

Einführende Bemerkungen

- Vermeiden Sie die Verwendung von Taschenrechnern oder Online-Ressourcen.

Aufgabe 7.1: Newton-Verfahren

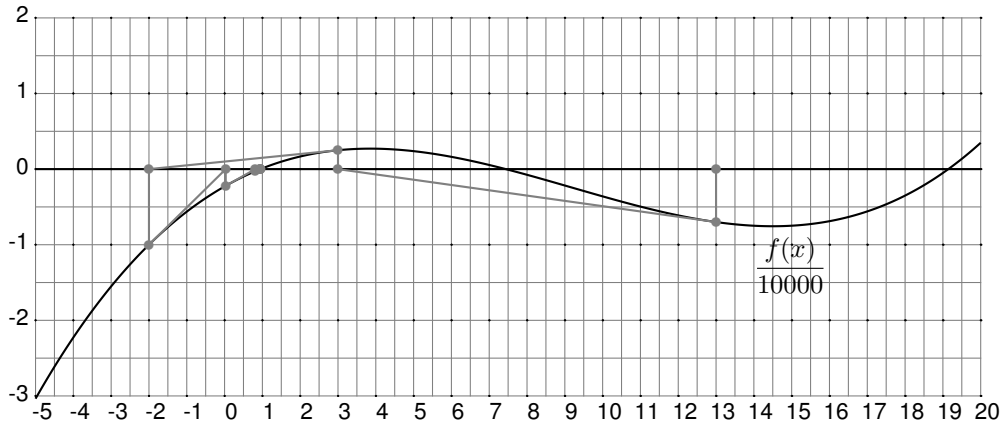
Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = 17x^3 - 468x^2 + 2849x - 2294.$$

- a) Skizzieren Sie die Funktion im Intervall  $-5 \leq x \leq 20$ .
- b) Führen Sie mindestens zwei Schritte des Newton-Verfahrens mit dem Startwert  $x_0 = 13$  für die Funktion  $f(x)$  durch.
- c) Skizzieren Sie im Funktionsgraphen die berechneten Iterationen  $x_0, x_1, x_2, \dots$

Lösung 7.1:

a)/c)



b) Das Newtonverfahren mit der Iterationsvorschrift:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

ergibt

$n$	$x_n$	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$-f(x_n)/f'(x_n)$
0	13.0000	-7000.0000	-700	-10.0000000
1	3.0000	2500.0000	500	-5.0000000
2	-2.0000	-10000.0000	4925	2.0304568
3	0.0304	-2207.6621	2821	0.7827090
4	0.8131	-277.6091	2122	0.1308489
5	0.9440	-7.2647	2011	0.0036127
6	0.9476	-0.0055	2008	0.0000027
7	0.9476			

**Aufgabe 7.2:**

a) Bestimmen Sie die folgenden Integrale

i) 
$$\int_{t=0}^x (t^2 + 3t - 4) dt$$

ii) 
$$\int_{x=-4}^4 (x^3 - x) dx$$

b) Bestimmen Sie desweiteren

i) 
$$\int \cos(x) dx$$

ii) 
$$\int_{x=2}^8 \frac{1}{x} dx$$

iii) 
$$\int_{x=-1}^3 \left( 5x^4 + \frac{x^3}{3} + 2 \right) dx$$

iv) 
$$\int \frac{1}{(x+1)^3} dx.$$

iii) 
$$\int_{x=0}^{2\pi} \sin(x) dx$$

iv) 
$$\int_{x=0}^{\pi/2} \cos(x) dx.$$

**Lösung 7.2:**

a) i)

$$\begin{aligned} \int_{t=0}^x (t^2 + 3t - 4) dt &= \left[ \frac{t^3}{3} + \frac{3t^2}{2} - 4t \right]_{t=0}^x \\ &= \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 4x \end{aligned}$$

ii)

$$\int_{x=-4}^4 (x^3 - x) dx = \left[ \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right]_{x=-4}^4 = 0$$

(Dasselbe Ergebnis kann man auch ohne Rechnung begründen, da eine ungerade Funktion auf einem symmetrischen Intervall integriert wird.)

iii)

$$\begin{aligned} \int_{x=-1}^3 \left( 5x^4 + \frac{x^3}{3} + 2 \right) dx &= \left[ x^5 + \frac{x^4}{12} + 2x \right]_{x=-1}^3 \\ &= 3^5 + \frac{3^4}{12} + 2 \cdot 3 - \left( (-1)^5 + \frac{(-1)^4}{12} + 2 \cdot (-1) \right) \\ &= 243 + \frac{27}{4} + 6 + 1 - \frac{1}{12} + 2 \\ &= 252 + \frac{81-1}{12} = \frac{776}{3} \end{aligned}$$

iv)

$$\int \frac{1}{(x+1)^3} dx = -\frac{1}{2(x+1)^2} + C$$

b) i)

$$\int \cos(x) dx = \sin(x) + C$$

ii)

$$\int_{x=2}^8 \frac{1}{x} dx = \ln|x| \Big|_{x=2}^8 = \ln(8) - \ln(2) = \ln \frac{8}{2} = \ln(4)$$

iii)

$$\int_{x=0}^{2\pi} \sin(x) dx = -\cos(x) \Big|_{x=0}^{2\pi} = -\cos(2\pi) + \cos(0) = 0$$

(Auch hier hätte man mit der Symmetrie der Sinusfunktion argumentieren können.)

iv)

$$\int_{x=0}^{\pi/2} \cos(x) dx = \sin(x) \Big|_{x=0}^{\pi/2} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(0) = 1 - 0 = 1.$$

**Aufgabe 7.3:****a) zur partiellen Integration**

$$\int u(t) \cdot v'(t) \, dt = u(t) \cdot v(t) - \int u'(t) \cdot v(t) \, dt$$

Berechnen Sie Stammfunktionen der beiden Funktionen

$$\textbf{i)} \, (2t-1) \cos(t), \quad \textbf{ii)} \, (t^2 + t - 5) e^{t/2}.$$

**b) zur Substitution**

$$\int f(g(t)) \cdot g'(t) \, dt = \int f(z) \, dz \text{ mit } z = g(t), \quad dz = g'(t) \, dt$$

Berechnen Sie Stammfunktionen von

$$\textbf{i)} \, 4t e^{t^2} \quad \textbf{ii)} \, \frac{1}{\sqrt{t}} e^{\sqrt{t}}.$$

**Lösung 7.3:****a) i)** Mit  $u(t) = (2t-1)$ ,  $u'(t) = 2$  und  $v'(t) = \cos(t)$ ,  $v(t) = \sin(t)$  erhält man

$$\int (2t-1) \cos(t) \, dt = (2t-1) \sin(t) - \int 2 \sin(t) \, dt = (2t-1) \sin(t) + 2 \cos(t) + C.$$

**ii)** Mit  $u(t) = t^2 + t - 5$ ,  $u'(t) = 2t + 1$  und  $v'(t) = e^{t/2}$ ,  $v(t) = 2e^{t/2}$  für die erste partielle Integration und mit  $u(t) = 4t + 2$ ,  $u'(t) = 4$  und  $v'(t) = e^{t/2}$ ,  $v(t) = 2e^{t/2}$  für die zweite erhält man

$$\begin{aligned} \int (t^2 + t - 5) e^{t/2} \, dt &= (t^2 + t - 5) 2e^{t/2} - \int (2t + 1) 2e^{t/2} \, dt \\ &= (2t^2 + 2t - 10) e^{t/2} - (4t + 2) 2e^{t/2} + \int 4 \cdot 2e^{t/2} \, dt \\ &= (2t^2 - 6t - 14) e^{t/2} + 16e^{t/2} + C \\ &= (2t^2 - 6t + 2) e^{t/2} + C. \end{aligned}$$

**b) i)** Mit  $z = t^2$  und  $dz = 2t \, dt$  erhält man

$$\int 4t e^{t^2} \, dt = \int 2e^z \, dz = 2e^z + C = 2e^{t^2} + C.$$

**ii)** Mit  $z = \sqrt{t}$  und  $dz = \frac{1}{2\sqrt{t}} \, dt$  erhält man

$$\int \frac{1}{\sqrt{t}} e^{\sqrt{t}} \, dt = 2 \int e^z \, dz = 2e^z + C = 2e^{\sqrt{t}} + C.$$


---

#### Aufgabe 7.4: Partialbruchzerlegung

Berechnen Sie mit Hilfe der Partialbruchzerlegung die unbestimmten Integrale folgender Funktionen:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } f(x) = \frac{x^2 - x - 1}{(x-1)(x-2)(x-3)}, & \text{b) } f(x) = \frac{x^2}{(x-3)^3}, \\ \text{c) } f(x) = \frac{x^2 + 1}{(x+1)(x-2)^2}, & \text{d) } f(x) = \frac{1}{(x-1)(x^2 + x + 1)}. \end{array}$$

#### Lösung 7.4:

**Zu a)** Die Funktion  $f$  lässt sich darstellen als

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}.$$

Durch Multiplikation mit dem Hauptnenner erhält man

$$x^2 - x - 1 = A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-2)(x-1)$$

Einsetzen der Nullstellen des Hauptnenners in die Gleichung liefert:

$$\text{für } x = 1: \quad -1 = A \cdot (-1) \cdot (-2) \Rightarrow A = -\frac{1}{2}$$

$$\text{für } x = 2: \quad B = -1$$

$$\text{für } x = 3: \quad 5 = C \cdot 2 \Rightarrow C = \frac{5}{2}.$$

Es folgt

$$\int f(x) \, dx = -\frac{1}{2} \ln|x-1| - \ln|x-2| + \frac{5}{2} \ln|x-3| + c.$$

**Zu b)** Die Funktion  $f$  lässt sich darstellen als

$$f(x) = \frac{x^2}{(x-3)^3} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x-3)^2} + \frac{C}{(x-3)^3}.$$

Durch Multiplikation mit dem Hauptnenner erhält man

$$x^2 = A(x-3)^2 + B(x-3) + C$$

Es folgt Einsetzen der Nullstelle des Hauptnenners in die Gleichung liefert für  $x = 3$  den Wert  $C = 9$  und Koeffizientenvergleich für  $x^2$  liefert  $A = 1$ . Nun wählen wir noch  $x = 4$  und erhalten die Gleichung  $16 = A + B + C \Rightarrow B = 6$ .

$$\int f(x) \, dx = \ln|x-3| - \frac{6}{x-3} - \frac{9}{2(x-3)^2} + c.$$

**Zu c)** Hier existiert eine Partialbruchzerlegung der Form

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{(x+1)(x-2)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2}.$$

Durch Multiplikation mit dem Hauptnenner erhält man

$$x^2 + 1 = A(x-2)^2 + B(x+1)(x-2) + C(x+1)$$

Einsetzen der Nullstellen des Hauptnenners in die Gleichung liefert:

$$\text{für } x = -1: \quad 2 = A \cdot 9 \Rightarrow A = \frac{2}{9}$$

$$\text{für } x = 2: \quad 5 = C \cdot 3 \Rightarrow C = \frac{5}{3}.$$

Mithilfe des Koeffizientenvergleichs für die Potenz  $x^2$  erhält man  $1 = A + B \Rightarrow B = 1 - A = \frac{7}{9}$ .

Folglich ist

$$f(x) = \frac{2}{9(x+1)} + \frac{7}{9(x-2)} + \frac{5}{3(x-2)^2},$$

und

$$\int f(x) \, dx = \frac{2}{9} \ln|x+1| + \frac{7}{9} \ln|x-2| - \frac{5}{3(x-2)} + c.$$

**Zu d)** Der Faktor  $x^2 + x + 1$  hat hier keine reellen Nullstellen und kann deshalb nicht in Linearfaktoren zerlegt werden (zumindest nicht in  $\mathbb{R}$ ). Deshalb benutzt man den Ansatz

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)(x^2 + x + 1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx + C}{x^2 + x + 1}.$$

Durch Multiplikation mit dem Hauptnenner erhält man

$$1 = A(x^2 + x + 1) + (Bx + C)(x-1)$$

Einsetzen der reellen Nullstelle des Hauptnenners in die Gleichung liefert für  $x = 1$  die Gleichung  $1 = 3 \cdot A \Rightarrow A = \frac{1}{3}$  und Koeffizientenvergleich für  $x^2$  liefert  $0 = A + B \Rightarrow B = -\frac{1}{3}$ . Nun wählen wir noch  $x = 0$  und erhalten  $1 = A - C \Rightarrow C = A - 1 = -\frac{2}{3}$ .

Damit ist  $f(x) = \frac{1}{3(x-1)} - \frac{x+2}{3(x^2 + x + 1)}$ . Das Integral über  $\frac{x+2}{x^2 + x + 1}$  berechnet

man mit der Substitution  $u = x + \frac{1}{2}$ ,

$$\begin{aligned}\int \frac{x+2}{x^2+x+1} dx &= \int \frac{x+2}{(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} dx \\&= \int \frac{u+\frac{3}{2}}{u^2+\frac{3}{4}} du \\&= \frac{1}{2} \int \frac{2u}{u^2+\frac{3}{4}} du + \frac{3}{2} \int \frac{1}{u^2+\frac{3}{4}} du \\&= \frac{1}{2} \ln \left| u^2 + \frac{3}{4} \right| + \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \int \frac{1}{\frac{4u^2}{3} + 1} du, \quad \text{substituiere } z = 2u/\sqrt{3} \\&= \frac{1}{2} \ln \left| u^2 + \frac{3}{4} \right| + \sqrt{3} \int \frac{1}{z^2 + 1} dz \\&= \frac{1}{2} \ln \left| u^2 + \frac{3}{4} \right| + \sqrt{3} \arctan(z) + c \\&= \frac{1}{2} \ln \left| u^2 + \frac{3}{4} \right| + \sqrt{3} \arctan \left( \frac{2u}{\sqrt{3}} \right) + c \\&= \frac{1}{2} \ln(x^2 + x + 1) + \sqrt{3} \arctan \left( \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right) + c\end{aligned}$$

Damit gilt

$$\int f(x) dx = \frac{1}{3} \ln|x-1| - \frac{1}{6} \ln(x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + c.$$

---

### Aufgabe 7.5: Integration

a) Berechnen Sie folgende Integrale mittels partieller Integration:

$$\begin{array}{ll} \text{i)} & \int x \cdot \sin x \, dx, \\ \text{ii)} & \int \sin^2(x) \, dx, \\ \text{iii)} & \int x^2 e^{1-x} \, dx, \end{array} \quad \begin{array}{ll} \text{iv)} & \int \frac{x}{\cos^2 x} \, dx, \\ \text{v)} & \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{x}{\cos^2 x} \, dx \end{array}$$

b) Berechnen Sie folgende Integrale mittels einer geeigneten Substitution:

$$\begin{array}{ll} \text{i)} & \int_1^2 \frac{3x^2+7}{x^3+7x-2} \, dx, \\ \text{ii)} & \int_{\pi}^{3\pi/2} x^2 \cos(x^3+2) \, dx, \end{array} \quad \begin{array}{ll} \text{iii)} & \int_1^2 \frac{1}{x} e^{1+\ln x} \, dx, \\ \text{iv)} & \int_{1/4}^1 e^{\sqrt{x}} \, dx, \\ \text{v)} & \int \cosh^2 x \sinh x \, dx \end{array}$$

### Lösung 7.5:

a) i)

$$\begin{aligned} \int \underbrace{x}_u \underbrace{\sin x}_{v'} \, dx &= \underbrace{x}_u \underbrace{(-\cos x)}_v - \int \underbrace{1}_{u'} \cdot \underbrace{(-\cos x)}_v \, dx \\ &= -x \cos x + \int \cos x \, dx = -x \cos x + \sin x + C \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} \int \underbrace{\sin x}_u \underbrace{\sin x}_{v'} \, dx &= \underbrace{\sin x}_u \underbrace{(-\cos x)}_v - \int \underbrace{\cos x}_{u'} \underbrace{(-\cos x)}_v \, dx \\ &= -\sin x \cos x + \int \underbrace{\cos x \cos x}_{=1-\sin^2 x} \, dx \\ &= -\sin x \cos x + \int 1 \, dx - \int \sin^2 x \, dx \\ \Rightarrow \quad 2 \int \sin^2 x \, dx &= -\sin x \cos x + x + 2C \\ \Rightarrow \quad \int \sin^2 x \, dx &= \frac{x - \sin x \cos x}{2} + C \end{aligned}$$

Alternativ kann man die Beziehung  $\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$  (siehe Formelsammlung) nutzen. Damit bekommt man:

$$\int \sin^2(x) \, dx = \frac{1}{2} \int (1 - \cos(2x)) \, dx = \frac{1}{2} \left( x - \frac{1}{2} \sin(2x) \right) + C$$

Dies lässt sich mithilfe von  $\sin(x) \cos(x) = \frac{1}{2} \sin(2x)$  in die andere Darstellung der Lösung umwandeln.

iii)

$$\begin{aligned} \int \underbrace{x^2}_u \underbrace{e^{1-x}}_{v'} \, dx &= \underbrace{x^2}_u \underbrace{(-e^{1-x})}_v - \int \underbrace{2x}_{u'=u_2} \underbrace{(-e^{1-x})}_{v=v'_2} \, dx \\ &= -x^2 e^{1-x} - \underbrace{2x}_{u_2} \underbrace{e^{1-x}}_{v_2} + \int \underbrace{2}_{u'_2} \underbrace{e^{1-x}}_{v_2} \, dx \\ &= -(x^2 + 2x) e^{1-x} - 2e^{1-x} + C = -(x^2 + 2x + 2) e^{1-x} + C \end{aligned}$$

iv)

$$\begin{aligned} \int \underbrace{x}_u \underbrace{\frac{1}{\cos^2 x}}_{v'} \, dx &= \underbrace{x}_u \underbrace{\tan x}_v - \int \underbrace{1}_{u'} \underbrace{\tan x}_v \, dx \\ &= x \tan x + \ln |\cos x| + C \end{aligned}$$

$$\text{v)} \quad [x \tan x + \ln |\cos x|]_{x=0}^{\pi/4} = \frac{\pi}{4} + \ln \frac{1}{\sqrt{2}} - 0 = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$$

b) i) Mit  $y = x^3 + 7x - 2$  und  $dy = (3x^2 + 7) \, dx$  hat man:

$$\int_1^2 \frac{3x^2+7}{x^3+7x-2} \, dx = \int_{y(1)}^{y(2)} \frac{1}{y} \, dy = \left[ \ln |y| \right]_6^{20} = \ln \frac{20}{6} = \ln \frac{10}{3}$$

ii) Hier wählt man  $y = x^3 + 2$  und erhält daraus  $dy = 3x^2 \, dx$  und setzt ein:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \int_{\pi}^{3\pi/2} 3x^2 \cos(x^3+2) \, dx &= \frac{1}{3} \int_{y(\pi)}^{y(3\pi/2)} \cos(y) \, dy \\ &= \frac{1}{3} \left( \sin \left( \left( \frac{3\pi}{2} \right)^3 + 2 \right) - \sin(\pi^3 + 2) \right) \end{aligned}$$

iii) Mit  $y = 1 + \ln x$  und  $dy = \frac{dx}{x}$  hat man

$$\int_1^2 \frac{1}{x} e^{1+\ln x} dx = \int_{y(1)}^{y(2)} e^y dy = e^{1+\ln 2} - e^1 = e$$

iv) Wir wählen  $y = \sqrt{x}$ . Damit folgt (für  $x > 0$ ):

$$x = y^2 \Rightarrow dx = 2y dy$$

und schließlich

$$\begin{aligned} \int_{1/4}^1 e^{\sqrt{x}} dx &= \int_{y(1/4)}^{y(1)} e^y \cdot 2y dy = 2 \int_{1/2}^1 ye^y dy \\ &= [2ye^y]_{1/2}^1 - 2 \int_{1/2}^1 e^y dy \quad (\text{partielle Integration}) \\ &= 2e - \sqrt{e} - 2(e - \sqrt{e}) = \sqrt{e} \end{aligned}$$

v) Mit  $y = \cosh x$  und  $dy = \sinh x dx$  hat man

$$\int \cosh^2 x \sinh x dx = \int y^2 dy = \frac{y^3}{3} + C = \frac{\cosh^3 x}{3} + C$$

---

### Aufgabe 7.6: Kurvendiskussion

Gegeben sei die reelle Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 + 7x + 10}{x + 1}.$$

- i) Geben Sie den maximalen Definitionsbereich der Funktion an.
- ii) Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion.
- iii) Bestimmen Sie die kritischen Punkte für die Extrema der Funktion und deren Funktionswerte. Klassifizieren Sie die Punkte als Minimum, Maximum oder Sattelpunkt.
- iv) Bestimmen Sie die (nicht vertikale) Asymptote der Funktion, d. h. diejenige Gerade  $g(x) = a + bx$ , für die

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - g(x)) = 0$$

gilt.

- v) Skizzieren Sie die Funktion.

### Lösung 7.6:

- i) Die Funktion ist nur an der Nullstelle des Nenners,  $x_{\text{Pol}} = -1$ , nicht definiert und hat dort eine einfache Polstelle.
- ii) Die Nullstellen sind die Nullstellen des Zählers:  $x_{N1} = -5$  und  $x_{N2} = -2$ .
- iii) Die kritischen Punkte für die Extrema sind die Nullstellen (des Zählers) der ersten Ableitung:

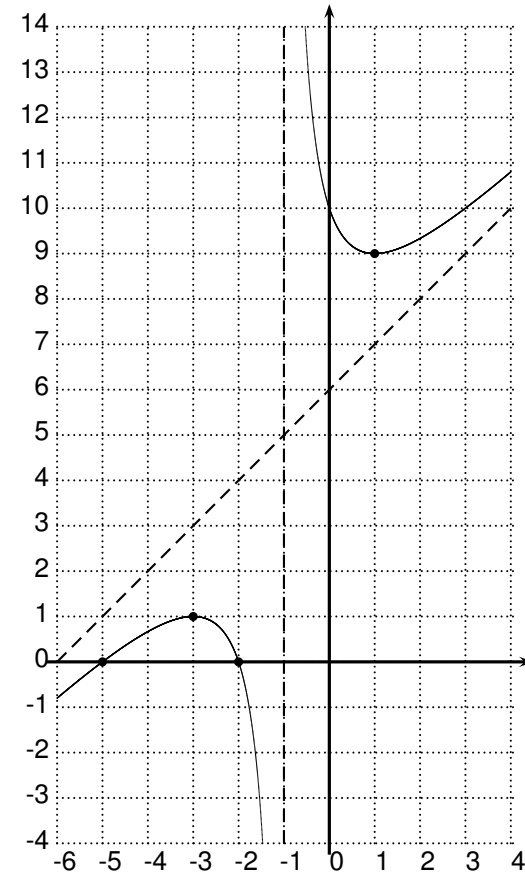
$$f'(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x + 1)^2} \implies x_{E1} = -3 \text{ und } x_{E2} = 1$$

mit  $f(-3) = 1$  und  $f(1) = 9$ . Bei  $x_{E1} = -3$  gibt es ein lokales Maximum und bei  $x_{E2} = 1$  gibt es ein lokales Minimum.

- iv) Durch Polynomdivision erhält man die Asymptote:

$$f(x) = \frac{x^2 + 7x + 10}{x + 1} = x + 6 + \frac{4}{x + 1} \implies g(x) = x + 6.$$

- v) Skizze:



Aus der Skizze ersieht man, dass bei  $x = -3$  ein Maximum vorliegt und bei  $x = 1$  ein Minimum.