Helmut-Schmidt-Universität
Universität der Bundeswehr Hamburg
Fakultät für Maschinenbau

Prof. Dr. Thomas Carraro
Dr. Frank Gimbel
Janna Puderbach

Mathematik II — Übungsblatt 3

WT 2022 — Differentialrechnung, Kurvendiskussion

Einführende Bemerkungen

- Vermeiden Sie die Verwendung von Taschenrechnern oder Online-Ressourcen.
- Die mit einem Stern *) markierten (Teil-)Aufgaben entfallen in diesem Trimester. Stattdessen werden einzelne Online-Aufgaben im ILIAS-Kurs kenntlich gemacht, zu denen Sie dort Ihre Lösungswege zur Korrektur hochladen können.
- Die mit zwei Sternen **) markierten (Teil-)Aufgaben richten sich an Studierende, die die übrigen Aufgaben bereits gelöst haben und die Inhalte weiter vertiefen möchten.

Aufgabe 3.1: Differenzieren

Bestimmen Sie jeweils die erste Ableitung. Zur Kontrolle sind die Werte der Ableitung an Kontrollpunkten angegeben. (Eventuell notwendige Beschränkungen des Definitionsgebietes sind nicht angegeben.)

$$f_1(t) = 3t^4 - 4t + 7\,, \qquad f_2(t) = (2t-3)^4\,, \qquad f_3(t) = t^3\,(t+3)^4$$

$$f_4(t) = 3\,\cos(2t)\,, \qquad f_5(t) = \sin^2(3t)\,, \qquad f_6(t) = \tan(2 - t/2)$$

$$f_7(t) = \frac{2t-3}{(t+2)^3}\,, \qquad f_8(t) = \frac{4t\,\sin(t)}{\cos(2t)}\,, \qquad f_9(t) = t^2 e^{\sqrt{t}}$$

$$f_{10}(t) = \sqrt{t\sqrt{t\sqrt{t}}}\,, \qquad f_{11}(t) = e^{\frac{1}{1+t^2}}\,, \qquad f_{12}(t) = \tan(t)$$

$$f_{13}(t) = \frac{t + \cos(t)\sin(t)}{2}\,, \qquad f_{14}(t) = \frac{t^2 - t + 2}{2t+3}\,, \qquad f_{15}(t) = \frac{\sin^2(t)}{\cos(t)}$$

Aufgabe 3.2: Tangenten

a) Bestimmen Sie die Geradengleichungen (in der Form $ax + by = c$) der Tangenten an den Nullstellen der Funktionen

$$\varphi_1(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6, \qquad \varphi_2(x) = x^2 \text{ und } \varphi_3(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{für } x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & \text{für } x < 0 \end{cases}.$$

b) Geben Sie alle Punkte ($x-$Werte) an, in denen die Tangenten von $f(x) = x^2$ und $g(x) = x^3$ parallel sind.

c) Stellen Sie den Verlauf der beiden vektorwertigen Funktionen

$$\boldsymbol{v}(t) = \begin{pmatrix} t \\ \varphi_3(t) \end{pmatrix} \qquad \text{mit } \varphi_3(t) \text{ aus Aufgabenteil } \mathbf{a)}$$

und

$$\boldsymbol{w}(s) = \begin{pmatrix} s \cdot |s| \\ s \end{pmatrix}.$$

im selben Graphen dar.
Berechnen Sie – wo möglich – die Ableitungen beider Funktionen $\boldsymbol{v}(t)$ und $\boldsymbol{w}(s)$.

Hinweis: Die Funktion $\boldsymbol{w}(s)$ lässt sich analog zu $\varphi_3(t)$ mit Hilfe einer Fallunterscheidung auch ohne die Betragsfunktion darstellen.

Aufgabe 3.3: Differentiation

a) Geben Sie Konstanten $b,\ c,\ d \in \mathbb{R}$ an, damit die Funktion

$$g(x) = \begin{cases} bx^3 + cx^2 + d & \text{für } x \leq 1 \\ \ln x & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

auf $\mathbb{R}$ zweimal differenzierbar ist.
Ist $g(x)$ für diese Wahl auch dreimal differenzierbar?

b****)** Die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

ist in $x = 0$ differenzierbar. Ist die Ableitung dort stetig? Hinweis: Betrachten Sie die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n = \frac{1}{2n\pi}$.

Aufgabe 3.4: Regel von L'Hospital

Berechnen Sie mit Hilfe der Regel von L'Hospital die Grenzwerte

$$A = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right), \qquad B = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cosh x}{x^3}\right), \qquad C = \lim_{x\to 1}\left(\frac{\ln x}{\sin(\pi x)}\right)$$

Aufgabe 3.5: Kurvendiskussion

a) Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 + 3\,x}{1-x}.$$

i) Geben Sie den maximalen Definitionsbereich der Funktion f an.

ii) Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion.

iii) Bestimmen Sie die kritischen Punkte für die Extrema der Funktion und deren Funktionswerte.

iv) Bestimmen Sie die (nicht vertikale) Asymptote der Funktion, d. h. diejenige Gerade $g(x) = a + b\,x$ für die

$$\lim_{x\to\pm\infty}\big(f(x) - g(x)\big) = 0$$

ist.

v) Skizzieren Sie die Funktion.

b) Gegeben sei die Funktion

$$g\,:\,\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,:\,x\to\left(x^2-4\right)^2\cdot \mathrm{e}^{-x}.$$

Bestimmen Sie alle relativen Minima und Maxima der Funktion g **ohne** die zweite Ableitung zu berechnen.

Aufgabe 3.6: Minimaler Abstand

Gegeben seien die folgenden Funktionen

i) $f_1(x) = x^2 + 1,$ **ii)** $f_2(x) = \ln(x).$

a) Skizzieren Sie die Funktionen f_1 und f_2.

b) Bestimmen Sie den minimalen vertikalen Abstand beider Funktionsgraphen

$$d = \min\ \{|f_1(x) - f_2(x)|;\, x\in\mathbb{R}\}\,.$$

Aufgabe 3.7: Kurven im $\mathbb{R}^n$

Ein Satellit bewege sich auf der Bahn

$$\boldsymbol{r}(t) = \left(\sqrt{1+t^2},\, 3t\right)^\top$$

a) Berechnen Sie die Geschwindigkeit $\dot{\boldsymbol{r}}(t)$ des Satelliten.

b) Geben Sie die Grenzwerte (für $t\to+\infty$ und für $t\to-\infty$) der Bahnrichtung r_2/r_1 und Geschwindigkeit $\dot{\boldsymbol{r}}$ des Satelliten an.

Aufgabe 3.8: Online Aufgabe

Bearbeiten Sie die aktuelle Online-Aufgabe im ILIAS-Kurs.
Beachten Sie, dass Sie dort auch die Lösungswege zu einzelnen Aufgaben zur Korrekutur hochladen können.

Ergebnisse zu Aufgabe 3.1:

$$f_1'(2) = 92, \quad f_2'(2) = 8, \quad f_3'(2) = 11500,$$
$$f_4'(\pi/3) = -3\sqrt{3}, \quad f_5'(\pi/3) = 0, \quad f_6'(4+2\pi) = -1/2,$$
$$f_7'(2) = 5/256, \quad f_8'(\pi/3) = \frac{20\pi}{3} - 4\sqrt{3}, \quad f_9'(4) = 12\mathrm{e}^2,$$
$$f_{10}'(256) = \frac{7}{16}, \quad f_{11}'(2) = -\frac{4\mathrm{e}^{1/5}}{25}, \quad f_{12}'(\pi/3) = 4,$$
$$f_{13}'(\pi/3) = \frac{1}{4}, \quad f_{14}'(2) = \frac{13}{49}, \quad f_{15}'(\pi/3) = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

Ergebnisse zu Aufgabe 3.2:

a) Nullstellen: $\varphi_1(1) = \varphi_1(-2) = \varphi(3) = 0,\ \varphi_2(0) = 0,\ \varphi_3(0) = 0$

Ergebnisse zu Aufgabe 3.4:

$A = 1,\ B = \pm\infty,\ C = -1/\pi$

Ergebnisse zu Aufgabe 3.5:

a)ii) $0,\ -3,$ **iii)** -1, 3, **iv)** $g(x) = -x - 4$

Ergebnisse zu Aufgabe 3.7:

$\lim\limits_{t\to\infty}\frac{r_2(t)}{r_1(t)} = 3$, $\lim\limits_{t\to\pm\infty}\dot{\boldsymbol{r}}(t) = (\pm 1, 3)^\top$