Helmut-Schmidt-Universität
Universität der Bundeswehr Hamburg
Fakultät für Maschinenbau und Bauingenieurwesen

**Prof. Dr. Thomas Carraro**
**Dr. Ulrike Kochan-Eilers**

## Mathematik II/B (WI/ET) — Blatt 2

WT 2025 — Grenzwerte, Stetigkeit, Ableitungen

---

### Einführende Bemerkungen

- Vermeiden Sie die Verwendung von Taschenrechnern oder Online-Ressourcen.

---

### Aufgabe 2.1: Funktionenlimes

**a)** Gegeben sei die Funktion

$$f(x) := \frac{x^3 + |x+1| + \operatorname{sign}(x+1)}{\operatorname{sign} x}, \; x \in D(f) := \mathbb{R}\,.$$

Bestimmen Sie $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to(-1)+} f(x)$ und $\lim\limits_{x\to(-1)-} f(x)$.

**b)** Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \frac{\sinh x}{\cosh(ax)}, \quad a \in \mathbb{R}\,.$$

Bestimmen Sie $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$.

**Hinweise**:
- Mit der zunächst als bekannt vorausgesetzten Exponentialfunktion $\mathrm{e}^x$ gilt

$$\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \text{und} \qquad \cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

- Die Signum-Funktion liefert das Vorzeichen des Argumentes:

$$\operatorname{sign}(z) = \begin{cases} +1 & , z \geq 0 \\ -1 & , z < 0 \end{cases}$$

### Aufgabe 2.2: Grenzwert Analyse - Definition

**a)** Notieren Sie die Definition des Grenzwertes und zeigen Sie, dass die Folge $a_n = \dfrac{1}{n}$ gegen den Grenzwert $a = 0$ konvergiert.
(Dies ist gleichbedeutend mit dem Nachweis, dass $\forall k \in \mathbb{N}$ eine Zahl $N \in \mathbb{R}$ existiert, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > N$ gilt: $|a_n - a| < 10^{-k}$).

**b)** Berechnen Sie den Grenzwert $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ der untenstehenden Folgen und dokumentieren Sie die Rechenregel, die Sie zur Berechnung des Grenzwertes verwendet haben (Produktregel, Einschließungssatz, Produkt beschränkter Folgen, Produkt von Nullfolgen etc).

**i)** $a_n = \dfrac{n^2 + 5n}{3n^2 + 1}$ **ii)** $a_n = \log_{10}(10n^2 - 2n) - \log_{10}(n^2 + 1)$

**iii)** $a_n = \dfrac{(n+1)!}{n! - (n+1)!}$ **iv)** $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{3n}$

**v)** $a_n = \dfrac{\cos n}{n}$ **vi)** $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

**vii)** $a_n = \dfrac{2^n}{n!}$

### Aufgabe 2.3: Ableitungen

Berechnen Sie die erste Ableitung der folgenden Funktionen

**a)** $f(x) = x^x$

**b)** $g(x) = x^{3^x}$

**c)** $h(x) = x^{\cos(x)}$

### Aufgabe 2.4: Differenzieren

Bestimmen Sie jeweils die erste Ableitung. Zur Kontrolle sind die Werte der Ableitung an Kontrollpunkten angegeben. (Eventuell notwendige Beschränkungen des Definitionsgebietes sind nicht angegeben.)

$$f_1(t) = 3t^4 - 4t + 7\,, \qquad f_2(t) = (2t-3)^4\,, \qquad f_3(t) = t^3\,(t+3)^4$$

$$f_4(t) = 3\,\cos(2t)\,, \qquad f_5(t) = \sin^2(3t)\,, \qquad f_6(t) = \tan(2 - t/2)$$

$$f_7(t) = \frac{2t-3}{(t+2)^3}\,, \qquad f_8(t) = \frac{4t\,\sin(t)}{\cos(2t)}\,, \qquad f_9(t) = t^2 e^{\sqrt{t}}$$

$$f_{10}(t) = \sqrt{t\sqrt{t\sqrt{t}}}\,, \qquad f_{11}(t) = e^{\frac{1}{1+t^2}}\,, \qquad f_{12}(t) = \tan(t)$$

$$f_{13}(t) = \frac{t + \cos(t)\sin(t)}{2}\,, \qquad f_{14}(t) = \frac{t^2 - t + 2}{2t+3}\,, \qquad f_{15}(t) = \frac{\sin^2(t)}{\cos(t)}$$

**Aufgabe 2.5: Differentiation**

**a)** Geben Sie die Konstanten $b$, $c$, $d \in \mathbb{R}$ an, damit die Funktion

$$g(x) = \begin{cases} bx^3 + cx^2 + d & \text{für } x \leq 1 \\ \ln x & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

auf $\mathbb{R}$ zweimal differenzierbar ist.
Ist $g(x)$ für diese Wahl auch dreimal differenzierbar?

**b)** Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x\sin(1/x) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

in $x = 0$ stetig ist, aber *nicht* differenzierbar.
**Hinweis:** Betrachten Sie zur Untersuchung der Differenzierbarkeit die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n = \frac{1}{n\pi + \pi/2}$.

---

**Ergebnisse zu Aufgabe 2.1:**

**a)** $\lim\limits_{x\to 0\pm} f(x) = \pm 2$, $\lim\limits_{x\to -1\pm} f(x) = 1 \pm (-1)$

**b)** $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \begin{cases} 0, & |a| > 1 \\ 1, & |a| = 1 \\ \infty, & |a| < 1 \end{cases}$

**Ergebnisse zu Aufgabe 2.2:**

**b)**

**i)** $a = \frac{1}{3}$

**ii)** $a = 1$

**iii)** $a = -1$

**iv)** $a = e^3$

**v)** $a = 0$

**vi)** $a = 0$

**vii)** $a = 0$

**Ergebnisse zu Aufgabe 2.3:**

- $f'(x) = x^x\,(\ln(x) + 1)$
- $g'(x) = x^{3^x}\left(\ln(3)\,3^x \ln(x) + \dfrac{3^x}{x}\right)$
- $h'(x) = x^{\cos(x)}\left(\dfrac{\cos(x)}{x} - \ln(x)\sin(x)\right)$

**Ergebnisse zu Aufgabe 2.4:**

$$
\begin{aligned}
f_1'(2) &= 92, & f_2'(2) &= 8, & f_3'(2) &= 11500,\\
f_4'(\pi/3) &= -3\sqrt{3}, & f_5'(\pi/3) &= 0, & f_6'(4+2\pi) &= -1/2,\\
f_7'(2) &= 5/256, & f_8'(\pi/3) &= \frac{20\pi}{3} - 4\sqrt{3}, & f_9'(4) &= 12\mathrm{e}^2,\\
f_{10}'(256) &= \frac{7}{16}, & f_{11}'(2) &= -\frac{4\mathrm{e}^{1/5}}{25}, & f_{12}'(\pi/3) &= 4,\\
f_{13}'(\pi/3) &= \frac{1}{4}, & f_{14}'(2) &= \frac{13}{49}, & f_{15}'(\pi/3) &= \frac{5\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}
$$