Helmut-Schmidt-Universität
Universität der Bundeswehr Hamburg
Fakultät für Maschinenbau

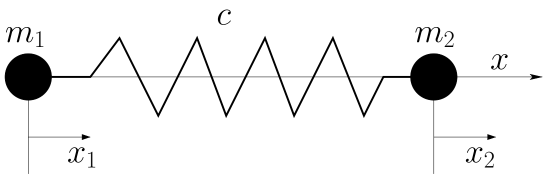
Prof. Dr. Thomas Carraro

ISA: Ing. Studienkompetenzen — Blatt 3

WT 2022

Aufgabe 3.1: Normalschwingungen

Man betrachte das System von zwei gleichen Massenpunkten $m_1 = m_2 = m$, die durch eine elastische Feder mit einer Federkonstante c gekoppelt sind, siehe Bild.



Von besonderer Bedeutung sind die sogenannten Normalschwingungen, bei denen beide Massen harmonisch mit der gleichen Winkelfrequenz ω entlang der Systemachse (x-Achse) schwingen. Die Koordinaten x_1 und x_2 beschreiben die momentane Lage der Massen. Sie sind periodische Funktionen der Zeit und erfüllen das folgende Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= -c(x_1 - x_2), \\ m\ddot{x}_2 &= -c(x_2 - x_1). \end{aligned} \tag{1}$$

Die beiden Lösungskomponenten haben die Form $x_k = A_k \, \mathrm{e}^{i\omega\, t}$, wobei $A_k \in \mathbb{C}$ und i die imaginäre Einheit ist. Es gilt dann

$$\ddot{\boldsymbol{x}} = -\omega^2 \boldsymbol{x}$$

und das Gleichungssystem (1) kann so geschrieben werden

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{c}{m} & \frac{c}{m} \\ \frac{c}{m} & -\frac{c}{m} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{A}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -\omega^2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Dieses System definiert die Schwingungen der beiden Massen. Die Schwingungsdauer ist im Fall $\omega > 0$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad [s].$$

Ist $\omega = 0$, gibt es keine Schwingung und keine Schwingungsdauer. Durch die Substitution $\lambda = -\omega^2$ wird (2) zu einem Eigenwertproblem transformiert

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}. \tag{3}$$

Man betrachtet dieses Eigenwertproblem für $c = 0.5\ [N/m]$ und $m = 200\ [g]$.

- Man schreibe die Matrix des Systems (3) im internationalen Einheitensystem.
- Man bestimme die Eigenwerte des Systems, $\lambda_1\ [s^{-2}]$ und $\lambda_2\ [s^{-2}]$.
- Man bestimme die Eigenvektoren des Systems.
- Man bestimme die Schwingungsdauer der beiden Eigenschwingungen $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}\ [s]$ und $T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2}\ [s]$.

Lösung 3.1:

- Systemmatrix:

$$A = \begin{pmatrix} -5/2 & 5/2 \\ 5/2 & -5/2 \end{pmatrix}.$$

- Eigenwerte:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -5 \\ \lambda_2 &= 0. \end{aligned}$$

- Eigenvektoren

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_1 &= (1, -1)^T \\ \boldsymbol{x}_2 &= (1, 1)^T \end{aligned}$$

- Eigenfrequenzen und Schwingungsdauer

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \sqrt{5} \\ \omega_2 &= 0. \end{aligned}$$

  $T_1 = 2\pi/w_1 = 2\pi/\sqrt{5}$.
  T_2 kann nicht definiert werden, da $w_2 = 0$.

Aufgabe 3.2: Dimensionierung eines Behälters

Ein oben offener Behälter mit rechteckigem Querschnitt soll aus 9 m^2 Dünnblech hergestellt werden. Man bestimme die Abmessungen des Behälters so, dass das Volumen maximiert wird.

Lösung 3.2:

A sei die Gesamtfläche des Metalls, das für die Herstellung des Behälters verwendet wird, und x und y seien die Länge und Breite und z die Höhe. Dann ist

$$A = \underbrace{2xz + 2yz}_{\text{4 Seitenflächen}} + \underbrace{xy}_{\text{Bodenfläche}} = 9.$$

Außerdem gilt

$$V = xyz$$

Daraus folgt, dass

$$V = xy\frac{9 - xy}{2x + 2y}$$

Um das Volumen zu maximieren, finden wir die Maxima der Funktion V. Dazu berechnen wir den Gradienten von V und finden seine Nullstellen, die die kritischen Punkte der Funktion sind

$$V'_x(x, y) = -y^2\frac{x^2 + 2xy - 9}{2(x + y)^2} = 0,$$
$$V'_y(x, y) = -x^2\frac{y^2 + 2xy - 9}{2(x + y)^2} = 0.$$

Der erste kritischer Punkt ist der Punkt $(0, 0)^\top$, der aber ein leeres Volumen ergibt und ist somit zu eliminieren.
Die andere kritischen Punkte sind die Punkte $\boldsymbol{P} = (x, y)^\top$, welche das nichtlineare System

$$\frac{x^2 + 2xy - 9}{2(x + y)^2} = 0,$$
$$\frac{y^2 + 2xy - 9}{2(x + y)^2} = 0$$

erfüllen.
Aus der ersten Gleichung ist

$$2xy = 9 - x^2.$$

Setzt man diesen Term in die zweite Gleichung ein, erhält man

$$y^2 - x^2 = 0,$$

was die folgenden zwei Lösungen hat

$$y = x,$$
$$y = -x.$$

Die Lösung $y = -x$ ist nicht gültig, weil die Abmessungen des Behälters positiv sein müssen. Es bleibt die Lösung $y = x$ übrig, die, wenn sie in die erste Gleichung eingesetzt wird, ergibt

$$x^2 + 2x^2 - 9 = 0,$$

was die beiden Lösungen hat

$$x = \sqrt{3},$$
$$x = -\sqrt{3}$$

und wieder muss die negative Lösung eliminiert werden. Damit bleibt $y = 3 = x$ und aus der Beziehung.

$$z = \frac{9 - xy}{2x + 2y}$$

folgt

$$z = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Das maximale Volumen ist dann

$$V = \sqrt{3}\,\sqrt{3}\,\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{3}.$$