$$

Durch die Rotation der Fläche B um die z–Achse wird ein Kugelsegment K gebildet.

Bestimmen Sie den Schwerpunkt und das Trägheitsmoment bezüglich der z-Achse des homogenen Rotationskörpers.

Hinweis: In Bezug auf die Masse bedeutet Homogenität, dass die Massendichte $\rho(x,y,z)$ des Körpers konstant ist. Es kann also beispielsweise $\rho \equiv 1$ angenommen werden.



Aufgabe 42: Volumenintegrale

Berechnen Sie

$$\int_V \frac{\mathrm{e}^{-x^2-y^2}}{1+z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

mit

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; z \geq 0\}.$$

Hinweise:

- Es empfiehlt sich die Rechnung in Zylinderkoordinaten.
- Der Integrationsbereich ist unendlich groß. Dadurch treten uneigentliche Integrale auf.

Aufgabe 43: Schnittflächenberechnung

a) Gegeben sei ein Kreis $K \subset \mathbb{R}^2$ mit Radius $R = 1$ und Flächeninhalt $A = \pi$.

i) Welche Kantenlänge $2L$ hat ein Quadrat Q mit demselben Flächeninhalt $A = \pi$?

ii) Die Mittelpunkte beider Flächen (Kreis und Quadrat) befinden sich im Koordinatenursprung. Stellen Sie das Integral (inklusive Grenzen) zur Berechnung des Flächeninhaltes $A_{K\cap Q}$ der Schnittmenge $K \cap Q$ auf.

iii****)** Berechnen Sie das Integral $A_{K\cap Q}$.

b) Gegeben sei nun eine Kugel $B \subset \mathbb{R}^3$ mit Radius $R = 1$ und Volumen $V = \dfrac{4\pi}{3}$.

Welche Kantenlänge $2L_3$ hat ein Würfel W mit demselben Volumen $V = \dfrac{4\pi}{3}$?

Berechnen Sie das Volumen der Schnittmenge $W \cap B$.

Aufgabe 44: Alte Klausuraufgabe

a) Berechnen Sie das Integral $\iint_D \frac{x^2}{y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, wobei D den von den Geraden $x = 2$, $y = x$ und der Hyperbel $xy = 1$ begrenzten Bereich des $\mathbb{R}^2$ bezeichne.

b) Gegeben sei der Körper

$$K = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 - z^2 \leq 1,\; -1 \leq z \leq 2\right\}.$$

Skizzieren Sie den Körper und berechnen Sie dessen Volumen.

Aufgabe 45: Frühere Klausuraufgabe

Berechnen Sie die Integrale

i) $I_1 = \displaystyle\int\limits_0^1 (2x-1)\cosh(x)\mathrm{d}x,$

ii) $I_2 = \displaystyle\int \frac{\sin(x)\mathrm{e}^{\tan x}}{\cos^3(x)}\mathrm{d}x$

Aufgabe 46: Parametrisierung von Integrationsbereichen

Gegeben seien die folgenden drei Körper im $\mathbb{R}^3$:

- ein Quader $Q = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 | \, 0 \le x_1 \le 1, \, 0 \le x_2 \le 1, \, -3 \le x_3 \le 3\}$
- eine Kugel $K = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 | \, \|\boldsymbol{x}\| \le 1\}$
- ein Zylinder $Z = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 | \, x_1^2 + x_2^2 \le 1, \; 0 \le x_3 \le 3\}$

Skizzieren und parametrisieren Sie die Schnittmenge eines jeden einzelnen dieser Körper mit den beiden folgenden Mengen:

$$M_1 = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 | \, 0 \le \boldsymbol{x}_3\}, \; M_2 = \{\boldsymbol{x} | \, 3x_1 \le x_3\}.$$

D. h. geben Sie die Integrationsgrenzen der zugehörigen Volumenintegrale über die Bereiche $Q \cap M_1$, $Q \cap M_2$, $K \cap M_1$, ... an.

Aufgabe 47*: Transformationsformel

a) Berechnen Sie $I := \int\limits_{\boldsymbol{D}} (x^2 \, y^4 + x) \mathrm{d}(x, y)$ mit $\boldsymbol{D} := [-2, 2] \times [1, 3]$. in den Koordinaten

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ x - y \end{pmatrix}.$$

b) Berechnen Sie für den Bereich B, der von der Kurve $r = \varphi$, $0 \le \varphi \le \pi$ (in Polarkoordinaten) und der x-Achse eingeschlossen wird, das Integral

$$J := \int\limits_B \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \mathrm{d}B.$$

Führen Sie Ihre Rechnung in **Polarkoordinaten** durch.

Aufgabe 48: Transformationsformel

a) Berechnen Sie

$$I := \int\limits_{\boldsymbol{D}} \frac{x^6 - 2x^5 y - x^4 y^2 + 4x^3 y^3 - x^2 y^4 - 2xy^5 + y^6 + 32x + 32y}{64} \mathrm{d}(x, y),$$

wobei der Bereich $\boldsymbol{D}$ von den Geraden

$$y = -x - 4, \qquad y = x - 2, \qquad y = 4 - x \qquad \text{und} \qquad y = x - 6$$

eingeschlossen wird.
Führen Sie Ihre Berechnungen zunächst in kartesischen Koordinaten durch.
Berechnen Sie I anschließend in den Koordinaten

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x + y \\ x - y \end{pmatrix}.$$

b) Berechnen Sie für den Bereich B, der von der Kurve $r = \varphi$, $0 \le \varphi \le \pi$ (in Polarkoordinaten) und der x-Achse eingeschlossen wird, das Integral

$$J := \int\limits_B \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \mathrm{d}B.$$

Führen Sie Ihre Rechnung in **Polarkoordinaten** durch.

c) Berechnen Sie das Integral

$$I_E = \int\limits_E x^2 \mathrm{d}(x, y),$$

wobei der Integrationsbereich eine Ellipse ist:

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 | \, x^2 + \frac{y^2}{4} \le 1 \right\}$$

Hinweis: Nutzen Sie die gestreckten Polarkoordinaten

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ 2r\sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

.

Aufgabe 49: Bereichsintegral

Gegeben sei der Integrationsbereich B, der von den beiden Kurven:

$$y = \sin(x) \qquad \text{und} \qquad y = \cos(x)$$

im Bereich $0 \le x \le 2\pi$ komplett eingeschlossen wird.

a) Skizzieren Sie den Bereich $B \subset \mathbb{R}^2$.

b) Berechnen Sie das Integral

$$I = \int\limits_B 2y \mathrm{d}(x, y).$$

Aufgabe 50: Uneigentliche Integrale

Überprüfen Sie, ob die folgenden uneigentlichen Integrale existieren (d. h. einen endlichen Wert annehmen). Berechnen Sie für das dritte Beispiel den Wert des Integrals.

$$I_1 = \int\limits_1^\infty \frac{\sin\frac{1}{x^2}}{x^2}\mathrm{d}x$$

$$I_2 = \int\limits_0^1 \frac{\cos x^2}{1-x}\mathrm{d}x$$

$$I_3 = \int\limits_0^\infty \frac{\arctan x}{x^2+1}\mathrm{d}x$$

Aufgabe 51: Kreiszylinder

Berechnen Sie das Volumen der Schnittmenge

i) zweier Kreiszylinder um die $z-$ und die y-Achse.

ii**) dreier Kreiszylinder um die $x-$, die $y-$ und die $z-$Achse.

Die Zylinder haben jeweils den Radius 1.

Aufgabe 52: Zylinderkoordinaten

Skizzieren Sie den Körper K, der in Zylinderkoordinaten durch folgende Bedingungen charakterisiert wird:

$$\tilde{K} = \left\{(r,\varphi,z) \middle| \, \varphi \le 2\pi r \le \sqrt{\varphi},\ 0 \le z \le \frac{r\varphi}{2\pi}\right\}$$

Berechnen Sie das Volumen des Körpers K.

Aufgabe 53**: Interpolation

Gesucht ist ein Polynom vierten Grades

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4$$

mit folgenden Eigenschaften:

- Der Funktionswert bei 0 ist $p(0) = 0$.
- p hat ein Minimum bei $(1, -1)$.
- p hat einen Sattelpunkt bei $(2, 0)$.

a) Geben Sie die Bedingungen, die der Koeffizientenvektor $(a_0, \ldots, a_4)^\top$ erfüllen muss, in Form eines linearen Gleichungssystems an. (Es sollten sich sechs lineare Gleichungen mit fünf Unbekannten ergeben.)

b) Berechnen Sie den Rang der Koeffizientenmatrix und der erweiterten Koeffizientenmatrix. Ist das Gleichungssystem lösbar?

c) Welchen Wert $p(0)$ muss die Funktion bei 0 annehmen, damit das System doch lösbar ist?

d) Lösen Sie das so geänderte Gleichungssystem.

e) Skizzieren Sie die Funktion $p(x)$.

Aufgabe 54: Umkehrfunktion

Gegeben seien die folgenden Funktionen

i) $f_1(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$,

ii) $f_2(x) = \frac{1}{x^2-1}$,

iii) $f_3(x) = \sin(x)$,

iv) $f_4(x) = \tan(x)$.

a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich und den Wertebereich.

b) Bestimmen Sie die Einschränkung des Definitionsbereichs und Wertebereichs, so dass die Funktionen bijektiv sind. (Betrachten Sie, falls nötig, den Hauptzweig.)

c) Bestimmen Sie die inverse Funktion.

d) Skizzieren Sie die Funktion sowie deren inverse Funktion.

Aufgabe 55: Umkehrfunktion

Gegeben seien die folgenden Funktionen. Geben Sie den Definitionsbereich an (betrachten Sie dabei den Hauptwert der Funktion) und überprüfen Sie, ob die Funktionen invertierbar sind. Bestimmen Sie jeweils die inverse Funktion.

i) $f(x) = 2x - 1$.

ii) $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$.

iii) $f(x) = (x-1)^{\frac{1}{3}}$.

iv) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$.

v) $f(x) = \log_2(x+3)$.

vi) $f(x) = 2 + \mathrm{e}^{x-1}$.

vii) $f(x) = \arccos(x^{-2})$.

Aufgabe 56: Inverse Funktion

Gegeben seien die folgenden Funktionen

i) $f_1(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$,

ii) $f_2(x) = \frac{1}{x^2-1}$,

iii) $f_3(x) = \sin(x)$,

iv) $f_4(x) = \tan(x)$.

a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich und den Wertebereich.

b) Betimmen Sie die Einschränkung des Definitionsbereichs und Wertebereichs, so dass die Funktionen bijektiv sind. (Betrachten Sie, falls nötig, den Hauptzweig.)

c) Bestimmen Sie die inverse Funktion.

d) Skizzieren Sie die Funktion sowie deren inverse Funktion.

Aufgabe 57: Mehrdimensionale Kettenregel

Berechnen Sie mit Hilfe der Kettenregel die Jacobi-Matrix der Funktion

$$\boldsymbol{h}(x,y,z) = \boldsymbol{h}_2(\boldsymbol{h}_1(x,y,z))$$

mit

$$\boldsymbol{h}_1(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3xz+2y \\ 4y^2+\frac{1}{3}x^3z \end{pmatrix} \text{ und } \boldsymbol{h}_2(u,v) = \begin{pmatrix} \cos(2u-3v) \\ \frac{1}{2}u+\frac{3}{2}v^2 \\ 4v+u \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 58:

a) Gegeben sei die Funktion $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\sin x\right)$.

- **i)** Bestimmen Sie den Definitionsbereich und den Wertebereich von f.
- **ii)** Zeigen Sie, dass die Funktion f die Periodizität π besitzt, d.h. zeigen Sie, dass $f(x+\pi) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.
- **iii)** Bestimmen Sie alle Nullstellen von f.
  Hinweis: Beachten Sie die Periodizität von f.
- **iv)** Bestimmen Sie alle Extrema von f und charakterisieren Sie diese.
  Hinweis: Beachten Sie die Periodizität von f.
- **v)** Skizzieren Sie den Graphen von f im Intervall $[-\pi, 2\pi]$.

b) Bestimmen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x\to\infty}(x+3)\left(\mathrm{e}^{2/x}-1\right).$$

Aufgabe 59: Kurvendiskussion

Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich, die Symmetrie, alle Nullstellen, sowie Art und Lage der kritischen Punkte und Wendepunkte der rellen Funktion

$$f(x) = x\sqrt{16-x^2}.$$

Aufgabe 60: Kurvendiskussion

a) Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \frac{x^2+3\,x}{1-x}.$$

- **i)** Geben Sie den maximalen Definitionsbereich der Funktion f an.
- **ii)** Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion.
- **iii)** Bestimmen Sie die kritischen Punkte für die Extrema der Funktion und deren Funktionswerte.
- **iv)** Bestimmen Sie die (nicht vertikale) Asymptote der Funktion, d. h. diejenige Gerade $g(x) = a + b\,x$ für die
  $$\lim_{x\to\pm\infty}\big(f(x)-g(x)\big) = 0$$
  ist.
- **v)** Skizzieren Sie die Funktion.

b) Gegeben sei die Funktion

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to \left(x^2-4\right)^2 \cdot \mathrm{e}^{-x}.$$

Bestimmen Sie alle relativen Minima und Maxima der Funktion g **ohne** die zweite Ableitung zu berechnen.

Aufgabe 61: Kurvendiskussion

Führen Sie eine Kurvendiskussion für die Funktion

$$f(x) = \ln(3x^2+2x+1)$$

durch. Bestimmen Sie dazu:

a) den maximalen Definitionsbereich von f,

b) die Symmetrieachsen von f, d. h. Werte $\alpha \in \mathbb{R}$, so dass $f(\alpha+x) = f(\alpha-x)$,

c) das Verhalten von f im Unendlichen,

d) die Nullstellen von f,

e) die Extrema und das Monotonieverhalten von f,

f) sowie die Wendepunkte und das Krümmungsverhalten von f.

g) Skizzieren Sie den Graphen von f.

Aufgabe 62: Kurvendiskussion

a) Gegeben sei die reelle Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 + 7\,x + 10}{x + 1} \ .$$

i) Geben Sie den maximalen Definitionsbereich der Funktion an.

ii) Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion.

iii) Bestimmen Sie die kritischen Punkte für die Extrema der Funktion und deren Funktionswerte.

iv) Bestimmen Sie die (nicht vertikale) Asymptote der Funktion, d. h. diejenige Gerade $g(x) = a + bx$, für die

$$\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - g(x)) = 0$$

gilt.

v) Skizzieren Sie die Funktion.

b) Gegeben sei die Funktion

$$g \ : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ : \ x \mapsto x^8 \cdot \mathrm{e}^x \ .$$

Bestimmen Sie alle relativen Minima und Maxima der Funktion g.

Aufgabe 63: Laplace-Transformation

Berechnen Sie die Laplace-Transformation $\mathcal{L}\{f(t)\}$ der folgenden Funktionen:

i) $f(t) = 1$,

ii) $f(t) = t$,

iii) $f(t) = t^2$,

iv) $f(t) = t^3$,

v) $f(t) = e^{-at}$,

vi) $f(t) = e^{-at} \cdot t$,

vii) $\mathcal{L}\{f'(t)\}$, for a generic $f(t)$,

viii) $\mathcal{L}\{f''(t)\}$, for a generic $f(t)$.

Aufgabe 64: Vektor- und Matrixwertige Funktionen

Gegeben seien

$$\boldsymbol{A}(t) = \begin{pmatrix} t & t^2 \\ \sqrt{t} & t^5 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{B}(t) = \begin{pmatrix} \sin t & \cos t \\ \mathrm{e}^t & \cosh t \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{c}(t) = \left(t^3,\ \sqrt{t^5},\ \frac{1}{t}\right)^\top, \qquad \boldsymbol{d}(t) = \left(\mathrm{e}^{-t^2},\ \sin(\sqrt{t}),\ \tanh(t/2)\right)^\top.$$

Berechnen Sie

a) $\frac{d}{dt}\Big(\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{B}(t)\Big)$ und

b) $\frac{d}{dt}\Big(\boldsymbol{c}(t) \times \boldsymbol{d}(t)\Big)$

auf die folgenden beiden Arten:

- Indem sie vor der Differentiation die Produkte $\boldsymbol{AB}$ bzw. $\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}$ bilden und die Ergebnisfunktionen ableiten.
- Indem Sie zunächst die Ableitungen der einzelnen Funktionen bilden und diese dann gemäß einer Produktregel verrechnen.

Aufgabe 65: Minimaler Abstand

Gegeben seien die folgenden Funktionen

i) $f_1(x) = x^2 + 1$,

ii) $f_2(x) = \ln(x)$.

a) Skizzieren Sie die Funktionen f_1 und f_2.

b) Bestimmen Sie den minimalen vertikalen Abstand beider Funktionsgraphen

$$d = \min\ \{|f_1(x) - f_2(x)|;\, x \in \mathbb{R}\}\,.$$

Aufgabe 66: Mittelwertsatz

Sei $s(t)$ die Gesamtzahl der Kilometer, die Sie auf Ihrer Reise auf einer Autobahn mit einer Geschwindigkeitsbegrenzung von 120 km/h nach der Zeit t Stunden zurückgelegt haben. Nehmen Sie außerdem an, dass $s(1/4) = 10$ Kilometer und $s(5/4) = 160$ Kilometer beträgt. An einer Kontrollstelle entlang der Autobahn gestehen Sie diese Tatsachen einem Beamten der Autobahnpolizei, der mit dem Mittelwertsatz vertraut ist. Der Beamte führt ein paar schnelle Berechnungen durch, lächelt und bereitet sich dann höflich darauf vor, Ihnen einen Strafzettel auszustellen. Erklären Sie, warum.

Aufgabe 67: Newton-Verfahren

a) Gegeben seien die Funktionen

$$f(x) = \frac{x}{3} \text{ und } g(x) = \sin(x^2).$$

i) Skizzieren Sie die Funktionen und bestimmen Sie Näherungen für die Schnittstellen der beiden Funktionsgraphen.

ii) Bestimmen Sie die kleinste positive Schnittstelle mit dem Newton-Verfahren auf fünf Nachkommastellen genau.

b) Führen Sie das Verfahren ebenso für die Funktionen

$$f(x) = x^3 \text{ und } g(x) = \cos(2\pi x)$$

und die betragskleinste Schnittstelle durch.

Aufgabe 68: Newton-Verfahren

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = 17x^3 - 468x^2 + 2849x - 2294.$$

a) Skizzieren Sie die Funktion im Intervall $-5 \leq x \leq 20$.

b) Führen Sie mindestens zwei Schritte des Newton-Verfahrens mit dem Startwert $x_0 = 13$ für die Funktion $f(x)$ durch.

c) Skizzieren Sie im Funktionsgraphen die berechneten Iterationen x_0, x_1, x_2, ...

Aufgabe 69: Newton-Verfahren

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 15x - 36.$$

a) Bestimmen Sie alle lokalen Extrema der Funktion $f(x)$.

b) Begründen Sie, weshalb f zwei Nullstellen besitzt.

c) Führen Sie das Newton-Verfahren mit der Funktion f zwei mal durch. Wählen Sie im ersten Durchlauf den Startwert $x_0 = 1$ und im zweiten Durchlauf $x_0 = -1$. Führen Sie jeweils drei Iterationsschritte durch.

Aufgabe 70: Optimierungsproblem

Ein Poster muss mit einer Gesamtfläche von $\bar{A} = 64000 \text{ mm}^2$ gedruckt werden. Es muss 10 mm Seitenränder und 25 mm obere und untere Ränder haben. Welche Höhe und Breite ergeben die maximale Druckfläche?

Aufgabe 71: Tangenten

a) Bestimmen Sie die Geradengleichungen (in der Form $ax + by = c$) der Tangenten an den Nullstellen der Funktionen

$$\varphi_1(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6, \qquad \varphi_2(x) = x^2 \text{ und } \varphi_3(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{für } x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & \text{für } x < 0 \end{cases}.$$

b) Geben Sie alle Punkte ($x-$Werte) an, in denen die Tangenten von $f(x) = x^2$ und $g(x) = x^3$ parallel sind.

c) Stellen Sie den Verlauf der beiden vektorwertigen Funktionen

$$\boldsymbol{v}(t) = \begin{pmatrix} t \\ \varphi_3(t) \end{pmatrix} \qquad \text{mit } \varphi_3(t) \text{ aus Aufgabenteil } \textbf{a)}$$

und

$$\boldsymbol{w}(s) = \begin{pmatrix} s \cdot |s| \\ s \end{pmatrix}.$$

im selben Graphen dar.
Berechnen Sie – wo möglich – die Ableitungen beider Funktionen $\boldsymbol{v}(t)$ und $\boldsymbol{w}(s)$.

Hinweis: Die Funktion $\boldsymbol{w}(s)$ lässt sich analog zu $\varphi_3(t)$ mit Hilfe einer Fallunterscheidung auch ohne die Betragsfunktion darstellen.

Aufgabe 72: Partielle Ableitungen

Gegeben sei die Funktion

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Berechnen Sie $f_{xy}(x,y)$ für alle $(x,y)^\top \in \mathbb{R}^2$ und untersuchen Sie, wo

$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y)$$

gilt.
Sind die zweiten Ableitungen von f stetig in $(0,0)^\top$?
Hinweis: Berechnen Sie die Ableitungen im Ursprung $(0,0)^\top$ über die Grenzwert-Definition.

Aufgabe 73: Partialbruchzerlegung

Berechnen Sie mit Hilfe der Partialbruchzerlegung die unbestimmten Integrale folgender Funktionen:

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$, b) $f(x) = \dfrac{x^2}{(x-3)^3}$,

c) $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{(x+1)(x-2)^2}$, d) $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)(x^2+x+1)}$.

Aufgabe 74: Regel von L'Hospital

Berechnen Sie mit Hilfe der Regel von L'Hospital die Grenzwerte

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 \sin x}{\tan x - x}$, b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\mathrm{e}^x - x)}{\ln(\cos x)}$,

c) $\lim\limits_{x\to\infty} x(2\arctan x - \pi)$, d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x^x - 1}$.

Aufgabe 75: Regel von L'Hospital

Berechnen Sie mit Hilfe der Regel von L'Hospital die Grenzwerte

$$A = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right), \qquad B = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cosh x}{x^3}\right), \qquad C = \lim_{x\to 1}\left(\frac{\ln x}{\sin(\pi x)}\right)$$

Aufgabe 76: Richtungsableitungen

a) Gegeben seien die skalarwertigen Funktionen

$$f(x,y,z) = y^2 - xz \qquad \text{und} \qquad g(x,y,z) = x^2\sin(y) + \cos(z).$$

Berechnen Sie die Richtungsableitung beider Funktionen in Richtung $\boldsymbol{h} := (-2,3,4)^\top$.

b) Gegeben sei die folgende vektorwertige Funktion

$$\boldsymbol{f}(x,y) = (\mathrm{e}^{xy}, x^2 + y^3)^\top.$$

i) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix von $\boldsymbol{f}$ in dem Punkt $\boldsymbol{P}_1 = (1,2)^\top$.

ii) Berechnen Sie die Richtungsableitung von $\boldsymbol{f}$ in Richtung $\boldsymbol{v} = (1,0)^\top$ in dem Punkt $\boldsymbol{P}_2 = (1,1)^\top$.

Aufgabe 77: Kurven im $\mathbb{R}^n$

Ein Satellit bewege sich auf der Bahn

$$\boldsymbol{r}(t) = \left(\sqrt{1+t^2},\, 3t\right)^\top$$

a) Berechnen Sie die Geschwindigkeit $\dot{\boldsymbol{r}}(t)$ des Satelliten.

b) Geben Sie die Grenzwerte (für $t \to +\infty$ und für $t \to -\infty$) der Bahnrichtung r_2/r_1 und Geschwindigkeit $\dot{\boldsymbol{r}}$ des Satelliten an.

Aufgabe 78: Stetige Fortsetzung

a) Untersuchen Sie, ob die folgenden reellen Funktionen im Punkt $x = 0$ stetig sind oder stetig fortgesetzt werden können.

$$f_1(x) = |x|, \qquad f_2(x) = \frac{x}{|x|}, \qquad f_3(x) = \frac{x^3}{|x|}, \qquad f_4(x) = \frac{x^2}{|x|^2}$$

b) Bestimmen Sie die Definitionslücken der Funktionen

$$g(x) = \frac{2x^3 - 12x^2 + 18x}{x^3 - 9x}$$

In welchen dieser Lücken ist die Funktion stetig fortsetzbar?

Aufgabe 79: Stetige Fortsetzung

a) Untersuchen Sie, ob die folgenden reellen Funktionen im Punkt $x = 0$ stetig sind oder stetig fortgesetzt werden können.

$$f_1(x) = |x|, \qquad f_2(x) = \frac{x}{|x|}, \qquad f_3(x) = \frac{x^3}{|x|}, \qquad f_4(x) = \frac{x^2}{|x|^2}$$

b) Bestimmen Sie die Definitionslücken der Funktionen

$$g(x) = \frac{2x^3 - 12x^2 + 18x}{x^3 - 9x}$$

In welchen dieser Lücken ist die Funktion stetig fortsetzbar?

Aufgabe 80: Äquipotentialfläche und Tangentialebene

Gegeben seien die Funktion $f(x, y, z) = y^2 - xz$ und der Punkt $\boldsymbol{p}_0 = (1, -2, 3)^\top$.

a) Bestimmen Sie die Äquipotentialfläche der Funktion f durch den Punkt $\boldsymbol{p}_0$:

$$\boldsymbol{F} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 | \quad f(x, y, z) = f(\boldsymbol{p}_0)\}.$$

Skizzieren Sie die Schnitte der Fläche $\boldsymbol{F}$ mit zur xy-Ebene parallelen Ebenen, d. h. für konstante z-Werte. (z. B. $z = 0\pm$, $1\pm$, $2\pm$, $3\pm$ und $z \to \infty$)

b) Bestimmen Sie $\nabla f(\boldsymbol{p}_0)$.

c) Bestimmen Sie die Hessesche Normalform der Tangentialebene $\boldsymbol{E}$ an $\boldsymbol{F}$ im Punkt $\boldsymbol{p}_0$.

d) Bestimmen Sie den Abstand der Tangentialebene $\boldsymbol{E}$ zum kritischen Punkt der Funktion f.

Aufgabe 81: Taylor-Entwicklung

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \sin(x)\ln(x).$$

a) Bestimmen Sie das Taylor-Polynom zweiter Ordnung $T_2(x)$ von $f(x)$ um den Punkt $x = 1$.

b) Bestimmen Sie die Differenz zwischen dem Taylor-Polynom $T_2(x)$ und der Funktion $f(x)$ im Punkt $x = 0$, d.h. bestimmen Sie $d(0)$, wobei

$$d(x) := |T_2(x) - f(x)|.$$

Man beachte, dass die Funktion $f(x)$ an der Stelle $x = 0$ stetig fortgesetzt werden muss.

Aufgabe 82: Taylor-Entwicklung

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \ln(x).$$

a) Bestimmen Sie das Taylor-Polynom der Ordnung zwei, $T_2(x)$, von $f(x)$ an der Stelle $x = 1$.

b) Bestimmen Sie das Restglied $R_2(x; 1)$ und schätzen Sie

$$\max_{x\in[1,2]} |R(x; 1)|.$$

Aufgabe 83: Taylor-Polynom

a) Geben Sie das Taylorpolynom n-ter Ordnung der folgenden Funktionen um den angegebenen Entwicklungspunkt x_0 an:

- **i)** $f(x) = \sin(x) \cdot \cos(x)$ um $x_0 = 0$, $n = 4$
- **ii)** $g(x) = \cos(x)$ um $x_0 = \pi/2$, $n = 4$
- **iii)** $h(x) = \mathrm{e}^{1-x}(x^2 - 2x)$ um $x_0 = 1$, $n = 2$

b) Geben Sie die Nullstellen der Funktionen sowie der Taylor-Polynome im Intervall $[0, 5]$ an.

c) Skizzieren Sie die Funktionen und deren Taylor-Polynome.

Aufgabe 84*: Taylor-Entwicklung

a) Geben Sie zu der Funktion

$$f(x, y) = x \sin(xy)$$

die Taylor-Entwicklung ersten Grades $T_1(\boldsymbol{x})$ um den Punkt $\boldsymbol{x}_0 = (1, 0)^\top$ an.

b) Berechnen Sie $f(\boldsymbol{x})$ und $T_1(\boldsymbol{x})$ an der Stelle $\boldsymbol{x} = (0, 1)^\top$. Berechnen Sie außerdem den Fehler der Taylor-Approximation $T_1(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x})$.

c) Geben Sie mit Hilfe des Lagrange-Restgliedes eine Abschätzung für den Fehler

$$|f(\boldsymbol{x}) - T_1(\boldsymbol{x})|$$

an.

Hinweis: Für das Restglied erhalten Sie einen Ausdruck der Form

$$(3\theta - 2)\cos(\theta^2 - \theta) + \frac{1}{2}(3\theta^3 - 7\theta^2 + 5\theta - 1)\cos(\theta^2 - \theta)$$

mit $0 \le \theta \le 1$. Diesen Ausdruck können Sie abschätzen, indem Sie die Extrema der beiden Vorfaktoren ($3\theta - 2$ und $\frac{1}{2}(3\theta^3 - 7\theta^2 + 5\theta - 1)$) auf dem Intervall $[0, 1]$ und eine obere Schranke der Kosinus- bzw. Sinus-Funktion bestimmen.

Aufgabe 85*: Taylor-Entwicklung

Gegeben seien die beiden Funktionen $\mathbb{R} \xrightarrow{\boldsymbol{r}} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = -\,\mathrm{e}^{y+1-x^2} \qquad \text{und} \qquad \boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos(\pi \cdot t) \\ \ln t - \sin^2(\pi \cdot t) \end{pmatrix}.$$

a) Geben Sie die Taylorentwicklung zweiter Ordnung $T_{2,f}$ der Funktion f um den Punkt $\boldsymbol{x}_0 = (1,\, 0)^\top$ an.

b) Geben Sie die Taylorentwicklung zweiter Ordnung $\boldsymbol{T}_{2,r}$ der Funktion $\boldsymbol{r}$ um den Punkt $t_0 = 1$ an. (Entwickeln Sie dazu die Komponenten r_1 und r_2 der Funktion $\boldsymbol{r} = (r_1, r_2)^\top$ separat.)

c) Bilden Sie durch Verkettung beider Funktionen die Funktion

$$g(t) := f \circ \boldsymbol{r}(t).$$

d) Verketten Sie ebenso die beiden Taylor-Polynome

$$\tilde{g}(t) := T_{2,f} \circ \boldsymbol{T}_{2,r}(t).$$

e) Vergleichen Sie g und $\tilde{g}$ und die Taylorpolynome erster Ordung dieser beiden Funktionen.

Aufgabe 86: Taylor-Entwicklung

a) Geben Sie zu der Funktion

$$f(x,y) = x \sin(xy)$$

die Taylor-Entwicklung ersten Grades $T_1(\boldsymbol{x})$ um den Punkt $\boldsymbol{x}_0 = (1,0)^\top$ an.

b) Berechnen Sie $f(\boldsymbol{x})$ und $T_1(\boldsymbol{x})$ an der Stelle $\boldsymbol{x} = (0,1)^\top$. Berechnen Sie außerdem den Fehler der Taylor-Approximation $T_1(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x})$.

c) Geben Sie mit Hilfe des Lagrange-Restgliedes eine Abschätzung für den Fehler

$$|f(\boldsymbol{x}) - T_1(\boldsymbol{x})|$$

an.

d) Berechnen Sie die Richtungsableitung der $\partial_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{x}_0)$ in Richtung $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Hinweis: Für das Restglied erhalten Sie einen Ausdruck der Form

$$(3\theta - 2)\cos(\theta^2 - \theta) + \frac{1}{2}(4\theta^3 - 8\theta^2 + 5\theta - 1)\sin(\theta^2 - \theta)$$

mit $0 \le \theta \le 1$. Diesen Ausdruck können Sie abschätzen, indem Sie die Extrema der beiden Vorfaktoren ($3\theta - 2$ und $\frac{1}{2}(4\theta^3 - 8\theta^2 + 5\theta - 1)$) auf dem Intervall $[0,1]$ und eine obere Schranke der Kosinus- bzw. Sinus-Funktion bestimmen.

Aufgabe 87: Taylor 2D

Man bestimme das Taylor-Polynom vom zweiten Grad der Funktion im Punkt $(0,1)$

$$f(x,y) = \cosh(x) y^2.$$

Aufgabe 88: Trigonometrische Gleichungen

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden Ausdrücke. Beachten Sie dabei die Periodizität der Funktionen. Skizzieren Sie die Funktionen, um Ihre Ergebnisse zu bestätigen.

a) $\sin^2(x) = \dfrac{1}{2}\,.$

b) $\sin^2(x) - \cos^2(x) + \sin(x) = 0\,.$

c) $\cot^2(x) + \cot(x) = 0 \quad \text{with} \quad \cot(x) = \dfrac{1}{\tan(x)} = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}\,.$

d) $\sin(x)\cos(x) = \dfrac{1}{2}\,.$

e) $\dfrac{\tan(x)+1}{\tan(x)-1} = 2 + \sqrt{3}\,.$

Aufgabe 89: Uneigentliche Integrale

Welche der folgenden uneigentlichen Integrale besitzen einen endlichen Wert? Bestimmen Sie den Wert dieser Integrale.

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^{1/4}}\,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_0^{1/\pi} \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ d) $\displaystyle\int_0^{\infty} 2x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$

Aufgabe 90: Umkehrfunktion

a) Geben Sie zu den folgenden Funktionen an, in welchem Bereich sie umkehrbar sind, geben Sie im Punkt $(0, f_j(0))$ den Wert der Ableitung von $f_j^{-1}(x)$ an.

$$\begin{aligned} f_1(y) =& y^3 - 3y \\ f_2(y) =& \frac{y^2+3y}{1-y} \end{aligned}$$

b) Gegeben seien die Funktionen

$$g_3(x) = \tan(x), \qquad g_4(x) = \mathrm{e}^{x^2+2x-8}, \qquad g_5(x) = \cosh(x), \qquad g_6(x) = \frac{1}{x^2+2}.$$

Bestimmen Sie zunächst die Ableitungen $g_j'(x)\,(j = 3,4,5,6)$ dieser Funktionen. Ermitteln Sie daraus mit Hilfe von Satz 3.38 (Ableitung der Umkehrfunktion) die Ableitung der Umkehrfunktionen $f_j(y) = g_j^{-1}(x)\,(j = 3,4,5,6)$. (Es gilt $f_j(g_j(x)) = x$.)
Geben Sie auch für jede Funktion an, in welchem Bereich die Umkehrfunktion erklärt ist.

Aufgabe 91: Umkehrfunktion

a) Differenzieren Sie die folgenden Funktionen:

i) $f_1(x) = 3x^4(\ln x)^2\,,$

ii) $f_2(x) = x^{x+\ln x}\,,\ x > 0\,,$

iii) $f_3(x) = \operatorname{arcsin_H} x + \operatorname{arcsin_H}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) - 3\operatorname{arcsin_H} x\,,\ |x| \le \frac{\sqrt{2}}{2}\,.$

b) Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = e^x + 2x.$$

i) Zeigen Sie, dass $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ umkehrbar ist.

ii) Bestimmen Sie die Ableitungen $g'(1)$ und $g''(1)$ der Umkehrfunktion

$$g = f^{-1}.$$

Aufgabe 92: Transformationsformel für Volumenintegrale

Berechnen Sie

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(x^2+y^2+z^2+1)^2}.$$

Hinweis: Integrieren Sie über eine Kugel K mit Radius R und lassen Sie dann R gegen unendlich wachsen.

Aufgabe 93: Wegableitungen

Gegeben sind die Funktionen

$$f(x,y) = \mathrm{e}^x \cdot \sin y \text{ und } \boldsymbol{g}(t) = (t^3,\ 1+t^2)^\top$$

aus denen sich die Funktion $h(t) = f(\boldsymbol{g}(t))$ ergibt.

a) Berechnen Sie $h'(t)$ durch explizites Einsetzen und anschließendes (eindimensionales) Ableiten nach t.

b) Berechnen Sie $h'(t)$ mit Hilfe der Kettenregel.

Aufgabe 94*: Zwischenwertsatz

Ein Auto fährt eine Strecke von 400km in genau fünf Stunden (was einer Durchschnittsgeschwindigkeit $\bar{v} = 80$km/h entspricht). Gibt es einen zusammenhängenden Zeitabschnitt von exakt einer Stunde, in welchem das Auto eine Strecke von genau 80km gefahren ist?
Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $f(t) := x(t+1) - x(t), \quad t \in [0, 4]$, wobei das Auto nach der Zeit von t Stunden die Strecke von $x(t)$ Kilometern zurückgelegt hat. Wenden Sie den Zwischenwertsatz an.

Aufgabe 95:

a) Zeigen Sie anhand der Definition der Konvergenz, dass gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+n-12}{n^2-8} = 2\,.$$

b) Zeigen Sie: Konvergiert $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a, so konvergiert auch $\{|a_n|\}_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $|a|$.

c) Gilt die Umkehrung von b)? Begründen Sie Ihre Aussage mit einem Beweis oder einem Gegenbeispiel.

Aufgabe 96: Lokale Extrema in 2 Dim.

Gegeben sei die Funktion $f \in \operatorname{Abb}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ mit

$$f(x,y) = (x+y)^2 - 4\,(x+y-2) + y^3 - 3y.$$

Bestimmen Sie alle stationären (kritischen) Punkte dieser Funktion und geben Sie an, ob es sich dabei um lokale Minima, Maxima oder Sattelpunkte handelt, oder ob der Charakter des stationären Punktes nicht durch die Hesse–Matrix entschieden werden kann.

Aufgabe 97: Newton-Verfahren

Zur Berechnung eines kritischen Punktes der Funktion

$$f(x,y) = \int_0^x \left(\frac{\sin(\pi t)}{\pi t} - \frac{1}{3} \right) \mathrm{d}t + \frac{1}{\pi^2} \sin\left(\pi \frac{x}{y}\right)$$

soll das Newton-Verfahren angewandt werden. Bestimmen Sie mit Hilfe **eines Schrittes** des Newton-Verfahrens eine Näherung für einen kritischen Punkt von f in der Nähe von $(1,2)$.

Hinweis: Es gibt keine geschlossene Darstellung des Integrals.

Aufgabe 98:

a) Bestimmen Sie drei verschiedene (reelle) Nullstellen der Ableitung der Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = \int_0^{x^3} \mathrm{e}^{t^4} \cdot (t^2 - t - 2)\, dt\,.$$

Hinweis: Das Integral **nicht** berechnen!

b) Gegeben seien die Funktionen (Das Integral **nicht** berechnen!)

$$F(x) := \int_0^x \frac{\sinh t^2}{t^2} \mathrm{e}^{t^2}\, dt, \qquad G(x) := \mathrm{e}^{-2x^2}, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Berechnen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{x\to\infty} G(x) \cdot F(x)$.

Hinweis: Regel von L'Hospital.

c) Bestimmen Sie die **reelle** Partialbruchzerlegung von

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)}\,.$$

Aufgabe 99:

Bestimmen Sie den Flächeninhalt der Fläche, die durch die Gerade $f_1(x) = x+2$ und die Parabel $f_2(x) = 4 - x^2$ begrenzt wird.

Aufgabe 100:

Es sei

$$\operatorname{sign}(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ -1 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

Gegeben sei die Funktion $f \in \mathit{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ mit $f(x) = \dfrac{x}{2} + \operatorname{sign}(x)$. Skizzieren Sie f. Ist f auf $I = [-1,2]$ Riemann-integrierbar? Begründen Sie Ihre Antwort und bestimmen Sie gegebenenfalls das zugehörige Riemann-Integral.

Aufgabe 101: Newton-Verfahren

Gegeben seien die beiden Kurven in der oberen Halbebene

$$(y-3)^2 - x = 3 \text{ und } xy = 4\,, \quad y \geq 0\,.$$

a) Skizzieren Sie die beiden Kurven und lesen Sie aus Ihrer Skizze eine nicht-ganzzahlige Näherung für den Schnittpunkt ab.

b) Um den Schnittpunkt numerisch zu bestimmen, führen Sie **einen** Iterationsschritt mit dem **zweidimensionalen** Newton–Verfahren durch, wobei Sie den Punkt $(x_0, y_0) := (1,5) \in \mathbb{N}^2$ als Startwert benutzen.

c) Hat sich die Näherung durch den Newtonschritt aus Teil b) gegenüber dem Startwert (x_0, y_0) verbessert? Kurze Begründung!

Aufgabe 102:

a) Entwickeln Sie die Funktion

$$f(x,y,z) = \cosh(x) + \mathrm{e}^{2\,xy} - \ln(-yz) + \frac{1}{y} + \frac{z}{2}$$

nach der Taylor'schen Formel um den Punkt $P = (0\,,\,-1\,,\,2)$ bis zu einschließlich zweiter Ordnung (ohne Restglied).

b) Bestimmen Sie die Taylor-Entwicklung 2. Grades um den Punkt $y_0 = \dfrac{4}{3}$ für die Umkehrfunktion $g^{-1}(y)$ von $g(x) = \dfrac{x^3}{3} + x$ (ohne Restglied).

Hinweis: Die Umkehrfunktion ist **nicht** explizit zu bestimmen!

c) Führen Sie zur Bestimmung einer Näherungslösung des Gleichungssystems

$$y = \mathrm{e}^{-x^2}\,, \quad y = -(x-1)^2 + 2$$

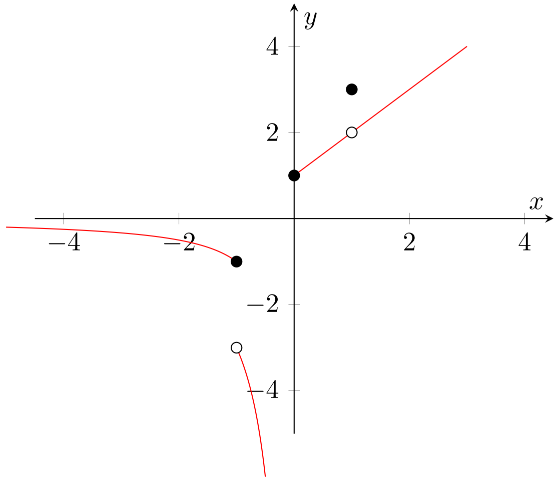
einen Iterationsschritt des **zweidimensionalen** Newton-Verfahrens mit dem Startvektor $(x_0, y_0) = (0,0)$ durch.

Aufgabe 103: Stetigkeit

Betrachten Sie die Funktion $y = f(x)$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{für } x \in (-\infty, -1], \\ \frac{3}{x} & \text{für } x \in (-1, 0), \\ \frac{x^2-1}{x-1} & \text{für } x \in [0,1) \cup (1,\infty), \\ 3 & \text{für } x = 1. \end{cases}$$

und deren Graphen



a) Finden Sie alle Werte an denen die Funktion unstetig ist.

b) Begründen Sie für jeden dieser Werte, weshalb die formale Definition der Stetigkeit verletzt ist.

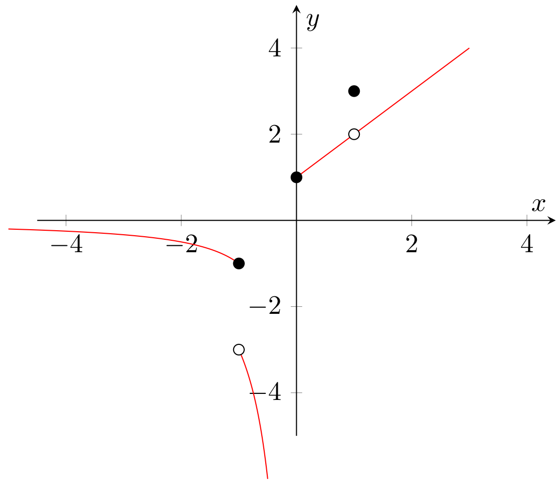
c) Klassifizieren Sie jede der Untetigkeitsstellen als **Sprungstelle**, **hebbare Unstetigkeit** oder **Polstelle**.

Aufgabe 104: Continuity

Consider the following function $y = f(x)$ with

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{for } x \in (-\infty, -1], \\ \frac{3}{x} & \text{for } x \in (-1, 0), \\ \frac{x^2-1}{x-1} & \text{for } x \in [0,1) \cup (1,\infty), \\ 3 & \text{for } x = 1. \end{cases}$$

and its graph



a) Find all values for which the function is discontinuous.

b) For each value of discontinuity, state why the formal definition of continuity does not apply.

c) Classify each discontinuity as either jump, removable, or infinite.

Aufgabe 105: Positive Definitheit

a) Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrizen

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 4/3 & \sqrt{5}/3 \\ \sqrt{5}/3 & 7/6 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Welche der Matrizen sind positiv oder negativ definit, welche sind indefinit?

Aufgabe 106: Taylor–Entwicklung

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) := x \cdot \arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\,.$$

a) Berechnen Sie das Taylorpolynom $T_2(x)$ zweiten Grades im Entwicklungspunkt $x_0 = 1$.
b) Berechnen Sie das zugehörige Restglied und geben Sie den Fehler $|f(x) - T_2(x)|$ im Intervall $|x-1| \leq 0.1$ an.

Aufgabe 107: Differenzieren

Berechnen Sie folgende Aufgaben:

i) $f(t) := (2t+1)^4 \cdot \sin(3t)$ gesucht: $f'''(t)$

ii) $g(t) := t^4 \cdot \cos(3t) \cdot \mathrm{e}^{-2t}$ gesucht: $g''(t)$

iii) $h(t) := \dfrac{2t^2 - 2t + 1}{3t - 2}$ gesucht: $h'''(t)$

Hinweis: Vergessen Sie nicht die Ergebnisse (auch die Zwischenergebnisse) sinnvoll zusammenzufassen!

Aufgabe 108: Iterierte Grenzwerte

Berechnen Sie für folgende Funktionen $f(x,y)$ die Grenzwerte

$$\lim_{x\to 0} \lim_{y\to 0} f(x,y)\,; \quad \lim_{y\to 0} \lim_{x\to 0} f(x,y)\,; \quad \lim_{\boldsymbol{x}\to \boldsymbol{0}} f(\boldsymbol{x}) \text{ mit } \boldsymbol{x} := (x,y)^\top\,,$$

(falls diese existieren):

a) $f(\boldsymbol{x}) := \dfrac{x-y}{x+y}\,,$

b) $f(\boldsymbol{x}) := \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2}$

c) $f(\boldsymbol{x}) := (x+y)\sin\left(\frac{1}{x}\right)\sin\left(\frac{1}{y}\right)\,.$

Hinweis zu b): Betrachten Sie auch den Fall $y = \alpha x\,,\ \alpha \in \mathbb{R}\,.$

Aufgabe 109: Partielle Ableitungen

Bestimmen Sie alle ersten und zweiten partiellen Ableitungen der folgenden reellen Funktionen und geben Sie jeweils die ersten und zweiten Ableitungen in Matrixschreibweise an:

i) $f(x,y) = \mathrm{e}^{2\,xy^2}$ **ii)** $g(x,y) = x^2\,\sin(2x+y)$

iii) $h(x,y) = \sin(2x)\,\cos(3y)$ **iv)** $k(x,y,z) = x\,y^2\,z^3$

v) $j(u,v) = \dfrac{uv}{uv-1}$

Aufgabe 110: Taylor–Entwicklung in 2 Dim.

Bestimmen Sie das Taylor-Polynom 2. Ordnung der Funktion

$$f(x,y) = \mathrm{e}^x \cos(\pi(x+2y))$$

um den Entwicklungspunkt $\boldsymbol{x}_0 = (1,-1)^\top$.

Aufgabe 111: Taylor–Entwicklung in 2 Dim.

Gegeben seien $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = \mathrm{e}^{xy} + x + y$ und $\boldsymbol{a} = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom 2. Grades von f für den Entwicklungspunkt $(0,0)$.

b) Bestimmen Sie die Richtungsableitung $\partial_{\boldsymbol{a}} f$ von f in Richtung $\boldsymbol{a}$ im Punkt $(0,0)$.

Aufgabe 112: Taylor–Polynom & Extrema in 2 Dimensionen

a) Berechnen Sie das Taylor–Polynom 2. Grades der Funktion $f(x,y) = (2x-3y)\cdot\sin(3x-2y)$ zum Entwicklungspunkt $\boldsymbol{x}_0 = (0,0)^\mathrm{T}$.

b) Ermitteln Sie die Extrema der Funktion $f(x,y) = 2x^3 - 3xy + 2y^3 - 3\,.$

Aufgabe 113: Fehlersuche

Behauptung:

$$\int_{-2}^{2} x^2 \,\mathrm{d}x = 0$$

Beweis: Mit der Substitution $t = x^2 \Rightarrow \mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x$ gilt:

$$\int_{-2}^{2} x^2 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} x\cdot 2x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{4}^{4} \sqrt{t}\,\mathrm{d}t = 0\,.$$

Wo steckt der Fehler?

Aufgabe 114: Integration

Bestimmen Sie jeweils eine Stammfunktion:

a)

$$I_a := \int \frac{4x^4}{x^4-1}\mathrm{d}x\,.$$

b)

$$I_b := \int (1 + 3x^2) \cdot \ln(x^3) \mathrm{d}x \,.$$

c)

$$I_c := \int \sin(\sqrt{x}) \mathrm{d}x \,.$$

d)

$$I_d := \int \sin(2x) \cdot \mathrm{e}^x \mathrm{d}x \,.$$