Aufgabe 1: Basiswechsel

Gegeben sei der Vektor $\boldsymbol{v} = (2,1)^T$ bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{R}^2$.
Bestimmen Sie die Koordinaten von $\boldsymbol{v}$ bezüglich der Basis

$$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} .$$

Lösung 1:

Wir benutzen die Notation $\boldsymbol{v}_a = (\lambda_1, \lambda_2)^T$, um de Vektor $\boldsymbol{v}$ in den Koordinaten bezüglich der Basis $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}$ zu bezeichnen.
Die Komponenten von $\boldsymbol{v}_a$ erfüllen die folgende Gleichung

$$\lambda_1\, \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2\, \boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{v}\,.$$

Daraus folgt das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 3\lambda_1 + 2\lambda_2 &= 2\,, \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 &= 1\,, \end{aligned}$$

mit der Lösung

$$\boldsymbol{v}_a = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ -\frac{1}{5} \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 2: Lineares Gleichungssystem mit komplexen Zahlen

Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem mit Hilfe des Gauß-Eliminationsverfahrens für $u, v \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} (2+3\,\mathrm{i}) \cdot u + (1-1\,\mathrm{i}) \cdot v &= 7+6\,\mathrm{i}\,, \\ (3-2\,\mathrm{i}) \cdot u + (2\,\mathrm{i}) \cdot v &= 2-9\,\mathrm{i}\;. \end{aligned}$$

Lösung 2:

$$\begin{array}{rr|r|l} (2+3\,\mathrm{i}) & (1-\mathrm{i}) & (7+6\,\mathrm{i}) & \\ (3-2\,\mathrm{i}) & (2\,\mathrm{i}) & (2-9\,\mathrm{i}) & \times -\frac{(2+3\,\mathrm{i})}{(3-2\,\mathrm{i})} \\ \hline (2+3\,\mathrm{i}) & (1-\mathrm{i}) & (7+6\,\mathrm{i}) & \\ (-2-3\,\mathrm{i}) & (2) & (-9-2\,\mathrm{i}) & +1.\ \text{Gleichung} \\ \hline (2+3\,\mathrm{i}) & (1-\mathrm{i}) & (7+6\,\mathrm{i}) & \\ 0 & (3-\mathrm{i}) & (-2+4\,\mathrm{i}) & \end{array}$$

Durch Rückwärtseinsetzen erhalten wir

$$v = \frac{(-2+4\,\mathrm{i})}{(3-\mathrm{i})} = -1+\mathrm{i}$$

und

$$(2+3\,\mathrm{i})u = (7+4\,\mathrm{i}) - (1-\mathrm{i})(-1+\mathrm{i})$$

Daraus folgt

$$u = \frac{(7+4\,\mathrm{i})}{(2+3\,\mathrm{i})} = 2-\mathrm{i}\;.$$

Aufgabe 3: Lineare Gleichungssysteme

a) Betrachten Sie ein lineares Gleichungssystem beliebiger Dimension mit zwei unterschiedlichen Lösungen. Hat ein solches System immer unendlich viele Lösungen?

b) Gibt es ein lineares Gleichungssystem mit weniger Gleichungen als Variabelen, sodass es eine eindeutige Lösung ist?

c) Seien a, b, c, d, r und s reelle Zahlen. Überprüfen Sie, ob das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a\,x_1 + b\,x_2 &= r \\ c\,x_1 + d\,x_2 &= s \end{aligned}$$

eindeutig lösbar ist, falls $ad - bc \neq 0$ und berechnen Sie die Lösung.

Lösung 3:

a) Seien $(x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ und $(y_1, y_2, \ldots, y_n)^T$ zwei unterschiedliche spezielle Lösungen desselben linearen Gleichungssystems. Dann ist

$$(x_1 - y_1, x_2 - y_2, \ldots, x_n - y_n)^T$$

eine Lösung des entsprechenden homogenen Systems. Dann ist auch für jedes beliebiges $t \in \mathbb{R}$,

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n)^T + t\,(x_1 - y_1, x_2 - y_2, \ldots, x_n - y_n)^T$$

eine Lösung des ursprünglichen linearen Gleichungssystems. Daher hat ein solches lineares Gleichungssystem immer unendlich viele Lösungen.

b) Nach dem Überführen in Zeilenstufenform erkennt man, dass eine Variable frei gewählt werden kann, falls eine Lösung existiert. Daher ist die Lösung niemals eindeutig.

c) Sei $D := ad - bc \neq 0$. Da $D \neq 0$ folgt $a \neq 0$ oder $c \neq 0$. Wir betrachten zuerst den Fall $a \neq 0$. Es gilt

$$\left.\begin{array}{cc|c} a & b & r \\ c & d & s \end{array}\right. \xrightarrow{Z_2 - \frac{c}{a} Z_1} \left.\begin{array}{cc|c} a & b & r \\ 0 & d - \frac{c}{a} b & s - \frac{c}{a} r \end{array}\right. \longrightarrow \left.\begin{array}{cc|c} a & b & r \\ 0 & \frac{ad-bc}{a} & \frac{as-cr}{a} \end{array}\right.$$

Aus der zweiten Zeile folgt

$$\frac{ad - bc}{a} x_2 = \frac{as - cr}{a} \quad \xrightarrow{D \neq 0} \quad x_2 = \frac{as - cr}{D}\,.$$

Die erste Zeile impliziert ($D = ad - bc \neq 0$)

$$a\,x_1 + b\,\frac{as - cr}{D} = r \quad \longrightarrow \quad a\,x_1 = \frac{rD - abs + bcr}{D} = \frac{adr - bcr - abs + bcr}{D}$$

und daher

$$x_1 = \frac{dr - bs}{D}\,.$$

Die eindutige Lösung ist dann

$$(x_1, x_2)^T = \left(\frac{dr - bs}{D}, \frac{as - cr}{D} \right)^T\,.$$

Der Fall $c \neq 0$ wird analog behandelt.

Aufgabe 4: Lineare Gleichungssystem

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 2x_1 & - & x_2 & + & ax_3 \\ -4x_1 & & & + & (1-2a)x_3 \\ -2x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b \\ -4b-4 \\ -6 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}\,.$$

a) Bringen Sie das Gleichungssystem in die Zeilenstufenform.

b) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von a den Rang der Systemmatrix.

c) Bestimmen Sie, für welche Werte von a und b das Gleichungssystem

- **i)** eine eindeutige Lösung hat,
- **ii)** unendlich viele Lösungen hat,
- **iii)** keine Lösung hat.

d) Geben Sie die Lösungsmenge für $a = 1$ und $b = -1$ an.

e) Geben Sie die Lösungsmenge für $a = 3$ und $b = 1$ an.

f) Bestimmen Sie das Bild der Systemmatrix für $a = 3$.

g) Bestimmen Sie den Kern der Systemmatrix für $a = 3$.

Lösung 4:

a)

b)

I	2	–1	a	$2b$	
II	–4	0	1–2a	–4b–4	
III	–2	–1	–2	–6	
I	–2	–1	–2	–6	
II’	0	–2	1	–4	II’ = II + 2I
III’	0	–2	a–2	2b–6	III’ = III + I
I	2	–1	a	$2b$	
II’	0	–2	1	–4	
III”	0	0	a–3	2b–2	III” = III’ - II’

c) Der Rang der Systemmatrix ist 2 für $a = 3$ und 3 für $a \neq 3$. Der Rang der erweiterten Systemmatrix ist 2 für $a = 3$ und $b = 1$ und 3 für $a \neq 3$ oder $b \neq 1$.

d)
- **i)** Das Gleichungssystem hat eine eindeutige Lösung für $a \neq 3$.
- **ii)** Das Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen für $a = 3$ und $b = 1$.
- **iii)** Das Gleichungssystem hat keine Lösung für $a = 3$ und $b \neq 1$.

e) Wir setzen $a = 1$ und $b = -1$ in die Stufenform ein und erhalten

f)

I	2	–1	1	–2
II’	0	–2	1	–4
III”	0	0	–2	–4

Die Lösungsmenge erhalten wir durch Rückwärtseinsetzen. Aus der dritten Gleichung erhalten wir $x_3 = 2$. Aus der dritten Gleichung erhalten wir einen Freiheitsgrad. Wir wählen $x_2 = 3$. Daraus ergibt sich $x_1 = -\frac{1}{2}t$. Die Lösungsmenge ist dann

$$\mathcal{L} = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

g) Wir setzen $a = 3$ und $b = 1$in die Stufenform ein und erhalten

h)

I	2	–1	3	2
II’	0	–2	1	–4
III”	0	0	0	0

Die Lösungsmenge erhalten wir durch Rückwärtseinsetzen. Aus der dritten Gleichung erhalten wir $x_3 = t$. Aus der zweiten Gleichung erhalten wir $x_2 = 2 + \frac{t}{2}$ und schließlich aus der ersten Gleichung $x_1 = 2 - \frac{5}{4}t$. Damit ist die Lösungsmenge gegeben durch:

$$\mathcal{L} = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\frac{5}{4} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

i) Um das Bild der Systemmatrix, transponieren wir die Matrix. Das Bild kann bestimmt werden, indem wir die Zeilenstufenform von A^T bestimmen.

j)

I	2	–4	–2	
II	–1	0	–1	II’=2II+I
III	3	–5	–2	III’=2III-3I
I	2	–4	–2	
II’	0	–2	–2	
III’	0	1	1	
I	2	–4	–2	
II’	0	–2	–2	
III”	0	0		

Damit ergeben die Nicht-Nullzeilen von A^T das Bild von A.

$$\text{Bild} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}.$$

k) Wir setzen $a = -1$ ein. Um den Kern zu bestimmen, löst man das homogene System $\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$.

l)

I	2	–1	3	0
II'	0	–2	1	0
III"	0	0	0	0

Durch Rückwärtseinsetzen erhalten wir $x_3 = t$ für $t \in \mathbb{R}$. Aus der dritten Gleichung erhalten wir einen Freiheitsgrad und setzen $x_2 = \frac{1}{2}t$. Aus der ersten Gleichung erhalten wir $x_1 = -\frac{5}{4}t$. Daraus ergibt sich der Kern

$$\text{Kern} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} -\frac{5}{4} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

Aufgabe 5: Lineare Abbildungen

Gegeben seien die linearen Abbildungen $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ und $\boldsymbol{g} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ durch

$$\boldsymbol{f}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 + 2x_3 \\ x_1 - x_2 + x_3 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \boldsymbol{g}(y_1, y_2, y_3) = \begin{pmatrix} y_2 - y_3 \\ y_1 + y_2 - y_3 \end{pmatrix}.$$

a) Geben Sie die Matrixdarstellungen der beiden linearen Abbildungen $\boldsymbol{f}$ und $\boldsymbol{g}$ sowie der Abbildung $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f}$ an.

b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Matrixdarstellungen aus Aufgabenteil **a)** $\boldsymbol{f}(1, 1, -1)$, $\boldsymbol{g}(1, 2, 1)$ sowie $\boldsymbol{h}(1, 1, -1)$.

Lösung 5:

a) Die Abbildungsmatrix der Abbildung $\boldsymbol{f}$ ist

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

die der Abbildung $\boldsymbol{g}$:

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Die Abbildung $\boldsymbol{h}$ hat die Darstellung:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{h}(x_1, x_2, x_3) =& \boldsymbol{g}(\boldsymbol{f}(x_1, x_2, x_3)) \\ =& \begin{pmatrix} f_2(x_1, x_2, x_3) - f_3(x_1, x_2, x_3) \\ f_1(x_1, x_2, x_3) + f_2(x_1, x_2, x_3) - f_3(x_1, x_2, x_3) \end{pmatrix} \\ =& \begin{pmatrix} x_1 + 2x_3 - (x_1 - x_2 + x_3) \\ x_1 - x_2 + (x_1 + 2x_3) - (x_1 - x_2 + x_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 + x_3 \\ x_1 + x_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Damit hat $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})$ die Matrixdarstellung

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alternativ kann man die Matrix der verketteten Abbildung auch als Produkt der Abbildungsmatrizen berechnen:

$$\boldsymbol{BA} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Es sind

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f}(1, 1, -1) =& \boldsymbol{A} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \boldsymbol{g}(1, 2, 1) =& \boldsymbol{B} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \boldsymbol{h}(1, 1, -1) =& \boldsymbol{C} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Aufgabe 6: Lineare Abbildung im Komplexen

Gegeben ist die lineare Abbildung $\boldsymbol{L}: \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^3$ mit der Matrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1+\mathrm{i} & 1 & \mathrm{i} \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2\,\mathrm{i} & \mathrm{i} & 2\,\mathrm{i}-1 \end{pmatrix}$$

sowie der Vektor $\boldsymbol{b}_\lambda = (\lambda - \mathrm{i},\ 0,\ -2\,\mathrm{i})^\top$.

a) Geben Sie Rang($\boldsymbol{A}$) und Orthonormalbasen von Bild$\boldsymbol{A}$ sowie Kern$\boldsymbol{A}$ und (Bild$\boldsymbol{A})^\perp$ an.

Hinweise:

- Der Orthogonalraum $\boldsymbol{U}^\perp$ eines Unterraumes $\boldsymbol{U} \subset \mathbb{C}^n$ enthält alle Vektoren, die senkrecht zu allen Vektoren aus $\boldsymbol{U}$ sind:

$$\boldsymbol{U}^\perp = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n \mid \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}\rangle = 0 \text{ für alle } \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{U}\}$$

- Im Komplexen gilt (Bild$\boldsymbol{A})^\perp$ = Kern($\boldsymbol{A}^*$).

b) Für welche $\lambda \in \mathbb{C}$ ist $\boldsymbol{b}_\lambda \in$ Bild$\boldsymbol{A}$ enthalten?

c) Geben Sie für beliebige $\lambda \in \mathbb{C}$ eine Zerlegung von $\boldsymbol{b}_\lambda$ in Komponenten aus Bild$\boldsymbol{A}$ und (Bild$\boldsymbol{A})^\perp$ an.

d) Bestimmen Sie alle $\boldsymbol{x}_\lambda \in \mathbb{C}^4$, so dass $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_\lambda$ die orthogonale Projektion von $\boldsymbol{b}_\lambda$ auf Bild$\boldsymbol{A}$ ist.

Lösung 6:

a) Um eine Basis von Bild$\boldsymbol{A}$ zu bestimmen, wenden wir den Gauß-Algorithmus auf die Spaltenvektoren von $\boldsymbol{A}$ an:

1	0	1	
$1+\mathrm{i}$	1	$2\,\mathrm{i}$	-$(1+\mathrm{i})\cdot$ 1. Zeile
1	1	i	-1. Zeile
i	1	$2\,\mathrm{i}-1$	-$\mathrm{i}\cdot$ 1. Zeile
1	0	1	
0	1	$-1+\mathrm{i}$	
0	1	$\mathrm{i}-1$	-2. Zeile
0	1	$\mathrm{i}-1$	-2. Zeile
1	0	1	
0	1	$-1+\mathrm{i}$	
0	0	0	
0	0	0	

Eine Basis des Bildraumes ist damit

$$\{(1,\ 0,\ 1)^\top,\ (0,\ 1,\ \mathrm{i}-1)^\top\}.$$

Diese wird noch orthonormiert:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1,\ 0,\ 1)^\top \\ \boldsymbol{w}_2 &= (0,\ 1,\ \mathrm{i}-1)^\top - \frac{1}{2}\left\langle (0,\ 1,\ \mathrm{i}-1)^\top,\ (1,\ 0,\ 1)^\top \right\rangle (1,\ 0,\ 1)^\top \\ &= \frac{1}{2}(1-\mathrm{i},\ 2,\ \mathrm{i}-1)^\top \\ \Rightarrow \qquad \boldsymbol{v}_2 &= \frac{1}{\sqrt{8}}(1-\mathrm{i},\ 2,\ \mathrm{i}-1)^\top \end{aligned}$$

Die Vektoren $\boldsymbol{v}_1$ und $\boldsymbol{v}_2$ bilden eine Basis von Bild$\boldsymbol{A}$. Um eine Basis des Orthogonalraumes (Bild$\boldsymbol{A})^\perp$ zu erhalten, setzen wir den Gram-Schmidt-Algorithmus mit einem willkürlichen Vektor – hier $\boldsymbol{e}_3$ – fort:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{w}_3 &= \boldsymbol{e}_3 - \langle \boldsymbol{e}_3,\ \boldsymbol{v}_1\rangle \boldsymbol{v}_1 - \langle \boldsymbol{e}_3,\ \boldsymbol{v}_2\rangle \boldsymbol{v}_2 \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{-1-\mathrm{i}}{8}\begin{pmatrix} 1-\mathrm{i} \\ 2 \\ \mathrm{i}-1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 \\ 1+\mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \qquad \boldsymbol{v}_3 &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1+\mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dieser Vektor $\boldsymbol{v}_3$ bildet eine Orthonormalbasis von (Bild$\boldsymbol{A})^\perp$.

Der Rang der Abbildung ist 2. Gemäß Dimensionsformel hat der Kern somit die Dimension $4-2=2$. Wir ermitteln ihn im Gauß-Verfahren:

1	$1+\mathrm{i}$	1	i	0	
0	1	1	1	0	
1	$2\,\mathrm{i}$	i	$2\,\mathrm{i}-1$	0	-1. Zeile
1	$1+\mathrm{i}$	1	i	0	
0	1	1	1	0	
0	$\mathrm{i}-1$	$\mathrm{i}-1$	$\mathrm{i}-1$	0	-$(\mathrm{i}-1)\cdot$ 2. Zeile
1	$1+\mathrm{i}$	1	i	0	
0	1	1	1	0	
0	0	0	0	0	-$(\mathrm{i}-1)\cdot$ 2. Zeile

Wir wählen zunächst $(x_3, x_4) = (1, 0)$, um den ersten Basisvektor $(\mathrm{i},\ -1,\ 1,\ 0)^\top$ und dann $(x_3, x_4) = (0, 1)$, um den zweiten Basisvektor $(1,\ -1,\ 0,\ 1)^\top$ zu erhalten.

Für diese beiden Vektoren liefert das Schmidtsche Verfahren:

$$
\begin{aligned}
& \boldsymbol{z}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\,\mathrm{i},\,-1,\,1,\,0)^\top \\
& \boldsymbol{z}_2' = (1,\,-1,\,0,\,1)^\top - \frac{1}{3}(-\mathrm{i}+1)(\,\mathrm{i},\,-1,\,1,\,0)^\top = \frac{1}{3}(2-\mathrm{i},\,-2-\mathrm{i},\,\mathrm{i}-1,\,3)^\top \\
\Rightarrow\quad & \boldsymbol{z}_2 = \frac{1}{\sqrt{21}}(2-\mathrm{i},\,-2-\mathrm{i},\,\mathrm{i}-1,\,3)^\top
\end{aligned}
$$

b) Es ist $\boldsymbol{b}_\lambda \in \mathrm{Bild}\boldsymbol{A}$, wenn $\{\boldsymbol{b}_\lambda,\,\boldsymbol{v}_1,\,\boldsymbol{v}_2\}$ linear abhängig ist. Dies prüfen wir mittels Gauß-Verfahren nach:

$$
\begin{array}{rcr|l}
1 & 0 & 1 & \text{(Vielfaches von } \boldsymbol{v}_1) \\
1-\mathrm{i} & 2 & \mathrm{i}-1 & \text{(Vielfaches von } \boldsymbol{v}_2) \\
\lambda-\mathrm{i} & 0 & -2\,\mathrm{i} & (\boldsymbol{b}_\lambda) \\
\hline
1 & 0 & 1 & \\
0 & 2 & 2\,\mathrm{i}-2 & \text{2. Zeile - } (1-\mathrm{i})\cdot \text{ 1. Zeile} \\
0 & 0 & -\lambda-\mathrm{i} & \text{3. Zeile - } (\lambda-\mathrm{i})\cdot \text{ 1. Zeile}
\end{array}
$$

Die letzte Zeile verschwindet genau dann, wenn $\lambda = -\,\mathrm{i}$ ist, dann sind die drei Vektoren linear abhängig, es ist also

$$\boldsymbol{b}_{-\,\mathrm{i}} \in \mathrm{Bild}\boldsymbol{A}.$$

c) Die Projektion auf Bild$\boldsymbol{A}$ wird geliefert durch

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{P}(\boldsymbol{b}_\lambda) &= \langle \boldsymbol{b}_\lambda, \boldsymbol{v}_1\rangle\, \boldsymbol{v}_1 + \langle \boldsymbol{b}_\lambda, \boldsymbol{v}_2\rangle\, \boldsymbol{v}_2 \\
&= \frac{\lambda - 3\,\mathrm{i}}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \frac{\lambda(1+\mathrm{i})-1+\mathrm{i}}{8}\begin{pmatrix}1-\mathrm{i}\\2\\\mathrm{i}-1\end{pmatrix} \\
&= \frac{\lambda}{8}\begin{pmatrix}6\\2+2\,\mathrm{i}\\2\end{pmatrix} + \frac{1}{8}\begin{pmatrix}-10\,\mathrm{i}\\-2+2\,\mathrm{i}\\-14\,\mathrm{i}\end{pmatrix} = \frac{\lambda}{4}\begin{pmatrix}3\\1+\mathrm{i}\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{4}\begin{pmatrix}5\,\mathrm{i}\\1-\mathrm{i}\\7\,\mathrm{i}\end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Der Anteil von $\boldsymbol{b}_\lambda$ orthogonal zu Bild$\boldsymbol{A}$ ergibt sich als Differenz aus beiden:

$$\boldsymbol{b}_\lambda - \boldsymbol{P}(\boldsymbol{b}_\lambda) = \frac{\lambda}{4}\begin{pmatrix}1\\-1-\mathrm{i}\\-1\end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix}\mathrm{i}\\1-\mathrm{i}\\-\,\mathrm{i}\end{pmatrix}.$$

d) Es soll also gelten $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_\lambda = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{b}_\lambda)$:

$$
\begin{array}{rrrr|r}
1 & 1+\mathrm{i} & 1 & \mathrm{i} & 3/4\lambda - 5/4\,\mathrm{i} \\
0 & 1 & 1 & 1 & (1+\mathrm{i})/4\lambda - (1-\mathrm{i})/4 \\
1 & 2\,\mathrm{i} & \mathrm{i} & 2\,\mathrm{i}-1 & 1/4\lambda - 7/4\,\mathrm{i} \\
\hline
1 & 1+\mathrm{i} & 1 & \mathrm{i} & 3/4\lambda - 5/4\,\mathrm{i} \\
0 & 1 & 1 & 1 & (1+\mathrm{i})/4\lambda - (1-\mathrm{i})/4 \\
0 & 1-\mathrm{i} & 1-\mathrm{i} & 1-\mathrm{i} & \lambda/2 + 1/2\,\mathrm{i} \\
\hline
1 & 1+\mathrm{i} & 1 & \mathrm{i} & 3/4\lambda - 5/4\,\mathrm{i} \\
0 & 1 & 1 & 1 & (1+\mathrm{i})/4\lambda - (1-\mathrm{i})/4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

Dies liefert die Partikulärloesung

$$\boldsymbol{x}_\lambda^0 = ((2-i)/4\lambda + (1-6\,\mathrm{i})/4,\,0,\,(1+i)/4\lambda - (1-i)/4,\,0)^\top$$

und damit die allgemeine Lösung:

$$\boldsymbol{x}_\lambda \in \boldsymbol{x}_\lambda^0 + \mathrm{Kern}(\boldsymbol{A}).$$

Aufgabe 7:

Im $\mathbb{R}^3$ sind die Vektoren

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gegeben.

a) Wählen Sie eine Basis von $\boldsymbol{V} = \operatorname{span}\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}\}$ aus, die nur Vektoren $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ oder $\boldsymbol{d}$ enthält.

b) Welche Dimension hat $\boldsymbol{V}$?

c) Bilden Sie ausgehend von der in Aufgabenteil **a)** gewählten Basis eine Orthonormalbasis von $\boldsymbol{V}$.

d) Stellen Sie die Vektoren $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ und $\boldsymbol{d}$ bezüglich der Orthonormalbasis dar, geben Sie also die zugehörigen Koeffizienten an, mittels derer die Vektoren mit der ausgewählten Basis dargestellt werden können.

Lösung 7:

a) Wir wenden den Gauß-Algorithmus auf die vier (Zeilen-)Vektoren an:

$$\begin{array}{rrr|l}
1 & 2 & -1 & \\
1 & 1 & 0 & -\ 1.\ \text{Zeile} \\
3 & 4 & -1 & -3 \times\ 1.\ \text{Zeile} \\
0 & -1 & 1 & \\
\hline
1 & 2 & -1 & \\
0 & -1 & 1 & \\
0 & -2 & 2 & -2 \times\ 2.\ \text{Zeile} \\
0 & -1 & 1 & -\ 1.\ \text{Zeile} \\
\hline
1 & 2 & -1 & \\
0 & -1 & 1 & \\
0 & 0 & 0 & \\
0 & 0 & 0 &
\end{array}$$

Damit ist die Dimension des aufgespannten Vektorraumes $\boldsymbol{V}$ 2. Es genügen also zwei linear unabhänige Vektoren aus $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}\}$, um $\boldsymbol{V}$ aufzuspannen. Wähle als Basis

$$B = \{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{d}\}.$$

b) Die Dimension von $\boldsymbol{V}$ ist gleich der Anzahl der Basisvektoren des endlich erzeugten Raumes, also $\dim \boldsymbol{V} = 2$.

c) Wir wenden das Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren auf $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{d}$ an:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}_1 &= \frac{1}{\|\boldsymbol{a}\|}\boldsymbol{a} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \\
\Rightarrow \qquad \boldsymbol{w}_2 &= \boldsymbol{d} - \langle \boldsymbol{d}, \boldsymbol{v}_1 \rangle \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot (-3) \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
\Rightarrow \qquad \boldsymbol{v}_2 &= \frac{1}{\|\boldsymbol{w}_2\|}\boldsymbol{w}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Eine Orthonormalbasis von $\boldsymbol{V}$ ist damit

$$B_\perp = \left\{ \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

d) Die Koeffizienten der Basisdarstellungen der einzelnen Vektoren bezüglich einer Orthonormalbasis lassen sich durch einfache Skalarprodukte ermitteln:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a} &= \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{v}_1 \rangle \boldsymbol{v}_1 + \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{v}_2 \rangle \boldsymbol{v}_2 = \frac{6}{\sqrt{6}}\boldsymbol{v}_1 + 0\boldsymbol{v}_2 \\
\boldsymbol{b} &= \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{v}_1 \rangle \boldsymbol{v}_1 + \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{v}_2 \rangle \boldsymbol{v}_2 = \frac{3}{\sqrt{6}}\boldsymbol{v}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{v}_2 \\
\boldsymbol{c} &= \langle \boldsymbol{c}, \boldsymbol{v}_1 \rangle \boldsymbol{v}_1 + \langle \boldsymbol{c}, \boldsymbol{v}_2 \rangle \boldsymbol{v}_2 = \frac{12}{\sqrt{6}}\boldsymbol{v}_1 + \frac{2}{\sqrt{2}}\boldsymbol{v}_2 \\
\boldsymbol{d} &= \langle \boldsymbol{d}, \boldsymbol{v}_1 \rangle \boldsymbol{v}_1 + \langle \boldsymbol{d}, \boldsymbol{v}_2 \rangle \boldsymbol{v}_2 = \frac{-3}{\sqrt{6}}\boldsymbol{v}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{v}_2
\end{aligned}$$

Aufgabe 8: Basis des $\mathbb{R}^3$

Gegeben seien die Vektoren

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix}3\\3\\\alpha\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix}2\\1\\5\end{pmatrix},$$

$\alpha \in \mathbb{R}$, bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{R}^3$.

a) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ bilden $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$?

b) Bestimmen Sie für solch ein α die Komponenten des Vektors $\boldsymbol{b}$ bezüglich der Basis $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$.

Lösung 8:

a) Da der $\mathbb{R}^3$ die Dimension 3 hat, genügt es zu zeigen, dass die Vektoren $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ linear unabhängig sind. Wir betrachten also drei Zahlen $t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}$ mit

$$t_1\boldsymbol{a}_1 + t_2\boldsymbol{a}_2 + t_3\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0}$$

Daraus ergibt sich das folgende lineare Gleichungssystem, das mittels Gauß-Algorithmus gelöst wird:

1	2	3	0	
2	1	3	0	$-2\times$ 1. Zeile
3	1	α	0	$-3\times$ 1. Zeile
1	2	3	0	
0	-3	-3	0	
0	-5	$\alpha-9$	0	$-5/3\times$ 2. Zeile
1	2	3	0	
0	-3	-3	0	
0	0	$\alpha-4$	0	

Dieses Gleichungssystem ist für $\alpha = 4$ unterbestimmt und hat beliebig viele Lösungen. Für alle anderen α ist die einzige Lösung $t_1 = t_2 = t_3 = 0$. Somit kann $\alpha \neq 4$ beliebig gewählt werden, um eine Basis zu erhalten. Wähle im folgenden $\alpha = 0$.

b) Man muss nun die Koeffizienten t_1, t_2, t_3 aus der Darstellung

$$\boldsymbol{b} = t_1\boldsymbol{a}_1 + t_2\boldsymbol{a}_2 + t_3\boldsymbol{a}_3$$

berechnen. Die obige Lösung des linearen Gleichungssystems dafür kann wieder verwendet werden, die Zeilenoperationen müssen nun für die Einträge von $\boldsymbol{b}$ nachgeholt werden:

$$\begin{pmatrix}2\\1\\5\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}2\\-3\\-1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}2\\-3\\4\end{pmatrix}$$

Rückwärtseinsetzen ergibt:

$$t_3 = -1,\ t_2 = \frac{1}{-3}(-3 + 3\cdot(-1)) = 2,\ t_1 = 2 - 2\cdot 2 - 3\cdot(-1) = 1.$$

Aufgabe 9: Basis von $\mathbb{R}^3$

Welche der folgenden Mengen bilden eine Basis von $\mathbb{R}^3$?

i) $\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

iii) $\mathcal{B}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

ii) $\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

iv) $\mathcal{B}_4 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Lösung 9:

i) Die Vektoren sind linear abhängig. Das kann man mit der folgenden Beziehung zeigen

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Daher bilden sie keine Basis von $\mathbb{R}^3$.

ii) Eine Basis von $\mathbb{R}^3$ hat genau 3 linear unabhängige Vektoren. Da die Menge $\mathcal{B}_2$ nur zwei Vektoren enthält, kann die Menge keine Basis von $\mathbb{R}^3$ bilden.

iii) Wir überprüfen, ob die Elemente von $\mathcal{B}_3$ linear unabhängig sind.

$$c_1\,(1,1,1)^\top + c_2\,(1,0,1)^\top + c_3\,(0,0,1)^\top \stackrel{!}{=} \mathbf{0}\,, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}\,.$$

Daraus erhalten wir das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccc} c_1 & + & c_2 & & & = & 0\,, \\ c_1 & & & & & = & 0\,, \\ c_1 & + & c_2 & + & c_3 & = & 0\,. \end{array}$$

Das Gleichungssystem hat mit $c_1 = 0$, $c_2 = 0$ und $c_3 = 0$ eine eindeutige Lösung. Die drei Vektoren in der Menge $\mathcal{B}_3$ sind also linear unabhängig und bilden daher eine Basis von $\mathbb{R}^3$.

iv) Eine Basis von $\mathbb{R}^3$ hat genau 3 linear unabhängige Vektoren. Da die Menge $\mathcal{B}_4$ vier Vektoren enthält, kann die Menge keine Basis von $\mathbb{R}^3$ bilden.

Aufgabe 10: Basis des $\mathbb{R}^5$

Im $\mathbb{R}^5$ sind die Vektoren

$$\boldsymbol{c}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix}$$

gegeben.

a) Sind die Vektoren der Menge $\mathcal{C} = \{\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_3\}$ linear unabhängig?

b) Ergänzen Sie $\mathcal{C}$ zu einer Basis des $\mathbb{R}^5$.

Lösung 10:

a) An der Stufenstruktur der drei Vektoren ($\boldsymbol{c}_2$ und $\boldsymbol{c}_3$ haben keinen x_1-Anteil, $\boldsymbol{c}_3$ hat keinen x_2-Anteil.) kann man erkennen, dass die Vektoren linear unabhängig sind:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix}$$

b) Unter Fortsetzung dieser Stufenstruktur kann man

$$\boldsymbol{c}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{c}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ergänzen, um eine Basis zu erhalten.

Aufgabe 11: Basiswechsel

Gegeben seien die Vektoren

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{v}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

bezüglich der Standardbasis von $\mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie die Koordinatendarstellung von jedem Vektor bezüglich der Basis

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}.$$

Lösung 11:

Lösen des entsprechenden linearen Gleichungssystems, um die Koordinatendarstellung in der gegebenen Basis zu bestimmen

$$\begin{array}{rrrl} & & 1\lambda_1 & = 1\,, \\ & 1\lambda_1 & +1\lambda_2 & = 1\,, \\ 1\lambda_1 & +3\lambda_2 & +4\lambda_3 & = 1\,, \end{array}$$

ergibt

$$\boldsymbol{v}_1^S = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{array}{rrrl} & & 1\lambda_1 & = 0\,, \\ & 1\lambda_1 & +1\lambda_2 & = 1\,, \\ 1\lambda_1 & +3\lambda_2 & +4\lambda_3 & = 3\,, \end{array}$$

ergibt

$$\boldsymbol{v}_2^S = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{array}{rrrl} & & 1\lambda_1 & = 1\,, \\ & 1\lambda_1 & +1\lambda_2 & = 2\,, \\ 1\lambda_1 & +3\lambda_2 & +4\lambda_3 & = 8\,, \end{array}$$

ergibt

$$\boldsymbol{v}_3^S = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{array}{rrrl} & & 1\lambda_1 & = -1\,, \\ & 1\lambda_1 & +1\lambda_2 & = 1\,, \\ 1\lambda_1 & +3\lambda_2 & +4\lambda_3 & = 2\,, \end{array}$$

ergibt

$$\boldsymbol{v}_4^S = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3/4 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 12: Determinanten

Gegeben sei die Matrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Determinante unter Verwendung von

a) Gauß-Elimination,

b) Laplace-Entwicklung,

Lösung 12:

a) Gauß-Elimination:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[]{\substack{Z2'=Z2-4Z1 \\ Z3'=Z2-7Z1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z3''=Z3'-2Z2'} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Determinante ist das Produkt der Diagonalelemente:

$$\det(\boldsymbol{A}) = 1 \cdot (-3) \cdot 0 = 0$$

b) Laplace-Entwicklung:

Wir entwickeln die Determinante entlang der ersten Spalte

$$\begin{aligned} \det(\boldsymbol{A}) &= 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} - 4 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} + 7 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \\ &= 1 \cdot (5 \cdot 9 - 6 \cdot 8) - 4 \cdot (2 \cdot 9 - 3 \cdot 8) + 7 \cdot (2 \cdot 6 - 5 \cdot 3) \\ &= -3 + 24 - 21 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Aufgabe 13: Determinanten

Bestimmen Sie die Determinante der folgenden Matrix mit Hilfe des Gauß'schen Algorithmus:

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 & 0 \\ -3 & -6 & -4 & 7 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & -5 & 2 \\ -3 & -8 & -2 & 7 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

Lösung 13:

$$\begin{aligned}
\det \boldsymbol{B} &= \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 6 & 3 \end{pmatrix} && (\text{tausche } Z_2 \text{ und } Z_3) \\
&= -1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 6 & 3 \end{pmatrix} && (Z_4 + 2 \cdot Z_2;\ Z_5 - 2 \cdot Z_2) \\
&= -1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -1 \end{pmatrix} && (Z_4 + 3 \cdot Z_3;\ Z_5 - Z_3) \\
&= -1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -2 \end{pmatrix} && (Z_5 + Z_4) \\
&= -1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \\
&= (-1) \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot (-6) \cdot 8 = -48\ .
\end{aligned}$$

Aufgabe 14: Determinanten

Bestimmen Sie die Determinanten folgender Matrizen:

a) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 3 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, b) $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -7 & 8 & 3 \\ 3 & -4 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

c) $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & -1 \\ -5 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ d) $\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 7 & 7 \\ 4 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

Lösung 14:

Man entwickelt solange nach Spalten oder Zeilen, die möglichst viele Nullen enthalten, bis die verbleibenden Restmatrizen leicht direkt ausgerechnet werden können:

$$
\begin{aligned}
\det \boldsymbol{A} &= \det \begin{pmatrix} 7 & -2 & 3 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 5 & 0 & 3 \end{pmatrix} = -4 \cdot \det \begin{pmatrix} 7 & -2 & 3 & 2 \\ -3 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} \\
&= -4 \cdot 2 \cdot \det \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \\
&= -8 \cdot \left[-3 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \right] \\
&= -8 \cdot [-3 \cdot (-2) + 2 \cdot 7] = -160\,.
\end{aligned}
$$

Die Matrix $\boldsymbol{B}$ ist eine Block-Dreiecksmatrix:

$$
\begin{aligned}
\det(\boldsymbol{B}) &= \begin{pmatrix} -2 & 3 & -7 & 8 & 3 \\ 3 & -4 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \det(-3) \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \\
&= -1 \cdot (-3) \cdot (-2) = -6\,.
\end{aligned}
$$

Die Matrix $\boldsymbol{C}$ ist ebenfalls eine Block-Dreiecksmatrix:

$$
\det(\boldsymbol{C}) = \det \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = 5 \cdot 8 = 40\,.
$$

Durch passende Zeilen- und Spaltenvertauschungen kann die Matrix $\boldsymbol{D}$ auf Blockdreiecksstruktur gebracht werden.

$$
\begin{aligned}
\det \boldsymbol{D} &= \det \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 7 & 7 \\ 4 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \text{(tausche } Z_1 \text{ und } Z_3) \\
&= -\det \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 & 7 \\ 5 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \text{(tausche } S_1 \text{ und } S_3) \\
&= \det \begin{pmatrix} 7 & 5 & 2 & 7 \\ 3 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 6 \end{pmatrix} = -1 \cdot 2 = -2\,.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 15: Determinanten

a) Bestimmen Sie die Determinante der Matrix

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Bestimmen Sie die Determinante der folgenden Matrix:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -7 & 8 & 0 & 4 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & -5 & 0 \\ 2 & -5 & 3 & 1 & -7 \\ -5 & -3 & 0 & 4 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Lösung 15:

a) Wir führen erlaubte Gauß-Schritte (Addition des Vielfachen einer Zeile/Spalte zu einer anderen Zeile/Spalte) durch:

$$\begin{array}{llll|l}
1 & 2 & 3 & 4 & \\
2 & 2 & 2 & 2 & -2 \times\ 1.\ \text{Zeile} \\
3 & -1 & 1 & 0 & -3 \times\ 1.\ \text{Zeile} \\
0 & 2 & -8 & 1 & \\
\hline
1 & 2 & 3 & 4 & \\
0 & -2 & -4 & -6 & \\
0 & -7 & -8 & -12 & -\frac{7}{2} \times\ 2.\ \text{Zeile} \\
0 & 2 & -8 & 1 & + \times\ 2.\ \text{Zeile} \\
\hline
1 & 2 & 3 & 4 & \\
0 & -2 & -4 & -6 & \\
0 & 0 & 6 & 9 & \\
0 & 0 & -12 & -5 & +2 \times\ 3.\ \text{Zeile} \\
\hline
1 & 2 & 3 & 4 & \\
0 & -2 & -4 & -6 & \\
0 & 0 & 6 & 9 & \\
0 & 0 & 0 & 13 &
\end{array}$$

Da nur Operationen auf die Matrix angewendet wurden, die die Determinante nicht verändern ist $\det \boldsymbol{B}$ gleich der Determinante der resultierenden oberen Dreiecksmatrix. Diese ergibt sich aus dem Produkt ihrer Diagonalelemente:

$$\det \boldsymbol{B} = 1 \cdot (-2) \cdot 6 \cdot 13 = -156.$$

b)

$$\begin{aligned}
\det \boldsymbol{A} &= (-1)^{3+3} \cdot 3 \cdot \det \begin{pmatrix} -7 & 8 & 4 & 2 \\ 3 & 0 & -5 & 0 \\ -5 & -3 & 4 & 0 \\ -4 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix} \\
&= (-1)^{1+4} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 0 & -5 \\ -5 & -3 & 4 \\ -4 & 0 & 6 \end{pmatrix} \\
&= (-1)^{2+2} \cdot (-3) \cdot (-6) \det \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -4 & 6 \end{pmatrix} \\
&= 18 \cdot (18 - 20) = -36\ .
\end{aligned}$$

Aufgabe 16: Drehmatrizen

Eine Matrix der Form

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

beschreibt eine Drehung eines Vektors um den Winkel α.
Gegeben seien die Vektoren

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \;,\; \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Euklidische Norm von $\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{w}$ und skizzieren Sie die beiden Vektoren.

b) Bestimmen Sie jeweils die Matrix-Vektor-Produkte $\boldsymbol{Av}$ und $\boldsymbol{Aw}$ für die Winkel $\alpha = \frac{\pi}{2}$ und $\beta = -\frac{\pi}{3}$.

c) Skizzieren Sie die Ergebnisvektoren und bestimmen Sie jeweils die Euklidische Norm.

Lösung 16:

a) Die Normen der gegebenen Vektoren sind

$$\|\boldsymbol{v}\|_2 = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} \quad , \quad \|\boldsymbol{w}\|_2 = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

b) Für den Winkel $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ist die Matrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Matrix-Vektor-Produkte sind

$$\boldsymbol{Av} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{Aw} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Für den Winkel $\beta = -\frac{\pi}{3}$ ist die Matrix

$$\boldsymbol{B} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

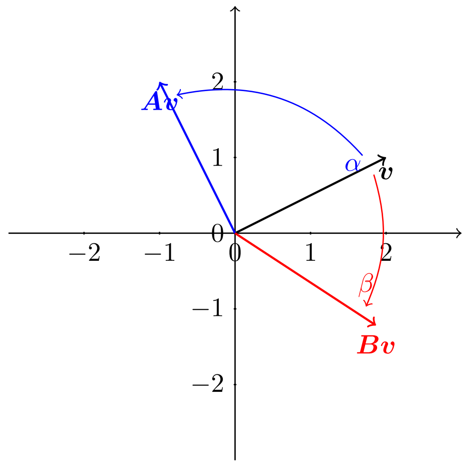
Die Matrix-Vektor-Produkte sind

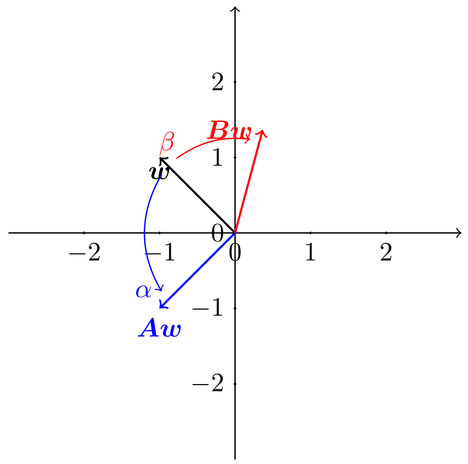
$$\boldsymbol{Bv} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2+\sqrt{3} \\ -2\sqrt{3}+1 \end{pmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{Bw} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1+\sqrt{3} \\ 1+\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

c)

$$\|\boldsymbol{A}v\|_2 = \sqrt{5} \quad , \quad \|\boldsymbol{A}w\|_2 = \sqrt{2}$$

$$\|\boldsymbol{B}v\|_2 = \sqrt{5} \quad , \quad \|\boldsymbol{B}w\|_2 = \sqrt{2}$$





Aufgabe 17: alte Klausuraufgabe

a) Berechnen Sie eine Gleichung der Ebene, die den Punkt mit Ortsvektor $\boldsymbol{x}_0 = (2,3,1)^\top$ enthält und den Normalenvektor $\boldsymbol{n} = \left(\frac{4}{5}, 0, -\frac{3}{5}\right)^\top$ hat.

b) Wie viele Ebenen gibt es, die senkrecht auf dem Vektor $(-2,1,-2)^\top$ stehen und vom Nullpunkt den Abstand $d = 12$ haben? Bestimmen Sie die Gleichungen aller dieser Ebenen.

Lösung 17:

Zu a) Man verwendet die **Hessesche Normalform** der Ebene.
Da der Vektor $\boldsymbol{n}$ bereits normiert ist gilt $\boldsymbol{n}_0 = \boldsymbol{n}$. Die Hessesche Normalform lautet $\langle \boldsymbol{n}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0 \rangle = 0$. Hier ist $\langle \boldsymbol{n}, \boldsymbol{x_0} \rangle = \frac{1}{5} \left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{5}{5} = 1$. Die allgemeine Ebenengleichung der Ebene ist also

$$\frac{4}{5}x_1 - \frac{3}{5}x_3 = 1$$

oder

$$\boxed{4x_1 - 3x_3 = 5\,.}$$

Zu b) Die Hessesche Normalform einer der gesuchten Ebenen hat die Gestalt

$$\langle \boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}, \boldsymbol{n}_0 \rangle = 0.$$

Dabei ist

$$\boldsymbol{n_0} = \frac{1}{\|\boldsymbol{n}\|}\boldsymbol{n} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

der normierte Normalenvektor der Ebene. Der Abstand eines Punktes $\boldsymbol{x}$ zur Ebene ergibt sich als Betrag des obigen Skalarproduktes. Der Abstand zum Ursprung $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ soll $d = 12$ betragen, dies ergibt

$$12 \stackrel{!}{=} |\langle \boldsymbol{0} - \boldsymbol{p}, \boldsymbol{n}_0 \rangle| = |\langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{n}_0 \rangle| \;\Rightarrow\; \langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{n}_0 \rangle = \pm 12.$$

Aus der Hesseschen Normalform folgen so die beiden möglichen Ebenengleichungen:

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{n}_0 \rangle = \langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{n}_0 \rangle \;\Rightarrow\; -\frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_3 = \pm 12.$$

Aufgabe 18: Eigenwerte und Eigenvektoren

a) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenräume der Matrizen

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -4 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & -7 & -4 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -4 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Die Matrix $\boldsymbol{M} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ habe den Eigenwert λ.
Welchen Eigenwert hat dann $\boldsymbol{M} + \boldsymbol{E}_n$?

Lösung 18:

a) **i)** Die Eigenwerte von $\boldsymbol{A}$ ergeben sich zu

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{!}{=} \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -4 & -4 \\ 0 & 3-\lambda & 2 \\ 2 & -7 & -4-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (1-\lambda)(3-\lambda)(-4-\lambda) - 16 + 8(3-\lambda) + 14(1-\lambda) \\ &= -\lambda^3 - 9\lambda + 10 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{39}}{2}, \quad \lambda_3 = -\frac{1}{2} - \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{39}}{2}$$

Eigenvektoren ergeben sich wie üblich aus

$$\begin{aligned} &(\boldsymbol{A} - \lambda_j \boldsymbol{E})\boldsymbol{v}_j \stackrel{!}{=} 0 \\ &\Rightarrow \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ -7+\mathrm{i}\sqrt{39} \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ -7-\mathrm{i}\sqrt{39} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Diese drei Eigenvektoren spannen die zu den jeweiligen Eigenwerten gehörenden Eigenräume auf.

ii) Die Eigenwerte von $\boldsymbol{B}$ ergeben sich zu

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{!}{=} \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -4 & -4 \\ 0 & 3-\lambda & 2 \\ 0 & -1 & -\lambda \end{pmatrix} \\ &= (1-\lambda)(-3\lambda + \lambda^2 + 2) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 2,$$

und die Eigenvektoren:

$$\begin{pmatrix} 0 & -4 & -4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{v}_{1/2} = 0 \quad \Leftarrow \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \boldsymbol{v}_3 = 0 \quad \Leftarrow \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Eigenräume zu den beiden Eigenvektoren sind damit

$$\boldsymbol{U}_{\lambda=1} = \operatorname{span}\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}, \quad \boldsymbol{U}_{\lambda=2} = \operatorname{span}\{\boldsymbol{v}_3\}.$$

Die Eigenräume sind damit

$$\boldsymbol{U}_1 = \operatorname{span}\{(1, -1, 0)^\top\}, \boldsymbol{U}_0 = \operatorname{span}\{(0, -1, 2)^\top\}, \boldsymbol{U}_\mathrm{i} = \operatorname{span}\{(1, -1, 1)^\top\}.$$

b) Es gibt also einen Vektor $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$, mit dem gilt $\boldsymbol{M}\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$. Daraus folgt

$$(\boldsymbol{M} + \boldsymbol{E}_n)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{M}\boldsymbol{v} + \boldsymbol{E}_n\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v} + 1\boldsymbol{v} = (\lambda+1)\boldsymbol{v}$$

also dass $\lambda + 1$ Eigenwert von $\boldsymbol{M} + \boldsymbol{E}_n$ ist.

Aufgabe 19: Eigenwerte und -vektoren

Es seien

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 8 & 10 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ -6 & 0 & 2 \\ -11 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrizen.

b) Geben Sie die zu den Eigenwerten gehörenden Eigenvektoren an.

c) Bestimmen Sie jeweils die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten aller Eigenwerte.

d) Welche der Matrizen sind diagonalisierbar?

e) Multiplizieren Sie die Matrizen mit den jeweiligen gefundenen Eigenvektoren.

Lösung 19:

a) Alle Eigenwerte ergeben sich als Nullstellen des Polynoms $\det(\boldsymbol{M} - \lambda \boldsymbol{E})$, $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$.

$$0 \stackrel{!}{=} \det \begin{pmatrix} 8-\lambda & 10 \\ 8 & 10-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 18\lambda + 80 - 80$$
$$\Rightarrow \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 18$$

$$0 \stackrel{!}{=} \det \begin{pmatrix} -3-\mu & 0 & 1 \\ -6 & -\mu & 2 \\ -11 & 1 & 3-\mu \end{pmatrix}$$
$$= \mu(3-\mu)(3+\mu) - 6 - 11\mu + 2(3+\mu)$$
$$= \mu(9-\mu^2) - 9\mu = -\mu^3$$
$$\Rightarrow \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0$$

$$0 \stackrel{!}{=} \det \begin{pmatrix} -\nu & 1 & 0 \\ 0 & -\nu & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu \end{pmatrix} = \nu^2(1-\nu)$$
$$\Rightarrow \nu_1 = \nu_2 = 0, \ \nu_3 = 1.$$

b) Eigenvektoren sind Lösungen des Gleichungssystems $(\boldsymbol{M} - \lambda \boldsymbol{E})v = 0$:

$$\begin{pmatrix} 8 & 10 \\ 8 & 10 \end{pmatrix} \boldsymbol{u}_1 = 0 \quad \Leftarrow \quad \boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} -10 & 10 \\ 8 & -8 \end{pmatrix} \boldsymbol{u}_2 = 0 \quad \Leftarrow \quad \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ -6 & 0 & 2 \\ -11 & 1 & 3 \end{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 = 0 \quad \Leftarrow \quad \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{C}$ hat als Eigenvektor zum Eigenwert 0 $\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} 1, 0, 0 \end{pmatrix}^\top$ und zum Eigenwert 1 den Eigenvektor $\boldsymbol{w}_3 = (0, 0, 1)^\top$.

c)

d) $\boldsymbol{A}$ hat zwei verschiedene Eigenwerte und ist daher als zweidimensionale Matrix diagonalisierbar.
$\boldsymbol{B}$ hat nur einen linear unabhängigen Eigenvektor, ist also nicht diagonalisierbar.
Für $\boldsymbol{C}$ existieren ebenfalls nur zwei linear unabhängige Eigenvektoren, also ist auch diese Matrix nicht diagonalisierbar.

e)

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_1 = 0 \cdot \boldsymbol{u}_1, \qquad \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_2 = 18 \cdot \boldsymbol{u}_2$$
$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{v}_1 = 0 \cdot \boldsymbol{v}_1$$
$$\boldsymbol{C}\boldsymbol{v}_1 = 0 \cdot \boldsymbol{w}_1, \qquad \boldsymbol{C}\boldsymbol{w}_3 = 1 \cdot \boldsymbol{w}_3$$

Aufgabe 20: Darstellungen von Ebenen im $\mathbb{R}^3$

Gegeben sind die Punkte im $\mathbb{R}^3$ mit den Ortsvektoren

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ z \end{pmatrix}, \quad z \in \mathbb{R}.$$

a) Geben Sie für die durch $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{c}$ aufgespannte Ebene $\boldsymbol{E}$ im $\mathbb{R}^3$

i) eine Parameterdarstellung,

ii) eine Hessesche Normalform und

iii) eine allgemeine Ebenengleichung an.

b) Bestimmen Sie $z \in \mathbb{R}$ so, dass $\boldsymbol{d}$ in der Ebene $\boldsymbol{E}$ liegt.

Lösung 20:

a) **i**) Zwei mögliche Richtungsvektoren der Ebene werden durch

$$\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{c} - \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

angegeben. Als Stützvektor wählen wir $\boldsymbol{a}$. Damit kann man $\boldsymbol{E}$ schreiben als

$$\boldsymbol{E} = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

ii) Für eine Darstellung der Ebene in Hessescher Normalform benötigen wir einen Normalenvektor $\boldsymbol{n}$ der Ebene, dieser muss also senkrecht auf den Richtungsvektoren der Ebene stehen. Dies führt auf das Gleichungssystem

n_1	n_2	n_3	
1	0	1	0
0	2	−1	0

Die Wahl $n_3 = 2$ führt auf $n_2 = 1$ und $n_1 = -2$.

Damit ist die Normalform

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E} &= \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{n} \rangle = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{n} \rangle\} \\ &= \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \left\langle \boldsymbol{x}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = 4 \right\}. \end{aligned}$$

Für die Hessesche Normalform muss der Normalenvektor noch normiert werden

$$\|\boldsymbol{n}\| = 3.$$

Damit ist der normierte Normalenvektor

$$\boldsymbol{n}_0 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Mit diesem Normalenvektor ist eine Hessesche Normalform der Ebene

$$\boldsymbol{E} = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \left\langle \boldsymbol{x}, \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{4}{3} \right\}.$$

iii) Eine allgemeine Ebenengleichung ergibt sich aus der Berechnung des obigen Skalarproduktes:

$$0 \stackrel{!}{=} \langle \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}, \boldsymbol{n} \rangle = -2(x_1 + 1) + 1(x_2 - 0) + 2(x_3 - 1) \Rightarrow -2x_1 + x_2 + 2x_3 = 4.$$

b) Wenn $\boldsymbol{d}$ auf der Ebene liegt, müssen seine Koordinaten die allgemeine Ebenengleichung erfüllen, daraus folgt

$$-2 \cdot 1 + 2 + 2z = 4,$$

dies ergibt den Wert $z = 2$.

Aufgabe 21: Abstand von Geraden im $\mathbb{R}^3$

Gegeben sind die Geraden

$$\begin{aligned}\boldsymbol{g}_1 &= \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \boldsymbol{x} = (2,3,3)^\top + \lambda\,(-1,1,2)^\top, \quad \lambda \in \mathbb{R}\right\}, \quad \text{und}\\ \boldsymbol{g}_2 &= \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \boldsymbol{x} = (3,0,4)^\top + \lambda\,(2,-2,1)^\top, \quad \lambda \in \mathbb{R}\right\}.\end{aligned}$$

Bestimmen Sie den Abstand zwischen den Geraden $\boldsymbol{g}_1$ und $\boldsymbol{g}_2$.

Lösung 21:

Den Abstand zwischen den beiden Geraden betimmen wir, indem wir eine Ebene $\boldsymbol{E}$ bestimmen, die parallel zu beiden Geraden ist und eine der Geraden enthält. Der Abstand zwischen den Geraden $\boldsymbol{g}_1$ und $\boldsymbol{g}_2$ ist gleich dem Abstand zwischen Ebene und Gerade.
Ein Normalenvektor $\boldsymbol{n}$ der gesuchten Ebene muss senkrecht auf den Richtungsvektoren beider Geraden stehen:

$$\langle \boldsymbol{n},\, (-1,1,2)^\top\rangle = 0 \quad \text{und} \quad \langle \boldsymbol{n},\, (2,-2,1)^\top\rangle = 0\,.$$

Also muss gelten

$$\begin{array}{rcrcrl|l} -n_1 & + & n_2 & + & 2n_3 & = 0 & \\ 2n_1 & - & 2n_2 & + & n_3 & = 0 & +2\times\text{ 1. Gl.} \\ \hline -n_1 & + & n_2 & + & 2n_3 & = 0 & \\ & & & & 5n_3 & = 0 & \end{array}$$

Also gilt $n_3 = 0$. Damit folgt aus der ersten Gleichung $n_1 = n_2$. Dieser Wert kann frei gewählt werden, wir entscheiden uns für einen normierten Normalenvektor:

$$\boldsymbol{n} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)^\top.$$

Die Hessesche Normalform der Ebene ist damit

$$\boldsymbol{E} = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \frac{1}{\sqrt{2}}\langle \boldsymbol{x}, (1,1,0)^\top\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle (3,0,4)^\top, (1,1,0)^\top\rangle\right\}.$$

Da $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{g}_1$ parallel liegen, ist der Abstand zwischen beiden gleich dem Abstand zwischen E und dem Stützvektor von $\boldsymbol{g}_1$:

$$d(\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{E}) = \left|\left\langle \boldsymbol{n}, \left(\begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix}\right)\right\rangle\right| = \sqrt{2}\,.$$

Aufgabe 22: Schmidt'sches Orthonormalisierungsverfahren

Gegeben seien die Vektoren

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} , \quad \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} , \quad \boldsymbol{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} .$$

Bestimmen Sie mit Hilfe des Schmidt'schen Orthonormalisierungsverfahren eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$.

Hinweis: Wählen Sie $\boldsymbol{u}_1$ als ersten Vektor zur Bestimmung einer Orthonormalbasis mithilfe des Schmidt'schen Orthonormalisierungsverfahren.

Lösung 22:

Im Folgenden bezeichnen wir mit der Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standard-Skalarprodukt im $\mathbb{R}^3$ und mit der Abbildung $\| \cdot \|$ die durch dieses Skalarprodukt induzierte Norm.

Die Normierung des Vektors $\boldsymbol{u}_1$ ergibt den ersten Basisvektor:

$$\boldsymbol{w}_1 = \frac{\boldsymbol{u}_1}{\|\boldsymbol{u}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Die Orthogonalisierung von $\boldsymbol{u}_2$ und anschließende Normierung ergeben

$$\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{u}_2 - \langle \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{w}_1 \rangle \, \boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{w}_2 = \frac{\boldsymbol{v}_2}{\|\boldsymbol{v}_2\|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Die Orthogonalisierung von $\boldsymbol{u}_3$ ergibt

$$\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{u}_3 - \langle \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{w}_1 \rangle \, \boldsymbol{w}_1 - \langle \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{w}_2 \rangle \, \boldsymbol{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \frac{4}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

Die anschließende Normierung ergibt den dritten Basisvektor.

$$\boldsymbol{w}_3 = \frac{\boldsymbol{v}_3}{\|\boldsymbol{v}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Die Vektoren $\boldsymbol{w}_1$, $\boldsymbol{w}_2$, $\boldsymbol{w}_3$ bilden dann eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 23: Hessesche Normalform einer Ebene

Gegeben sei die Gerade

$$\boldsymbol{g} = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \boldsymbol{x} = (1,0,2)^\top + \lambda\,(2,3,1)^\top\,, \quad \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

und $\boldsymbol{p} = (1,0,1)^\top \in \mathbb{R}^3$.

Geben Sie eine Hessesche Normalform der Ebene $\boldsymbol{E}$, mit $\boldsymbol{p} \in \boldsymbol{E}$ an, welche orthogonal zu $\boldsymbol{g}$ liegt.

Lösung 23:

Im Folgenden werden mit der Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standard-Skalarprodukt des $\mathbb{R}^3$ und mit der Abbildung $\| \cdot \|$ die aus dem Standard-Skalarprodukt des $\mathbb{R}^3$ induzierte Norm bezeichnet.

Ein Normalenvektor $\boldsymbol{n} := (2,3,1)^\top$ der zu bestimmenden Ebene $\boldsymbol{E}$ entspricht nach Aufgabenstellung dem Richtungsvektor der Geraden $\boldsymbol{g}$. Zur Darstellung der Ebene in Hessescher Normalform muss ein Normalenvektor mit $\|\boldsymbol{n}_0\| = 1$ gewählt werden. Einen solchen erhalten wir beispielsweise durch

$$\boldsymbol{n}_0 = \frac{1}{\|\boldsymbol{n}\|} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Eine Hessesche Normalform der Ebene $\boldsymbol{E}$ ist somit bestimmt durch

$$\boldsymbol{E} = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{n}_0 \rangle = \langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{n}_0 \rangle\,, \quad \boldsymbol{n}_0 = \tfrac{1}{\sqrt{14}}\,(2,3,1)^\top\,,\ \boldsymbol{p} = (1,0,1)^\top \right\},$$

$$\boldsymbol{E} = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \frac{1}{\sqrt{14}} \left\langle \boldsymbol{x}\,,\ (2,3,1)^\top \right\rangle = \frac{3}{\sqrt{14}} \right\}.$$

Hinweis: Eine Hessesche Normalform ist, bis auf das Vorzeichen des gewählten normierten Normalenvektors $\boldsymbol{n}_0$, eindeutig bestimmt. Die andere mögliche Wahl wäre hier $\boldsymbol{n}_0^- = (-1) \cdot \boldsymbol{n}_0 = \frac{1}{\sqrt{14}}\,(-2,-3,-1)^\top$ anstelle von $\boldsymbol{n}_0$.

Aufgabe 24: Ebenen und Normalenvektor

Gegeben sei der Punkt $\boldsymbol{p} = (1,1,0)^\top$ und der Unterraum $\boldsymbol{U} \subset \mathbb{R}^3$

$$\boldsymbol{U} = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\right\},$$

a) Bestimmen Sie einen Vektor $\boldsymbol{n}$, der zu der Ebene

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{p} + \boldsymbol{U}$$

normal ist.

b) Gegeben sei die Normalform der Ebene durch

$$\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{n}\rangle = \langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{n}\rangle$$

mit einem variablen Vektor $\boldsymbol{v} = (x,y,z)^\top$. Leiten Sie aus der Normalform die allgemeine Gleichung der Ebene her.

c) Überprüfen Sie, ob der Punkt $\boldsymbol{p}_1 = (2,2,2)^\top$ auf der Ebene $\boldsymbol{E}$ liegt.

d) Schreiben Sie die Ebene in der Hesseschen Normalform auf.

e) Berechnen Sie den Abstand von $\boldsymbol{E}$ zu dem Koordinatenursprung $(0,0,0)^\top$.

f) Berechnen Sie den Abstand des Punktes $\boldsymbol{w} = (1,2,3)^\top$ zu der Ebene.

Lösung 24:

a) Der Normalenvektor muss gleichzeitig die folgenden Bedingungen für die Orthogonalität erfüllen:

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{n}, \boldsymbol{u}_1\rangle &= 0\\ \langle \boldsymbol{n}, \boldsymbol{u}_2\rangle &= 0,\end{aligned}$$

mit $\boldsymbol{u}_1 = (1,2,3)^\top$ und $\boldsymbol{u}_2 = (1,-1,0)^\top$. Die zwei Bedingungen ergeben das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}x + 2y + 3z &= 0\\ x - y &= 0,\end{aligned}$$

für die Komponenten des Vektors $\boldsymbol{n} = (x,y,z)^\top$. Die Lösung des Gleichungssystems ist $\boldsymbol{n} = (1,1,-1)^\top$.

b) Die linke Seite der Gleichung

$$\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{n}\rangle = \langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{n}\rangle$$

für den Vektor $\boldsymbol{v} = (x,y,z)^\top$ ist

$$\left\langle \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\right\rangle = x + y - z,$$

die rechte Seite ist

$$\left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\right\rangle = 2.$$

Daher ist die allgemeine Gleichung der Ebene

$$x + y - z = 2.$$

c) Um zu prüfen, ob der Punkt $(2,2,2)^\top$ auf der Ebene liegt, setzen wir die Koordinaten in die allgemeine Gleichung ein und prüfen, ob diese erfüllt ist. In diesem Fall gilt:

$$2 + 2 - 2 = 2.$$

Daher liegt der Punkt auf der Ebene.

d) Um die Ebene in der Hesseschen Normalform zu schreiben, benötigen wir den Einheitsnormalenvektor

$$\boldsymbol{n}_0 = \frac{\boldsymbol{n}}{\|\boldsymbol{n}\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}.$$

Mithilfe des allgemeinen Vektors $\boldsymbol{x} = (x,y,z)^\top$ können wir die Hessesche Normalform schreiben als

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{n}_0\rangle = \left\langle \boldsymbol{x}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\right\rangle = \frac{2}{\sqrt{3}},$$

e) Der Abstand von der Ebene zu dem Koordinatenursprung ist die rechte Seite der Hesseschen Normalform.

$$d(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{E}) = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

f) Der Abstand des Punktes $\boldsymbol{w} = (1, 2, 3)^\top$ zu der Ebenen findet man durch Einsetzen der Koordinaten von $\boldsymbol{w}$ in die Hessesche Normalform und Berechnen der Differenz von linker und rechter Seite

$$d(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{E}) = \langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{n}_0 \rangle - \frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Aufgabe 25: LGS mit Gauß'schem Algorithmus

a) Bestimmen Sie die Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} & & 3x_2 & + & 2x_3 \\ 5x_1 & & & + & 6x_3 \\ -2x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 13 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

b) Bestimmen Sie die Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} & & 3y_2 & + & 2y_3 \\ 5y_1 & & & + & 6y_3 \\ -2y_1 & + & y_2 & - & 2y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{13}{2} \\ 3 \end{pmatrix}.$$

c) Bestimmen Sie die Lösung des LGS mit Hilfe des Gauß'schen Algorithmus:

$$\begin{pmatrix} & - & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 \\ 4x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & + & 2x_4 \\ 2x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 \\ 6x_1 & - & 2x_2 & - & 2x_3 & - & 4x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \\ 16 \end{pmatrix}.$$

Lösung 25:

a)/b)

I	0	3	2	3	0	Ausgangsgleichung
II	5	0	6	13	$\frac{-13}{2}$	
III	-2	1	-2	-4	3	
III	-2	1	-2	-4	3	Gleichungen I und III vertauscht
II	5	0	6	13	$\frac{-13}{2}$	
I	0	3	2	3	0	
III	-2	1	-2	-4	3	
II′	0	$\frac{5}{2}$	1	3	1	$\mathrm{II}' = \mathrm{II} + \frac{5}{2} \cdot \mathrm{III}$
I′	0	3	2	3	0	$\mathrm{I}' = \mathrm{I}$
III	-2	1	-2	-4	3	
II′	0	$\frac{5}{2}$	1	3	1	
I″	0	0	$\frac{4}{5}$	$\frac{-3}{5}$	$\frac{-6}{5}$	$\mathrm{I}'' = \mathrm{I}' - \frac{6}{5} \cdot \mathrm{II}'$

Durch Rückwärtsauflösen erhält man die beiden Lösungen zu

$$\boldsymbol{x} = \left(\frac{7}{2}, \frac{3}{2}, \frac{-3}{4}\right)^\top \qquad \text{und} \qquad \boldsymbol{y} = \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{-3}{2}\right)^\top$$

c) Der Gauß-Algorithmus ergibt:

0	-2	1	1	5	tausche 1. und 3. Zeile
4	3	-2	2	-1	- 2 × 3. Zeile
2	1	0	1	3	
6	-2	-2	-4	16	- 3 × 3. Zeile
2	1	0	1	3	
0	1	-2	0	-7	
0	-2	1	1	5	+ 2 × 2. Zeile
0	-5	-2	-7	7	+ 5 × 2. Zeile
2	1	0	1	3	
0	1	-2	0	-7	
0	0	-3	1	-9	
0	0	-12	-7	-28	- 4 × 3. Zeile
2	1	0	1	3	
0	1	-2	0	-7	
0	0	-3	1	-9	
0	0	0	-11	8	

Rückwärtseinsetzen ergibt

$$x_4 = -\frac{8}{11} \Rightarrow x_3 = -\frac{1}{3}\left(-9 + \frac{8}{11}\right) = \frac{91}{33}$$

$$\Rightarrow \qquad x_2 = -7 + 2 \cdot \frac{91}{33} = -\frac{49}{33} \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}\left(3 + \frac{49}{33} + \frac{8}{11}\right) = \frac{86}{33},$$

also $\boldsymbol{x} = \frac{1}{33}\left(86, -49, 91, -24\right)^\top$.

Aufgabe 26: LGS mit Gauß'schem Algorithmus und kompl. Koeffizienten

Gegeben sei das LGS

$$\begin{pmatrix} (2+3\,\mathrm{i})z_1 & + & (1-1\,\mathrm{i})z_2 \\ (3-2\,\mathrm{i})z_1 & + & (0+2\,\mathrm{i})z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7+6\,\mathrm{i} \\ 2-9\,\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Lösung mit Hilfe des Gauß'schen Algorithmus ohne Taschenrechner.

Lösung 26:

I	$2+3\,\mathrm{i}$	$1-1\,\mathrm{i}$	$7+6\,\mathrm{i}$	Ausgangsgleichung
II	$3-2\,\mathrm{i}$	$0+2\,\mathrm{i}$	$2-9\,\mathrm{i}$	
I′	$12+5\,\mathrm{i}$	$1-5\,\mathrm{i}$	$33+4\,\mathrm{i}$	$\mathrm{I}' = \mathrm{I}\cdot(3-2\,\mathrm{i})$
II′	$12+5\,\mathrm{i}$	$-6+4\,\mathrm{i}$	$31-12\,\mathrm{i}$	$\mathrm{II}' = \mathrm{II}\cdot(2+3\,\mathrm{i})$
I′	$12+5\,\mathrm{i}$	$1-5\,\mathrm{i}$	$33+4\,\mathrm{i}$	
II″	0	$-7+9\,\mathrm{i}$	$-2-16\,\mathrm{i}$	$\mathrm{II}'' = \mathrm{II}' - \mathrm{I}'$

Das Rückwärtsauflösen ergibt

$$z_2 = \frac{-2-16\,\mathrm{i}}{-7+9\,\mathrm{i}} = -1+\mathrm{i} \qquad \text{und} \qquad z_1 = \frac{(33+4\,\mathrm{i}) - (1-5\,\mathrm{i})\cdot(-1+\mathrm{i})}{12+5\,\mathrm{i}} = 2-\mathrm{i}$$

also den Lösungsvektor

$$\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} 2-\mathrm{i} \\ -1+\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 27: LGS mit Gauß'schem Algorithmus

Bestimmen Sie die Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} & & x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 \\ 1x_1 & + & 2x_2 & & & - & 3x_4 \\ 2x_1 & + & 6x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -9 \\ 4 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

Lösung 27:

Es wird der Gauß-Algorithmus durchgeführt:

0	1	2	3	8	tausche 1. und 2. Zeile
1	2	0	−3	−9	
2	6	1	2	4	-2 × 2. Zeile
3	4	1	3	11	-3 × 2. Zeile
1	2	0	−3	−9	
0	1	2	3	8	
0	2	1	8	22	-2 × 2. Zeile
0	−2	1	12	38	+2 × 2. Zeile
1	2	0	−3	−9	
0	1	2	3	8	
0	0	−3	2	6	
0	0	5	18	54	+5/3 × 3. Zeile
1	2	0	−3	−9	
0	1	2	3	8	
0	0	−3	2	6	
0	0	0	64/3	64	

Rückwärtseinsetzen ergibt schließlich

$$\begin{aligned} x_4 &= 3 \Rightarrow \\ x_3 &= \tfrac{6-2x_4}{-3} = 0 \Rightarrow \\ x_2 &= 8 - 3x_4 - 2x_3 = -1 \Rightarrow \\ x_1 &= -9 + 3x_4 - 2x_2 = 2\,, \end{aligned}$$

also $\boldsymbol{x} = (2,\, -1,\, 0,\, 3)^\top$.

Aufgabe 28: Lineare Gleichungssysteme

Finden Sie mit Hilfe des Gauß-Algorithmus die Lösungsmengen der folgenden linearen Gleichungssysteme:

$$\textbf{a)}\quad \begin{array}{rcrcrcr} -3x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 6 \\ 9x_1 & - & 8x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \\ 6x_1 & + & 0x_2 & + & 3x_3 & = & 15 \end{array} \qquad \textbf{b)}\quad \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & & & + & x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 6 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & 6x_3 & = & 10 \end{array}$$

$$\textbf{c)}\quad \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & & & + & x_3 & = & 2 \\ -x_1 & + & 1x_2 & + & 3x_3 & = & 4 \\ 4x_1 & + & 3x_2 & + & 16x_3 & = & 26 \end{array} \qquad \textbf{d)}\quad \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & & & + & x_3 & = & 2 \\ -x_1 & + & 1x_2 & + & 3x_3 & = & 4 \\ 4x_1 & + & 3x_2 & + & 16x_3 & = & -1 \end{array}$$

Lösung 28:

a)

$$\begin{array}{rrr|r|l} -3 & 3 & 1 & 6 & \\ 9 & -8 & 3 & 2 & +3 \times\ 1.\ \text{Gleichung} \\ 6 & 0 & 3 & 15 & +2 \times\ 1.\ \text{Gleichung} \\ \hline -3 & 3 & 1 & 6 & \\ 0 & 1 & 6 & 20 & \\ 0 & 6 & 5 & 27 & -6 \times\ 2.\ \text{Gleichung} \\ \hline -3 & 3 & 1 & 6 & \\ 0 & 1 & 6 & 20 & \\ 0 & 0 & -31 & -93 & \end{array}$$

Rückwärtseinsetzen ergibt

$$x_3 = 3, \quad x_2 = 20 - 6 \cdot 3 = 2, \quad x_1 = \frac{1}{-3}(6 - 3 \cdot 2 + 3 \cdot 1) = 1.$$

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

b)

$$\begin{array}{rrr|r|l} 1 & 0 & 1 & 2 & \\ 1 & 2 & 3 & 6 & -\ 1.\ \text{Gleichung} \\ 2 & 2 & 6 & 10 & -2 \times\ 1.\ \text{Gleichung} \\ \hline 1 & 0 & 1 & 2 & \\ 0 & 2 & 2 & 4 & \\ 0 & 2 & 4 & 6 & -\ 2.\ \text{Gleichung} \\ \hline 1 & 0 & 1 & 2 & \\ 0 & 2 & 2 & 4 & \\ 0 & 0 & 2 & 2 & \end{array}$$

Damit hat man

$$x_3 = 1, \quad x_2 = 1, \quad x_1 = 1.$$

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

c)

$$\begin{array}{rrr|r|l} 1 & 0 & 1 & 2 & \\ -1 & 1 & 3 & 4 & +\ 1.\ \text{Gleichung} \\ 4 & 3 & 16 & 26 & -4 \times\ 1.\ \text{Gleichung} \\ \hline 1 & 0 & 1 & 2 & \\ 0 & 1 & 4 & 6 & \\ 0 & 3 & 12 & 18 & -3 \times\ 2.\ \text{Gleichung} \\ \hline 1 & 0 & 1 & 2 & \\ 0 & 1 & 4 & 6 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \end{array}$$

Da eine Zeile des Gleichungssystems verschwindet, kann man $x_3 = t \in \mathbb{R}$ beliebig wählen. Durch Rückwärtseinsetzen ergibt sich daraus für x_2 und x_1:

$$x_2 = 6 - 4t, \qquad x_1 = 2 - t.$$

Die Lösungsmenge ist

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - t \\ 6 - 4t \\ t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$$

d)

$$\begin{array}{rrr|r|l} 1 & 0 & 1 & 2 & \\ -1 & 1 & 3 & 4 & +\ 1.\ \text{Gleichung} \\ 4 & 3 & 16 & -1 & -4 \times\ 1.\ \text{Gleichung} \\ \hline 1 & 0 & 1 & 2 & \\ 0 & 1 & 4 & 6 & \\ 0 & 3 & 12 & -9 & -3 \times\ 2.\ \text{Gleichung} \\ \hline 1 & 0 & 1 & 2 & \\ 0 & 1 & 4 & 6 & \\ 0 & 0 & 0 & -27 & \end{array}$$

Die letzte Zeile des Gleichungssystems liefert die Gleichung $0 = -27$. Dies ist ein Widerspruch und die Lösungsmenge des Gleichungssystems ist leer:

$$\mathcal{L} = \{ \quad \} = \emptyset.$$

Aufgabe 29: Polynominterpolation

Gesucht ist ein Polynom mit $\mathrm{Grad}(P) \leq 4$ und $p(x_j) = y_j$, $j = 0, \ldots, 4$, mit den Werten

$$\begin{array}{c|ccccc} x_j & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline y_j & 11 & 1 & 1 & 0 & 31 \end{array} .$$

Setzen Sie

$$P(x) = a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + a_3\,x^3 + a_4\,x^4$$

an.

Geben Sie ein lineares Gleichungssystem für $(a_0,\, a_1,\, a_2,\, a_3,\, a_4)$ an und lösen Sie dieses.

Lösung 29:

Durch einsetzen der gewünschten Funktionswerte ergibt sich das Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccccccc} a_0 & - & 2a_1 & + & 4a_2 & - & 8a_3 & + & 16a_4 & = & 11 \\ a_0 & - & a_1 & + & a_2 & - & a_3 & + & a_4 & = & 1 \\ a_0 & & & & & & & & & = & 1 \\ a_0 & + & a_1 & + & a_2 & + & a_3 & + & a_4 & = & 0 \\ a_0 & + & 2a_1 & + & 4a_2 & + & 8a_3 & + & 16a_4 & = & 31 \end{array} .$$

Dieses lässt sich mit dem Gauß-Algorithmus lösen:

I	1	-2	4	-8	16	11	I' = III
II	1	-1	1	-1	1	1	
III	1	0	0	0	0	1	III' = I
IV	1	1	1	1	1	0	
V	1	2	4	8	16	31	
I'	1	0	0	0	0	1	
II	1	-1	1	-1	1	1	II' = II - I'
III'	1	-2	4	-8	16	11	III"= III' - I'
IV	1	1	1	1	1	0	IV' = IV - I'
V	1	2	4	8	16	31	V' = V - I'
I'	1	0	0	0	0	1	
II'	0	-1	1	-1	1	0	
III"	0	-2	4	-8	16	10	III"' = III" - 2 II'
IV'	0	1	1	1	1	-1	IV" = IV' + II'
V'	0	2	4	8	16	30	V" = V' + 2 II'
I'	1	0	0	0	0	1	
II'	0	-1	1	-1	1	0	
III"'	0	0	2	-6	14	10	
IV"	0	0	2	0	2	-1	IV"' = IV" - III"'
V"	0	0	6	6	18	30	V"' = V" - 3 III"'
I'	1	0	0	0	0	1	
II'	0	-1	1	-1	1	0	
III"'	0	0	2	-6	14	10	
IV"'	0	0	0	6	-12	-11	
V"'	0	0	0	24	-24	0	V"" = V"' - 4 IV"'
I'	1	0	0	0	0	1	
II'	0	-1	1	-1	1	0	
III"'	0	0	2	-6	14	10	
IV"'	0	0	0	6	-12	-11	
V""	0	0	0	0	24	44	

Durch Rückwärtseinsetzen ergibt sich die Lösung

$$a_4 = \frac{11}{6} \Rightarrow a_3 = \frac{11}{6} \Rightarrow a_2 = -\frac{7}{3} \Rightarrow a_1 = -\frac{7}{3} \Rightarrow a_0 = 1$$

und damit

$$\Rightarrow \qquad P(x) = 1 - \frac{7}{3}\,x - \frac{7}{3}\,x^2 + \frac{11}{6}\,x^3 + \frac{11}{6}\,x^4 \;.$$

Aufgabe 30: Lösungen eines LGS in Abhängigkeit von einem Parameter

Gegeben ist das inhomogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & 1\,, \\ & & x_2 & & & + & x_4 & = & 0\,, \\ & & & & x_3 & + & a\,x_4 & = & 2\,, \\ & & & & a\,x_3 & + & x_4 & = & 2\,, \end{array}$$

mit $a \in \mathbb{R}$.

a) Für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ hat das zugehörige **homogene** lineare Gleichungssystem genau eine, keine oder mehrere Lösungen?

b) Für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ hat das gegebene **inhomogene** lineare Gleichungssystem genau eine, keine oder mehrere Lösungen?

c) Geben Sie die Lösungen $\boldsymbol{x}_1 \in \mathbb{R}^4$ des zugehörigen **homogenen** Systems und $\boldsymbol{x}_2 \in \mathbb{R}^4$ des gegebenen **inhomogenen** Systems für $a = 0$ an.

d) Geben Sie die Lösungsmengen $\mathbb{L}_1$ des zugehörigen **homogenen** Systems und $\mathbb{L}_2$ des gegebenen **inhomogenen** Systems für $a = 1$ an.

Lösung 30:

Wir bestimmen eine a-parameterabhängige Stufenform der gegebenen linearen Gleichungssysteme (homogenes LGS und inhomogenes LGS). Es ist ein Gauß-Schritt durchzuführen.

$$\begin{array}{cccc|c|c|} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 & 2 \\ 0 & 0 & a & 1 & 0 & 2 \\ \hline 1 & 2 & 3 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1-a^2 & 0 & 2-2a \\ \hline \end{array}$$

Das Gleichungssystem ist für alle rechten Seiten genau dann eindeutig lösbar, wenn

$$1 - a^2 \overset{!}{\neq} 0 \quad \Leftrightarrow \quad a \neq 1 \quad \text{und} \quad a \neq -1\,,$$

anderenfalls hängt die Lösbarkeit von der Inhomogenität (rechten Seite) ab.

a) Das **homogene** Gleichungssystem ist für $a = 1$ oder $a = -1$ mehrdeutig lösbar, da sich die letzte Zeile der Stufenform dann als Nullzeile ergibt, und ist für alle $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ eindeutig lösbar, da alle Diagonalelemente der Stufenform verschieden von Null sind.

b) Das **inhomogene** Gleichungssystem ist für $a = a_1 := 1$ mehrdeutig lösbar da $2 - 2a_1 = 0 = 1 - a_1^2$, ist für $a = a_2 := -1$ nicht lösbar da $2 - 2a_2 = 4 \neq 0 = 1 - a_2^2$, und ist für alle $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ eindeutig lösbar.

c) Für $a = 0$ ist $\boldsymbol{x}_1 = (0, 0, 0, 0)^\top$ und $\boldsymbol{x}_2 = (1, -2, 2, 2)^\top$.

d) Für $a = 1$ gilt

$$\mathbb{L}_1 = \left\{ \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \quad \middle| \quad \boldsymbol{x} = t\,(6, -1, -1, 1)^\top\,, \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \right\},$$

$$\mathbb{L}_2 = \left\{ \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \quad \middle| \quad \boldsymbol{x} = (-5, 0, 2, 0)^\top + t\,(6, -1, -1, 1)^\top\,, \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \right\}.$$

Aufgabe 31: Lösbarkeit Linearer Gleichungssysteme

Für ein festes $t \in \mathbb{R}$ sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & - & 2x_2 & + & 1x_3 & - & 3x_4 & = & 1 \\ -2x_1 & - & 2tx_2 & + & tx_3 & + & (4+t)x_4 & = & 0 \\ -4tx_1 & - & 4x_2 & + & (2-2t)x_3 & + & 8tx_4 & = & 2 \\ 6x_1 & - & 6x_2 & + & (3+t)x_3 & + & (-9+t)x_4 & = & 3-t^2 \end{array}$$

gegeben.

a) Wenden Sie das Gaußsche Eliminationsverfahren auf das Gleichungssystem an. (**ohne Rückwärtseinsetzen, Stufenform genügt!**).

b) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von t den Rang des Gleichungssystems.

c) Wieviele Freiheitsgrade hat das Gleichungssystem?

d) Für welche Werte von $t \in \mathbb{R}$ ist das inhomogene Gleichungssystem lösbar? **Die Lösung selbst ist nicht zu berechnen!**

Lösung 31:

Zu a) Der Gaußsche Algorithmus (ohne Zeilenvertauschungen!) liefert

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & -2 & 1 & -3 & 1 \\ -2 & -2t & t & 4+t & 0 \\ -4t & -4 & 2-2t & 8t & 2 \\ 6 & -6 & 3+t & -9+t & 3-t^2 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & -2 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -2-2t & 1+t & 1+t & 1 \\ 0 & -4-4t & 2 & 2t & 2+2t \\ 0 & 0 & t & t & -t^2 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & -2 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -2-2t & 1+t & 1+t & 1 \\ 0 & 0 & -2t & -2 & 2t \\ 0 & 0 & t & t & -t^2 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & -2 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -2-2t & 1+t & 1+t & 1 \\ 0 & 0 & -2t & -2 & 2t \\ 0 & 0 & 0 & t-1 & -t^2+t \end{array}\right).$$

Zu b) Aus der Stufenform liest man das folgende ab:

- Für $t = 1$ verschwindet die letzte Zeile des Gleichungssystems.

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & -2 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -4 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

  Es verbleiben drei Zeilen, d. h. der Rang des Gleichsungssystems ist 3.

- Für $t = 0$ verschwindet die vorletzte Stufe des Systems und die letzte Gleichung kann mit der vorletzten eliminiert werden:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & -2 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & -2 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

  Auch dann hat das Gleichungssystem den Rang 3.

- Für $t = -1$ verschwindet die zweite Stufe .

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & -2 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & -2 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

  Der Rang der Koeffizientenmatrix ist abermals drei. Der Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix ist 4.

Zu c)/d) Zur Lösbarkeit des Gleichungssystems gelten die folgenden Aussagen.

i) Für $t \notin \{0, 1, -1\}$ besitzt das Gleichungssystem nach den Gauß-Schritten aus **a)** vier Zeilen, es ist also eindeutig lösbar und hat keine Freiheitsgrade.

ii) Für $t = 0$ und $t = 1$ enthält das Gleichungssystem nach den Gauß-Schritten aus **b)** noch drei Zeilen. Es ist also lösbar mit einem Freiheitsgrad.

iii) Für $t = -1$ enthält die letzte Zeile auf der rechten Seite noch einen nicht verschwindenden Eintrag. Die zugehörige Gleichung wäre $0 = 1$. Damit ist das Gleichungssystem nicht lösbar.

Aufgabe 32: Grundtypen linearer Gleichungssysteme

Überführen Sie die folgenden erweiterten Matrizen in ein lineares Gleichungssystem und bestimmen Sie die Lösungsmenge.

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{array}\right)$ **b)** $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

c) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ **d)** $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{array}\right)$

Lösung 32:

a) Das Gleichungssystem hat eine eindeutige Lösung, die man durch Rückwärtsauflösen ausrechnet:

$$x_3 = \frac{6}{2} = 3\,; \qquad x_2 = \frac{1}{4}(-1 - x_3) = -1\,; \qquad x_1 = 1 - 2x_2 - 2x_3 = -3\,,$$

also

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

b) Das Gleichungssystem hat dieselbe Lösung wie dasjenige in a) : $\boldsymbol{x} = (-3, -1, 3)^\top$.

c) Hier kann man x_4 frei wählen, also z.B. $x_4 = t \in \mathbb{R}$. Durch Rückwärtsauflösen folgt dann

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{1}{2}\,(6 - 4x_4) = 3 - 2t\,; \\ x_2 &= \frac{1}{4}(-1 - x_3 - 3x_4) = -1 - \frac{1}{4}t\,; \\ x_1 &= 1 - 2x_2 - 2x_3 - x_4 = -3 + \frac{7}{2}t\,, \end{aligned}$$

Mit dem neuen Parameter $\tau = \frac{1}{4}t$ erhält man dann folgende einparametrige Schar von Lösungen:

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 14 \\ -1 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix} \middle|\, \tau \in \mathbb{R} \right\}.$$

d) Die letzte Zeile des Gleichungssystems lautet $0 = 7$, das Gleichungssystem ist deshalb nicht lösbar.

Aufgabe 33: Lineare Abbildungen

a) Seien $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ eine lineare Abbildung und $\boldsymbol{x}_1 = (1\,,\,2)^\top$ und $\boldsymbol{x}_2 = (-1\,,\,2)^\top$ zwei Vektoren. Die lineare Abbildung sei durch

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1) = \boldsymbol{y}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und } \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_2) = \boldsymbol{y}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

definiert.

Bestimmen Sie die Matrix $\boldsymbol{A}$, die diese lineare Abbildung beschreibt.

b) Das Kreuzprodukt für zwei Vektoren $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ ist erklärt durch

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_2x_3 - a_3x_2 \\ a_3x_1 - a_1x_3 \\ a_1x_2 - a_2x_1 \end{pmatrix}.$$

Ist die Abbildung

$$\boldsymbol{k}_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{x}$$

linear?
Falls ja, geben Sie die Abbildungsmatrix bezüglich der Standardbasis $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ des $\mathbb{R}^3$ an.

c) Ist die Abbildung $\boldsymbol{k}_6 : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^3$

$$\boldsymbol{k}_6(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix}$$

linear?
Falls nein, wieso nicht?

d) Zu zwei fest gegebenen Vektoren $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$ sei das Spatprodukt $\boldsymbol{s}_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert als

$$\boldsymbol{s}_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{x}) = \langle (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{x}), \boldsymbol{b} \rangle\,.$$

Zeigen Sie, dass diese Abbildung linear bezüglich des Vektors $\boldsymbol{x}$ ist.

Lösung 33:

a) Es gilt

$$\frac{1}{2}\,(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{e}_1 \in \mathbb{R}^2 \text{ und } \frac{1}{4}\,(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{e}_2 \in \mathbb{R}^2\,.$$

Damit ist

$$\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_1) = \boldsymbol{f}\Big(\tfrac{1}{2}\,(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2)\Big) = \frac{1}{2}\Big(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_2)\Big) = \frac{1}{2}\,(\boldsymbol{y}_1 - \boldsymbol{y}_2) = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

der erste Spaltenvektor der gesuchten Matrix und

$$\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_2) = \boldsymbol{f}\Big(\tfrac{1}{4}\,(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2)\Big) = \frac{1}{4}\Big(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1) + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_2)\Big) = \frac{1}{4}\,(\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

der zweite Spaltenvektor. Die gesuchte Abbildungsmatrix ist also

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,2}\,.$$

b) Die Abbildung ist linear, denn für alle $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^3$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{k}_a(\boldsymbol{x} + \lambda\boldsymbol{y}) &= \begin{pmatrix} a_2(x_3 + \lambda y_3) - a_3(x_2 + \lambda y_2) \\ a_3(x_1 + \lambda y_1) - a_1(x_3 + \lambda y_3) \\ a_1(x_2 + \lambda y_2) - a_2(x_1 + \lambda y_1) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_2x_3 + \lambda a_2y_3 - a_3x_2 - \lambda a_3y_2 \\ a_3x_1 + \lambda a_3y_1 - a_1x_3 - \lambda a_1y_3 \\ a_1x_2 + \lambda a_1y_2 - a_2x_1 - \lambda a_2y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2x_3 - a_3x_2 + \lambda(a_2y_3 - a_3y_2) \\ a_3x_1 - a_1x_3 + \lambda(a_3y_1 - a_1y_3) \\ a_1x_2 - a_2x_1 + \lambda(a_1y_2 - a_2y_1) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_2x_3 - a_3x_2 \\ a_3x_1 - a_1x_3 \\ a_1x_2 - a_2x_1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} a_2y_3 - a_3y_2 \\ a_3y_1 - a_1y_3 \\ a_1y_2 - a_2y_1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{k}_a(\boldsymbol{x}) + \lambda\boldsymbol{k}_a(\boldsymbol{y})
\end{aligned}$$

und die Matrix ist gegeben durch

$$\boldsymbol{A}_a = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

c) Die Abbildung $\boldsymbol{k}_6$ ist *nicht* linear, denn mit $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (1, 0, 0,\; 0, 1, 0)$ und $\lambda = 2$ gilt

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{k}_6(2(1,0,0,\;0,1,0)) =& \boldsymbol{k}_6(2,0,0,\;0,2,0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \\
&\neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot \boldsymbol{k}_6(1,0,0,\;0,1,0).
\end{aligned}$$

Damit ist die Abbildung $\boldsymbol{k}_6$ nicht linear.

d) Die Abbildung $\boldsymbol{s_{a,b}}$ ist linear, denn mit $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^3$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{s}_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{x} + \lambda \boldsymbol{y}) &= \langle (\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{x} + \lambda \boldsymbol{y}), \, \boldsymbol{b} \rangle \\
&= \langle \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{x} + \lambda \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{y}, \, \boldsymbol{b} \rangle && (\boldsymbol{k}_a \text{ ist bereits linear}) \\
&= \langle \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{x}, \boldsymbol{b} \rangle + \lambda \, \langle \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{y}, \boldsymbol{b} \rangle \\
&= \boldsymbol{s}_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{x}) + \lambda \boldsymbol{s}_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{y})
\end{aligned}$$

Damit ist die Abbildung $\boldsymbol{s}_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}$ linear.

Aufgabe 34: Lineare Unabhängigkeit in Polynomräumen

Untersuchen Sie, ob die Elemente der Menge

$$M_1 = \{p_1(x) = x^2\,, \quad p_2(x) = (x+1)^2\,, \quad p_3(x) = (x-1)^2\}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,,$$

linear unabhängig im Vektorraum P_2 der reellwertigen Polynome vom maximalen Grad 2 sind und geben Sie die Dimension von $\operatorname{span} M_1$ an.

Lösung 34:

Die Elemente der Menge M_1 sind linear unabhängig genau dann, wenn

$$0 = \lambda_1\, p_1(x) + \lambda_2\, p_2(x) + \lambda_3\, p_3(x)\,, \quad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}\,,$$

nur die eindeutige Wahl $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ zulässt. Vergleichen Sie auch die Definition der linearen Unabhängigkeit von Elementen eines Vektorraums aus dem Skript.

Um das Problem zu lösen, setzen wir die Polynome in die obige Gleichung ein und erhalten

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda_1\,(x^2) + \lambda_2\,(x+1)^2 + \lambda_3\,(x-1)^2\,, \\ 0 &= x^2 \cdot (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + x \cdot (2\,\lambda_2 - 2\,\lambda_3) + 1 \cdot (\lambda_2 + \lambda_3)\,, \end{aligned}$$

und durch Koeffizientenvergleich erhalten wir das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= 0\,, \\ 2\,\lambda_2 - 2\,\lambda_3 &= 0\,, \\ \lambda_2 + \lambda_3 &= 0\,, \end{aligned}$$

in den Unbekannten λ_1, λ_2 und λ_3.
Durch die Anwendung des Gauß-Algorithmus erhalten wir

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ \hline \end{array}\,.$$

Dieses Gleichungssystem ist eindeutig lösbar. Somit kann nur die Wahl $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ getroffen werden.

Folglich sind die Elemente der Menge M_1 linear unabhängig.

Aus der Stufenform folgt $\dim \operatorname{span} M_1 = 3$.

Aufgabe 35: Matrix-Multiplikation komplex

Gegeben seien

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2+3\,\mathrm{i} & -1+\mathrm{i} \\ 0 & 4+3\,\mathrm{i} \\ 1-\mathrm{i} & -\mathrm{i} \end{pmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2-3\,\mathrm{i} & -1+2\,\mathrm{i} \\ 1 & 2-3\,\mathrm{i} \end{pmatrix} \text{ und } \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2+3\,\mathrm{i} \\ -4-2\,\mathrm{i} \end{pmatrix} \ .$$

Bestimmen Sie $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ und $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$.

Lösung 35:

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 12+\mathrm{i} & -7+6\,\mathrm{i} \\ 4+3\,\mathrm{i} & 17-6\,\mathrm{i} \\ -1-6\,\mathrm{i} & -2+\mathrm{i} \end{pmatrix} \text{ und } \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 1+10\,\mathrm{i} \\ -10-20\,\mathrm{i} \\ 3+5\,\mathrm{i} \end{pmatrix} \ .$$

Aufgabe 36: Matrizenmultiplikation reell

Gegeben seien die Matrizen

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} , \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} , \quad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} , \quad \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

Bestimmen Sie alle möglichen Produkte der Matrizen.

Lösung 36:

Es gilt $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{(3,2)}$, $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{(4,3)}$, $\boldsymbol{C} \in \mathbb{R}^{(1,4)}$, $\boldsymbol{D} \in \mathbb{R}^{(4,1)}$.
Die möglichen Produkte sind $\boldsymbol{BA}$, $\boldsymbol{CB}$, $\boldsymbol{CD}$ und $\boldsymbol{DC}$. Man erhält:

$$\boldsymbol{BA} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -12 \\ 9 & -2 \\ 11 & -8 \\ -7 & 4 \end{pmatrix} ,$$

$$\boldsymbol{CB} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{CD} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = -2$$

$$\boldsymbol{DC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & -2 & 4 \\ -1 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 37: Symmetrische Matrizen

a) Bestimmen Sie mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus die inverse Matrix von

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} .$$

b) Ist $\boldsymbol{A}^{-1}$ wieder symmetrisch? Gilt diese Aussage für beliebige invertierbare symmetrische Matrizen?

Lösung 37:

a) Das Eliminationsverfahren ergibt

$$\begin{array}{rrr|rrr|l}
2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \\
-1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & +\ 1/2 \cdot 1.\ \text{Zeile} \\
0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & \\
\hline
2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \\
0 & \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & \\
0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & +\ 2/3 \cdot 2.\ \text{Zeile} \\
\hline
2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \\
0 & \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & +\ 3/4 \cdot 3.\ \text{Zeile} \\
0 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 & \cdot\ 3/4 \\
\hline
2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & +\ 2/3 \cdot 2.\ \text{Zeile} \\
0 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{3}{4} & \frac{6}{4} & \frac{3}{4} & \cdot\ 2/3 \\
0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{3}{4} & \\
\hline
2 & 0 & 0 & \frac{6}{4} & 1 & \frac{2}{4} & \cdot\ 1/2 \\
0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & \\
0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \\
\hline
1 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \\
0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & \\
0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} &
\end{array}$$

Die Inverse Matrix lautet also

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} .$$

b) $\boldsymbol{A}^{-1}$ ist ebenfalls symmetrisch. Für eine beliebige invertierbare symmetrische Matrix $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^\top$ hat man:

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E} \Leftrightarrow \boldsymbol{A}^\top \left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^\top = \boldsymbol{E}^\top \Leftrightarrow \boldsymbol{A} \left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^\top = \boldsymbol{E} \ ,$$

Da die Inverse einer Matrix aber eindeutig bestimmt ist, muss damit gelten

$$A^{-1} = (A^{-1})^\top .$$

Damit ist A^{-1} ebenfalls symmetrisch.

Aufgabe 38: Matrizen-Produkte

Gegeben seien

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \\ -3 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie alle möglichen Matrizen-Produkte.

Lösung 38:

$$\boldsymbol{AA} = \begin{pmatrix} 1 & 21 \\ -7 & 22 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{BA} = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -10 & -15 \\ 0 & 26 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{CB} = \begin{pmatrix} 23 & 2 \\ -18 & -16 \\ 1 & 23 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{CC} = \begin{pmatrix} 1 & -12 & 19 \\ 12 & 4 & -28 \\ -21 & 9 & 22 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 39: Klausuraufgabe Dez. 2010

Gegeben seien

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 1 \\ 1 & \mathrm{i} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -2+2\,\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die Matrizenprodukte $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^*$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{B}^2$, $\boldsymbol{B}^4$, $\boldsymbol{B}^8$.

b) Sind die Matrizen $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ symmetrisch, hermitesch, orthogonal, unitär oder haben sie keine der genannten Eigenschaften?

c) Lösen Sie die Gleichungssysteme $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{B}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}$.

Lösung 39:

Zu a) Es ergibt sich

$$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}_2\,, \quad \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^* = \boldsymbol{E}_2\,, \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} \\ 1-\mathrm{i} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}^2 = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}^4 = -\boldsymbol{E}_2\,, \quad \boldsymbol{B}^8 = \boldsymbol{E}_2\,.$$

Zu b) $\boldsymbol{A}$ ist unitär und hermitesch, denn $\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ ist unitär.

Zu c) Es ergibt sich

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{b}\,, \quad \boldsymbol{y} = \boldsymbol{B}^*\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -1+\mathrm{i} \\ 1+\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 40: frührere Klausuraufgabe

Die **symmetrische** Matrix $\boldsymbol{A} := \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(3,3)}$ habe den Bildraum

$$\text{Bild}\,\boldsymbol{A} = \text{span}\,\{(1,0,1)^\top,\,(1,-1,1)^\top\}.$$

a) Berechnen Sie eine Orthonormalbasis für Bild $\boldsymbol{A}$, den Unterraum Kern $\boldsymbol{A}$ sowie die Matrix $\boldsymbol{P}$ der orthogonalen Projektion auf Bild $\boldsymbol{A}$.

Hinweis: Es gilt Kern $\boldsymbol{A}^\top = (\text{Bild}\,\boldsymbol{A})^\perp$.

b) Bekannt sei, dass das inhomogene lineare Gleichungssystem $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ zu gegebenem $\boldsymbol{b} := (1,2,1)^\top$ die partikuläre Lösung $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_2 := (0,1,0)^\top$ besitze. Bestimmen Sie daraus die Matrix $\boldsymbol{A}$.

Lösung 40:

Zu a) Es ist unmittelbar ersichtlich, dass die beiden Vektoren $\boxed{\boldsymbol{v}_1 := \frac{1}{\sqrt{2}}\big(1,0,1\big)^\top}$ sowie $\boxed{\boldsymbol{v}_2 := (0,1,0)^\top} = (1,0,1)^\top - (1,-1,1)^\top$ eine ONB des Unterraums Bild $\boldsymbol{A}$ bilden. Ferner gilt wegen der Symmetrie $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^\top$ die Beziehung Kern $\boldsymbol{A} = (\text{Bild}\,\boldsymbol{A})^\perp$. Es folgt $\boldsymbol{h} \in$ Kern $\boldsymbol{A}$ genau für $\boldsymbol{h} \perp$ Bild $\boldsymbol{A}$, und somit zum Beispiel

$$\boldsymbol{h} = \boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & 1 & 0 \\ \boldsymbol{e}_2 & 0 & 1 \\ \boldsymbol{e}_3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \qquad \boxed{\text{Kern}\,\boldsymbol{A} = \text{span}\,\{\boldsymbol{h}\}.}$$

Ferner gilt

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{v}_1 \otimes \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 \otimes \boldsymbol{v}_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

Zu b) Für $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ muss $\boldsymbol{Ae}_2 = \boldsymbol{a}_2 \overset{!}{=} \boldsymbol{b}$ gelten. Die geforderte Symmetrie führt somit auf

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 1 & 2 & 1 \\ \alpha & 1 & \beta \end{pmatrix} \overset{\boldsymbol{Ah}=\boldsymbol{0}}{=} \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.}$$

Aufgabe 41*: Lösbarkeit eines LGS

Gegeben seien

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 5 & -6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(3,4)} \text{ sowie } \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Im Folgenden seien $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{a}_4 \in \mathbb{R}^3$ die Spaltenvektoren der Matrix $\boldsymbol{A}$.

a) Man berechne $\mathrm{Kern}(\boldsymbol{A}^\top)$.

b) Man bestimme $\dim \mathrm{Kern}(\boldsymbol{A})$. Welcher Zusammenhang muss zwischen den Komponenten des Vektors $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$ bestehen, damit das lineare Gleichungssystem $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ lösbar ist? Ist die Lösung im Existenzfall eindeutig? (Begründung!)

c) Man zeige $\boldsymbol{a}_1 \perp \boldsymbol{a}_2$. Danach berechne man $\mathrm{Rang}(\boldsymbol{A})$ und bestimme eine Orthonormalbasis von $\mathrm{Bild}(\boldsymbol{A})$.

d) Man bestimme in der Menge der besten Lösungen (im Sinne kleinster Fehlerquadrate) von $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{v}$ den Vektor $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^4$ mit kleinster euklidischer Länge $\|\boldsymbol{x}_0\|$.

Lösung 41:

a) Der Kern von $\boldsymbol{A}^\top$ ist die Lösung des folgenden homogenen Gleichungssystems:

1	0	1	0	
2	1	−2	0	$-2\times$ 1. Zeile
1	−1	5	0	$-$ 1. Zeile
2	2	−6	0	$-2\times$ 1. Zeile
1	0	1	0	
0	1	−4	0	
0	−1	4	0	+ 2. Zeile
0	2	−8	0	$-2\times$ 2. Zeile
1	0	1	0	
0	1	−4	0	
0	0	0	0	
0	0	0	0	

Daraus ergibt sich die Lösungsmenge

$$\mathrm{Kern}(\boldsymbol{A}^\top) = \mathrm{span}\{(-1,4,1)^\top\}.$$

b) Aus der obigen Rechnung ergibt sich $\mathrm{Rang}(\boldsymbol{A}) = 2$. Mit der Dimensionsformel für lineare Abbildungen folgt daraus

$$\dim(\mathrm{Kern}(\boldsymbol{A})) = \dim(\mathbb{R}^4) - \mathrm{Rang}(\boldsymbol{A}) = 2.$$

Um die Lösbarkeit der Gleichung $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ zu garantieren, muss gelten $\boldsymbol{b} \in \mathrm{Bild}(\boldsymbol{A})$. $\boldsymbol{b}$ darf also keinen Anteil in $(\mathrm{Bild}(\boldsymbol{A}))^\perp = \mathrm{Kern}(\boldsymbol{A}^\top)$ haben. Es muss also gelten

$$\left\langle \boldsymbol{b}, (-1,4,1)^\top \right\rangle = 0 \Leftrightarrow -b_1 + 4b_2 + b_3 = 0.$$

Da der Kern von $\boldsymbol{A}$ nicht leer ist, ist die Lösung von $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ nicht eindeutig.

c) Es gilt

$$\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle = 2 + 0 - 2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{a}_1 \perp \boldsymbol{a}_2.$$

Der Rang von $\boldsymbol{A}$ ist 2, somit bilden die normierten Vektoren

$$\boldsymbol{q}_1 = \frac{\boldsymbol{a}_1}{\|\boldsymbol{a}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \boldsymbol{q}_2 = \frac{\boldsymbol{a}_2}{\|\boldsymbol{a}_2\|} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

eine Orthonormalbasis von $\mathrm{Bild}(\boldsymbol{A})$.

d) Da $\boldsymbol{v}$ nach Aufgabenteil **b)** in $\mathrm{Bild}(\boldsymbol{A})^\perp$ enthalten ist, ist der Nullvektor $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{0}$ eine beste Lösung der Gleichung $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{v}$ im Sinne kleinster Fehlerquadrate. Dieser hat auch die kleinste euklidische Länge.

Aufgabe 42: Ähnlichkeitstransformation

Gegeben sind

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 6 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ -1 \end{pmatrix} \ \text{und} \ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \beta \\ -\beta \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie – wenn möglich – α und β so, dass $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ Eigenvektoren der Matrix $\boldsymbol{A}$ sind.

b) Berechnen Sie einen weiteren (linear unabhängigen) Eigenvektor nebst zugehörigem Eigenwert.

c) Bestimmen Sie orthogonale Matrizen $\boldsymbol{Q}_i$, sowie Diagonalmatrizen $\boldsymbol{D}_i$ $(i = 1, 2, 3)$, so dass gilt

$$\boldsymbol{D}_i = \boldsymbol{Q}_i^\top \boldsymbol{B}_i \boldsymbol{Q}_i, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Dabei sind $\boldsymbol{B}_1 = \boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}_2 = \boldsymbol{A}^{-1}$ und $\boldsymbol{B}_3 = \boldsymbol{A}^3$.

Lösung 42:

a) Es gilt

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{A} \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6\alpha \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Wenn $\boldsymbol{a}$ Eigenvektor ist, folgt aus der ersten und dritten Komponente der Gleichung der Eigenwert -2. Für die zweite Komponente gilt dann $6\alpha \stackrel{!}{=} -2\alpha$, also $\alpha = 0$.
Für den zweiten Vektor $\boldsymbol{b}$ hat man

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{A} \begin{pmatrix} \beta \\ -\beta \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\beta + 4 \\ -6\beta \\ 4\beta + 2 \end{pmatrix}$$

Wir nehmen erneut an, dass $\boldsymbol{b}$ ein Eigenvektor ist.
Für $\beta \neq 0$ wäre der zugehörige Eigenwert $\lambda = 6$. (2. Komponente der Gleichung)
Aus der ersten Komponente der Gleichung folgt damit $6\beta = 2\beta + 4$, also $\beta = 1$
Aus der dritten Komponente folgt $6 = 4\beta + 2$, also $\beta = 1$.
Damit ist für $\beta = 1$ $\boldsymbol{b} = (1, -1, 1)^\top$ ein Eigenvektor von $\boldsymbol{A}$ mit dem Eigenwert 6.

b) Allgemein ergeben sich die Eigenwerte von $\boldsymbol{A}$ als Nullstellen des charakteristischen Polynoms:

$$\begin{aligned} 0 \stackrel{!}{=} \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 4 \\ 0 & 6-\lambda & 0 \\ 4 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} &= (6-\lambda) \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 4 \\ 4 & 2-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (6-\lambda)((2-\lambda)^2 - 16) \\ \Rightarrow \qquad \lambda &\in \{-2,\, 6,\, 6\} \end{aligned}$$

Ein Eigenvektor zum Eigenwert 6 ist Lösung von

$$0 \stackrel{!}{=} (\boldsymbol{A} - 6\boldsymbol{E})\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -4 \end{pmatrix} \boldsymbol{c}.$$

Das Gleichungssystem hat den Rang 1, die geometrische Vielfachheit des Eigenwertes 6 ist also gleich der algebraischen Vielfachheit 2.
Es ergeben sich die beiden linear unabhängigen Lösungen $\boldsymbol{c} = (1,\, 0,\, 1)^\top$ und $\boldsymbol{d} = (0,\, 1,\, 0)^\top$. (Der Vektor $\boldsymbol{b}$ ist im Eigenraum zu $\lambda = 6$ enthalten: $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c} - \boldsymbol{d}$.)

c) Zur Diagonalisierung von $\boldsymbol{B}_1 = \boldsymbol{A}$ stellt man die Matrix der normierten Eigenvektoren auf:

$$\boldsymbol{Q} = \left(\frac{\boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|}, \frac{\boldsymbol{c}}{\|\boldsymbol{c}\|}, \frac{\boldsymbol{d}}{\|\boldsymbol{d}\|} \right) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Diagonale von $\boldsymbol{D}_1$ enthält dann die Eigenwerte von $\boldsymbol{A}$:

$$\boldsymbol{D}_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

$\boldsymbol{B}_2 = \boldsymbol{A}^{-1}$ hat dieselben Eigenvektoren wie A, somit erhält man mit derselben Transformationsmatrix $\boldsymbol{Q}_2 = \boldsymbol{Q}_1$ die Diagonalmatrix der Eigenwerte von $\boldsymbol{A}^{-1}$:

$$\boldsymbol{D}_2 = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix}.$$

Auch $\boldsymbol{B}_3 = \boldsymbol{A}^3$ hat dieselben Eigenvektoren $\boldsymbol{v} \in \{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}\}$:

$$\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{v} = \boldsymbol{A}^2\lambda\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{A}\lambda\boldsymbol{v} = \lambda^2\lambda\boldsymbol{v} = \lambda^3\boldsymbol{v}.$$

Es ist also $\boldsymbol{Q}_3 = \boldsymbol{Q}_1$ und die zugehörige Diagonalmatrix enthält die dritte Potenz der Eigenwerte von $\boldsymbol{A}$:

$$\boldsymbol{D}_3 = \begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & 216 & 0 \\ 0 & 0 & 216 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 43:

Gegeben seien die Vektoren

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}4\\2\\3\\1\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_3 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ von $\boldsymbol{U} = \operatorname{span}\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3\}$. Dabei sei $\operatorname{span}\{\boldsymbol{b}_1\} = \operatorname{span}\{\boldsymbol{a}_1\}$ und $\operatorname{span}\{\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3\} = \operatorname{span}\{\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$.

b) Prüfen Sie nach, ob der Vektor $\boldsymbol{x}$ im Unterraum $\boldsymbol{U}$ enthalten ist. Vesuchen Sie dazu, den Vektor bezüglich der Orthogonalbasis $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ darzustellen.

c) Geben Sie eine Basis des Orthogonalraumes $\boldsymbol{U}^\perp$ an.

Lösung 43:

a) Mit dem Schmidt'schen Orthonormalisierungsverfahren folgt:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_1 &= \frac{1}{\|\boldsymbol{b}_1\|}\boldsymbol{b}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \\
\boldsymbol{w}_2 &= \boldsymbol{b}_2 - \langle \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{a}_1\rangle \boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\2\end{pmatrix}, \\
\boldsymbol{a}_2 &= \frac{1}{\|\boldsymbol{w}_2\|}\boldsymbol{w}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\2\end{pmatrix}, \\
\boldsymbol{w}_3 &= \boldsymbol{b}_3 - \langle \boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{a}_1\rangle \boldsymbol{a}_1 - \langle \boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{a}_2\rangle \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} - \frac{-1}{6}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\2\end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}-2\\2\\6\\2\end{pmatrix}, \\
\boldsymbol{a}_3 &= \frac{1}{\|\boldsymbol{w}_3\|}\boldsymbol{w}_3 = \frac{1}{\sqrt{12}}\begin{pmatrix}-1\\1\\3\\1\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

b) Die Projektion von $\boldsymbol{x} = (4, 2, 3, 1)^\top$ auf $\boldsymbol{U}$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{P}\boldsymbol{x} &= \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}_1\rangle \boldsymbol{a}_1 + \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}_2\rangle \boldsymbol{a}_2 + \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}_3\rangle \boldsymbol{a}_3 \\
&= \frac{6}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} + \frac{4}{6}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\2\end{pmatrix} + \frac{8}{12}\begin{pmatrix}-1\\1\\3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\3\\2\\2\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

$\boldsymbol{x}$ ist also nicht durch die Basis $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ darstellbar, es gilt $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{P}\boldsymbol{x}$, damit gilt $\boldsymbol{x} \notin \boldsymbol{U}$.

c) $\boldsymbol{U}^\perp$ enthält alle Vektoren, die zu allen Vektoren $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{U}$ senkrecht sind. Der Orthogonalraum ist damit die Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\langle \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{x}\rangle = 0,\ \langle \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{x}\rangle = 0,\ \langle \boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{x}\rangle = 0.$$

Dies führt auf

$$\begin{array}{rrrr|r|l}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\ 1.\ \text{Zeile} \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \\
\hline
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \\
0 & -1 & 0 & 1 & 0 & \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & +\ 2.\ \text{Zeile} \\
\hline
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \\
0 & -1 & 0 & 1 & 0 & \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 &
\end{array}$$

x_4 ist frei wählbar, und die Lösungsmenge ist:

$$\boldsymbol{U}^\perp = \left\{ \begin{pmatrix}-t\\t\\-t\\t\end{pmatrix};\ t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Damit ist eine Basis von $\boldsymbol{U}^\perp$

$$\mathcal{B}(\boldsymbol{U}^\perp) = \left\{ \begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\1\end{pmatrix} \right\}.$$

Aufgabe 44: Orthogonale Projektion, Klausuraufgabe Dez. 2010

Gegeben seien die Matrix $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{(3,3)}$ und die Vektoren $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^3$ gemäß

$$\boldsymbol{A} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} := \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c} := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie Orthonormalbasen für Kern $\boldsymbol{A}$ und Bild $\boldsymbol{A}$.

b) Berechnen Sie die Matrix $\boldsymbol{P}$ der Orthogonalprojektion auf den Unterraum Bild $\boldsymbol{A}$.

c) Überprüfen Sie, ob $\boldsymbol{b} \in (\text{Bild}\,\boldsymbol{A})^\perp$ erfüllt ist. Bestimmen Sie die Orthogonalprojektion von $\boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{c}$ auf Bild $\boldsymbol{A}$.

Lösung 44:

Wir setzen $\boldsymbol{A} =: (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$. Die offenkundige Relation $\boldsymbol{a}_1 \perp \boldsymbol{a}_2$ und die lineare Abh"angigkeit von $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ zeigen bereits

$$\text{Bild}\,\boldsymbol{A} = \text{span}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}.$$

Hieraus ergibt sich Rang $\boldsymbol{A} = 2$, also dim Kern $\boldsymbol{A} = 1$. Wir lösen das homogene System $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_h = \boldsymbol{0}$ mit dem Gauß–Algorithmus:

$$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{0}) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x}_h = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dies f"uhrt auf

$$\text{Kern}\,\boldsymbol{A} = \text{span}\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}.$$

Zu b) Die gesuchte Orthogonalprojektion berechnet sich gemäß

$$\boldsymbol{P} = \frac{1}{2}\boldsymbol{a}_1 \otimes \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 \otimes \boldsymbol{a}_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zu c) Wegen $\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}\rangle = 0 = \langle \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}\rangle$ gilt $\boldsymbol{b} \perp \text{Bild}\,\boldsymbol{A}$ bzw. $\boldsymbol{b} \in (\text{Bild}\,\boldsymbol{A})^\perp$. Da $\boldsymbol{b} \in (\text{Bild}\,\boldsymbol{A})^\perp$ gilt, folgt $\boldsymbol{P}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$. Weiter gilt

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{c} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 45: Orthogonale Projektion und minimaler Abstand

Seien $\boldsymbol{V} = \mathbb{R}^3$ und $\boldsymbol{u} = (1, 2, -5)^T$. Sei $\boldsymbol{U} \subset \boldsymbol{V}$ der Unterraum $\boldsymbol{U} = \operatorname{span}\{\boldsymbol{u}\}$ und $\boldsymbol{U}^\perp$ das Orthogonalkomplement.

a) Bestimmen Sie eine Basis von $\boldsymbol{U}^\perp$.

b) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $\boldsymbol{U}^\perp$.

c) Bestimmen Sie den Abstand von $\boldsymbol{v} = (3, 1, 7)^\top$ zu $\boldsymbol{U}^\perp$.

Lösung 45:

a) Der Unterraum $\boldsymbol{U}^\perp$ besteht aus allen Vektoren, die die folgende Bedingung erfüllen:

$$x + 2y - 5z = 0.$$

Wir wählen für zwei Komponenten einen beliebigen Wert $y = s$ und $z = t$. Damit erhalten wir $x = -2s + 5t$ und

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t.$$

Eine Basis von $\boldsymbol{U}^\perp$ ist

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

b) Wir bezeichnen die beiden Vektoren der Basis $\mathcal{B}$ als $\tilde{\boldsymbol{u}}_{\mathbf{1}}$ und $\tilde{\boldsymbol{u}}_{\mathbf{2}}$.

Eine Orthonormalbasis $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\}$ erhalten wir, indem zunächst wir den Vektor $\tilde{\boldsymbol{u}}_{\mathbf{1}}$ von $\mathcal{B}$ normieren. Der erste Vektor ist dann

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{\tilde{\boldsymbol{u}}_1}{\|\tilde{\boldsymbol{u}}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Der Vektor $\boldsymbol{u}_2$ muss in $\boldsymbol{U}^\perp$ liegen, d.h. er muss eine Linearkombination der Vektoren aus $\mathcal{B}$ sein und die Orthogonalitätsbedingung $\langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \rangle = 0$ erfüllen. Weiterhin muss der Vektor normiert sein.

Um diesen Vektor $\boldsymbol{u}_2$ zu finden, berechnen die Orthogonalprojektion von $\tilde{\boldsymbol{u}}_{\mathbf{2}}$ auf $\boldsymbol{u}_1$ und subtrahieren die Projektion von $\tilde{\boldsymbol{u}}_{\mathbf{2}}$ selbst. Damit haben wir eine orthogonalen Vektor zu $\boldsymbol{u}_1$ konstruiert.

Die Orthogonalprojektion von $\tilde{\boldsymbol{u}}_{\mathbf{2}}$ auf $\boldsymbol{u}_1$ ist

$$\begin{aligned} P_{\boldsymbol{u}_1}(\tilde{\boldsymbol{u}}_{\mathbf{2}}) &= \langle \tilde{\boldsymbol{u}}_{\mathbf{2}}, \boldsymbol{u}_1 \rangle \boldsymbol{u}_1 \\ &= \frac{1}{5} \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Wir erhalten den Vektor $\hat{\boldsymbol{u}}_{\mathbf{2}}$ orthogonal zu $\boldsymbol{u}_1$ durch Subtraktion

$$\hat{\boldsymbol{u}}_{\mathbf{2}} = \tilde{\boldsymbol{u}}_{\mathbf{2}} - P_{\boldsymbol{u}_1}(\tilde{\boldsymbol{u}}_{\mathbf{2}}) = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Der Einheitsvektor $\boldsymbol{u}_2$ ist

$$\boldsymbol{u}_2 = \frac{\hat{\boldsymbol{u}}_{\mathbf{2}}}{\|\hat{\boldsymbol{u}}_{\mathbf{2}}\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

c) Der Abstand von $\boldsymbol{v}$ zu $\boldsymbol{U}^\perp$ berechnen wir mit der Orthogonalprojektion von $\boldsymbol{v}$ auf $\boldsymbol{U}^\perp$. Da wir schon eine Orthonormalbasis von $\boldsymbol{U}^\perp$ haben, können wir die folgende Formel benutzen

$$P_{\boldsymbol{U}^\perp}(\boldsymbol{v}) = \sum_{k=1}^{2} \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}_k \rangle \boldsymbol{u}_k.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}_1 \rangle &= -\sqrt{5}, \\ \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}_2 \rangle &= 2\sqrt{6}, \end{aligned}$$

und

$$P_{\boldsymbol{U}^\perp}(\boldsymbol{v}) = -\sqrt{5} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\sqrt{6} \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Der Vektor

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{U}^\perp}(\boldsymbol{v}) = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix},$$

ist orthogonal zu $\boldsymbol{U}^{\perp}$ und daher parallel zu $\boldsymbol{U}$ (das kann leicht überprüft werden). $\boldsymbol{w}$ und $\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{U}^{\perp}}(\boldsymbol{v})$ sind eine orthogonale Zerlegung des Vektors $\boldsymbol{v}$, daher ist der Abstand zu dem Unterraum $\boldsymbol{U}^{\perp}$ die Länge von $\boldsymbol{w}$

$$d(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{U}^{\perp}) = \|\boldsymbol{w}\| = \sqrt{30}.$$

Aufgabe 46: Methode der kleinsten Quadrate

Gegeben seien die Messwerte

i	1	2	3
t_i	-3	1	2
y_i	33	-3	-22

a) Es soll ein Polynom $p(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2$ bestimmt werden, welches diese Messwerte interpoliert:

$$p(t_j) = y_j, \qquad j = 1, 2, 3.$$

i) Geben Sie das lineare Gleichungssystem für den Koeffizientenvektor $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)^\top$ an.

ii) Ermitteln Sie die Lösung des Gleichungssystems.

b) Nun soll dasselbe Interpolationsproblem für ein lineares Polynom $q(x) = b_1 + b_2 x$ gelöst werden:

$$q(t_j) = y_j, \qquad j = 1, 2, 3.$$

i) Ist dieses Problem lösbar? (Begründen Sie Ihre Antwort.)

ii) Geben Sie ein Gleichungssystem für die Koeffizienten b_1, b_2 an, deren Polynom $q(x)$ das geforderte Problem bestmöglich löst, es soll also gelten:

$$\left\| (q(t_1) - y_1, q(t_2) - y_2, q(t_3) - y_3)^\top \right\|_2^2 = \min!.$$

Hinweis: Die Lösung des Gleichungssystems ist **nicht** zu bestimmen.

Lösung 46:

a) **i)** Aus $p(t_j) = y_j, \quad j = 1, 2, 3$ folgen die Gleichungen:

$$\begin{array}{rcrcrcl}
a_1 & - & 3\ a_2 & + & 9\ a_3 & = & 33 \\
a_1 & + & 1\ a_2 & + & 1\ a_3 & = & -3 \\
a_1 & + & 2\ a_2 & + & 4\ a_3 & = & -22
\end{array}$$

ii) Mit Hilfe des Gauß-Algorithmus ergibt sich

$$\begin{array}{rrr|r|l}
1 & -3 & 9 & 33 & \\
1 & 1 & 1 & -3 & -\text{ 1. Zeile} \\
1 & 2 & 4 & -22 & -\text{ 1. Zeile} \\
\hline
1 & -3 & 9 & 33 & \\
0 & 4 & -8 & -36 & \times 1/4 \\
0 & 5 & -5 & -55 & \times 1/5 \\
\hline
1 & -3 & 9 & 33 & \\
0 & 1 & -2 & -9 & \\
0 & 1 & -1 & -11 & -\text{ 2. Zeile} \\
\hline
1 & -3 & 9 & 33 & \\
0 & 1 & -2 & -9 & \\
0 & 0 & 1 & -2 &
\end{array}$$

und daraus die Lösung

$$a_3 = -2 \Rightarrow a_2 = -13 \Rightarrow a_1 = 12.$$

b) **i)** Hier ergeben sich die drei Gleichungen

$$\begin{array}{rcrcl}
b_1 & - & 3\ b_2 & = & 33 \\
b_1 & + & 1\ b_2 & = & -3 \\
b_1 & + & 2\ b_2 & = & -22
\end{array}$$

und daraus das Gauß-Tableau mit der Koeffizientenmatrix

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rr|r|l}
1 & -3 & 33 & \\
1 & 1 & -3 & \text{-1. Zeile} \\
1 & 2 & -22 & \text{-1. Zeile} \\
\hline
1 & -3 & 33 & \\
0 & 4 & -36 & \\
0 & 5 & -55 & 4 \times \text{ 3. Zeile } - 5 \times \text{ 2. Zeile} \\
\hline
1 & -3 & 33 & \\
0 & 4 & -36 & \\
0 & 0 & -40 &
\end{array}$$

Aus der letzten Zeile folgt der Widerspruch $0 = -40$, also ist das System nicht lösbar.

ii) Dieses Minimierungsproblem wird von der Lösung der Normalgleichung

$$\boldsymbol{B}^\top \boldsymbol{B}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{B}^\top \begin{pmatrix} 33 \\ -3 \\ -22 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 14 \end{pmatrix} \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ -146 \end{pmatrix}$$

gelöst.

Aufgabe 47: Positive Definitheit

Welche der folgenden Matrizen ist positiv definit?

a) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, b) $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

c) $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ d) $\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1+\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$

Lösung 47:

a) $\boldsymbol{A}$ ist nicht positiv definit, etwa mit $\boldsymbol{x} = (1,-1)^\top$ ergibt sich:

$$\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = (1,-1)\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} = -3 + 1 = -2 < 0.$$

b) Mit $\boldsymbol{x} = (1,0,0)^\top$ ergibt sich

$$\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{B}\boldsymbol{x} = (1,0,0)\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Da aber für positive Definitheit mit allen $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ $\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{B}\boldsymbol{x} > 0$ gelten müsste, ist $\boldsymbol{B}$ nicht positiv definit.

c) Um positive Definitheit zu zeigen, muss für alle $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)^\top \neq \boldsymbol{0}$ $\boldsymbol{x}^\top C \boldsymbol{x} > 0$ überprüft werden:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} =& x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 \\ =& \frac{x_1^2}{2} + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + \frac{x_1^2}{2} + 2x_1x_3 + 2x_3^2 + x_3^2 \\ =& \left(\frac{x_1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}x_2\right)^2 + \left(\frac{x_1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}x_3\right)^2 + x_3^2 \end{aligned}$$

Damit gilt auf jeden Fall $\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} \geq 0$. Im Fall $\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} = 0$ müssen beide Klammern des letzten Ausruckes und x_3^2 gleich Null sein. Daraus folgt dann unmittelbar $x_3 = 0$ und (aus dem Verschwinden der zweiten Klammer) $x_1 = 0$ und damit (Verschwinden der ersten Klammer) auch $x_2 = 0$. Insgesamt ist also nur für $\boldsymbol{x} = 0$ auch $\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} = 0$.
Damit ist $\boldsymbol{C}$ positiv definit.

d) Mit beliebigem $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ gilt:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{D}\boldsymbol{x} =& \lambda x_1^2 + (1+\lambda)x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 \\ =& (\sqrt{\lambda}x_1)^2 + 2\sqrt{\lambda}x_1 \cdot \frac{x_2}{\sqrt{\lambda}} + \frac{x_2^2}{\lambda} + \left(1 + \lambda - \frac{1}{\lambda}\right)x_2^2 + x_3^2 \\ =& \left(\sqrt{\lambda}x_1 + \frac{x_2}{\sqrt{\lambda}}\right)^2 + x_3^2 + \frac{\lambda + \lambda^2 - 1}{\lambda}x_2^2 \end{aligned}$$

i) Falls $\frac{\lambda^2+\lambda-1}{\lambda} > 0$, ist $\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{D}\boldsymbol{x} \geq 0$ und nur für $\boldsymbol{x} = 0$ ist $\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{D}\boldsymbol{x} = 0$, also ist $\boldsymbol{D}$ positiv definit.

ii) Falls $\frac{\lambda^2+\lambda-1}{\lambda} < 0$, ist für $\boldsymbol{x} = (-1/\sqrt{\lambda}, \sqrt{\lambda}, 0)^\top$ $\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{D}\boldsymbol{x} < 0$ und damit $\boldsymbol{D}$ nicht positiv definit.

iii) Falls $\frac{\lambda^2+\lambda-1}{\lambda} = 0$ ist, verschwindet $\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{D}\boldsymbol{x}$ für $\boldsymbol{x} = (-1/\sqrt{\lambda}, \sqrt{\lambda}, 0)^\top \neq \boldsymbol{0}$, also ist $\boldsymbol{D}$ nicht positiv definit.

iv) Für $\lambda \leq 0$ ist obige Rechnung nicht möglich, aber dann gilt $(1,0,0)\boldsymbol{D}(1,0,0)^\top = \lambda \leq 0$ und $\boldsymbol{D}$ ist nicht positiv definit.

Die Bedingungen für $\frac{\gamma_\lambda}{\lambda} := \frac{\lambda^2+\lambda-1}{\lambda}$ aus i)–iii) lassen sich weiter umformen:
Zunächst ist der Zähler

$$\gamma_\lambda = \lambda^2 + \lambda - 1 = (\lambda + \frac{1}{2})^2 - \frac{5}{4}$$

und hat seine Nullstellen bei $\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.
Zwischen beiden Nullstellen ($\frac{-1-\sqrt{5}}{2} < \lambda < \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$) ist $\gamma_\lambda < 0$.
Außerhalb des Intervals ($\lambda < \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ oder $\lambda > \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$) ist $\gamma_\lambda > 0$. Insgesamt ist also $\boldsymbol{D}$
positiv definit für $\lambda > \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ und
nicht positiv definit für $\lambda \leq \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Aufgabe 48: Skalarprodukte

Gegeben sind die folgenden „Produkte“ für $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)^\top \in \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2)^\top \in \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)^\top \in \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)^\top \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle_a &:= x_2\, y_2 + x_1\, y_1\,,\\
\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle_b &:= x_1\, y_1 - x_2\, y_2\,,\\
\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle_c &:= x_1\, y_1 + 3\, x_2\, y_2\,,\\
\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle_d &:= x_1^2 + (2\, y_2)^2\,,\\
\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle_e &:= u_1\, v_1 + u_3\, v_3\,.
\end{aligned}$$

Welche der „Produkte“ definieren Skalarprodukte? Begründen Sie Ihre Aussage durch das Überprüfen der Definitionen eines Skalarproduktes, beziehungsweise geben Sie ein Beispiel an, welches zeigt, dass eine Bedingung verletzt ist.

Lösung 48:

Ein Skalarprodukt in einem $\mathbb{R}$-Vektorraum $\boldsymbol{V}$ muss die folgenden drei Bedingungen erfüllen:

i) Positive Definitheit: Für alle $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V}$ gilt $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle \geq 0$ und $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = 0$ nur für $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

ii) Bilinearität: Für alle $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{V}$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt

$$\langle \lambda \boldsymbol{x} + \mu \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle = \lambda \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} \rangle + \mu \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle\,.$$

iii) Symmetrie: Für alle $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{V}$ gilt $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle$.

a) Es handelt sich um ein Skalarprodukt. Die drei Bedingungen können nachgeprüft werden:

- **i)** Es gilt hier für beliebige $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$: $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle_a = x_2^2 + x_1^2 \geq 0$ wobei Gleichheit nur für $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ gilt.
- **ii)** Für beliebige $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{z} = (z_1, z_2)^\top \in \mathbb{R}^2$, und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}
\langle \lambda\, \boldsymbol{x} + \mu\, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle_a &= (\lambda\, x_2 + \mu\, y_2) z_2 + (\lambda\, x_1 + \mu\, y_1) z_1\\
&= \lambda\, (x_2\, z_2 + x_1\, z_1) + \mu\, (y_2\, z_2 + y_1\, z_1)\\
&= \lambda\, \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} \rangle_a + \mu\, \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle_a\,.
\end{aligned}$$

- **iii)** Es gilt hier $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle_a = x_2\, y_2 + x_1\, y_1 = y_2\, x_2 + y_1\, x_1 = \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle_a$.

b) Es handelt sich nicht um ein Skalarprodukt, da die Bedingung der Definitheit nicht erfüllt ist. Etwa für $\boldsymbol{x} = (0, 1)^\top$ gilt

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle_b = -1 \cdot 1 < 0$$

im Widerspruch zur Bedingung **i)** .

c) $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle_c := x_1\, y_1 + 3\, x_2\, y_2$ ist ein Skalarprodukt. Das Überprüfen der Bedingungen ergibt:

- **i)** Es gilt hier $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle_c = x_1^2 + 3\, x_2^2 \geq 0$ für beliebige $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ und $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle_c = 0$ nur für $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.
- **ii)** Für beliebige $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{z} = (z_1, z_2)^\top \in \mathbb{R}^2$, und Skalare $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}
\langle \lambda\, \boldsymbol{x} + \mu\, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle_c &= (\lambda\, x_1 + \mu\, y_1) z_1 + 3\, (\lambda\, x_2 + \mu\, y_2) z_2\,,\\
&= \lambda\, (x_1\, z_1 + 3\, x_2\, z_2) + \mu\, (y_1\, z_1 + 3\, y_2\, z_2)\,,\\
&= \lambda\, \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} \rangle_c + \mu\, \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle_c\,.
\end{aligned}$$

- **iii)** Es gilt hier $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle_c = x_1\, y_1 + 3\, x_2\, y_2 = y_1\, x_1 + 3\, y_2\, x_2 = \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle_c$.

d) $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle_d := x_1^2 + (2\, y_2)^2$ ist nicht symmetrisch, zum Beispiel für $\boldsymbol{x} = (1, 0)^\top$ und $\boldsymbol{y} = (2, 0)^\top$, erhält man

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle_d = 1 \neq 4 = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle_d\,.$$

Desweiteren ist $\langle \cdot, \cdot \rangle_d$ auch nicht bilinear, etwa für $\lambda = \mu = 1$ und $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} = \boldsymbol{z} = (1, 0)^\top$ gilt:

$$\langle \lambda \boldsymbol{x} + \mu \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle_d = 2^2 + (2 \cdot 0)^2 = 4 \neq 2 = 1\, \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} \rangle_d + 1\, \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle_d\,.$$

e) $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle_e := u_1\, v_1 + u_3\, v_3$ verletzt die Bedinung der positiven Definitheit. Zum Beispiel für $\boldsymbol{u} = (0, 1, 0)^\top \neq \boldsymbol{0}$ ist $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle_e = 0$.

Somit definiert $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle_e$ kein Skalarprodukt.

Aufgabe 49: Skalarprodukt im $\mathbb{C}^3$ (frührere Klausuraufgabe)

a) Bestimmen Sie alle normierten Vektoren des $\mathbb{R}^3$, die zu $\boldsymbol{u}_1 = (1,1,0)^\top$ und $\boldsymbol{u}_2 = (1,0,1)$ bezüglich des Standardskalarproduktes in $\mathbb{R}^3$ senkrecht stehen.

b) Bestimmen Sie alle normierten Vektoren des $\mathbb{C}^3$, die zu $\boldsymbol{v}_1 = (1,\mathrm{i},0)^\top$ und $\boldsymbol{v}_2 = (0,\mathrm{i},-\mathrm{i})^\top$ bezüglich des Standardskalarproduktes in $\mathbb{C}^3$ senkrecht stehen.

Lösung 49:

Im Folgenden bezeichnen wir mit der Abbildung $\langle\cdot,\cdot\rangle$ das Standard-Skalarprodukt in $\mathbb{R}^3$ bzw. in $\mathbb{C}^3$ und mit der Abbildung $\|\cdot\|$ die aus dem Skalarprodukt induzierte Norm.

a) Ein Lösungsvektor $\boldsymbol{x} = (x,y,z)^\top$ muss die Bedingungen

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}_1\rangle = x + y = 0 \text{ und } \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}_2\rangle = x + z = 0$$

erfüllen. Diese führen auf das Gleichungssystem:

x	y	z		
1	1	0	0	
1	0	1	0	$-I$
1	1	0	0	
0	-1	1	0	

Alle Lösungen haben also die Gestalt:

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -t \\ t \\ t \end{pmatrix} \qquad \text{mit } t \in \mathbb{R}.$$

Da die Lösungsvektoren normiert sein sollen, muss gelten:

$$1 = \|\boldsymbol{x}\| = 3t^2 \;\Rightarrow\; t = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Die einzigen beiden Lösungen sind also

$$\boldsymbol{x}_{1/2} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) Die Bedingungen $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}_1\rangle = 0$ und $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}_2\rangle = 0$ angewandt auf den beliebig gewählten Vektor $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)^\top \in \mathbb{C}^3$ ergeben

$$v_1 - \mathrm{i}\, v_2 = 0\,, \quad -\mathrm{i}\, v_2 + \mathrm{i}\, v_3 = 0\,.$$

Setzt man $v_2 = \lambda \in \mathbb{C}$, so folgt

$$v_1 = \mathrm{i}\,\lambda\,, \quad v_3 = \lambda\,, \quad \text{also } \boldsymbol{v} = \lambda \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} =: \lambda\, \boldsymbol{w}\,.$$

Die Vektoren $\boldsymbol{z} \in \mathbb{C}^3$, $\boldsymbol{z} := \frac{1}{\|\boldsymbol{v}\|}\,\boldsymbol{v}$, der Lösungsmenge sollen normiert sein, also $\|\boldsymbol{z}\| \overset{!}{=} 1$. Mit

$$\|\boldsymbol{v}\| = \|\lambda\, \boldsymbol{w}\| = |\lambda|\, \|\boldsymbol{w}\| = |\lambda|\,\sqrt{3}\,,$$

und der (vorteilhaften) Wahl $|\lambda| \overset{!}{=} 1$, also

$$\lambda = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi}\,, \quad \varphi \in [0, 2\,\pi)\,,$$

folgt die Lösungsmenge als

$$\mathbb{L} = \left\{ \boldsymbol{z} \in \mathbb{C}^3 \;\middle|\; \boldsymbol{z} = \frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi} \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \varphi \in [0, 2\,\pi) \right\}.$$

Aufgabe 50: Spiegelung und Projektion

Gegeben sei der Vektor $\boldsymbol{n} = (1,\ 2,\ -3)^\top$.

a) Geben Sie die Hessesche Normalform der Ebene $\boldsymbol{H}$ durch den Ursprung mit Normalenvektor $\boldsymbol{n}$ an.

b) Bestimmen Sie

i) die Matrix $\boldsymbol{S} \in \mathbb{R}^{(3,3)}$ der orthogonalen Spiegelung an $\boldsymbol{H}$ und

ii) die Matrix $\boldsymbol{P} \in \mathbb{R}^{(3,3)}$ der orthogonalen Projektion auf $\boldsymbol{H}$.

Hinweis: Die Spiegelung des Punktes $\boldsymbol{x}$ ist der Punkt, der auf der Geraden durch $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{P}(x)$ liegt und dieselbe Entfernung wie $\boldsymbol{x}$ von der Ebene hat.

Lösung 50:

a) Der Einheitsnormalenvektor zur Ebene ist: $\boldsymbol{n}_0 = 1/\sqrt{14}(1,\ 2,\ -3)^\top$, damit ist die Hessesche Normalform:

$$\boldsymbol{H} = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 |\ \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{n}_0 \rangle = 0\right\}.$$

b) **ii)** Zunächst wird die Matrix der Projektion ermittelt:
Es ist $\boldsymbol{P}x = \boldsymbol{x} - \langle \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{n}_0 \rangle\, \boldsymbol{n}_0 = (\boldsymbol{E} - \boldsymbol{n}_0 \otimes \boldsymbol{n}_0)\boldsymbol{x}$, also ist die Matrix der Projektion gegeben durch

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{E} - \boldsymbol{n}_0 \otimes \boldsymbol{n}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ -3 & -6 & 9 \end{pmatrix} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 13 & -2 & 3 \\ -2 & 10 & 6 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

i) Die Spiegelung ist nun gegeben durch (beachte den Hinweis)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{S}\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{x} + 2 \cdot (\boldsymbol{P}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}) \\ \Rightarrow \qquad \boldsymbol{S} &= \boldsymbol{E} + 2(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{n}_0 \otimes \boldsymbol{n}_0 - \boldsymbol{E}) = \boldsymbol{E} - 2\boldsymbol{n}_0 \otimes \boldsymbol{n}_0 \\ &= \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 12 & -4 & 6 \\ -4 & 6 & 12 \\ 6 & 12 & -4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Aufgabe 51: Volumenberechnung mittels Determinanten

Im $\mathbb{R}^3$ sei der Tetraeder gegeben, der durch die Vektoren

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \; \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \; \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

aufgespannt wird.

a) Berechnen Sie unter Nutzung einer Determinante das Volumen des Tetraeders.

b) Wie groß ist das Volumen des Tetraeders, der durch

$$\boldsymbol{Aa},\; \boldsymbol{Ab}, \boldsymbol{Ac} \text{ mit } \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

aufgespannt wird?

Lösung 51:

a) Das Tetraedervolumen ergibt sich aus

$$\begin{aligned} V_T(\boldsymbol{a},\, \boldsymbol{b},\, \boldsymbol{c}) =& \frac{1}{6}\left|\det(\boldsymbol{a},\, \boldsymbol{b},\, \boldsymbol{c})\right| \\ =& \frac{1}{6}\left|\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}\right| \quad \begin{matrix} (1.\ \text{Zeile}+2\cdot\ 2.\ \text{Z.}) \\ \\ (3.\ \text{Z.}+2.\ \text{Z.}) \end{matrix} \\ =& \frac{1}{6}\left|\det \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right| \\ =& \frac{1}{6}\left|-\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{6}\left|\det \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}\right| \\ =& \frac{1}{6}|-20| = \frac{10}{3} \end{aligned}$$

b) Das Volumen des Tetraeders $(\boldsymbol{Aa},\, \boldsymbol{Ab},\, \boldsymbol{Ac})$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} V_T(\boldsymbol{Aa}, \boldsymbol{Ab}, \boldsymbol{Ac}) =& \frac{1}{6}\left|\det(\boldsymbol{Aa},\, \boldsymbol{Ab},\, \boldsymbol{Ac})\right| = \frac{1}{6}\left|\det(\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}))\right| \\ =& \frac{1}{6}\left|\det \boldsymbol{A} \cdot \det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})\right|. \end{aligned}$$

Mit $\det \boldsymbol{A} = -2 + 1 = -1$ bleibt das Volumen des Tetraeders also erhalten:

$$V_T(\boldsymbol{Aa}, \boldsymbol{Ab}, \boldsymbol{Ac}) = V_T(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = 10/3.$$

Aufgabe 52:

Im $\mathbb{R}^3$ sind die Vektoren

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

gegeben.
Es ist zu überprüfen, ob die Vektoren $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ linear unabhängig sind.

a) Wenden Sie dazu den Gauß-Algorithmus auf die Matrix $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ an.

b) Wenden Sie ebenso den Gauß-Algorithmus auf die Matrix $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})^\top$ an.

c) Bestimmen Sie die Dimension von $\operatorname{span}\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$.

d) Zeigen Sie, dass die Zeilenvektoren der Zeilenstufenformen aus **a)** und **b)** zwei unterschiedliche Untervektorräume des $\mathbb{R}^3$ aufspannen.

Lösung 52:

a) Dieser Gauß-Algorithmus behandelt das Gleichungssystem, das zur Definition der linearen Unabhängigkeit gehört:
$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ sind linear unabhängig. $\Leftrightarrow$ Das Gleichungssystem $\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} + \gamma\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ hat **nur** die Lösung $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

α	β	γ		
2	1	1	0	
2	1	1	0	$-I$
1	1	-1	0	$-\frac{1}{2} \times I$
2	1	1	0	
0	0	0	0	
0	$1/2$	$-3/2$	0	tausche $II \leftrightarrow III$
2	1	1	0	
0	$1/2$	$-3/2$	0	
0	0	0	0	

Es ist eine Variable frei wählbar, damit gibt es mehrere Lösungen und die Vektoren sind linear abhängig.

b) Dieser Gauß-Algorithmus kombiniert die einzelnen Vektoren so, dass möglichst einfache Vektoren übrig bleiben (Zeilenstufenform), denen man die lineare Unabhängigkeit/Abhängigkeit ansieht. Es liegt kein Gleichungssystem zu Grunde, daher entfällt die rechte Seite.

α	β	γ	
2	2	1	
1	1	1	$-\frac{1}{2} \times I$
1	1	-1	$-\frac{1}{2} \times I$
2	2	1	
0	0	$1/2$	
0	0	$-3/2$	$+3 \times II$
2	2	1	
0	0	$1/2$	
0	0	0	

Auch hier verbleiben zwei Vektoren. Diese bilden bereits eine Basis des von $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{c}$ aufgespannten Unterraumes $\boldsymbol{U}$.

Die Zeilenvektoren des ersten Systems haben nichts mit dem Unterraum $\boldsymbol{U}$ zu tun und sind nicht in ihm enthalten.
Die Zeilenvektoren des zweiten Systems sind immer eine Linearkombination der vorhergehenden Zeilen. Der Unterraum $\boldsymbol{U}$ wird also nie verlassen.

c) Aus der Zeilenstufenform kann man ablesen, dass die Dimension von $\operatorname{span}\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ gleich 2 ist.

d) Der Untervektorraum, der durch die Zeilen der Zeilenstufenform aus **a)** aufgespannt wird ist:

$$\boldsymbol{U}_1 = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}.$$

Der Untervektorraum, der durch die Zeilen der Zeilenstufenform aus **b)** aufgespannt wird ist:

$$\boldsymbol{U}_2 = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Falls die beiden Vektorräume $\boldsymbol{U}_1$ und $\boldsymbol{U}_2$ identisch, kann man jeden Vektor aus $\boldsymbol{U}_1$ in der Basis von $\boldsymbol{U}_2$ darstellen und umgekehr. Wir wählen also einen Vektor $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{U}_2$ zum Beispiel

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wir nehmen an, dass $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{U}_1$. Dann lässt sich $\boldsymbol{v}$ als Linearkombination der Basisvektoren von $\boldsymbol{U}_1$ schreiben.

$$\lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

An den ersten und zweiten Komponenten kann man sehen, dass $\lambda = 1$ und $\mu = 1$ sein müssen, um die Gleichung zu erfüllen. Dies führt jedoch zu einem Widerspruch in der dritten Komponente. Daher ist die Annahme, dass $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{U}_1$, falsch. Daraus folgt

$$\boldsymbol{U}_1 \neq \boldsymbol{U}_2.$$

Aufgabe 53: Lineare Unterräume

Sind die folgenden Mengen Untervektorräume des $\mathbb{R}^2$?

a) $\mathbb{U} = \left\{ (x,\, y)^\top \in \mathbb{R}^2 \middle| x + y = 1 \right\}$

b) $\mathbb{U} = \left\{ (x,\, y)^\top \in \mathbb{R}^2 \middle| 2x - 3y = 0 \right\}$

c) $\mathbb{U} = \left\{ (x,\, y)^\top \in \mathbb{R}^2 \middle| xy = 0 \right\}$

d) $\mathbb{U} = \left\{ (x,\, y)^\top \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x \geq y \right\}$

Lösung 53:

Man muss jeweils die Kriterien für einen Untervektorraum nachprüfen; das sind:

i) $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{U} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in \mathbb{U}$ und

ii) $\boldsymbol{u} \in \mathbb{U}$ und $\lambda \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \lambda \boldsymbol{u} \in \mathbb{U}$

Außerdem muss $\mathbb{U}$ selbst ein Vektorraum sein. Insbesondere muss dafür gezeigt werden, dass der Nullvektor in $\mathbb{U}$ enthalten ist, also $\mathbf{0} \in \mathbb{U}$.

a) $\mathbb{U}$ ist kein Untervektorraum, denn $\mathbf{0} = (0\,,\, 0)^\top \notin \mathbb{U}$, weil $0 + 0 \neq 1$ ist.

b) Für $\boldsymbol{u} = (x_1\,,\, y_1)^\top \in \mathbb{U}$ und $\boldsymbol{v} = (x_2\,,\, y_2)^\top \in \mathbb{U}$ gilt $2x_1 - 3y_1 = 0$ und $2x_2 - 3y_2 = 0$, also $2(x_1 + x_2) - 3(y_1 + y_2) = 0$ und somit $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = (x_1 + x_2\,,\, y_1 + y_2)^\top \in \mathbb{U}$. Und weiter: Für $\boldsymbol{u} = (x\,,\, y)^\top \in \mathbb{U}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $2x - 3y = 0$, also $\lambda(2x - 3y) = 0$ und somit $\lambda \boldsymbol{u} = (\lambda x\,,\, \lambda y)^\top \in \mathbb{U}$. Folglich ist $\mathbb{U}$ ein Untervektorraum.

c) $\mathbb{U}$ ist kein Untervektorraum, denn für $\boldsymbol{u}_1 = (1\,,\, 0)^\top$ und $\boldsymbol{u}_2 = (0\,,\, 1)^\top$ gilt $\boldsymbol{u}_1 \in \mathbb{U}$ und $\boldsymbol{u}_2 \in \mathbb{U}$, aber $\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 = (1\,,\, 1)^\top \notin \mathbb{U}$.

d) $\mathbb{U}$ ist kein Untervektorraum, denn für $\boldsymbol{u} = (x, y)^\top$ gilt $x \geq y$, aber für $\lambda = -1$ gilt für $\lambda \boldsymbol{u}$ diese Eigenschaft nicht mehr.

Aufgabe 54: Lineare Unterräume (frühere Klausuraufgabe)

Der Unterraum $\boldsymbol{U} \subset \mathbb{R}^3$ werde von den Vektoren

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

aufgespannt.

a) Zeigen Sie $\dim \boldsymbol{U} = 2$ und bestimmen Sie den Unterraum $\boldsymbol{U}^\perp$.

b) Es sei $\boldsymbol{p} := (1,0,1)^\top$. Geben Sie die Hessesche Normalform der Hyperebene $\boldsymbol{H} := \boldsymbol{p} + \boldsymbol{U}$ an und bestimmen Sie den Abstand der Ebene $\boldsymbol{H}$ vom Koordinatenursprung.

Lösung 54:

Im Folgenden bezeichnen wir mit der Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standard-Skalarprodukt im $\mathbb{R}^3$ und mit der Abbildung $\|\cdot\|$ die durch dieses Skalarprodukt induzierte Norm.

a) Wir bestimmen zunächst $\boldsymbol{U}^\perp$. Dieser besteht aus allen Vektoren $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$, die orthogonal zu $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ und $\boldsymbol{u}_3$ sind:

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}_1 \rangle = 0, \quad \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}_2 \rangle = 0 \quad \text{und} \quad \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}_3 \rangle = 0.$$

Auf dieses Gleichungssystem wird der Gauß-Algorithmus angewendet:

$$\begin{array}{rrr|r|l}
1 & -1 & 1 & 0 & \\
2 & 1 & 0 & 0 & -2 \times \text{ 1. Zeile} \\
4 & -1 & 2 & 0 & -4 \times \text{ 1. Zeile} \\
\hline
1 & -1 & 1 & 0 & \\
0 & 3 & -2 & 0 & \\
0 & 3 & -2 & 0 & - \text{ 2. Zeile} \\
\hline
1 & -1 & 1 & 0 & \\
0 & 3 & -2 & 0 & \\
0 & 0 & 0 & 0 &
\end{array}.$$

Die freie Wahl von $x_3 = \lambda$ und Rückwärtseinsetzen liefert

$$\boldsymbol{x} = \lambda \begin{pmatrix} -1/3 \\ 2/3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad \text{Folglich ist} \quad \boldsymbol{U}^\perp = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\},$$

und $\dim \boldsymbol{U}^\perp = 1$.

Mit dem Dimensionssatz für Orthogonalkomplemente gilt

$$3 = \dim \mathbb{R}^3 = \dim \boldsymbol{U} + \dim \boldsymbol{U}^\perp = \dim \boldsymbol{U} + 1,$$

und somit folgt $\dim \boldsymbol{U} = 2$.

Alternativ lesen wir $\dim \boldsymbol{U} = 2$ an der Stufenform des Gleichungssystems ab.

b) Als Normalenvektor der Hyperebene muss ein Basisvektor von $\boldsymbol{U}^\perp$ gewählt werden:

$$\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Normieren führt auf

$$\boldsymbol{n}_0 = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Damit und mit $\boldsymbol{p} = (1,0,1)^\top$ ist die Hessesche Normalform von $\boldsymbol{H}$

$$\boldsymbol{H} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 |\ \langle \boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}, \boldsymbol{n}_0 \rangle = 0\}.$$

Da die Hessche Normalform einen normierten Normalenvektor $\boldsymbol{n}_0$ enthält, ergibt sich der Abstand der Hyperebene zum Koordinatenursprung $\mathbf{0}$ aus dem Skalarprodukt

$$d(\boldsymbol{H}, \mathbf{0}) = |\langle \mathbf{0} - \boldsymbol{p}, \boldsymbol{n}_0 \rangle| = \left| \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle \right| = \frac{2}{\sqrt{14}}.$$

Aufgabe 55: Dimensionssatz für Unterräume

Bestätigen Sie den Dimensionssatz für Unterräume für
$\boldsymbol{U}_1 = \mathrm{span}\{\,(1,0,0)^\top\,,\ (0,1,0)^\top\,\} \subset \boldsymbol{V}$ und
$\boldsymbol{U}_2 = \mathrm{span}\{\,(2,2,0)^\top\,,\ (0,0,3)^\top\,\} \subset \boldsymbol{V}$ mit $\boldsymbol{V} = \mathbb{R}^3$.

Lösung 55:

Die Unterräume $\boldsymbol{U}_1 \subset \mathbb{R}^3$ und $\boldsymbol{U}_2 \subset \mathbb{R}^3$ enthalten jeweils 2 linear unabhängige Vektoren im $\mathbb{R}^3$ (Prüfen Sie dieses nach!). Somit gilt

$$\dim(\boldsymbol{U}_1) = 2 \quad \text{und} \quad \dim(\boldsymbol{U}_2) = 2\,.$$

Der Untervektorraum $\boldsymbol{U}_1 + \boldsymbol{U}_2$ enthält 3 linear unabhängige Vektoren im $\mathbb{R}^3$ (Prüfen Sie dieses nach!). Somit gilt

$$\dim(\boldsymbol{U}_1 + \boldsymbol{U}_2) = 3\,.$$

Für die Bestimmung von $\dim(\boldsymbol{U}_1 \cap \boldsymbol{U}_2)$ müssen alle linear unabhängigen Vektoren des verbleibenden Unterraums gefunden werden. Das bedeutet, für $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{U}_1 \cap \boldsymbol{U}_2$ gilt $\underline{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{U}_1 \text{ und } \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{U}_2}$. Folglich lässt sich dieses $\boldsymbol{x}$ hier darstellen als

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= \lambda_{11}\,(1,0,0)^\top + \lambda_{12}\,(0,1,0)^\top\,, \quad \lambda_{11},\lambda_{12} \in \mathbb{R}\,, \quad \text{und} \\ \boldsymbol{x} &= \lambda_{21}\,(2,2,0)^\top + \lambda_{22}\,(0,0,3)^\top\,, \quad \lambda_{21},\lambda_{22} \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

Also ist hier die vektorwertige Gleichung

$$\lambda_{11}\,(1,0,0)^\top + \lambda_{12}\,(0,1,0)^\top - \lambda_{21}\,(2,2,0)^\top - \lambda_{22}\,(0,0,3)^\top \stackrel{!}{=} \mathbf{0}\,,$$

für die Koeffizienten $\lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{21}, \lambda_{22} \in \mathbb{R}$ zu lösen. Eine andere Darstellung des zugehörigen linearen Gleichungssystems ergibt hier

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ & 1 & -2 & 0 & 0 \\ & & & -3 & 0 \\ \hline \end{array}\,.$$

An der Stufenform des Gleichungssystems kann man ablesen, dass die Lösung mehrdeutig ist (d.h. es liegt im Unterraum $\boldsymbol{U}_1 \cap \boldsymbol{U}_2$ mindestens ein linear unabhängiger Vektor). Die Lösung des Gleichungssystems ergibt

$$\lambda_{22} = 0\,,\ \lambda_{21} =: t \in \mathbb{R}\,,\ \lambda_{12} = 2\,t\,,\ \lambda_{11} = 2\,t\,.$$

Das Einsetzen dieser λ_{11}, λ_{12}, λ_{21}, λ_{22} in die beiden Gleichungen der Darstellungen des Vektors $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{U}_1 \cap \boldsymbol{U}_2$ ergibt hier

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= 2\,t\,(1,0,0)^\top + 2\,t\,(0,1,0)^\top = t\,(2,2,0)^\top \quad \text{und} \\ \boldsymbol{x} &= t\,(2,2,0)^\top + 0\cdot(0,0,3)^\top \quad = t\,(2,2,0)^\top \end{aligned}$$

für (weiterhin) beliebige $t \in \mathbb{R}$. Aus diesem folgt

$$\boldsymbol{U}_1 \cap \boldsymbol{U}_2 = \mathrm{span}\left\{\,(1,1,0)^\top\,\right\}$$

und folglich

$$\dim(\boldsymbol{U}_1 \cap \boldsymbol{U}_2) = 1\,,$$

da $\boldsymbol{U}_1 \cap \boldsymbol{U}_2$ genau einen linear unabhängigen Vektor im $\mathbb{R}^3$ enthält.

Somit sind die Aussagen des Dimensionssatzes für Unterräume hier, mit

$$\begin{aligned} \dim(\boldsymbol{U}_1 + \boldsymbol{U}_2) &= \dim(\boldsymbol{U}_1) + \dim(\boldsymbol{U}_2) - \dim(\boldsymbol{U}_1 \cap \boldsymbol{U}_2)\,, \\ (3 &= 2 + 2 - 1\,,) \end{aligned}$$

sowie

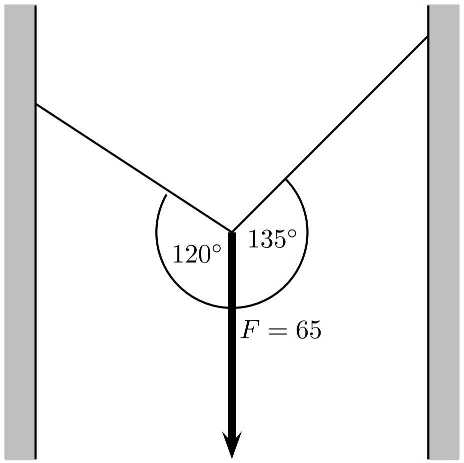
$$\begin{aligned} \dim(\boldsymbol{U}_1) &= 2 \le n = 3 < \infty\,, \\ \dim(\boldsymbol{U}_2) &= 2 \le n = 3 < \infty\,, \\ \dim(\boldsymbol{U}_1 + \boldsymbol{U}_2) &= 3 \le n = 3 < \infty\,, \\ \dim(\boldsymbol{U}_1 \cap \boldsymbol{U}_2) &= 1 \le n = 3 < \infty\,, \end{aligned}$$

mit $n = 3$, da $\boldsymbol{V} = \mathbb{R}^3$, und $\boldsymbol{V}$ ist ein endlichdimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, gezeigt.

Aufgabe 56: Vektoren

Ein Gewicht sei an zwei Seilen angehängt. Bestimmen Sie zeichnerisch und rechnerisch die Kräfte in den Seilen.

Dazu müssen Sie den Kraftvektor in zwei Komponenten zerlegen, die in die Richtung der Seile zeigen, da Seile nur Zugkräfte übertragen können.



Lösung 56:

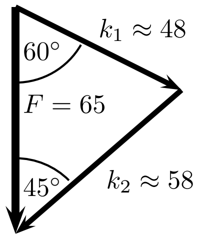
Aus der Skizze kann man abmessen:

$$k_1 \approx 48 \quad \text{und} \quad k_2 \approx 58\,.$$

Die rechnerische Lösung kann über den Sinussatz erfolgen

$$\frac{\sin(75°)}{65} = \frac{\sin(45°)}{k_1} = \frac{\sin(60°)}{k_2}$$

$$\Rightarrow \quad k_1 \approx 47.58 \quad \text{und} \quad k_2 \approx 58.28\,.$$



Aufgabe 57: Vektor- und Matrix-Normen

a) Bestimmen Sie die drei Standard-Normen (Betragssummen-, Euklidische- und Maximums-Norm) der Vektoren:

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix} , \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

b) Bestimmen Sie die drei Standard-Normen
(Spaltensummen-, Zeilensummen-, Frobenius-Norm) der Matrizen:

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} , \quad \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} .$$

Lösung 57:

a)

$$\|\boldsymbol{a}\|_1 = 19 , \quad \|\boldsymbol{a}\|_2 = 13 , \quad \|\boldsymbol{a}\|_\infty = 12 .$$
$$\|\boldsymbol{b}\|_1 = 3 , \quad \|\boldsymbol{b}\|_2 = \sqrt{3} , \quad \|\boldsymbol{b}\|_\infty = 1 .$$

b)

$$\|\boldsymbol{C}\|_1 = 6 , \quad \|\boldsymbol{C}\|_\infty = 7 , \quad \|\boldsymbol{C}\|_F = \sqrt{29} .$$
$$\|\boldsymbol{D}\|_1 = \|\boldsymbol{D}\|_\infty = 3 , \quad \|\boldsymbol{D}\|_F = 3\sqrt{2} .$$

Aufgabe 58: Vektornormen

Gegeben sind folgende Ausdrücke für $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)^\top \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{x}\|_a &:= |x_1|\,, \\ \|\boldsymbol{x}\|_b &:= |x_1| \cdot |x_2|\,, \\ \|\boldsymbol{x}\|_c &:= 2\,|x_1| + \tfrac{2}{3}\,|x_2|\,. \end{aligned}$$

a) Welche der Ausdrücke definieren Normen im $\mathbb{R}^2$?
Begründen Sie Ihre Aussage durch das Überprüfen der Definition einer Norm.
Falls es sich nicht um eine Norm handelt, geben Sie ein Beispiel an, welches zeigt, dass eine Bedingung verletzt ist.

b) Skizzieren Sie für die *Normen* aus **a)** die Einheitskreise, d.h. die Menge

$$\left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \|\boldsymbol{x}\| = 1 \right\}.$$

Lösung 58:

a)

$\|\boldsymbol{x}\|_a := |x_1|$ definiert keine Norm. Bspw. für $\boldsymbol{u} = (0,1)^\top$ ist

$$\|\boldsymbol{u}\|_a = |0| = 0\,,$$

aber $\boldsymbol{u} \neq \mathbf{0}$. Somit ist die Bedingung der Definitheit einer Norm verletzt.

$\|\boldsymbol{x}\|_b := |x_1| \cdot |x_2|$ definiert keine Norm. Bspw. für $\boldsymbol{v} = (0,1)^\top$ ist

$$\|\boldsymbol{v}\|_b = |0| \cdot |1| = 0\,,$$

aber $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$. Somit ist die Bedingung der Definitheit einer Norm verletzt.

$\|\boldsymbol{x}\|_c := 2\,|x_1| + \frac{2}{3}\,|x_2|$ definiert eine verallgemeinerte Betragssummennorm im $\mathbb{R}^2$. Das Nachrechnen der vier Bedingungen ergibt:

i) $\|\boldsymbol{x}\|_c = 2\,|x_1| + \frac{2}{3}\,|x_2| \geq 0$ ist erfüllt für alle $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)^\top \in \mathbb{R}^2$.

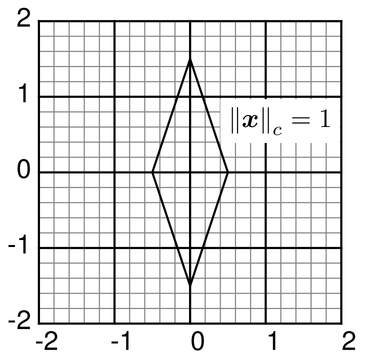
ii) Für $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)^\top \in \mathbb{R}^2$ ist $\|\boldsymbol{a}\|_c = 2\,|a_1| + \frac{2}{3}\,|a_2| \overset{!}{=} 0$ genau dann, wenn $|a_1| = |a_2| = 0$ und somit $\boldsymbol{a} = (0,0)^\top$.

iii) Für $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt $\|\alpha\,\boldsymbol{x}\|_c = 2\,|\alpha\,x_1| + \frac{2}{3}\,|\alpha\,x_2| = |\alpha| \cdot (2\,|x_1| + \frac{2}{3}\,|x_2|) = |\alpha| \cdot \|\boldsymbol{x}\|_c$.

iv) Für die Dreiecksungleichung sei $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)^\top$ und $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2)^\top$, somit

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|_c &= 2\,|x_1 + y_1| + \tfrac{2}{3}\,|x_2 + y_2| \\ &\leq 2\,|x_1| + \tfrac{2}{3}\,|x_2| + 2\,|y_1| + \tfrac{2}{3}\,|y_2| \\ &= \|\boldsymbol{x}\|_c + \|\boldsymbol{y}\|_c\,. \end{aligned}$$

b) Skizzen von $\|\boldsymbol{x}\|_c = 1$:



Aufgabe 59: Matrix-Matrix-Multiplikation

Seien

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Entscheiden Sie, welche Matrix-Matrix-Produkte möglich sind und berechnen Sie diese.

Lösung 59:

Es gilt $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{(3,2)}$, $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{(4,3)}$, $\boldsymbol{C} \in \mathbb{R}^{(1,4)}$ und $\boldsymbol{D} \in \mathbb{R}^{(4,1)}$.

Daher sind die folgenden Produkte möglich $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{D}$ und $\boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{C}$.

$$\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -12 \\ 9 & -2 \\ 11 & -8 \\ -7 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$\boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \end{pmatrix}.$$

$$\boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & -2 & 4 \\ -1 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 60: Matrix-Operationen und Skalarprodukt

Gegeben seien die folgenden Matrizen und Vektoren

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{C} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke $\boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{AB}^T$, $\boldsymbol{d}^T\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{e}^T\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{e}\boldsymbol{f}^T$, $\boldsymbol{e}\boldsymbol{f}^T+\boldsymbol{B}$. Begründen Sie Ihre Antwort, falls der Ausdruck nicht existiert.

b) Berechnen Sie die Skalarprodukte $\langle \boldsymbol{d}, \boldsymbol{e} \rangle$, $\langle \boldsymbol{d}-\boldsymbol{e}, \boldsymbol{d} \rangle$.

Lösung 60:

a) **i)**

$$\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

ii) Die Differenz $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ ist nicht möglich, weil die Zeilenzahl zwar übereinstimmt, die Spaltenzahl sich aber unterscheidet.

iii)

$$\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 6 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

iv) Das Produkt $\boldsymbol{AB}^T$ ist nicht möglich, weil die Spaltenzahl von $\boldsymbol{A}$ nicht mit der Zeilenzahl von $\boldsymbol{B}$ übereinstimmt.

v)

$$\boldsymbol{d}^T\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

vi)

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

vii)

$$\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{C} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

viii) Das Produkt $\boldsymbol{e}^T\boldsymbol{f}$ ist nicht möglich, weil die Spaltenzahl von $\boldsymbol{e}^T$ nicht mit der Zeilenzahl von $\boldsymbol{f}$ übereinstimmt.

ix)

$$\boldsymbol{e}\boldsymbol{f}^T = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 3 & 9 & -3 \end{pmatrix}.$$

x)

$$\boldsymbol{e}\boldsymbol{f}^T + \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 3 & 9 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 3 & 11 & -2 \end{pmatrix}$$

b) Berechnen Sie die Skalarprodukte $\langle \boldsymbol{d}, \boldsymbol{e} \rangle$, $\langle \boldsymbol{d}-\boldsymbol{e}, \boldsymbol{d} \rangle$.

i) $\langle \boldsymbol{d}, \boldsymbol{e} \rangle = 5$.

ii) $\langle \boldsymbol{d}-\boldsymbol{e}, \boldsymbol{d} \rangle = 0$.

Aufgabe 61: Rang einer Matrix

Bestimmen Sie den Rang der folgenden Matrizen

a)

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 3 & -1 & -4 \\ 2 & 3 & -4 & -7 & -3 \\ 3 & 8 & 1 & -7 & -8 \end{pmatrix}.$$

b)

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

c)

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 6 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & -7 & 8 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & 4 \end{pmatrix}.$$

Lösung 61:

a) Durch Anwendung des Gauß-Verfahrens erhalten wir

$$\begin{array}{rrrrr|} 1 & 3 & 1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 3 & -1 & -4 \\ 2 & 3 & -4 & -7 & -3 \\ 3 & 8 & 1 & -7 & -8 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{rrrrr|} 1 & 3 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -6 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 1 \\ \hline \end{array} \rightarrow$$

$$\begin{array}{rrrrr|} 1 & 3 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}.$$

Daraus folgt $\text{Rang}(\boldsymbol{A}) = 2$.

b) Durch Anwendung des Gauß-Verfahrens erhalten wir

$$\begin{array}{rrr|} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & 3 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{rrr|} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 10 & 3 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{rrr|} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 3 - \frac{10}{3} \\ \hline \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{array}{rrr|} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

Daraus folgt $\text{Rang}(\boldsymbol{B}) = 3$.

c) Durch Vertauschen der Zeilen erhalten wir

$$\begin{array}{rrrrr|l} 3 & 8 & 6 & -4 & -1 & \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & \text{4. Zeile} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & \text{2. Zeile} \\ 0 & -7 & 8 & 1 & 1 & \text{5. Zeile} \\ 0 & 0 & 0 & -7 & 4 & \text{3. Zeile} \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{rrrrr|} 3 & 8 & 6 & -4 & -1 \\ 0 & -7 & 8 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ \hline \end{array}.$$

Daraus folgt $\text{Rang}(\boldsymbol{C}) = 5$.

Aufgabe 62: Matrix rank

Calculate the rank of the matrix

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Lösung 62:

The Gaussian algorithm is applied as

$$\begin{array}{rrr|} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & 3 \\ \hline \end{array} \quad \to \quad \begin{array}{lrr|} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 10 & 3 \\ \hline \end{array} \quad \to \quad \begin{array}{llr|} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 3 - \frac{10}{3} \\ \hline \end{array}$$

$$\to \quad \begin{array}{lrr|} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

This yields $\operatorname{rank}(\boldsymbol{B}) = 3$.

Aufgabe 63: Matrix rank

Determine the rank of the matrix

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 3 & 8 & 6 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & -7 & 8 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & 4 \end{bmatrix}.$$

Lösung 63:

Permute the rows as

$$\begin{array}{rrrrr||l} 3 & 8 & 6 & -4 & -1 & \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & \text{4th row} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & \text{2nd row} \\ 0 & -7 & 8 & 1 & 1 & \text{5th row} \\ 0 & 0 & 0 & -7 & 4 & \text{3rd row} \\ \hline \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{rrrrr||} 3 & 8 & 6 & -4 & -1 \\ 0 & -7 & 8 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ \hline \end{array}.$$

This yields $\text{rank}(\boldsymbol{C}) = 5$.

Aufgabe 64: Tensorprodukt

Gegeben seien die Vektoren $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^4$ und $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$.

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke

i) $(\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b})\, \boldsymbol{x}$

ii) $\boldsymbol{a} \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \rangle$

Was fällt Ihnen auf?

Lösung 64:

i)

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b})\boldsymbol{x} &= \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 12 & -8 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3 \\ 12 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \rangle &= \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} 3 \\ &= \begin{pmatrix} -3 \\ 12 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Allgemein gilt die Identität:

$$(\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b})\, \boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \rangle$$

Da das Skalarprodukt weniger Rechenaufwand benötigt als das Tensorprodukt empfiehlt es sich die letztere Rechnung durchzuführen.

Aufgabe 65: Dimensionssatz für Untervektorräume

Weisen Sie den Dimensionssatz nach für den Unterraum
$\boldsymbol{U} = \{\, \lambda\, \boldsymbol{a} \,|\, \lambda \in \mathbb{R} \,\} \subset \boldsymbol{V}$ und $\boldsymbol{W} = \{\, \mu\, \boldsymbol{b} \,|\, \mu \in \mathbb{R} \,\} \subset \boldsymbol{V}$
mit festen $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{V} = \mathbb{R}^n$, $0 < n < \infty$.

Lösung 65:

Es müssen die folgenden Fälle betrachtet werden.

i) Ohne Beschränkung der Allgemeinheit seien $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ und $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$.

Dann gilt $\dim \boldsymbol{U} = 1$, $\boldsymbol{W} = \{\boldsymbol{0}\}$, $\dim \boldsymbol{W} = 0$, und daher

$$\boldsymbol{U} + \boldsymbol{W} = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V} \,|\, \boldsymbol{x} \in \operatorname{span}\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}\}\,,\ \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{U}\,,\ \boldsymbol{w} \in \{\boldsymbol{0}\}\} = \boldsymbol{U}$$

genauso wie $\boldsymbol{U} \cap \boldsymbol{W} = \boldsymbol{U} \cap \{\boldsymbol{0}\} = \{\boldsymbol{0}\}$. Daraus folgt, dass $\dim(\boldsymbol{U} + \boldsymbol{W}) = \dim \boldsymbol{U} = 1$ und $\dim(\boldsymbol{U} \cap \boldsymbol{W}) = 0$. Daraus folgt die Formel des Dimensionssatzes:

$$\dim(\boldsymbol{U} + \boldsymbol{W}) = \dim \boldsymbol{U} + \dim \boldsymbol{W} - \dim(\boldsymbol{U} \cap \boldsymbol{W})\,.$$

ii) Die Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ sind linear abhängig mit $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$. Daher gibt es einen $\nu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ so, dass $\boldsymbol{b} = \nu\, \boldsymbol{a}$. Mit $\lambda := \nu^{-1}\, \mu$, folgt aus $\boldsymbol{u} = \mu \boldsymbol{a}$, dass $\boldsymbol{u} = \lambda \boldsymbol{b}$. Die zwei Unterräume $\boldsymbol{U}$ und $\boldsymbol{W}$ sind identisch und daher gilt, dass

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{W} = \boldsymbol{U} + \boldsymbol{W} = \boldsymbol{U} \cap \boldsymbol{W}\,, \quad \dim \boldsymbol{U} = 1\,.$$

Daraus folgt der Dimensionssatz:

$$\dim(\boldsymbol{U} + \boldsymbol{W}) = \dim \boldsymbol{U} + \dim \boldsymbol{W} - \dim(\boldsymbol{U} \cap \boldsymbol{W})\,.$$

iii) Die Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ sind linear unabhängig.

Das impliziert, dass $\boldsymbol{U} + \boldsymbol{W} = \{\lambda \boldsymbol{a} + \mu \boldsymbol{b} \,|\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.

Wegen der linearen Unabhängigkeit von $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ folgt, dass $\dim(\boldsymbol{U} + \boldsymbol{W}) = 2$.

Sei $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{U} \cap \boldsymbol{W}$. Dann gilt, dass $\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{a} = \mu \boldsymbol{b}$ für $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ woraus folgt, dass $\boldsymbol{0} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{a} - \mu \boldsymbol{b}$.

Weil $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ linear unabhängig sind, folgt, dass $\mu = \lambda \overset{!}{=} 0$. Daher gilt $\boldsymbol{U} \cap \boldsymbol{W} = \{\boldsymbol{0}\}$ und $\dim(\boldsymbol{U} \cap \boldsymbol{W}) = 0$.

Zusästzlich gilt $\dim \boldsymbol{U} = 1$ und $\dim \boldsymbol{W} = 1$ da $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$, wegen der linearen Unabhängigkeit. Daraus erhalten wir den Dimensionssatz:

$$\dim(\boldsymbol{U} + \boldsymbol{W}) = \dim \boldsymbol{U} + \dim \boldsymbol{W} - \dim(\boldsymbol{U} \cap \boldsymbol{W})\,.$$

iv) Für den trivialen Fall $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ und $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ gilt der Dimensionssatz ebenfalls.

Aufgabe 66:

Sei $A \in \mathbb{R}^{(3,3)}$ die Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Ist die Matrix diagonalisierbar?
- Man bestimme die Potenz A^6 ohne Matrixprodukte zu benutzen.

Lösung 66:

1. Eigenwerte und Eigenvektoren:
Die Eigenwerte einer Matrix A erhält man durch Lösen der charakteristischen Gleichung $\det(A - \lambda I) = 0$. Für die gegebene Matrix A berechnen wir:

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(2-\lambda)$$

Die charakteristische Gleichung ist:

$$(1-\lambda)^2(2-\lambda) = 0$$

Die Lösungen dieser Gleichung sind die Eigenwerte:

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 2$$

Jetzt bestimmen wir die entsprechenden Eigenvektoren.
- Für $\lambda_1 = 1$, lösen wir $(A - I)v = 0$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0$$

Ein möglicher Eigenvektor ist $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- Für $\lambda_2 = 1$, lösen wir $(A - I)v = 0$ erneut und erhalten einen zweiten Eigenvektor:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0$$

Ein möglicher Eigenvektor ist $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- Für $\lambda_3 = 2$, lösen wir $(A - 2I)v = 0$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0$$

Ein möglicher Eigenvektor ist $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Somit ist die Matrix P aus den Eigenvektoren:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Diagonalmatrix D ist:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. **Berechnung der Potenz**:
Mit der Diagonalisierung können wir A^6 wie folgt berechnen:

$$A^6 = (PDP^{-1})^6 = PD^6P^{-1}$$

Um D^6 zu berechnen, erheben wir jeden Diagonaleintrag zur Potenz 6:

$$D^6 = \begin{pmatrix} 1^6 & 0 & 0 \\ 0 & 2^6 & 0 \\ 0 & 0 & 1^6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 64 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Daher ist:

$$A^6 = PD^6P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 64 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Durch Multiplikation erhalten wir:

$$A^6 = \begin{pmatrix} 1 & 63 & 0 \\ 0 & 64 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$