Helmut-Schmidt-Universität
Universität der Bundeswehr Hamburg
Fakultät für Maschinenbau und Bauingenieurwesen

Prof. Dr. Thomas Carraro
M.Sc Janna Puderbach

Mathematik II/B (WI/ET) — Blatt 3

WT 2024 — Grenzwerte, Stetigkeit, Ableitungen

Einführende Bemerkungen

- Vermeiden Sie die Verwendung von Taschenrechnern oder Online-Ressourcen.

Aufgabe 3.1: Ableitungen

Man berechne die erste Ableitung der folgenden Funktionen

a) $f(x) = x^x$

b) $g(x) = x^{3^x}$

c) $h(x) = x^{\cos(x)}$

Lösung 3.1:

Wir nutzen die folgende Identität:

$$a^b = \mathrm{e}^{b\ln(a)}\,.$$

a) Wir schreiben zunächst:
$f(x) = \mathrm{e}^{x\ln(x)}$
Mit der Ketten- und der Produktregel erhalten wir die Ableitung
$f'(x) = x^x\left(\ln(x) + 1\right)$

b) Wir schreiben $g(x)$ als:
$g(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{x\ln(3)}\ln(x)}$
Mit der Ketten- und der Produktregel erhalten wir die Ableitung
$$g'(x) = x^{3^x}\left(\ln(3)\,3^x\ln(x) + \frac{3^x}{x}\right)$$

c) Wir schreiben $h(x)$ als:
$h(x) = \mathrm{e}^{\cos(x)\ln(x)}$
Mit der Ketten- und Produktregel erhalten wir die Ableitung
$$h'(x) = x^{\cos(x)}\left(\frac{\cos(x)}{x} - \ln(x)\sin(x)\right)$$

Aufgabe 3.2: Stetige Fortsetzung

a) Untersuchen Sie, ob die folgenden reellen Funktionen im Punkt $x = 0$ stetig sind oder stetig fortgesetzt werden können.

$$f_1(x) = |x|, \qquad f_2(x) = \frac{x}{|x|}, \qquad f_3(x) = \frac{x^3}{|x|}, \qquad f_4(x) = \frac{x^2}{|x|^2}$$

b) Bestimmen Sie die Definitionslücken der Funktionen

$$g(x) = \frac{2x^3 - 12x^2 + 18x}{x^3 - 9x}$$

In welchen dieser Lücken ist die Funktion stetig fortsetzbar?

Lösung 3.2:

a) **i)** Sei also x_n eine beliebige Nullfolge, dann ist gemäß Funktionsdefinition

$$\lim_{n\to\infty} |f_1(x_n) - f(0)| = \lim_{n\to\infty} |x_n - 0| = 0$$

und damit auch

$$\underset{x\to 0}{f}_1(x) = f_1(0).$$

Also ist f_1 in $x = 0$ stetig.

ii) Die Funktion f_2 ist in $x = 0$ nicht definiert. Um sie stetig fortzusetzen, müsste die Folge $f_2(x_n)$ für eine beliebige Nullfolge x_n konvergieren. Um dies zu widerlegen, wählen wir die Nullfolge $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$. Damit gilt:

$$f_2(x_n) = \frac{x_n}{|x_n|} = \frac{(-1)^n \cdot 1/n}{1/n} = (-1)^n.$$

Diese Folge $f_2(x_n)$ konvergiert sicher nicht. Damit ist f_2 nicht stetig fortsetzbar in $x = 0$.

iii) Die Funktion f_3 ist ebenfalls in $x = 0$ nicht definiert, sie lässt sich jedoch durch

$$f_3(0) := 0$$

stetig fortsetzen. Sei dafür eine beliebige Nullfolge x_n. Damit gilt dann:

$$|f_3(x_n) - f_3(0)| = \left|\frac{x_n^3}{|x_n|} - 0\right| = \frac{|x_n|^3}{|x_n|} = |x_n|^2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Also konvergiert die Folge $f_3(x_n)$ gegen $f_3(0)$ und die Funktion ist stetig.

iv) Die Funktion f_4 ist nicht definiert für $x = 0$. Setzt man jedoch $f_4(0) = 1$, so erhält man $f_4(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Also hat man f_4 stetig fortgesetzt.

In den beiden Fällen f_3 und f_4 wurden die Definitionsbereiche der Funktionen durch das stetige Fortsetzen im Nullpunkt erweitert. Damit erhält man formal eine neue Funktion.

b) Die Definitionslücken der Funktion g sind gegeben durch die Nullstellen des Nenners:

$$x^3 - 9x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 0 \lor x_2 = 3 \lor x_3 = -3.$$

Der Zähler lässt sich schreiben als

$$2x^3 - 12x^2 + 18x = 2 \cdot (x - 0) \cdot (x - 3)^2.$$

Damit hat man dann

$$g(x) = \frac{2 \cdot (x - 0) \cdot (x - 3)^2}{(x - 0)(x - 3)(x - (-3))} = \frac{2(x - 3)}{x + 3}.$$

Man kann also die Definitionslücken $x_1 = 0$ und $x_2 = 3$ durch

$$g(0) = -2 \text{ und } g(3) = 0$$

beheben. Bei $x_3 = -3$ hat man einerseits für $y_j^- = -3 - 1/j \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} -3$:

$$g(y_j^-) = \frac{2\,(-3 - 1/j - 3)}{-3 - 1/j + 3} = 2\frac{6 + 1/j}{1/j} = 12j + 2 > 2$$

und andererseits für $y_j^+ = -3 + 1/j \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} -3$:

$$g(y_j^+) = \frac{2\,(-3 + 1/j - 3)}{-3 + 1/j + 3} = 2\frac{-6 + 1/j}{1/j} = -12j + 2 < -10.$$

Wenn jede einzelne dieser Folgen einen Grenzwert hätte, so würden diese wegen der Schranken 2 und -10 jedenfalls nicht übereinstimmen. Also kann man g im Punkt $x = -3$ nicht stetig fortsetzen.

Aufgabe 3.3: Differenzieren

Bestimmen Sie jeweils die erste Ableitung. Zur Kontrolle sind die Werte der Ableitung an Kontrollpunkten angegeben. (Eventuell notwendige Beschränkungen des Definitionsgebietes sind nicht angegeben.)

$$f_1(t) = 3t^4 - 4t + 7\,, \qquad f_2(t) = (2t-3)^4\,, \qquad f_3(t) = t^3\,(t+3)^4$$

$$f_4(t) = 3\,\cos(2t)\,, \qquad f_5(t) = \sin^2(3t)\,, \qquad f_6(t) = \tan(2 - t/2)$$

$$f_7(t) = \frac{2t-3}{(t+2)^3}\,, \qquad f_8(t) = \frac{4t\,\sin(t)}{\cos(2t)}\,, \qquad f_9(t) = t^2 \mathrm{e}^{\sqrt{t}}$$

$$f_{10}(t) = \sqrt{t\sqrt{t\sqrt{t}}}\,, \qquad f_{11}(t) = \mathrm{e}^{\frac{1}{1+t^2}}\,, \qquad f_{12}(t) = \tan(t)$$

$$f_{13}(t) = \frac{t + \cos(t)\sin(t)}{2}\,, \qquad f_{14}(t) = \frac{t^2 - t + 2}{2t+3}\,, \qquad f_{15}(t) = \frac{\sin^2(t)}{\cos(t)}$$

Lösung 3.3:

$$f_1'(t) = 3 \cdot 4 \cdot t^3 - 4 = 12t^3 - 4\,,$$

$$f_2'(t) = 4 \cdot (2t-3)^3 \cdot 2 = 8(2t-3)^3\,,$$

$$\begin{aligned} f_3'(t) &= 3t^2 \cdot (t+3)^4 + t^3 \cdot 4(t+3)^3 \\ &= t^2(t+3)^3\big(3(t+3) + 4t\big) = t^2(t+3)^3(7t+9)\,, \end{aligned}$$

$$f_4'(t) = 3 \cdot 2 \cdot (-\sin(2t)) = -6\sin(2t)\,,$$

$$f_5'(t) = 2\sin(3t) \cdot 3\cos(3t) = 6\sin(3t)\cos(3t)\,,$$

$$f_6'(t) = \frac{1}{\cos^2(2-t/2)} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{-1}{2\cos^2(2-t/2)}\,,$$

$$f_7'(t) = \frac{2(t+2)^3 - (2t-3) \cdot 3(t+2)^2}{(t+2)^6} = \frac{13-4t}{(t+2)^4}\,,$$

$$\begin{aligned} f_8'(t) &= \frac{(4t\cos(t) + 4\sin(t))\cos(2t) - 4t\sin(t) \cdot 2(-\sin(2t))}{\cos^2(2t)} \\ &= \frac{4}{\cos^2(2t)} \cdot (t\cos(t)\cos(2t) + \sin(t)\cos(2t) + 2t\sin(t)\sin(2t)) \\ &= \frac{4}{\cos^2(2t)} \cdot \big(t\cos^3(t) - t\cos(t)\sin^2(t) + \cos^2(t)\sin(t) - \sin^3(t) + 4t\sin^2(t)\cos(t)\big) \\ &= \frac{4}{\cos^2(2t)} \cdot \big(t\cos^3(t) + 3t\cos(t)\sin^2(t) + \sin(t) - 3\sin^3(t)\big) \\ &= \frac{4}{\cos^2(2t)} \cdot \big(3t\cos(t) - 2t\cos^3(t) + \sin(t) - 3\sin^3(t)\big) \end{aligned}$$

$$f_9'(t) = 2t\mathrm{e}^{\sqrt{t}} + t^2 \frac{1}{2\sqrt{t}} \mathrm{e}^{\sqrt{t}}$$

$$f_{10}'(t) = \frac{d}{dt}\left(t^{7/8}\right) = \frac{7}{8} t^{-1/8} = \frac{7}{8\sqrt[8]{t}}$$

$$f_{11}'(t) = \mathrm{e}^{\frac{1}{1+t^2}} \cdot \frac{-2t}{(1+t^2)^2}$$

$$f_{12}'(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\sin t}{\cos t}\right) = \frac{\cos t\cos t - (-\sin t)\sin t}{\cos^2 t} = \frac{1}{\cos^2 t}$$

$$f_{13}'(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(-\sin t\sin t + \cos t\cos t) = \frac{1}{2}\left(1 - \sin^2 t + \cos^2 t\right) = \cos^2 t$$

$$f'_{14}(t) = \frac{(2t-1)(2t+3) - 2 \cdot (t^2 - t + 2)}{(2t+3)^2} = \frac{2t^2 + 6t - 7}{(2t+3)^2}$$

$$f'_{15}(t) = \frac{d}{dt}\left(\tan t \cdot \sin t\right) = \frac{1}{\cos^2 t} \sin t + \tan t \cos t = \frac{\tan t}{\cos t} + \sin t$$

Aufgabe 3.4: Differentiation

a) Geben Sie Konstanten b, c, $d \in \mathbb{R}$ an, damit die Funktion

$$g(x) = \begin{cases} bx^3 + cx^2 + d & \text{für } x \le 1 \\ \ln x & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

auf $\mathbb{R}$ zweimal differenzierbar ist.
Ist $g(x)$ für diese Wahl auch dreimal differenzierbar?

b) Überprüfen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x \sin(1/x) & \text{für } x \ne 0, \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

in $x = 0$ stetig ist, aber *nicht* differenzierbar.
Hinweis: Betrachten Sie zur Untersuchung der Differenzierbarkeit die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n = \frac{1}{n\pi+\pi/2}$.

Lösung 3.4:

a) Außerhalb des kritischen Punktes $x = 1$ hat man

$$g'(x) = \begin{cases} 3bx^2 + 2cx & \text{für } x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

sowie

$$g''(x) = \begin{cases} 6bx + 2c & \text{für } x < 1 \\ -\frac{1}{x^2} & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

Da die Funktion zweimal differenzierbar sein soll, müssen $g(x)$ und $g'(x)$ stetig sein, im Punkt $x = 1$ muss also gelten:

$$g(1) = b + c + d = \ln 1 = 0 \text{ und } g'(1) = 3b + 2c = \frac{1}{1} = 1.$$

Aus der zweiten Relation erhält man $c = \frac{1-3b}{2}$.
Die linksseitige zweite Ableitung im Punkt $x = 1$ ist

$$\begin{aligned} g''_-(1) &= \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{g'(x) - g'(1)}{x-1} = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{3bx^2 + 2cx - 1}{x-1} \\ &= \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{3bx^2 + (1-3b)x - 1}{x-1} = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{3b(x^2 - x) + x - 1}{x-1} \\ &= \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} (3bx + 1) = 3b + 1 \end{aligned}$$

und die rechtsseitige zweite Ableitung:

$$\begin{aligned} g''_+(1) &= \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{g'(x) - g'(1)}{x-1} = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{\frac{1}{x} - 1}{x-1} \\ &= \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{1-x}{x(x-1)} = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \left(-\frac{1}{x}\right) = -1 \end{aligned}$$

Beide Grenzwerte müssen übereinstimmen, damit $g''(1)$ sinnvoll definiert ist, also gilt

$$b = \frac{-2}{3} \Rightarrow c = \frac{3}{2} \Rightarrow d = -b - c = \frac{-5}{6}.$$

Man hat dann

$$g''(x) = \begin{cases} -4x + 3 & \text{für } x < 1 \\ -1 & \text{für } x = 1 \\ -\frac{1}{x^2} & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

Die linksseitige Ableitung dieser Funktion im Punkt $x = 1$ ist

$$\begin{aligned} g'''_-(1) &= \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{g''(x) - g''(1)}{x-1} = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{-4x + 3 - (-1)}{x-1} \\ &= \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{-4x + 4}{x-1} = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \left(-4\frac{x-1}{x-1}\right) = -4 \end{aligned}$$

und die rechtsseitige Ableitung:

$$\begin{aligned} g'''_+(1) &= \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{g''(x) - g''(1)}{x-1} = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{-\frac{1}{x^2} - (-1)}{x-1} \\ &= \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{x^2 - 1}{x^2(x-1)} = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{x+1}{x^2} = 2 \end{aligned}$$

Da die beiden Werte nicht übereinstimmen ($-4 \ne 2$), ist g'' im Punkt $x = 1$ nicht differenzierbar.

b) Die Funktion ist stetig in $x = 0$, denn $|\sin(1/x)| \le 1$ und somit ist $|f(x) - f(0)| = |f(x)| \le |x| \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.
Der Differenzenquotient in $x_0 = 0$ ist

$$Q(x) := \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{x} f(x) = \sin(1/x).$$

Dieser Ausdruck konvergiert **nicht** für $x \to 0$. Setzt man zum Beispiel $x_n = \dfrac{1}{n\pi + \pi/2}$, dann gilt $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ und

$$Q(x_n) = \sin(n\pi + \pi/2) = \begin{cases} +1, & \text{für gerade } n \\ -1, & \text{für ungerade } n \end{cases}$$

Aufgabe 3.5: Kurven im $\mathbb{R}^n$

Ein Satellit bewege sich auf der Bahn

$$\boldsymbol{r}(t) = \left(\sqrt{1+t^2},\, 3t\right)^\top$$

a) Berechnen Sie die Geschwindigkeit $\dot{\boldsymbol{r}}(t)$ des Satelliten.

b) Geben Sie die Grenzwerte (für $t \to +\infty$ und für $t \to -\infty$) der Bahnrichtung r_2/r_1 und Geschwindigkeit $\dot{\boldsymbol{r}}$ des Satelliten an.

Lösung 3.5:

a) Die Geschwindigkeit ist

$$\dot{\boldsymbol{r}}(t) = \left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, 3\right)^\top .$$

b) Es ist

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\pm\infty}\frac{r_2}{r_1} &= \lim_{t\to\pm\infty}\frac{3t}{\sqrt{1+t^2}}\\ &= \lim_{t\to\pm\infty}\frac{3\,\operatorname{sign}(t)}{\sqrt{\frac{1}{|t|^2}+1}} = \pm 3\end{aligned}$$

Die Bahn verläuft also asymptotisch in Richtung der beiden Geraden $\operatorname{span}\{(1,\pm 3)^\top\}$. Für die Geschwindigkeit gilt passend dazu

$$\lim_{t\to\pm\infty}\dot{\boldsymbol{r}}(t) = (\pm 1, 3)^\top .$$