Helmut-Schmidt-Universität
Universität der Bundeswehr Hamburg
Fakultät für Maschinenbau und Bauingenieurwesen

Prof. Dr. Thomas Carraro
M.Sc Janna Puderbach

Mathematik II/B (WI/ET) — Blatt 5

WT 2024 — Kurvendiskussion, Taylorpolynom

Einführende Bemerkungen

- Vermeiden Sie die Verwendung von Taschenrechnern oder Online-Ressourcen.

Aufgabe 5.1: Taylor-Entwicklung

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \ln(x).$$

a) Bestimmen Sie das Taylor-Polynom der Ordnung zwei, $T_2(x)$, von $f(x)$ an der Stelle $x = 1$.

b) Bestimmen Sie das Restglied $R_2(x;1)$ und schätzen Sie

$$\max_{x\in[1,2]} |R_2(x;1)|.$$

Lösung 5.1:

a) Die Ableitungen der Funktion sind

$$f'(x) = \frac{1}{x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad f'''(x) = \frac{2}{x^3}.$$

Das Taylor-Polynom ist

$$f(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{1}{2}f''(1)(x-1)^2 + R_2(x;1),$$

und das Taylor-Polynom der zweiten Ordnung an der Stelle $x = 1$ ist

$$T_2(x) = 0 + 1(x-1) + \frac{1}{2}(-1)(x-1)^2 = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{2}$$

b) Das Restglied ist

$$R_2(x;1) = f'''(\xi)\frac{(x-1)^3}{3!}, \quad \xi \in [1,2].$$

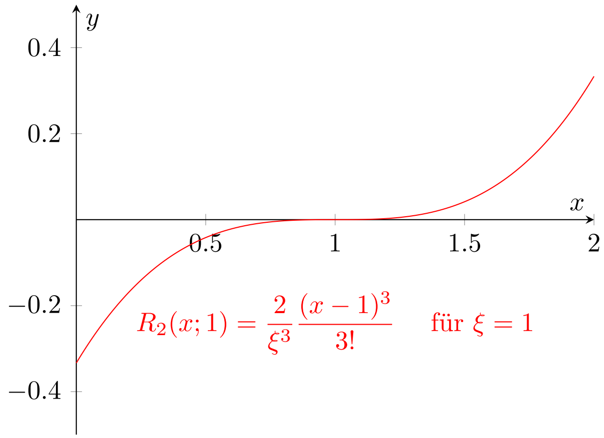
Es ist

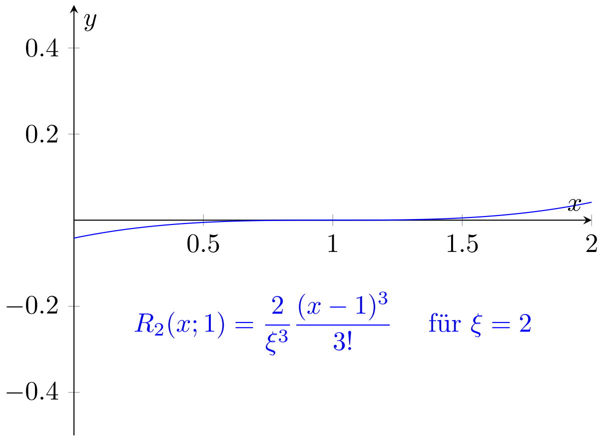
$$R_2(x;1) = \frac{2}{\xi^3}\frac{(x-1)^3}{3!}, \quad \xi \in [1,2].$$

Eine obere Schranke für die Funktion $R(x;1)$ für ξ und x im Intervall $[1,2]$ wird durch Minimieren des Nenners und Maximieren des Zählers gefunden. Das Minimum des Nenners liegt bei $\xi = 1$ und das Maximum des Zählers ist bei $x = 2$. Dies liegt daran, dass die kubische Funktion monoton steigend ist, da ihre Ableitung immer positiv ist. Wir haben also die Schätzung

$$R_2(x;1) \leq \frac{2}{1^3}\frac{(2-1)^3}{3!} = \frac{1}{3}.$$

Im Folgenden wird die Funktion $R_2(x;1)$ für die beiden Werte $\xi = 1$ und $\xi = 2$ skizziert:




y
0.4
0.2
x
0.5
1
1.5
2
−0.2
$R_2(x;1) = \frac{2}{\xi^3}\frac{(x-1)^3}{3!}$ für $\xi = 2$
−0.4

Aufgabe 5.2: Taylor-Entwicklung

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \sin(x)\ln(x).$$

a) Bestimmen Sie das Taylor-Polynom zweiter Ordnung $T_2(x)$ von $f(x)$ um den Punkt $x = 1$.

b) Bestimmen Sie die Differenz zwischen dem Taylor-Polynom $T_2(x)$ und der Funktion $f(x)$ im Punkt $x = 0$, d.h. bestimmen Sie $d(0)$, wobei

$$d(x) := |T_2(x) - f(x)|.$$

Man beachte, dass die Funktion $f(x)$ an der Stelle $x = 0$ stetig fortgesetzt werden muss.

Lösung 5.2:

a) Die Ableitungen von $f(x)$ sind:

$$f'(x) = \cos(x)\ln(x) + \frac{\sin(x)}{x},$$

$$f''(x) = -\sin(x)\ln(x) + 2\frac{\cos(x)}{x} - \frac{\sin(x)}{x^2}.$$

Das Taylor-Polynom ist

$$\begin{aligned} T_2(x;1) &= f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{1}{2}f''(x)(x-1)^2 \\ &= \sin(1)(x-1) + \left(\cos(1) - \frac{\sin(1)}{2}\right)(x-1)^2 \end{aligned}$$

b) Die Differenz ist

$$d(x) := |T_2(x) - f(x)| = |\sin(x)\ln(x) - \sin(1)(x-1) - \left(\cos(1) - \frac{\sin(1)}{2}\right)(x-1)^2|.$$

Wir müssen den Grenzwert $\lim_{x\to 0} d(x)$ berechnen, da die Funktion $\sin(x)\ln(x)$ in 0 nicht definiert ist. Wenn der Grenzwert existiert, erweitern wir die Funktion um den Wert des Grenzwertes.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0}\sin(x)\ln(x) &= \lim_{x\to 0}\frac{\ln(x)}{\frac{1}{\sin x}} \\ &= \lim_{x\to 0} -\frac{1}{x}\frac{\sin^2(x)}{\cos(x)} \\ &= \lim_{x\to 0} -\frac{\sin(x)}{x}\lim_{x\to 0}\sin(x)\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos(x)} \\ &= -1\cdot 0\cdot 1 = 0. \end{aligned}$$

Wir erweitern die Funktion bei $x = 0$ durch Stetigkeit mit dem Grenzwert $f(0) = 0$. Die Differenz ist

$$d(0) = \left|\sin(1) + \frac{\sin(1)}{2} - \cos(1)\right| = \frac{3\sin(1)}{2} - \cos(1).$$

Aufgabe 5.3: Taylor-Polynom

a) Geben Sie das Taylorpolynom n-ter Ordnung der folgenden Funktionen um den angegebenen Entwicklungspunkt x_0 an:

- **i)** $f(x) = \sin(x) \cdot \cos(x) \quad$ um $\quad x_0 = 0,\ n = 4$
- **ii)** $g(x) = \cos(x) \quad$ um $\quad x_0 = \pi/2,\ n = 4$
- **iii)** $h(x) = \mathrm{e}^{1-x}(x^2 - 2x) \quad$ um $\quad x_0 = 1,\ n = 2$

b) Geben Sie die Nullstellen der Funktionen sowie der Taylor-Polynome im Intervall $[0, 5]$ an.

c) Skizzieren Sie die Funktionen und deren Taylor-Polynome.

Lösung 5.3:

a) **i)** Zunächst werden die ersten vier Ableitungen ermittelt:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin(2x), \qquad f'(x) = \cos(2x), \qquad f''(x) = -2\sin(2x) \\ f'''(x) &= -4\cos(2x), \qquad f^{(4)}(x) = 8\sin(2x) \end{aligned}$$

Damit ist das Taylorpolynom

$$\begin{aligned} T_4(x) &= \sum_{k=0}^{4} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x-0)^k \\ &= 0 + \frac{1}{1!}x - 0 - \frac{4}{3!}x^3 + 0 = x - \frac{2}{3}x^3. \end{aligned}$$

ii) Die Ableitungen von $g(x)$ sind:

$$\begin{aligned} g(x) &= \cos x, \qquad g'(x) = -\sin x, \qquad g''(x) = -\cos x \\ g'''(x) &= \sin x, \qquad g^{(4)}(x) = \cos x \end{aligned}$$

Damit hat man dann

$$\begin{aligned} T_4(x) &= \sum_{k=0}^{4} \frac{g^{(k)}(\pi/2)}{k!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^k \\ &= 0 - \frac{1}{1}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 0 + \frac{1}{6}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3 + 0 \\ &= -\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{6}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3. \end{aligned}$$

iii) Es ist

$$\begin{aligned} h(x) &= \mathrm{e}^{1-x}(x^2 - 2x) \\ h'(x) &= \mathrm{e}^{1-x}(-x^2 + 2x + 2x - 2) = \mathrm{e}^{1-x}(-x^2 + 4x - 2) \\ h''(x) &= \mathrm{e}^{1-x}(x^2 - 4x + 2 - 2x + 4) = \mathrm{e}^{1-x}(x^2 - 6x + 6), \end{aligned}$$

und damit

$$T_2(x) = -1 + (x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2.$$

b) **i)** Die Nullstellen im Intervall $[0, 5]$ liegen bei:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \text{ für } x \in \left\{0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3}{2}\pi\right\} \\ T_4(x) &= 0 \text{ für } x \in \left\{0,\ \sqrt{\frac{3}{2}}\right\} \end{aligned}$$

ii)

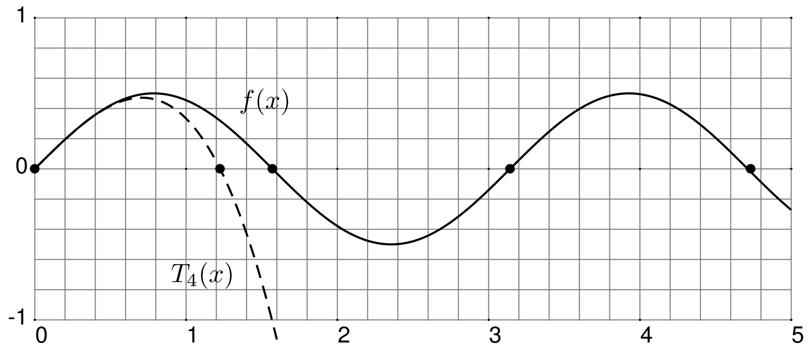
$$\begin{aligned} g(x) &= 0 \text{ für } x \in \left\{\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi\right\} \\ T_4(x) &= 0 \text{ für } x \in \left\{\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2} + \sqrt{6}\right\} \end{aligned}$$

iii)

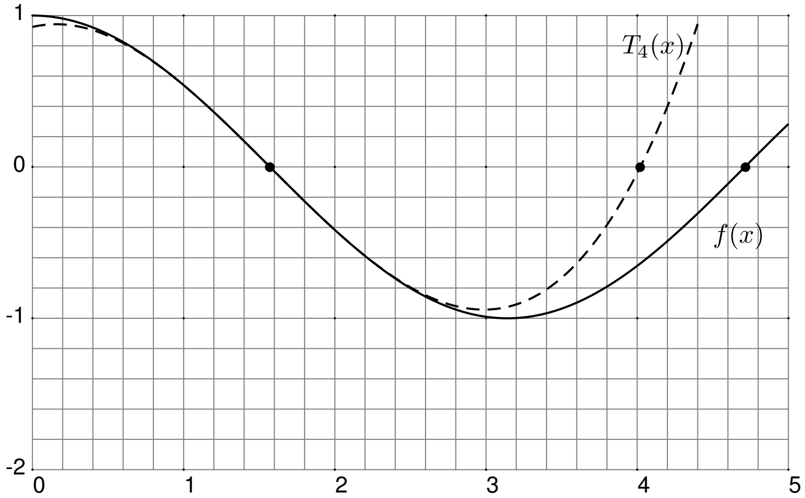
$$\begin{aligned} h(x) &= 0 \text{ für } x \in \{0,\ 2\} \\ T_2(x) &= 0 \text{ für } x \in \{\sqrt{3}\}. \end{aligned}$$

c)

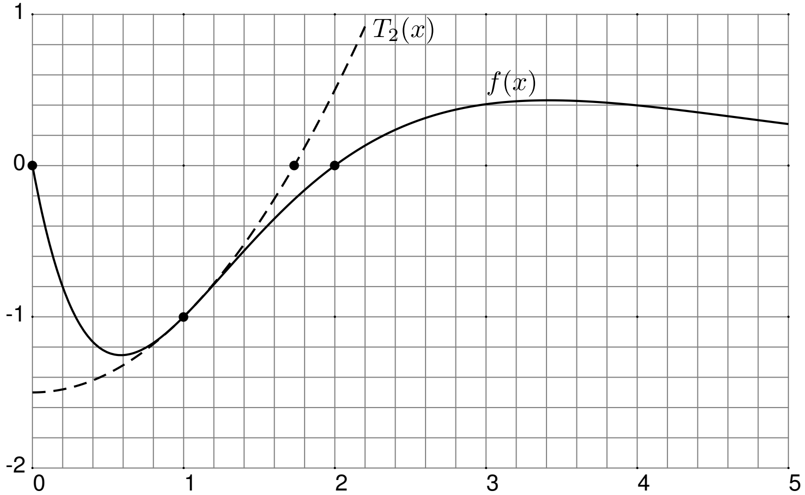
i)



ii)



iii)



Aufgabe 5.4: Asymptoten

Man bestimme die (waagerechten bzw. senkrekten bzw. schrägen) Asymptoten der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = \frac{x}{4-x^2}$

b) $g(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$

c) $h(x) = \frac{x^2-3x}{2x-2}$

d) $l(x) = x^2 e^{-x}$

Lösung 5.4:

a) Um die senkrekten Asymptoten zu finden, bestimmen wir zunächst die Nullstellen des Nenners. Die Nullstellen liegen bei $x_1 = -2$ und $x_2 = 2$.

An diesen untersuchen wir das Verhalten der Funktion:

$$\lim_{x\to -2^-} \frac{x}{4-x^2} = -\infty\,,\ \lim_{x\to -2^+} \frac{x}{4-x^2} = \infty$$

und

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x}{4-x^2} = \infty\,,\ \lim_{x\to 2^+} \frac{x}{4-x^2} = -\infty$$

Das bedeutet es es gibt eine senkrechte Asymptote bei $x = -2$ und $x = 2$.

Um die waagerechten Asymptoten zu finden, untersuchen wir das Verhalten im Unendlichen.

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x}{4-x^2} = 0$$

und

$$\lim_{x\to \infty} \frac{x}{4-x^2} = 0.$$

Das heißt, es gibt eine waagerechte Asymptote bei $y = 0$.

b) Die Funktion $g(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ hat keine Definitionslücke. Es gibt also keine senkrekten Asymptoten.

Für die waagerechten Asymptoten untersuchen wir das Verhalten im Unendlichen. Es gilt:

$$\lim_{x\to -\infty} \mathrm{e}^{-x^2} = 0$$

und

$$\lim_{x\to \infty} \mathrm{e}^{-x^2} = 0.$$

Es gibt also eine waagerechte Asymptote bei $y = 0$.

c) Die Funktion $h(x) = \frac{x^2-3x}{2x-2}$ hat eine Definitionslücke bei $x = 1$. Es gilt:

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-3x}{2x-2} = \infty$$

und

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-3x}{2x-2} = -\infty.$$

Da der Zähler von $h(x)$ genau einen Polynomgrad höher ist als der des Nenners, gibt es eine schräge Asymptote.

Durch Polynomdivision erhalten wir:

$$(x^2-3x) : (2x-2) = (\frac{1}{2}x - 1) + \frac{-2}{2x-2}.$$

Es gibt also eine schräge Asymptote bei $y = \frac{1}{2}x - 1$.

d) Die Funktion $l(x) = x^2 e^{-x}$ hat keine Definitionslücke. Daher hat sie keine senkrechte Asymptote. Wir untersuchen das Verhalten im Unendlichen mit Hilfe der Regel von L'Hospital, um die waagerechten Asymptoten zu finden:

$$\lim_{x\to -\infty} x^2 e^{-x} = \lim_{x\to -\infty} -2xe^{-x} = \lim_{x\to -\infty} 2e^{-x} = \infty.$$

und

$$\lim_{x\to \infty} x^2 e^{-x} = \lim_{x\to \infty} -2xe^{-x} = \lim_{x\to \infty} 2e^{-x} = 0.$$

Es gibt also eine waagerechte Asymptote bei $y = 0$.

Aufgabe 5.5: Kurvendiskussion

Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich, die Symmetrie, alle Nullstellen, sowie Art und Lage der kritischen Punkte und Wendepunkte der rellen Funktion

$$f(x) = x\sqrt{16-x^2}.$$

Lösung 5.5:

i) Der maximale Definitionsbereich ist $D = [-4, 4]$.

ii) Die Funktion f ist ungerade bzw. punktsymmetrisch zum Ursprung:

$$f(x) = x\sqrt{16-x^2} = -(-x)\sqrt{16-(-x)^2} = -f(-x)\ .$$

iii) Die Nullstellen sind

$$\begin{aligned} 0 =& x\sqrt{16-x^2} \\ \Leftrightarrow \qquad x =& 0 \text{ oder } 16 = x^2 \\ \Leftrightarrow \qquad x \in& \{0,\ 4,\ -4\} \end{aligned}$$

iv) Kritische Punkte liegen bei $x \in D$ mit:

$$\begin{aligned} 0 =& f'(x) = \sqrt{16-x^2} - \frac{x \cdot x}{\sqrt{16-x^2}} = \frac{16-2x^2}{\sqrt{16-x^2}} \\ \Leftrightarrow \qquad \pm 4 =& \sqrt{2}x \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

Die Funktion f selbst hat an den Grenzen des Definitionsbereiches D sowie im Ursprung den Wert $f(0) = f(\pm 4) = 0$ Für alle anderen $x > 0$ ist $f(x) > 0$. Also muss im Punkt $x = +2\sqrt{2}$ das absolute (und damit auch ein relatives) Maximum $f(2\sqrt{2}) = 8$ der Funktion liegen.
Mit der Symmetrie der Funktion folgt, dass in $x = -2\sqrt{2}$ ein Minimum $f(-2\sqrt{2}) = -8$ liegt.

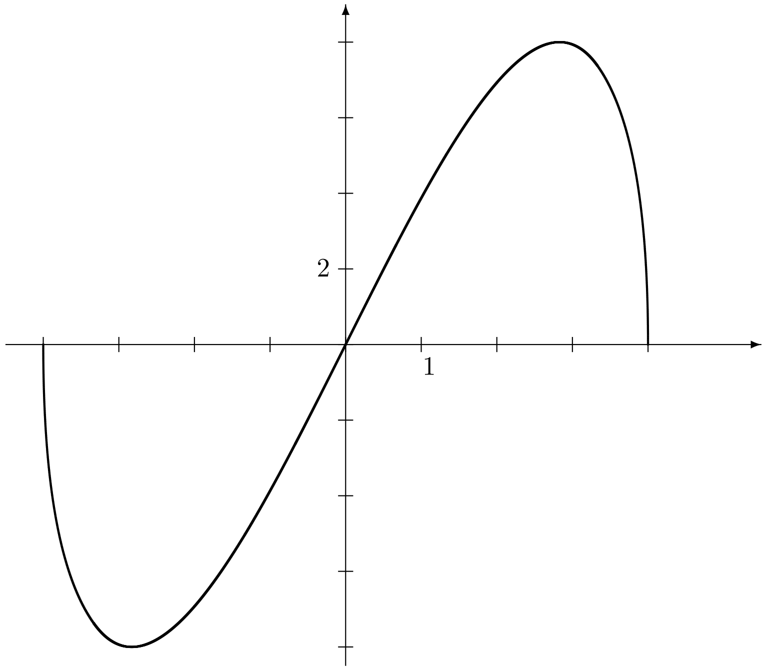
v) Wendepunkte und Konvexität:
Zunächst ist

$$\begin{aligned} f''(x) =& \frac{-4x\sqrt{16-x^2} - (16-2x^2)\cdot(-2x)\frac{1}{2}(16-x^2)^{-1/2}}{16-x^2} \\ =& \frac{-4x(16-x^2) + x(16-2x^2)}{(16-x^2)^{3/2}} \\ =& \frac{2x^3-48x}{(16-x^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

Die einzige reelle Nullstelle des Zählers im Definitionsbereich $]-4,4[$ ist $x = 0$ und es gilt

$$f''(x) = \begin{cases} > 0 & \text{für } x \in]-4,0[\\ < 0 & \text{für } x \in]0,4[\end{cases}$$

Also liegt in $(0,0)$ ein Wendepunkt, links davon ist f konvex und rechts davon konkav.



Aufgabe 5.6: Kurvendiskussion

Gegeben sei die Funktion
$$f(x) = \frac{x^2 + 3\,x}{1 - x}.$$

i) Geben Sie den maximalen Definitionsbereich der Funktion f an.

ii) Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion.

iii) Bestimmen Sie die kritischen Punkte der Funktion und deren Funktionswerte. Klassifizieren Sie alle kritischen Punkte als Minimum, Maximum oder Wendepunkt.

iv) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten der Funktion.

v) Bestimmen Sie alle Asymptoten der Funktion.

vi) Bestimmen Sie den Wertebereich der Funktion.

vii) Skizzieren Sie die Funktion.

Lösung 5.6:

a) **i)** Der maximale Definitionsbereich ist $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

ii) Die Nullstellen der Funktion sind $x_{N_1} = -3$ und $x_{N_2} = 0$.

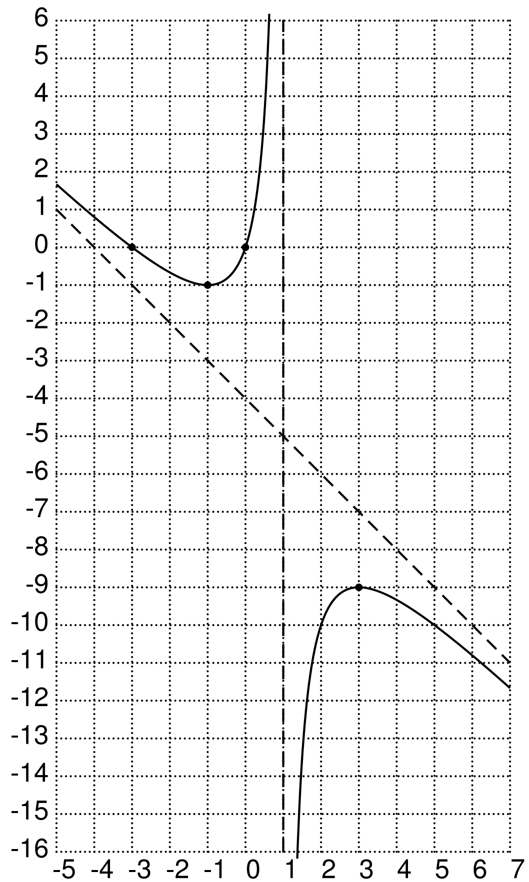
iii) Die kritischen Punkte sind die Nullstellen der ersten Ableitung. Aus
$$f'(x) = \frac{(2x+3)(1-x) + (x^2+3x)}{(1-x)^2} = \frac{-x^2 + 2\,x + 3}{(1-x)^2} = 0$$
folgt
$$x_{K_1} = -1 \text{ mit } f(-1) = -1 \text{ und } x_{K_2} = 3 \text{ mit } f(3) = -9\ .$$
Die zweite Ableitung ist:
$$f''(x) = \frac{8}{(1-x)^3}.$$
Für $x_{K_1} = -1$ ist $f''(-1) = 1 > 0$. Es handelt sich also um ein Minimum.
Für $x_{K_2} = 3$ ist $f''(3) = -1 < 0$. Es handelt sich also um ein Maximum.

iv) Aus den stationären Punkten un der Definitionslücke ergeben sich die Monotonieintervalle. In $(-\infty, -1)$ und $(3, \infty)$ ist die Funktion monoton fallend. In $(-1, 1)$ und $(1, 3)$ ist die Funktion monoton steigend.

v) Aus $f(x) = -x - 4 + \dfrac{4}{1-x}$ folgt, dass $g(x) = -x - 4$ die Asymptote ist. Wegen $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \infty$ und $\lim_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$ gibt es eine senkrechte Asymptote bei $x = 1$.

vi) Der Wertebereich ist $\mathcal{W} = (-\infty, -9] \cup [-1, \infty)$.

vii)



Bei $(-1, -1)$ handelt es sich also um ein (lokales) Minimum, bei $(3, -9)$ um ein Maximum.