Helmut-Schmidt-Universität
Universität der Bundeswehr Hamburg
Fakultät für Maschinenbau und Bauingenieurwesen

Prof. Dr. Thomas Carraro
Dr. Ulrike Kochan-Eilers

Mathematik II/B (WI/ET) — Blatt 3

WT 2025 — Grenzwerte, Stetigkeit, Ableitungen

Einführende Bemerkungen

- Vermeiden Sie die Verwendung von Taschenrechnern oder Online-Ressourcen.

Aufgabe 3.1: Funktionenlimes

a) Gegeben sei die Funktion

$$f(x) := \frac{x^3 + |x+1| + \operatorname{sign}(x+1)}{\operatorname{sign} x}, \; x \in D(f) := \mathbb{R}\,.$$

Bestimmen Sie $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to(-1)+} f(x)$ und $\lim\limits_{x\to(-1)-} f(x)$.

b) Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \frac{\sinh x}{\cosh(ax)}\,, \quad a \in \mathbb{R}\,.$$

Bestimmen Sie $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$.

Hinweise:

- Mit der zunächst als bekannt vorausgesetzten Exponentialfunktion e^x gilt

$$\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \text{und} \qquad \cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

- Die Signum-Funktion liefert das Vorzeichen des Argumentes:

$$\operatorname{sign}(z) = \begin{cases} +1 & , z \geq 0 \\ -1 & , z < 0 \end{cases}$$

Aufgabe 3.2: Differentiation

a) Geben Sie die Konstanten b, c, $d \in \mathbb{R}$ an, damit die Funktion

$$g(x) = \begin{cases} bx^3 + cx^2 + d & \text{für } x \leq 1 \\ \ln x & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

auf $\mathbb{R}$ zweimal differenzierbar ist.
Ist $g(x)$ für diese Wahl auch dreimal differenzierbar?

b) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x\sin(1/x) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

in $x = 0$ stetig ist, aber *nicht* differenzierbar.
Hinweis: Betrachten Sie zur Untersuchung der Differenzierbarkeit die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n = \frac{1}{n\pi + \pi/2}$.

Aufgabe 3.3: Stetige Fortsetzung

a) Untersuchen Sie, ob die folgenden reellen Funktionen im Punkt $x = 0$ stetig sind oder stetig fortgesetzt werden können.

$$f_1(x) = |x|, \qquad f_2(x) = \frac{x}{|x|}, \qquad f_3(x) = \frac{x^3}{|x|}, \qquad f_4(x) = \frac{x^2}{|x|^2}$$

b) Bestimmen Sie die Definitionslücken der Funktion

$$g(x) = \frac{2x^3 - 12x^2 + 18x}{x^3 - 9x}$$

In welchen dieser Lücken ist die Funktion stetig fortsetzbar?

Aufgabe 3.4: Grenzwerte monotoner Folgen

Es seien $a_1 = \sqrt{2}$ und $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$. Zeigen Sie,

a) dass (a_n) beschränkt ist,

b) dass (a_n) monoton wächst und

c) gegen die größte Lösung der Gleichung $x^2 - x - 2 = 0$ konvergiert.

Aufgabe 3.5: Kurven im $\mathbb{R}^n$

Ein Satellit bewege sich auf der Bahn

$$\boldsymbol{r}(t) = \left(\sqrt{1+t^2},\, 3t\right)^\top$$

.

a) Berechnen Sie die Geschwindigkeit $\dot{\boldsymbol{r}}(t)$ des Satelliten.

b) Geben Sie die Grenzwerte (für $t \to +\infty$ und für $t \to -\infty$) der Bahnrichtung r_2/r_1 und Geschwindigkeit $\dot{\boldsymbol{r}}$ des Satelliten an.

Aufgabe 3.6: Differenzieren

Bestimmen Sie jeweils die n-te Ableitung der folgenden Funktionen:

a) $n = 4, f(x) = 5\sin(x) + 3\cos(x)$

b) $n = 3, f(x) = 2\sinh(2x) + 3\cosh(x)$

c) $n = 2, f(x) = x^2 \sin(2x)$

d) $n = 1, f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 3}{x^2 + 2x - 3}$

e) $n = 3, f(x) = x^5 \ln(x)$

f) $n = 3, f(x) = \sin^3(x)$

g) $n = 3, f(x) = e^x \sin(x)$

h) $n = 2, f(x) = e^{\tan(x)}$

i) $n = 2, f(x) = \dfrac{\tan(x)}{x}$

j) $n = 2, f(x) = \dfrac{x^2}{\sin(x)}$

Ergebnisse zu Aufgabe 3.1:

a) $\lim\limits_{x\to 0\pm} f(x) = \pm 2,\ \lim\limits_{x\to -1\pm} f(x) = 1 \pm (-1)$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \begin{cases} 0, & |a| > 1 \\ 1, & |a| = 1 \\ \infty, & |a| < 1 \end{cases}$

Ergebnisse zu Aufgabe 3.2:

a) $b = -\frac{2}{3},\ c = \frac{3}{2}\ ,\ d = -\frac{5}{6}$

Ergebnisse zu Aufgabe 3.3:

a) stetig, nicht stetig fortsetzbar, stetig fortsetzbar, stetig fortsetzbar
b) g ist stetig forstetzbar in 0 und $+3$ und nicht stetig fortsetzbar in -3.

Ergebnisse zu Aufgabe 3.4:

a)/b) Es ist z. B. $0 < a_n \leq 2$.

Ergebnisse zu Aufgabe 3.5:

$\lim\limits_{t\to\infty} \frac{r_2(t)}{r_1(t)} = 3,\ \lim\limits_{t\to\pm\infty} \dot{\boldsymbol{r}}(t) = (\pm 1, 3)^\top$

Ergebnisse zu Aufgabe 3.6:

a) $f'(x) = 5\cos(x) - 3\sin(x),\ \ f''(x) = -5\sin(x) - 3\cos(x),$
$f'''(x) = -5\cos(x) + 3\sin(x), f''''(x) = 5\sin(x) - 3\cos(x)$
b) $f'(x) = 4\cosh(2x) + 3\sinh(x),\ \ f''(x) = 8\sinh(2x) + 3\cosh(x),$
$f'''(x) = 16\cosh(2x) + 3\sinh(x)$
c) $f'(x) = 2x(\sin(2x) + x\cos(2x)),\ \ f''(x) = 2\sin(2x) + 8x\cos(2x) - 4x^2\sin(2x)$
d) $f'(x) = \frac{4x^2-12x}{(x^2+2x-3)^2}$
e) $f'(x) = 5x^4\ln(x) + 4x^3,\ \ f''(x) = 20x^3\ln(x) + 9x^3,\ \ f'''(x) = 60x^2\ln(x) + 47x^2$
f) $f'(x) = 3\sin^2(x)\cos(x),\ \ f''(x) = 6\sin(x)\cos^2(x) - 3\sin^3(x),\ \ f'''(x) = 6\cos^3(x) - 21\sin^2(x)\cos(x)$
g) $f'(x) = e^x(\sin(x) + \cos(x)),\ \ f''(x) = 2e^x\cos(x),\ \ f'''(x) = 2e^x(\cos(x) - \sin(x))$
h) $f'(x) = e^{\tan(x)}\frac{1}{\cos^2(x)},\ \ f''(x) = e^{\tan(x)}\frac{1}{\cos^4(x)} + e^{\tan(x)}2\tan(x)\frac{1}{\cos^2(x)}$
i) $f'(x) = \frac{1}{x\cos^2(x)} - \frac{\tan(x)}{x^2},\ \ f''(x) = -\frac{2}{x^2\cos^2(x)} + \frac{2\tan(x)}{x\cos^2(x)} + \frac{2\tan(x)}{x^3}$
j) $f'(x) = \frac{2x}{\sin(x)} - \frac{x^2\cos(x)}{\sin^2(x)},\ \ f''(x) = \frac{2}{\sin(x)} - \frac{4x\cos(x)}{\sin^2(x)} + \frac{x^2}{\sin(x)} + \frac{2x^2\cos^2(x)}{\sin^3(x)}$