

Mathematik II

WT 2024

Blatt 1

Definitheit, Ähnlichkeit

Einführende Bemerkungen

- Vermeiden Sie die Verwendung von Taschenrechnern oder Online-Ressourcen.
- Die mit einem Stern *) markierten (Teil-)Aufgaben entfallen in diesem Trimester. Stattdessen werden einzelne Online-Aufgaben im ILIAS-Kurs kenntlich gemacht, zu denen Sie dort Ihre Lösungswege zur Korrektur hochladen können.

Aufgabe 1.1**: Positive Definitheit

Welche der folgenden Matrizen ist positiv definit?

a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, b) $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ d) $D = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1 + \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$

Aufgabe 1.2*: Lineare Abbildung im Komplexen

Gegeben ist die lineare Abbildung $L: \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^3$ mit der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1+i & 1 & i \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2i & i & 2i-1 \end{pmatrix}$$

sowie der Vektor $b_\lambda = (\lambda - i, 0, -2i)^\top$.

- a) Geben Sie Rang(A) und Orthonormalbasen von Bild A sowie Kern A und $(\text{Bild}A)^\perp$ an.

Hinweise:

- Der Orthogonalraum U^\perp eines Unterraumes $U \subset \mathbb{C}^n$ enthält alle Vektoren, die senkrecht zu allen Vektoren aus U sind:

$$U^\perp = \{v \in \mathbb{C}^n \mid \langle v, u \rangle = 0 \text{ für alle } u \in U\}$$

- Im Komplexen gilt $(\text{Bild}A)^\perp = \text{Kern}(A^*)$.

- b) Für welche $\lambda \in \mathbb{C}$ ist $b_\lambda \in \text{Bild}A$ enthalten?
- c) Geben Sie für beliebige $\lambda \in \mathbb{C}$ eine Zerlegung von b_λ in Komponenten aus Bild A und $(\text{Bild}A)^\perp$ an.
- d) Bestimmen Sie alle $x_\lambda \in \mathbb{C}^4$, so dass Ax_λ die orthogonale Projektion von b_λ auf Bild A ist.

Aufgabe 1.3: Determinanten

Bestimmen Sie die Determinante der folgenden Matrix mit Hilfe des Gauß'schen Algorithmus:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 & 0 \\ -3 & -6 & -4 & 7 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & -5 & 2 \\ -3 & -8 & -2 & 7 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 1.4: Determinanten

Bestimmen Sie die Determinanten folgender Matrizen:

a) $A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 3 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, b) $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -7 & 8 & 3 \\ 3 & -4 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & -1 \\ -5 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ d) $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 7 & 7 \\ 4 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

Ergebnisse zu Aufgabe 1.5:

b) $\lambda \in \{-2, 6\}$, $\mathbf{v}_1 = (1, 0, -1)^\top$, $\mathbf{v}_2 = (1, 0, 1)^\top$, $\mathbf{v}_3 = (0, 1, 0)^\top$

Ergebnisse zu Aufgabe 1.7:

i) $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{2}$. **ii)** $f^{-1}(x) = x^3$. **iii)** $f^{-1}(x) = x^3 + 1$. **iv)** $f^{-1}(x) = \frac{x}{1-x}$. **v)**
 $f^{-1}(x) = 2^x - 3$. **vi)** $f^{-1}(x) = \ln(x-2) + 1$. **vii)** $f^{-1}(x) = \pm \frac{1}{\sqrt{\cos x}}$.