

Mathematik II/B (WI/ET)

Blatt 1

WT 2025 Funktionsgraphen, Grenzwerte, Folgen, Differenzieren

Einführende Bemerkungen

- Vermeiden Sie die Verwendung von Taschenrechnern oder Online-Ressourcen.
-

Aufgabe 1.1:

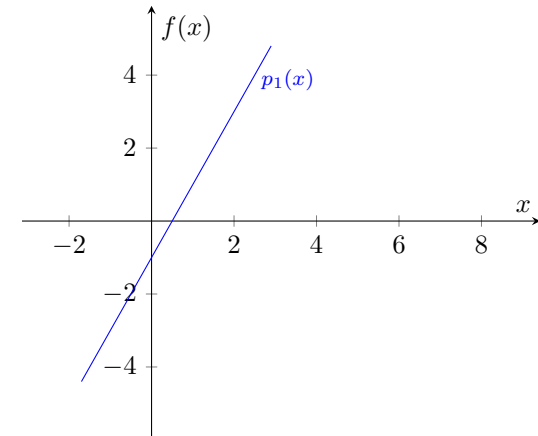
Stellen Sie jede der folgenden Funktionen einzeln in einem Koordinatensystem dar, beschriften Sie die Datenachsen und heben Sie signifikante Werte hervor (z.B. Maxima/Minima, Nullstellen, usw.).

- a) $p_1(x) = 2x - 1$
- b) $p_2(x) = (x - 2)^2 - 1$
- c) $p_3(x) = x^3$
- d) $p_4(x) = -x^3$
- e) $f_1(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$
- f) $f_2(x) = -\cos(x)$
- g) $f_3(x) = \sin(x)$
- h) $f_4(x) = \tan x$
- i) $g_1(x) = \sqrt{x}$
- j) $g_2(x) = \frac{1}{x}$
- k) $g_3(x) = \frac{1}{x^2}$

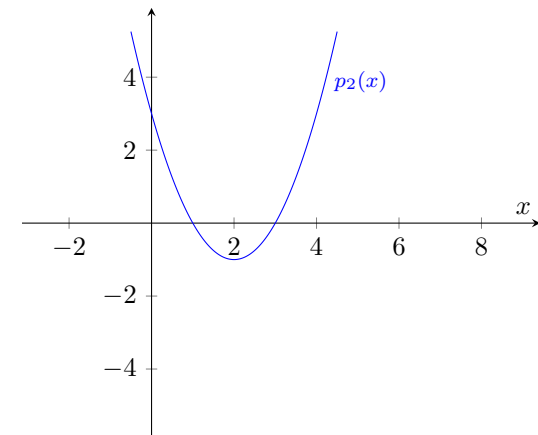
- l) $h_1(x) = \ln x$
- m) $h_2(x) = \ln x + 1$
- n) $h_3(x) = \ln(x + 1)$
- o) $i_1(x) = \exp(x)$
- p) $i_2(x) = \exp(-x)$

Lösung 1.1:

- a) $p_1(x) = 2x - 1$

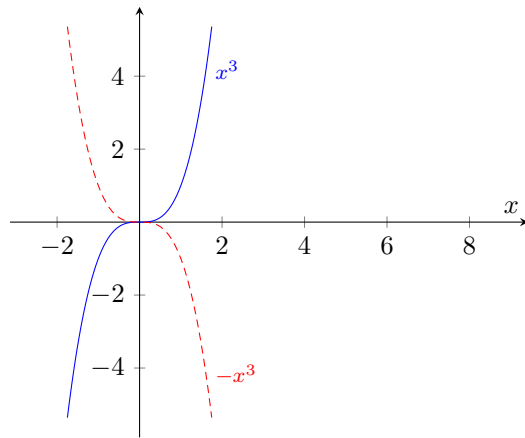


- b) $p_2(x) = (x - 2)^2 - 1$



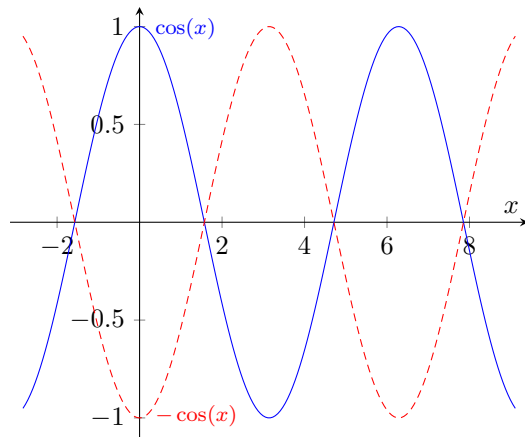
c) $p_3(x) = x^3$

d) $p_4(x) = -x^3$

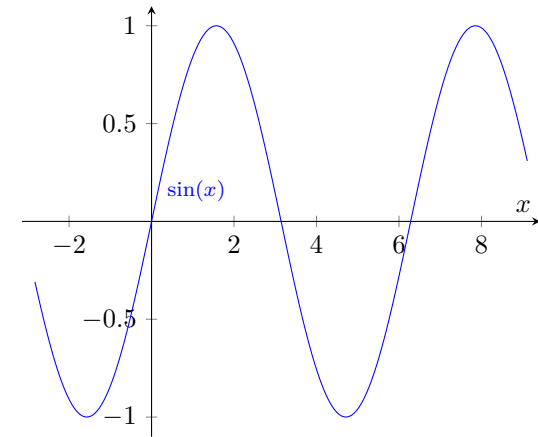


e) $f_1(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x)$

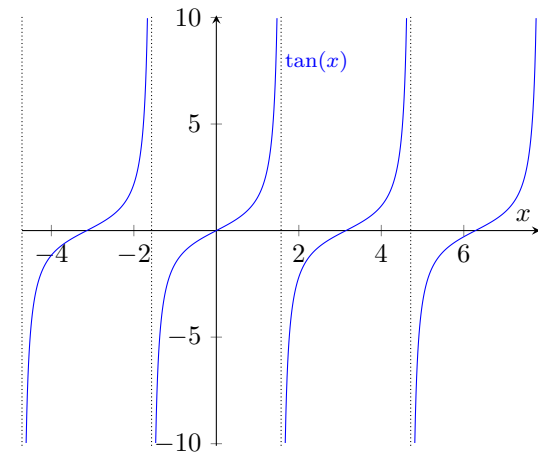
f) $f_2(x) = -\cos(x)$



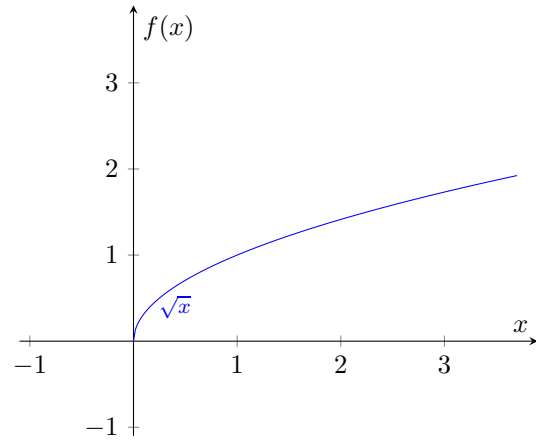
g) $f_3(x) = \sin(x)$



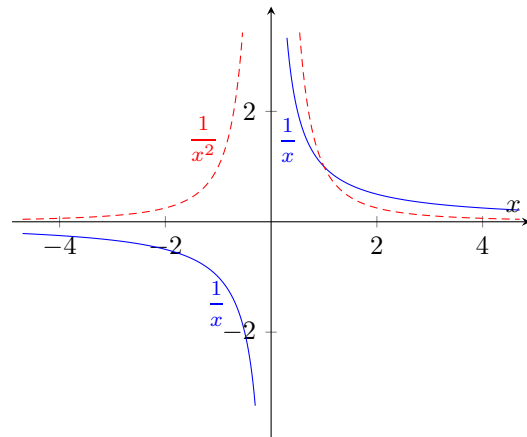
h) $f_4(x) = \tan(x)$



i) $g_1(x) = \sqrt{x}$

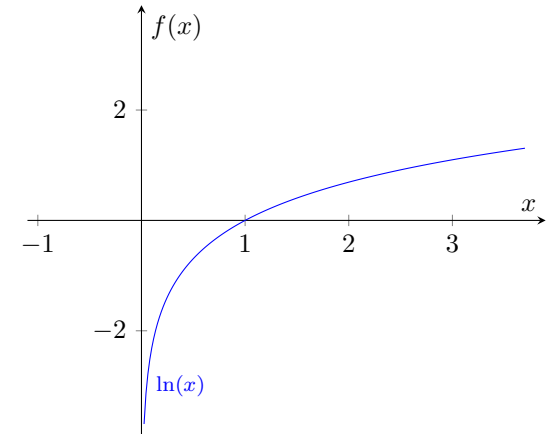


j) $g_2(x) = \frac{1}{x}$

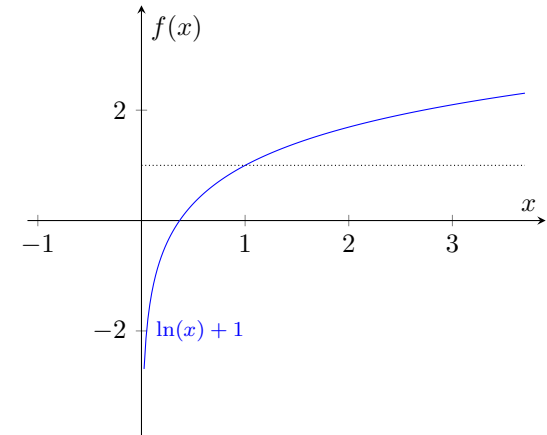


k) $g_3(x) = \frac{1}{x^2}$

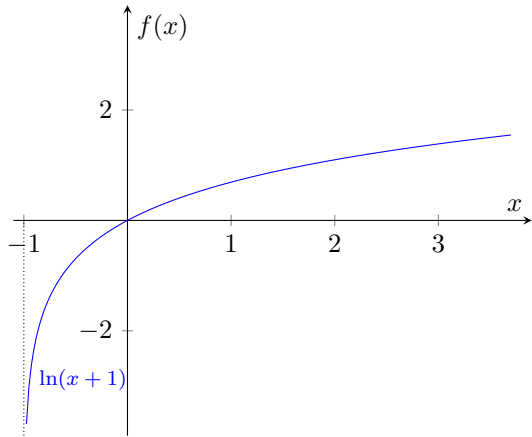
l) $h_1(x) = \ln x$



m) $h_2(x) = \ln x + 1$

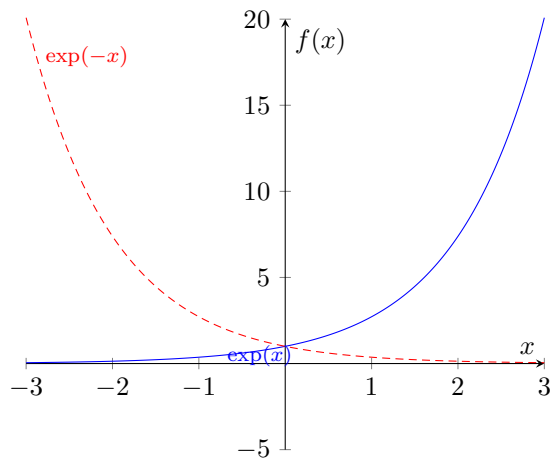


n) $h_3(x) = \ln(x+1)$



o) $i_1(x) = \exp(x)$

p) $i_2(x) = \exp(-x)$



Aufgabe 1.2: Grenzwertdefinition

Bestimmen Sie zu den unten angegebenen Folgen (a_n) mit dem Grenzwert a und den angegebenen Werten für k jeweils ein N so, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > N$ gilt

$$|a_n - a| < 10^{-k}.$$

a) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}, a = 0, k = 2$

b) $a_n = \frac{3n+1}{n+1}, a = 3, k = 4$

c) $a_n = \frac{(-1)^n}{n!} + 1, a = 1, k = 3$

Lösung 1.2:

a) Es soll gelten $|a_n - a| = \frac{1}{\sqrt{n}} \stackrel{!}{<} 10^{-2}$. Dies lässt sich umstellen zu:

$$n > \left(\frac{1}{10^{-2}} \right)^2 = 10^4 = 10000 = N.$$

b) Hier ergibt sich

$$\begin{aligned} & |a_n - a| < 10^{-4} \\ \Leftrightarrow & 10^{-4} > \left| \frac{3n+1}{n+1} - 3 \right| = \frac{|-2|}{n+1} \\ \Leftrightarrow & \frac{n+1}{2} > 10^4 \\ \Leftrightarrow & n > 20000 - 1 = 19999 = N. \end{aligned}$$

c) Für diese Folge ist $|a_n - a| = \left| \frac{(-1)^n}{n!} \right| = \frac{1}{n!}$. Mit $k = 3$ soll also gelten:

$$\frac{1}{n!} < 10^{-3} \quad \Leftrightarrow \quad n! > 1000.$$

Das ist beispielsweise erfüllt für $n > 1000 = N$. Ein kleinstmögliches N kann man durch die Untersuchung von $n!$ ermitteln. Es ist $6! = 720 < 1000$ und $7! = 7 \cdot 6! = 5040 > 1000$. Die Bedingung ist also bereits für $n > 6$ erfüllt.

Aufgabe 1.3:

a) Zeigen Sie anhand der Definition der Konvergenz, dass gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + n - 12}{n^2 - 8} = 2.$$

b) Zeigen Sie: Konvergiert $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ gegen a , so konvergiert auch $\{|a_n|\}_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $|a|$.

c) Gilt die Umkehrung von b)? Begründen Sie Ihre Aussage mit einem Beweis oder einem Gegenbeispiel.

Lösung 1.3:**Lösung**

Zu a) Die Aussage „ a_n konvergiert gegen a “ bedeutet: Für jedes $k \in \mathbb{N} > 0$ existiert ein $N = N(k) \in \mathbb{R}$, so dass für alle $n > N$ gilt, dass $|a_n - a| < 10^{-k}$. Für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$a_n := \frac{2n^2 + n - 12}{n^2 - 8} = \frac{2(n^2 - 8) + (n + 4)}{n^2 - 8} = 2 + \frac{n + 4}{n^2 - 8}.$$

Damit folgt

$$|a_n - 2| = \left| \frac{n + 4}{n^2 - 8} \right| \stackrel{\text{für } n \geq 3}{=} \frac{n + 4}{n^2 - 8} = \frac{n + 4}{n^2 - 16 + 8}$$

$$\stackrel{\text{für } n \geq 5}{<} \frac{n + 4}{n^2 - 16} = \frac{n + 4}{(n + 4)(n - 4)} = \frac{1}{n - 4}.$$

Sei nun $k \in \mathbb{N}$ vorgegeben. Es gilt

$$\frac{1}{n - 4} = 10^{-k} \quad \Longleftrightarrow \quad n = 10^k + 4.$$

Ist $N(k) := 4 + 10^k$, dann gilt insbesondere für alle $n > N(k)$:

$$|a_n - 2| < 10^{-k}.$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

Zu b) Die Aussage „ a_n konvergiert gegen a “ bedeutet: Für jedes $k \in \mathbb{N}$ gibt es ein $N(k) \in \mathbb{R}$, so dass für alle $n > N$ gilt, dass $|a_n - a| < 10^{-k}$. Wegen

$$||a_n| - |a|| \leq |a_n - a|,$$

gilt für jedes $k \in \mathbb{N}$, dass das dazugehörige $N(k)$ und jedes $n > N$ auch

$$||a_n| - |a|| < 10^{-k}$$

erfüllt, d.h. $|a_n|$ konvergiert gegen $|a|$.

Zu c) Die Umkehrung gilt nicht, zum Beispiel gilt für $a_n = (-1)^n$ sicher $|a_n| = 1 \rightarrow 1$, aber $(-1)^n$ ist nicht konvergent.

Aufgabe 1.4: Differenzieren

Bestimmen Sie jeweils die erste Ableitung der folgenden Funktionen:

$$\begin{aligned}f_1(t) &= -\frac{1}{2}t^2 - 2t + 6, & f_2(t) &= \sqrt[3]{t} + 1, & f_3(t) &= \sin\left(\frac{t}{4\pi}\right), \\f_4(t) &= e^{t^2}, & f_5(t) &= (\ln(t))^2, & f_6(t) &= \ln(e^t), \\f_7(t) &= t^3 \ln(t) - \frac{1}{2}t^2, & f_8(t) &= \ln(\sqrt{t}), & f_9(t) &= \sin(t) \cdot t^2, \\f_{10}(t) &= \frac{1}{2}(t^2 - 2)^2.\end{aligned}$$

Lösung 1.4:

$$f'_1(t) = -t - 2 = -(t + 2),$$

$$f'_2(t) = (t^{\frac{1}{3}} + 1)' = \frac{1}{3}t^{-\frac{2}{3}},$$

$$f'_3(t) = \frac{1}{4\pi} \cdot \cos\left(\frac{t}{4\pi}\right),$$

$$f'_4(t) = 2te^{t^2},$$

$$f'_5(t) = \frac{2\ln(t)}{t},$$

$$f'_6(t) = (t)' = 1,$$

$$f'_7(t) = 3t^2 \ln(t) + t^2 - t = t^2(3 \ln(t) + 1) - t,$$

$$f'_8(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \frac{1}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{2t},$$

$$f'_9(t) = \cos(t)t^2 + \sin(t)2t = t(2 \sin(t) + t \cos(t)),$$

$$f'_{10}(t) = 2t(t^2 - 2).$$

Aufgabe 1.5: Differenzieren

Bestimmen Sie jeweils die erste Ableitung. Zur Kontrolle sind die Werte der Ableitung an Kontrollpunkten angegeben. (Eventuell notwendige Beschränkungen des Definitionsbereiches sind nicht angegeben.)

$$\begin{array}{lll} f_1(t) = 3t^4 - 4t + 7, & f_2(t) = (2t - 3)^4, & f_3(t) = t^3(t + 3)^4, \\ f_4(t) = 3 \cos(2t), & f_5(t) = \sin^2(3t), & f_6(t) = \tan(2 - t/2), \\ f_7(t) = \frac{2t - 3}{(t + 2)^3}, & f_8(t) = \frac{4t \sin(t)}{\cos(2t)}, & f_9(t) = t^2 e^{\sqrt{t}}, \\ f_{10}(t) = \sqrt{t} \sqrt{t} \sqrt{t}, & f_{11}(t) = e^{\frac{1}{1+t^2}}, & f_{12}(t) = \tan(t), \\ f_{13}(t) = \frac{t + \cos(t) \sin(t)}{2}, & f_{14}(t) = \frac{t^2 - t + 2}{2t + 3}, & f_{15}(t) = \frac{\sin^2(t)}{\cos(t)}. \end{array}$$

Lösung 1.5:

$$\begin{aligned} f_1'(t) &= 3 \cdot 4 \cdot t^3 - 4 = 12t^3 - 4, \\ f_2'(t) &= 4 \cdot (2t - 3)^3 \cdot 2 = 8(2t - 3)^3, \\ f_3'(t) &= 3t^2 \cdot (t + 3)^4 + t^3 \cdot 4(t + 3)^3 \\ &= t^2(t + 3)^3(3(t + 3) + 4t) = t^2(t + 3)^3(7t + 9), \\ f_4'(t) &= 3 \cdot 2 \cdot (-\sin(2t)) = -6 \sin(2t), \\ f_5'(t) &= 2 \sin(3t) \cdot 3 \cos(3t) = 6 \sin(3t) \cos(3t), \\ f_6'(t) &= \frac{1}{\cos^2(2 - t/2)} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{-1}{2 \cos^2(2 - t/2)}, \\ f_7'(t) &= \frac{2(t + 2)^3 - (2t - 3) \cdot 3(t + 2)^2}{(t + 2)^6} = \frac{13 - 4t}{(t + 2)^4}, \\ f_8'(t) &= \frac{(4t \cos(t) + 4 \sin(t)) \cos(2t) - 4t \sin(t) \cdot 2(-\sin(2t))}{\cos^2(2t)} \\ &= \frac{4}{\cos^2(2t)} \cdot (t \cos(t) \cos(2t) + \sin(t) \cos(2t) + 2t \sin(t) \sin(2t)) \\ &= \frac{4}{\cos^2(2t)} \cdot (t \cos^3(t) - t \cos(t) \sin^2(t) + \cos^2(t) \sin(t) - \sin^3(t) + 4t \sin^2(t) \cos(t)) \\ &= \frac{4}{\cos^2(2t)} \cdot (t \cos^3(t) + 3t \cos(t) \sin^2(t) + \sin(t) - 3 \sin^3(t)) \\ &= \frac{4}{\cos^2(2t)} \cdot (3t \cos(t) - 2t \cos^3(t) + \sin(t) - 3 \sin^3(t)), \\ f_9'(t) &= 2te^{\sqrt{t}} + t^2 \frac{1}{2\sqrt{t}} e^{\sqrt{t}}, \\ f_{10}'(t) &= \frac{d}{dt} (t^{7/8}) = \frac{7}{8} t^{-1/8} = \frac{7}{8\sqrt[8]{t}}, \\ f_{11}'(t) &= e^{\frac{1}{1+t^2}} \cdot \frac{-2t}{(1+t^2)^2}, \\ f_{12}'(t) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\sin t}{\cos t} \right) = \frac{\cos t \cos t - (-\sin t) \sin t}{\cos^2 t} = \frac{1}{\cos^2 t}, \\ f_{13}'(t) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} (-\sin t \sin t + \cos t \cos t) = \frac{1}{2} (1 - \sin^2 t + \cos^2 t) = \cos^2 t. \end{aligned}$$

$$f'_{14}(t) = \frac{(2t-1)(2t+3) - 2 \cdot (t^2 - t + 2)}{(2t+3)^2} = \frac{2t^2 + 6t - 7}{(2t+3)^2}$$

$$f'_{15}(t) = \frac{d}{dt}(\tan t \cdot \sin t) = \frac{1}{\cos^2 t} \sin t + \tan t \cos t = \frac{\tan t}{\cos t} + \sin t$$

Ergebnisse zu Aufgabe 1.2:

a) $N = 10000$, b) $N = 19999$, c) $N = 6$

Ergebnisse zu Aufgabe 1.3:

c) Betrachten Sie $a_n = (-1)^n$.

Ergebnisse zu Aufgabe 1.4:

$$\begin{aligned} f'_1(t) &= -(t+2), & f'_2(t) &= \frac{1}{3}t^{-\frac{2}{3}}, & f'_3(t) &= \frac{1}{4\pi} \cdot \cos\left(\frac{t}{4\pi}\right), \\ f'_4(t) &= 2te^{t^2}, & f'_5(t) &= \frac{2\ln(t)}{t}, & f'_6(t) &= 1, \\ f'_7(t) &= t^2(3\ln(t) + 1) - t, & f'_8(t) &= \frac{1}{2t}, & f'_9(t) &= t(2\sin(t) + t\cos(t)), \\ f'_{10}(t) &= 2t(t^2 - 2). \end{aligned}$$

Ergebnisse zu Aufgabe 1.5:

$$\begin{aligned} f'_1(2) &= 92, & f'_2(2) &= 8, & f'_3(2) &= 11500, \\ f'_4(\pi/3) &= -3\sqrt{3}, & f'_5(\pi/3) &= 0, & f'_6(4+2\pi) &= -1/2, \\ f'_7(2) &= 5/256, & f'_8(\pi/3) &= \frac{20\pi}{3} - 4\sqrt{3}, & f'_9(4) &= 12e^2, \\ f'_{10}(256) &= \frac{7}{16}, & f'_{11}(2) &= -\frac{4e^{1/5}}{25}, & f'_{12}(\pi/3) &= 4, \\ f'_{13}(\pi/3) &= \frac{1}{4}, & f'_{14}(2) &= \frac{13}{49}, & f'_{15}(\pi/3) &= \frac{5\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$