

Mathematik II

Blatt 6

WT 2022

Newtonverfahren, Taylorentwicklung

Einführende Bemerkungen

- Vermeiden Sie die Verwendung von Taschenrechnern oder Online-Ressourcen.
- Die mit einem Stern *) markierten (Teil-)Aufgaben entfallen in diesem Trimester. Stattdessen werden einzelne Online-Aufgaben im ILIAS-Kurs kenntlich gemacht, zu denen Sie dort Ihre Lösungswege zur Korrektur hochladen können.
- Die mit zwei Sternen **) markierten (Teil-)Aufgaben richten sich an Studierende, die die übrigen Aufgaben bereits gelöst haben und die Inhalte weiter vertiefen möchten.

Aufgabe 6.1: Online Aufgabe

Bearbeiten Sie die aktuelle Online-Aufgabe im ILIAS-Kurs.

Beachten Sie, dass Sie dort auch die Lösungswege zu einzelnen Aufgaben zur Korrektur hochladen können.

Aufgabe 6.2: Vektor- und Matrixwertige Funktionen

Gegeben seien

$$\mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} t & t^2 \\ \sqrt{t} & t^5 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}(t) = \begin{pmatrix} \sin t & \cos t \\ e^t & \cosh t \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{c}(t) = \left(t^3, \sqrt{t^5}, \frac{1}{t} \right)^\top,$$

$$\mathbf{d}(t) = \left(e^{-t^2}, \sin(\sqrt{t}), \tanh(t/2) \right)^\top.$$

Berechnen Sie

a) $\frac{d}{dt}(\mathbf{A}(t)\mathbf{B}(t))$ und

b) $\frac{d}{dt}(\mathbf{c}(t) \times \mathbf{d}(t))$

auf die folgenden beiden Arten:

- Indem sie vor der Differentiation die Produkte \mathbf{AB} bzw. $\mathbf{c} \times \mathbf{d}$ bilden und die Ergebnisfunktionen ableiten.
- Indem Sie zunächst die Ableitungen der einzelnen Funktionen bilden und diese dann gemäß einer Produktregel verrechnen.

Aufgabe 6.3: Kurvendiskussion

Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich, die Symmetrie, alle Nullstellen, sowie Art und Lage der kritischen Punkte und Wendepunkte der reellen Funktion

$$f(x) = x\sqrt{16 - x^2}.$$

Aufgabe 6.4:

Bestimmen Sie die folgenden Integrale

$$\int (x^2 + 3x - 4) dx$$
$$\int_{x=-4}^4 (x^3 - x) dx$$
$$\int_{t=-1}^3 \left(5x^4 + \frac{x^3}{3} + 2 \right) dx$$

Aufgabe 6.5: Fehlersuche

Behauptung:

$$\int_{-2}^2 x^2 dx = 0$$

Beweis: Mit der Substitution $t = x^2 \Rightarrow dt = 2x dx$ gilt:

$$\int_{-2}^2 x^2 dx = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 x \cdot 2x dx = \frac{1}{2} \int_4^4 \sqrt{t} dt = 0.$$

Wo steckt der Fehler?

Aufgabe 6.6:

Bestimmen Sie die Größe der Fläche, die durch die Gerade $f_1(x) = x + 2$ und die Parabel $f_2(x) = 4 - x^2$ begrenzt wird.

Aufgabe 6.7: Iterierte Grenzwerte

Berechnen Sie für folgende Funktionen $f(x, y)$ die Grenzwerte

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y); \quad \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y); \quad \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}} f(\mathbf{x}) \text{ mit } \mathbf{x} := (x, y)^T,$$

(falls diese existieren):

a) $f(\mathbf{x}) := \frac{x - y}{x + y},$

b) $f(\mathbf{x}) := \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2}$

c) $f(\mathbf{x}) := (x + y) \sin\left(\frac{1}{x}\right) \sin\left(\frac{1}{y}\right).$

Hinweis zu b): Betrachten Sie auch den Fall $y = \alpha x, \alpha \in \mathbb{R}.$

Aufgabe 6.8: Partielle Ableitungen

Bestimmen Sie alle ersten und zweiten partiellen Ableitungen der folgenden reellen Funktionen und geben Sie jeweils die ersten und zweiten Ableitungen in Matrixschreibweise an:

i) $f(x, y) = e^{2xy^2}$ ii) $g(x, y) = x^2 \sin(2x + y)$

iii) $h(x, y) = \sin(2x) \cos(3y)$ iv) $k(x, y, z) = x y^2 z^3$

v) $j(u, v) = \frac{uv}{uv - 1}$

Aufgabe 6.9: Richtungsableitungen

Gegeben seien die Funktionen

$$f(x, y, z) = y^2 - xz \quad \text{und} \quad g(x, y, z) = x^2 \sin(y) + \cos(z).$$

Berechnen Sie die Richtungsableitung beider Funktionen in Richtung $\mathbf{h} := (-2, 3, 4)^\top$.

Ergebnisse zu Aufgabe 6.2:

a) $\begin{pmatrix} t \cos t + t^2 e^t + \sin t + 2te^t & -t \sin t + t^2 \sinh t + \cos t + 2t \cosh t \\ \sqrt{t} \cos t + t^5 e^t + \frac{\sin t}{2\sqrt{t}} + 5t^4 e^t & -\sqrt{t} \sin t + t^5 \sinh t + \frac{\cos t}{2\sqrt{t}} + 5t^4 \cosh t \end{pmatrix}.$

b) $\begin{pmatrix} \frac{5}{2} t^{3/2} \tanh \frac{t}{2} + \frac{t^{5/2}}{2 \cosh^2 \frac{t}{2}} - \frac{\cos \sqrt{t}}{2t^{3/2}} + \frac{\sin \sqrt{t}}{t^2} \\ -2e^{-t^2} - \frac{e^{-t^2}}{t^2} - 3t^2 \tanh \frac{t}{2} - \frac{t^3}{2 \cosh^2 \frac{t}{2}} \\ 3t^2 \sin \sqrt{t} + \frac{t^{5/2} \cos \sqrt{t}}{2} - \frac{5}{2} t^{3/2} e^{-t^2} + 2t^{7/2} e^{-t^2} \end{pmatrix}$

Ergebnisse zu Aufgabe 6.3:

$D(f) = [-4, 4]$, f ist ungerade, Nullstellen: $x = 0, \pm 4$, Extrema bei $x = \pm 2\sqrt{2}$, Wendepunkt bei $x = 0$

Ergebnisse zu Aufgabe 6.4:

Ergebnisse zu Aufgabe 6.9:

$$\frac{-4x+6y+2z}{\sqrt{29}}, \quad \frac{-4x \sin y + 3x^2 \cos y - 4 \sin z}{\sqrt{29}}$$