Helmut-Schmidt-Universität
Universität der Bundeswehr Hamburg
Fakultät für Maschinenbau

Prof. Dr. Thomas Carraro
Dr. Frank Gimbel
Janna Puderbach

Mathematik II — **Blatt 11**

WT 2022 — Integration

Einführende Bemerkungen

- Vermeiden Sie die Verwendung von Taschenrechnern oder Online-Ressourcen.
- Die mit einem Stern *) markierten (Teil-)Aufgaben entfallen in diesem Trimester. Stattdessen werden einzelne Online-Aufgaben im ILIAS-Kurs kenntlich gemacht, zu denen Sie dort Ihre Lösungswege zur Korrektur hochladen können.
- Die mit zwei Sternen **) markierten (Teil-)Aufgaben richten sich an Studierende, die die übrigen Aufgaben bereits gelöst haben und die Inhalte weiter vertiefen möchten.

Aufgabe 11.1: Integration

Bestimmen Sie jeweils eine Stammfunktion:

a)
$$I_a := \int \frac{4x^4}{x^4-1}\mathrm{d}x\,.$$

b)
$$I_b := \int (1+3x^2)\cdot\ln(x^3)\mathrm{d}x\,.$$

c)
$$I_c := \int \sin(\sqrt{x})\mathrm{d}x\,.$$

d)
$$I_d := \int \sin(2x)\cdot \mathrm{e}^x\mathrm{d}x\,.$$

Lösung 11.1:

a) Die Partialbruchzerlegung des Integranden ergibt

$$\frac{4x^4}{x^4-1} = 4 + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} - \frac{2}{x^2+1}.$$

Damit ist

$$\begin{aligned} I_a &= \int 4 + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} - \frac{2}{x^2+1}\mathrm{d}x \\ &= 4x + \ln|x-1| - \ln|x+1| - 2\arctan(x). \end{aligned}$$

b) Mit partieller Integration erhält man

$$\begin{aligned} I_b &= 3\int (1+3x^2)\cdot\ln(x)\mathrm{d}x \\ &= 3\left[\left(x+x^3\right)\ln(x) - \int \frac{x+x^3}{x}\mathrm{d}x\right] \\ &= 3\left[\left(x+x^3\right)\ln(x) - x - \frac{x^3}{3}\right] \\ &= \left(3x+3x^3\right)\ln(x) - 3x - x^3. \end{aligned}$$

(Falls man ohne Umformung partiell integriert, erhält man $I_2 = (x+x^3)\ln(x^3) - 3x - x^3$.)

c) Mit der Substitution $\quad t=\sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad 2t\mathrm{d}t = \mathrm{d}x \quad$ erhält man

$$\begin{aligned} I_c &= \int 2t\cdot\sin(t)\mathrm{d}t \\ &= -2t\cos(t) - \int -2\cos(t)\mathrm{d}t \\ &= -2t\cos(t) + 2\sin(t) \\ &= -2\sqrt{x}\cos(\sqrt{x}) + 2\sin(\sqrt{x}). \end{aligned}$$

d) Zweimalige partielle Integration ergibt

$$\int \sin(2x) \cdot \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}t = \sin(2x) \cdot \mathrm{e}^x - \int 2\cos(2x) \cdot \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x$$

$$= \sin(2x) \cdot \mathrm{e}^x - 2\cos(2x) \cdot \mathrm{e}^x - 4 \int \sin(2x) \cdot \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x.$$

Daraus folgt

$$I_d = \int \sin(2x) \cdot \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}t = \frac{1}{5} \sin(2x) \cdot \mathrm{e}^x - \frac{2}{5} \cos(2x) \, \mathrm{e}^x \, .$$

Aufgabe 11.2*: Integration in $\mathbb{R}^2$

Berechnen Sie den Wert des Integrals

$$\int_B f_j(x,y) \mathrm{d}(x,y), \qquad j = 1,\, 2$$

auf dem Bereich $B = [0,\, \pi] \times [0,\, \mathrm{e} - 1]$ für die beiden Funktionen

$$f_1(x,y) = \frac{\sin x}{1+y}, \qquad f_2(x,y) = x(y+1)^{x-1}.$$

Lösung 11.2:

$$\int_B f_1(x,y)\mathrm{d}(x,y) = \int_{x=0}^{\pi} \int_{y=0}^{\mathrm{e}-1} \frac{\sin x}{1+y} \mathrm{d}y \mathrm{d}x = \int_{x=0}^{\pi} \sin x \quad \ln|1+y|\Big|_{y=0}^{\mathrm{e}-1} \mathrm{d}x$$

$$= \int_{x=0}^{\pi} \sin x \mathrm{d}x (1-0) = 2$$

$$\int_B f_2(x,y)\mathrm{d}(x,y) = \int_{x=0}^{\pi} \int_{y=0}^{\mathrm{e}-1} x(y+1)^{x-1} \mathrm{d}y \mathrm{d}x$$

$$= \int_{x=0}^{\pi} (y+1)^x \Big|_{y=0}^{\mathrm{e}-1} \mathrm{d}x = \int_0^{\pi} (\mathrm{e}^x - 1) \mathrm{d}x$$

$$= \mathrm{e}^{\pi} - \mathrm{e}^0 - \pi = \mathrm{e}^{\pi} - 1 - \pi.$$

Aufgabe 11.3: Bereichsintegrale

Gegeben sei das Doppelintegral

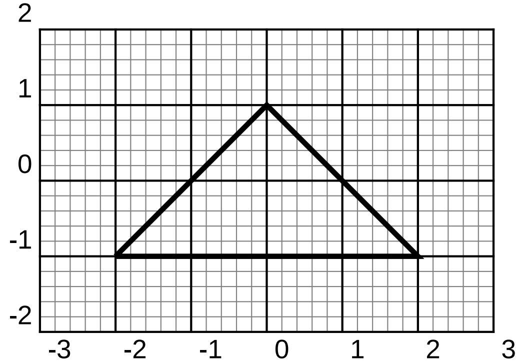
$$I := \int_{-1}^{1} \int_{y-1}^{1-y} \frac{y + x^3}{4} \;\, \mathrm{d}x \; \mathrm{d}y \; .$$

a) Skizzieren Sie den von den Grenzen beschriebenen Teilbereich der x-y–Ebene.

b) Berechnen Sie das Integral.

Lösung 11.3:

a) Der Bereich ist durch die Geraden $x = y-1 \Rightarrow y = x+1$ und $x = 1-y \Rightarrow y = x+1$, sowie durch die Geraden $y = -1$ und formal auch $y = 1$, eingeschlossen. Das ist ein Dreieck:



b)

$$I = \int_{-1}^{1} \int_{y-1}^{1-y} \frac{y}{4} \;\, \mathrm{d}x \; \mathrm{d}y + \int_{-1}^{1} \int_{y-1}^{1-y} \frac{x^3}{4} \;\, \mathrm{d}x \; \mathrm{d}y \; .$$

Der zweite Summand ist Null, da eine in x ungerade Funktion über einen zur y–Achse symmetrischen Bereich integriert wird (aber auch ohne Beachtung der Symmetrie ist die Berechnung einfach!).

Damit ist

$$
\begin{aligned}
I &= \int\limits_{-1}^{1} \frac{y}{4} \int\limits_{y-1}^{1-y} 1 \;\, \mathrm{d}x \; \mathrm{d}y = \int\limits_{-1}^{1} \frac{y}{4} \cdot \Big[x\Big]_{x=y-1}^{1-y} \;\, \mathrm{d}x \\
&= \int\limits_{-1}^{1} \frac{y}{4} \cdot \Big((1-y)-(y-1)\Big) \; \mathrm{d}y \\
&= \int\limits_{-1}^{1} \frac{y-y^2}{2} \; \mathrm{d}y \;\; = \; -\frac{1}{3} \; .
\end{aligned}
$$

Aufgabe 11.4: Bereichsintegrale

Berechnen Sie

a) $I := \int\limits_{D} x^2\, y + x \; \mathrm{d}\boldsymbol{x}$ mit $D := [-2,2] \times [1,3]$.

b) $J := \int\limits_{G} x \mathrm{d}(x,y)$ mit dem durch die Kurven

$$x = 0,\; y = 2x \text{ und } y = \frac{1}{a}\, x^2 + a \;,\;\; a > 0$$

berandeten Flächenstück G.

c) Betrachten Sie das zweifache Integral

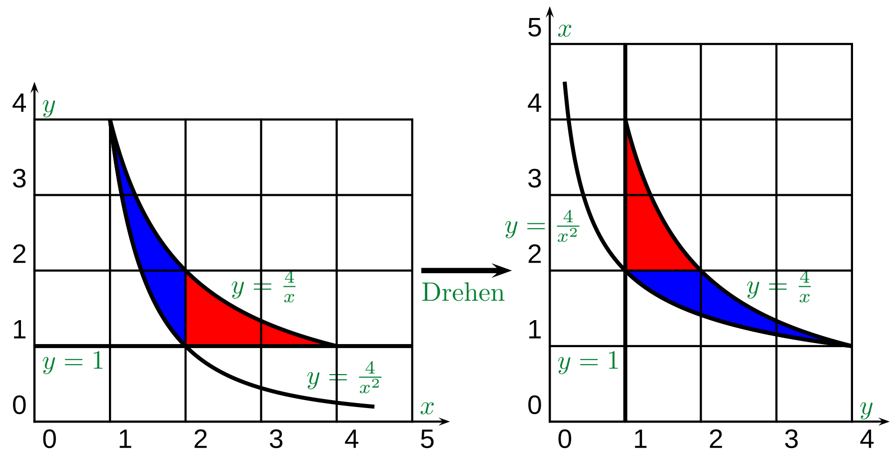
$$I := \int_{x=1}^{2} \int_{y=4/x^2}^{4/x} x y^2 \mathrm{e}^{x^2 y^2/4} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x + \int_{x=2}^{4} \int_{y=1}^{4/x} x y^2 \mathrm{e}^{x^2 y^2/4} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x.$$

i) Skizzieren Sie den Integrationsbereich und vertauschen Sie die Integrationsreihenfolge.

ii) Berechnen Sie das Integral.

Zusätzliche Hinweise zu Aufgabe 11.4:

zu c) Die Integrationsbereiche B_1 und B_2 beider Einzelintegrale sind in folgender Skizze blau und rot markiert. Die y-Grenzen hängen von x ab und speziell die untere y-Grenze wird für beide Bereiche durch unterschiedliche Funktion beschrieben. ($y = \frac{4}{x^2}$ und $y = 1$)
Das Ändern der Integrationsreihenfolge entspricht dem Drehen der Skizze (rechts).
Nun werden die Ober und Untergrenzen für x in beiden Integrationsbereichen von der jeweils selben Funktion (y-abhängig) beschrieben. Daher kann man nun beide Integrale zusammenfassen.



Lösung 11.4:

Zu a)

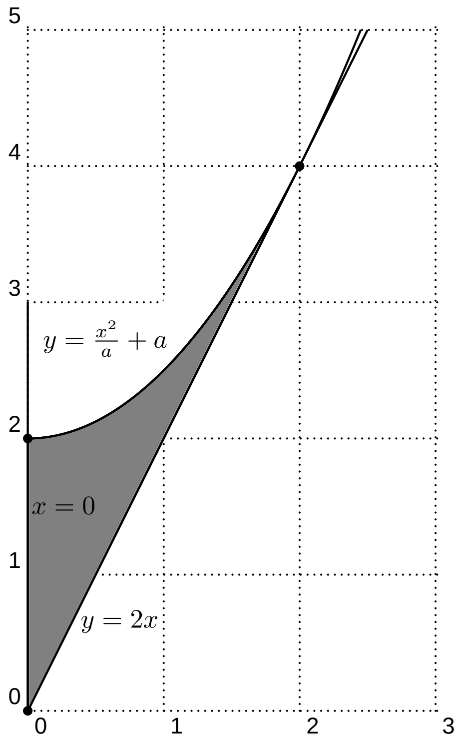
$$
\begin{aligned}
I &= \int\limits_{1}^{3} \int\limits_{-2}^{2} \left(x^2\, y + x\right) \mathrm{d}x \; \mathrm{d}y = \int\limits_{1}^{3} \left[\frac{x^3}{3}\, y + \frac{x^2}{2}\right]_{x=-2}^{2} \mathrm{d}y \\
&= \frac{16}{3} \cdot \int\limits_{1}^{3} y \; \mathrm{d}y = \frac{16}{3} \cdot 4 = \boxed{\frac{64}{3}} \; .
\end{aligned}
$$

Anmerkung: Man hätte den Summanden x gleich weglassen können, da eine ungerade Funktion über einen symmetrischen Bereich integriert immer Null ergibt.

Zu b) Es werden zunächst die Schnittpunkte der Parabel mit der Geraden bestimmt:

$$\frac{1}{a} x^2 + a = 2x \quad \Rightarrow \quad (x-a)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1/2} = a \, .$$

Die Kurven berühren sich somit im Punkt $P = (a, 2a)$.



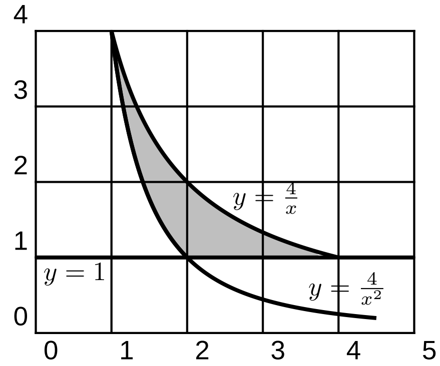
Somit ergibt sich für den Integralwert:

$$J = \iint_G x \mathrm{d}(x,y) = \int_{x=0}^{a} x \int_{y=2x}^{\frac{1}{a}x^2+a} \mathrm{d}\,y \mathrm{d}x \; = \int_{x=0}^{a} x \left(\frac{1}{a}x^2 + a - 2x\right) \mathrm{d}x$$

$$= \int_{x=0}^{a} \left(\frac{1}{a}x^3 + ax - 2x^2\right) \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{4a}x^4 + \frac{1}{2}ax^2 - \frac{2}{3}x^3\right]_0^a$$

$$= \frac{1}{4}a^3 + \frac{1}{2}a^3 - \frac{2}{3}a^3 = \boxed{\frac{1}{12}a^3\,.}$$

Zu c)



Mit $y = \dfrac{4}{x^2} \Rightarrow x = \dfrac{2}{\sqrt{y}}$ und $y = \dfrac{4}{x} \Rightarrow x = \dfrac{4}{y}$ erhält man den Integrationsbereich

$$D = \left\{(x,y) \,|\, 1 \le y \le 4, \frac{2}{\sqrt{y}} \le x \le \frac{4}{y}\right\}.$$

Das Integral ist

$$I = \int_1^4 \int_{2/\sqrt{y}}^{4/y} xy^2 \,\mathrm{e}^{x^2y^2/4} \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

mit dem Integralwert

$$I = \int_1^4 \left[2\mathrm{e}^{x^2y^2/4}\right]_{x=2/\sqrt{y}}^{4/y} \mathrm{d}y = \int_1^4 \left[2\mathrm{e}^4 - 2\mathrm{e}^y\right] \mathrm{d}y$$

$$= 6\mathrm{e}^4 - 2\mathrm{e}^4 + 2\mathrm{e} = 4\mathrm{e}^4 + 2\mathrm{e}.$$

Aufgabe 11.5*: Flächeninhalt, Rotationskörper

a) Skizzieren Sie den Bereich $B \subset \mathbb{C}$ mit

$$B = \{|z + \bar{z}| + |z - \bar{z}| \le 4\} \cap \{0 \le \mathrm{Re} z \le 1\}$$

in der Gauß'schen Ebene.

b) Interpretieren Sie B als Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ und berechnen Sie den Flächeninhalt.

c) Berechnen Sie ebenso den Schwerpunkt $\boldsymbol{x}_s$ des Bereichs B.

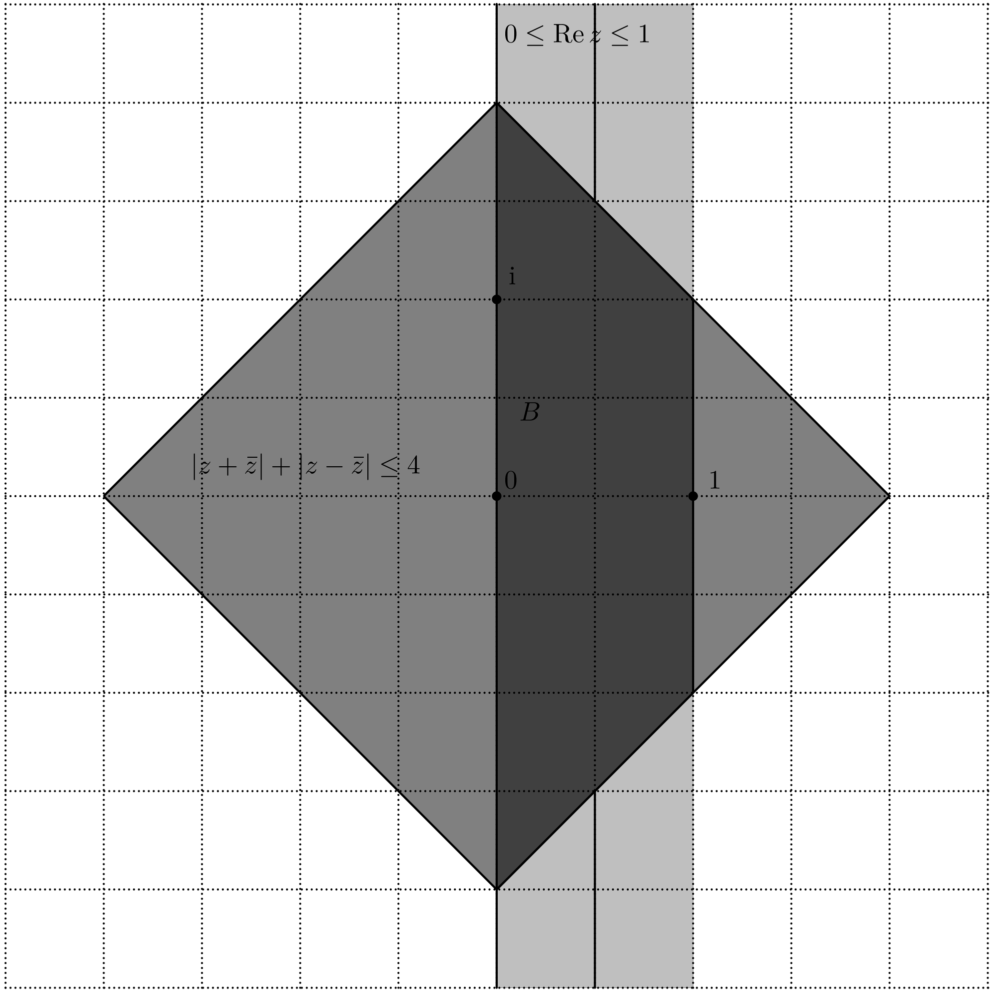
d) Berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers, das durch Rotation von B um die y-Achse entsteht.

Lösung 11.5:

a) Eine Zahl $z = x + \mathrm{i}y \in B$ muss zum einen in dem Streifen $0 \leq x \leq 1$ enthalten sein, zum anderen muss die folgende Ungleichung erfüllt sein:

$$4 \geq |z + \bar{z}| + |z - \bar{z}| = 2|x| + 2|y|.$$

Beide Bereiche sowie deren Schnittmenge B sind im folgenden skizziert:



b) Die Integrationsgrenzen für $B \subset \mathbb{R}^2$ sind

$$B = \{(x,y)^\top \in \mathbb{R}^2 |\, x - 2 \leq y \leq 2 - x \text{ und } 0 \leq x \leq 1\}.$$

Damit ist der Flächeninhalt

$$A = \int_B \mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^1 \int_{x-2}^{2-x} \mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^1 (4 - 2x)\mathrm{d}x = 4 - 1 = 3.$$

c) Der Schwerpunkt $(x_s,\, y_s)^\top$ ergibt sich zu

$$\begin{aligned} x_s =& \frac{1}{A} \cdot \int_B x\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \frac{1}{3} \int_0^1 x \int_{x-2}^{2-x} \mathrm{d}y\mathrm{d}x \\ =& \frac{1}{3} \int_0^1 (4x - 2x^2)\mathrm{d}x = \frac{1}{3} \left[2x^2 - \frac{2}{3}x^3\right]_0^1 \\ =& \frac{4}{9} \\ y_s =& \frac{1}{A} \cdot \int_B y\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \frac{1}{3} \int_0^1 \int_{x-2}^{2-x} y\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\ =& \frac{1}{3} \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2}\right]_{x-2}^{2-x} \mathrm{d}x = \frac{1}{6} \int_0^1 0\mathrm{d}x = 0 \end{aligned}$$

Der Schwerpunkt liegt also bei $\boldsymbol{x} = (4/9,\, 0)^\top$.

d) Das Volumen des Rotationskörpers um die y-Achse ergibt sich (siehe auch Aufgabe 9.1) zu:

$$\begin{aligned} V =& \int_{y=-2}^{2} \pi(x(y))^2\mathrm{d}y \quad \text{mit } x(y) = \begin{cases} 2 + y & \text{für } -2 \leq y < -1 \\ 1 & \text{für } -1 \leq y \leq 1 \\ 2 - y & \text{für } 1 < y \leq 2 \end{cases} \\ =& \int_{y=-2}^{-1} \pi(2+y)^2\mathrm{d}y + \int_{-1}^{1} \pi \cdot 1^2\mathrm{d}y + \int_{1}^{2} \pi(2-y)^2\mathrm{d}y \\ =& \frac{\pi}{3} \left[(2+y)^3\right]_{-2}^{-1} + 2\pi + \frac{-\pi}{3} \left[(2-y)^3\right]_1^2 \\ =& \frac{\pi}{3} + 2\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{8\pi}{3}. \end{aligned}$$

Aufgabe 11.6: Frühere Klausuraufgabe

a) Berechnen Sie die Integrale

$$I = \int_0^{\pi} (\sin x) \cdot \mathrm{e}^{2\cos x} \mathrm{d}x \qquad \text{und} \qquad J = \int_1^2 (t^3 - 2t)\mathrm{e}^{3t^2} \mathrm{d}t.$$

b) Berechnen Sie das Integral $\int_B \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, wobei B der Kreisring in der $(x,y)-$Ebene mit Mittelpunkt $(0,0)^\top$, Innenradius a und Außenradius b (mit $0 < a < b$) ist.

c) Berechnen Sie das Integral

$$\iiint_D \mathrm{e}^{5z+3y+2x} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

über dem Gebiet $D = \left\{ (x,y,z)^\top \middle| x,y,z \geq 0 \text{ und } 5z+3y+2x \leq 2 \right\}$.

Lösung 11.6:

a) Im ersten Integral substituieren wir

$$u(x) = 2\cos x, \qquad \mathrm{d}u = -2\sin x \mathrm{d}x.$$

Eingesetzt ergibt das

$$I = \int_0^{\pi} \sin x \mathrm{e}^{2\cos x} \mathrm{d}x$$

$$= -\frac{1}{2} \int_{u(0)}^{u(\pi)} \mathrm{e}^u \mathrm{d}u = -\frac{1}{2} \left[\mathrm{e}^u\right]_{u=2}^{-2} = \frac{\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^{-2}}{2} = \sinh(2).$$

Zur Berechnung des zweiten Integrals integrieren wir partiell:

$$J = \int_1^2 \underbrace{(t^2-2)}_{u} \underbrace{t\mathrm{e}^{3t^2}}_{v'} = \Bigg[\underbrace{(t^2-2)}_{u} \underbrace{\left(\frac{1}{6}\mathrm{e}^{3t^2}\right)}_{v}\Bigg]_1^2 - \int_1^2 \underbrace{2t}_{u'} \underbrace{\frac{1}{6}\mathrm{e}^{3t^2}}_{v} \mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{3}\mathrm{e}^{12} + \frac{1}{6}\mathrm{e}^3 - \frac{2}{36}\mathrm{e}^{3t^2}\Big|_1^2 = \frac{\mathrm{e}^3}{6}\left(2\mathrm{e}^9 + 1\right) + \frac{1}{18}\left(\mathrm{e}^3 - \mathrm{e}^{12}\right)$$

$$= \frac{\mathrm{e}^3}{18}\left(5\mathrm{e}^9 + 4\right).$$

b) Es bietet sich eine Berechnung in Polarkoordinaten an:

$$\int_B \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=a}^{b} r r \mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = 2\pi \frac{b^3 - a^3}{3}.$$

c) Wir integrieren in kartesischen Koordinaten, wobei zu beachten ist, dass die Integrationsgrenzen für z von x und y abhängen und die für y von x. Deswegen ist die Integrationsreihenfolge – nachdem sie einmal gewählt wurde – festgelegt. Die oberen Integrationsgrenzen resultieren aus der Ebenengleichung $2x+3y+5z=2$:

$$\int_D \mathrm{e}^{5z+3y+2x} \mathrm{d}(x,y,z) = \int_{x=0}^{1} \mathrm{e}^{2x} \int_{y=0}^{\frac{2-2x}{3}} \mathrm{e}^{3y} \int_{z=0}^{\frac{2-2x-3y}{5}} \mathrm{e}^{5z} \mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

$$= \int_{x=0}^{1} \mathrm{e}^{2x} \int_{y=0}^{\frac{2-2x}{3}} \mathrm{e}^{3y} \left[\frac{\mathrm{e}^{5z}}{5}\right]_{z=0}^{\frac{2-2x-3y}{5}} \mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{5} \int_{x=0}^{1} \mathrm{e}^{2x} \int_{y=0}^{\frac{2-2x}{3}} \mathrm{e}^{3y} \left(\mathrm{e}^{2-2x-3y} - 1\right) \mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{5} \int_{x=0}^{1} \mathrm{e}^{2x} \left[\mathrm{e}^{2-2x} y - \frac{\mathrm{e}^{3y}}{3}\right]_{y=0}^{\frac{2-2x}{3}} \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{15} \int_{x=0}^{1} \left(\mathrm{e}^2(2-2x) - \mathrm{e}^2 + \mathrm{e}^{2x}\right) \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{15} \left[\mathrm{e}^2(x - x^2) + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\right]_{x=0}^{1} = \frac{\mathrm{e}^2 - 1}{30}$$

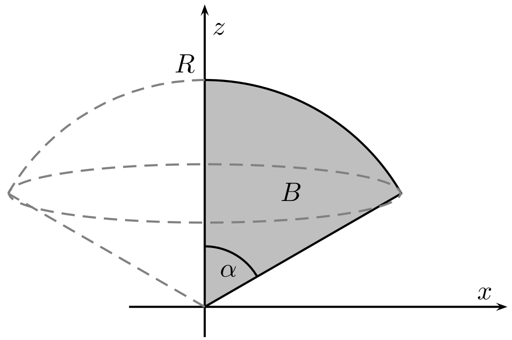
Aufgabe 11.7: Wiederholung: Schwerpunkt und Trägheitsmoment

Gegeben sei der Kreissektor B in der x–z–Ebene in Abhängigkeit von den Parametern

$$R > 0 \text{ und } 0 < \alpha \leq \pi\ .$$

Durch die Rotation der Fläche B um die z–Achse wird ein Kugelsegment K gebildet.

Bestimmen Sie den Schwerpunkt und das Trägheitsmoment bezüglich der z-Achse des homogenen Rotationskörpers.



Lösung 11.7:

Zunächst benötigen wir das Volumen des Rotationskörpers. Wir führen die Berechnung in Kugelkoordinaten durch:

$$V = \int_K \mathrm{d}V = \int_0^{2\pi}\int_0^R\int_0^\alpha r^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi$$
$$= 2\pi\frac{R^3}{3}\int_0^\alpha \sin\theta\mathrm{d}\theta = \frac{2\pi R^3}{3}(-\cos(\alpha)+\cos(0)) = \frac{2\pi R^3}{3}(1-\cos(\alpha)).$$

Wegen der Symmetrie des Rotationskörpers liegt der Schwerpunkt auf der z–Achse des Koordinatensystems. Es ist also nur die z–Komponente z_S zu berechnen:

$$z_\mathrm{S} = \frac{1}{V}\int_K z\mathrm{d}V = \frac{1}{V}\int_0^{2\pi}\int_0^R\int_0^\alpha r\cos\theta r^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi$$
$$= \frac{2\pi}{V}\cdot\frac{R^4}{4}\int_0^\alpha \sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta = \frac{3R}{4(1-\cos\alpha)}\cdot\left.\frac{\sin^2\theta}{2}\right|_0^\alpha$$
$$= \frac{3R\sin^2\alpha}{8(1-\cos\alpha)} = \frac{3R}{8}\cdot\frac{1-\cos^2\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{3R}{8}(1+\cos\alpha).$$

Das Trägheitsmoment bezüglich der z-Achse ergibt sich zu:

$$\Theta_z = \int_K r_\perp^2\mathrm{d}V = \int_0^{2\pi}\int_0^R\int_0^\alpha (r\sin\theta)^2 r^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi$$
$$= \frac{2\pi R^5}{5}\int_0^\alpha \sin^2\theta\cdot\sin\theta\mathrm{d}\theta = \frac{2\pi R^5}{5}\int_0^\alpha (1-\cos^2\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta$$
$$= \frac{2\pi R^5}{5}\left[-\cos\theta+\frac{\cos^3\theta}{3}\right]_0^\alpha = \frac{2\pi R^5}{5}\left(1-\cos\alpha+\frac{\cos^3\alpha-1}{3}\right)$$
$$= \frac{2\pi R^5}{15}(\cos^3\alpha - 3\cos\alpha + 2).$$

Aufgabe 11.8: Online Aufgabe

Bearbeiten Sie die aktuelle Online-Aufgabe im ILIAS-Kurs.
Beachten Sie, dass Sie dort auch die Lösungswege zu einzelnen Aufgaben zur Korrektur hochladen können.