

Mathematik II

WT 2022

Übungsblatt 5

Newtonverfahren, Taylorentwicklung

Einführende Bemerkungen

- Vermeiden Sie die Verwendung von Taschenrechnern oder Online-Ressourcen.
- Die mit einem Stern *) markierten (Teil-)Aufgaben entfallen in diesem Trimester. Stattdessen werden einzelne Online-Aufgaben im ILIAS-Kurs kenntlich gemacht, zu denen Sie dort Ihre Lösungswege zur Korrektur hochladen können.
- Die mit zwei Sternen **) markierten (Teil-)Aufgaben richten sich an Studierende, die die übrigen Aufgaben bereits gelöst haben und die Inhalte weiter vertiefen möchten.

Aufgabe 5.1: Taylor-Entwicklung in einer Variablen

Bestimmen Sie die Taylor-Entwicklung zweiter Ordnung der Exponentialfunktion e^x um den Punkt $x_0 = 1$ in dem Intervall $0 \leq x \leq 1$ einschließlich des Restgliedtermes. Zeigen Sie damit die Abschätzung:

$$e \leq 3.$$

Aufgabe 5.2: Taylor-Polynom

- Geben Sie das Taylorpolynom n -ter Ordnung der folgenden Funktionen um den angegebenen Entwicklungspunkt x_0 an:
 - $f(x) = \sin(x) \cdot \cos(x)$ um $x_0 = 0$, $n = 4$
 - $g(x) = \cos(x)$ um $x_0 = \pi/2$, $n = 4$
 - $h(x) = e^{1-x}(x^2 - 2x)$ um $x_0 = 1$, $n = 2$
- Geben Sie die Nullstellen der Funktionen sowie der Taylor-Polynome im Intervall $[0, 5]$ an.
- Skizzieren Sie die Funktionen und deren Taylor-Polynome.

Aufgabe 5.3: Kurvendiskussion, Taylorentwicklung

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = e^{-x^2/2}(2x - 3).$$

- Bestimmen Sie den Definitionsbereich von f .
- Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion f .
- Bestimmen Sie eine Asymptote von f , also eine Gerade $g(x) = a + bx$ mit

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - g(x)) = 0.$$

- Bestimmen Sie die kritischen Punkte der Funktion f und charakterisieren Sie diese **ohne** Berechnung der zweiten Ableitung.
- Geben Sie die Taylorentwicklung in den Extrempunkten bis zum Grad 2 an.
- Skizzieren Sie die Funktion, die Asymptote, sowie die Taylorapproximationen.

Aufgabe 5.4: Newton-Verfahren

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = 17x^3 - 468x^2 + 2849x - 2294.$$

- Skizzieren Sie die Funktion im Intervall $-5 \leq x \leq 20$.
- Führen Sie mindestens zwei Schritte des Newton-Verfahrens mit dem Startwert $x_0 = 13$ für die Funktion $f(x)$ durch.
- Skizzieren Sie im Funktionsgraphen die berechneten Iterationen x_0, x_1, x_2, \dots

Aufgabe 5.5: Newton-Verfahren

- Gegeben seien die Funktionen

$$f(x) = \frac{x}{3} \text{ und } g(x) = \sin(x^2).$$

- Skizzieren Sie die Funktionen und bestimmen Sie Näherungen für die Schnittstelle der beiden Funktionsgraphen.

- ii) Bestimmen Sie die kleinste positive Schnittstelle mit dem Newton-Verfahren auf fünf Nachkommastellen genau.

- b) Führen Sie das Verfahren ebenso für die Funktionen

$$f(x) = x^3 \text{ und } g(x) = \cos(2\pi x)$$

und die betragskleinste Schnittstelle durch.

Aufgabe 5.6: Online Aufgabe

Bearbeiten Sie die aktuelle Online-Aufgabe im ILIAS-Kurs.

Beachten Sie, dass Sie dort auch die Lösungswege zu einzelnen Aufgaben zur Korrektur hochladen können.

Ergebnisse zu Aufgabe 5.2:

- i) $T_4(x) = x - 2x^3/3$, ii) $T_4(x) = -(x - \pi/2) + 1/6 \cdot (x - \pi/2)^3$
iii) $T_2(x) = -1 + (x - 1) + 1/2 \cdot (x - 1)^2$

Ergebnisse zu Aufgabe 5.3:

zu e): $T_{2;2}(x) = e^{-2} \left(1 - \frac{5}{2}(x - 2)^2\right)$
 $T_{2;-1/2}(x) = e^{-1/8} \left(-4 + \frac{13}{8} \left(x + \frac{1}{2}\right)^2\right)$

Ergebnisse zu Aufgabe 5.5:

Die gesuchten Schnittpunkte liegen bei a) $z \approx 0.33403$ und b) $z \approx 0.24759$