Helmut-Schmidt-Universität
Universität der Bundeswehr Hamburg
Fakultät für Maschinenbau und Bauingenieurwesen

Prof. Dr. Thomas Carraro
M.Sc Janna Puderbach

Mathematik II/B (WI/ET) — Blatt 6

WT 2024 — Kurvendiskussion, Taylorpolynom, Newton-Verfahren

Einführende Bemerkungen

- Vermeiden Sie die Verwendung von Taschenrechnern oder Online-Ressourcen.

Aufgabe 6.1: Taylor-Entwicklung in einer Variablen

Bestimmen Sie die Taylor-Entwicklung zweiter Ordnung der Exponentialfunktion e^x um den Punkt $x_0 = 0$ in dem Intervall $0 \leq x \leq 1$ einschließlich des Restgliedtermes. Zeigen Sie damit die Abschätzung:

$$\mathrm{e} \leq 3.$$

Lösung 6.1:

Wir beginnen mit der Taylor-Entwicklung der Exponentialfunktion in dem Intervall $0 \leq x \leq 1$:

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{\mathrm{e}^\xi}{3!}x^3,$$

mit $0 \leq \xi \leq 1$.
Da die Exponentialfunktion monoton steigend ist und $\xi \leq 1$, gilt $\mathrm{e}^\xi \leq \mathrm{e}^1$. Daher gilt die folgende Abschätzung

$$\mathrm{e}^x \leq 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{\mathrm{e}}{3!}x^3,$$

für $0 \leq x \leq 1$. Der obige Ausdruck an der Stelle $x = 1$ ausgewertet führt zu

$$\begin{aligned} \mathrm{e} &\leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{\mathrm{e}}{6}, \\ \frac{5}{6}\,\mathrm{e} &\leq \frac{5}{2}, \\ \mathrm{e} &\leq 3. \end{aligned}$$

Aufgabe 6.2: Kurvendiskussion, Taylorentwicklung

Gegeben sei die Funktion
$$f(x) = \mathrm{e}^{-x^2/2}(2x-3).$$

a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich von f.

b) Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion f.

c) Bestimmen Sie die Asymptoten von f.

d) Bestimmen Sie die kritischen Punkte der Funktion f und charakterisieren Sie diese **ohne** Berechnung der zweiten Ableitung.

e) Geben Sie die Taylorentwicklung in den Extrempunkten bis zum Grad 2 an.

f) Skizzieren Sie die Funktion, die Asymptote, sowie die Taylorapproximationen.

Lösung 6.2:

a) Die Funktion f ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert.

b) Die einzige Nullstelle der Funktion ist $x_0 = \frac{3}{2}$.

c)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} (\mathrm{e}^{-x^2/2}(2x-3)) \\ &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x-3}{\mathrm{e}^{x^2/2}} \\ &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{x\mathrm{e}^{x^2/2}}, \qquad \text{(L'Hospital)} \\ &= 0\end{aligned}$$

d) Kritische Punkte sind Nullstellen der ersten Ableitung von f:

$$\begin{aligned} & 0 \overset{!}{=} f'(x) = \mathrm{e}^{-x^2/2}(-x(2x-3)+2) = \mathrm{e}^{-x^2/2}(-2x^2+3x+2) \\ \Leftrightarrow \quad & 0 = x^2 - \frac{3}{2}x - 1 \\ \Leftrightarrow \quad & x_{1,2} = \frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16}+1} = \begin{cases} 2 \\ -\frac{1}{2} \end{cases}\end{aligned}$$

Da die Funktion $f(x)$ zwischen den beiden kritischen Punkten x_1 und x_2 bei x_0 eine Nullstelle hat und links davon negativ und rechts von x_0 positiv ist und sich asymptotisch der x-Achse annähert, muss in $x_1 = 2$ ein Maximum und in $x_2 = \frac{1}{2}$ ein Minimum liegen.

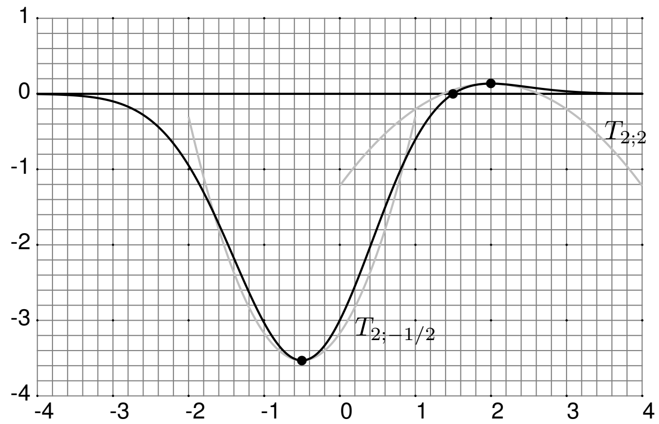
e) Zur Bestimmung der Taylorpolynome wird die zweite Ableitung von f benötigt:

$$f''(x) = \mathrm{e}^{-x^2/2}(2x^3 - 3x^2 - 2x - 4x + 3) = \mathrm{e}^{-x^2/2}(2x^3 - 3x^2 - 6x + 3)$$

Die Taylor-Polynome in den beiden Extrempunkten sind damit

$$\begin{aligned}\text{in } x_1 = 2: \quad T_{2;2}(x) &= f(x_1) + \frac{f'(x_1)}{1!}(x-x_1) + \frac{f''(x_1)}{2!}(x-x_1)^2 \\ &= \mathrm{e}^{-2} + 0 + \frac{\mathrm{e}^{-2}\cdot(-5)}{2}(x-2)^2 = \mathrm{e}^{-2}\left(1 - \frac{5}{2}(x-2)^2\right) \\ \text{in } x_2 = -1/2: \quad T_{2;-1/2}(x) &= f(x_2) + \frac{f'(x_2)}{1!}(x-x_2) + \frac{f''(x_2)}{2!}(x-x_2)^2 \\ &= \mathrm{e}^{-1/8}(-4) + 0 + 5\mathrm{e}^{-1/8}\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}{2} \\ &= \mathrm{e}^{-1/8}\left(-4 + \frac{5}{2}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2\right)\end{aligned}$$

f)



Aufgabe 6.3: Kurvendiskussion

Führen Sie eine Kurvendiskussion für die Funktion

$$f(x) = \ln(3x^2 + 2x + 1)$$

durch. Bestimmen Sie dazu:

a) den maximalen Definitionsbereich von f,

b) die Symmetrieachsen von f, d. h. Werte $\alpha \in \mathbb{R}$, so dass $f(\alpha + x) = f(\alpha - x)$,

c) das Verhalten von f im Unendlichen,

d) die Nullstellen von f,

e) die Extrema und das Monotonieverhalten von f,

f) sowie die Wendepunkte und das Krümmungsverhalten von f.

g) Skizzieren Sie den Graphen von f.

Lösung 6.3:

a) Die Funktion ist für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert, weil das Argument der Logarithmusfunktion immer positiv ist:

$$3x^2 + 2x + 1 = \left(\sqrt{3}x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1 - \frac{1}{3} > 1 - \frac{1}{3} > 0.$$

b) Gesucht ist ein $\alpha \in \mathbb{R}$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned}
& f(\alpha + x) = f(\alpha - x) \\
\Leftrightarrow\quad & \ln(3(\alpha + x)^2 + 2(\alpha + x) + 1) = \ln(3(\alpha - x)^2 + 2(\alpha - x) + 1) \\
\Leftrightarrow\quad & 3(\alpha + x)^2 + 2(\alpha + x) + 1 = 3(\alpha - x)^2 + 2(\alpha - x) + 1 \qquad \text{(Monotonie von ln)} \\
\Leftrightarrow\quad & 6x\alpha + 2x = -6x\alpha - 2x \\
\Leftrightarrow\quad & (12\alpha + 4)x = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & 12\alpha + 4 = 0
\end{aligned}$$

Also liegt die Symmetrieachse bei $\alpha = -1/3$.

c) Es ist

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \infty.$$

d) Die einzige Nullstelle des Logarithmus liegt bei 1, also muss für $f(x) = 0$ gelten:

$$1 = 3x^2 + 2x + 1 \Rightarrow x \in \{0, -2/3\}.$$

e) Die Nullstellen der Ableitung berechnen sich zu:

$$0 = f'(x) = \frac{1}{3x^2 + 2x + 1} \cdot (6x + 2) \;\Rightarrow\; x = -\frac{1}{3}.$$

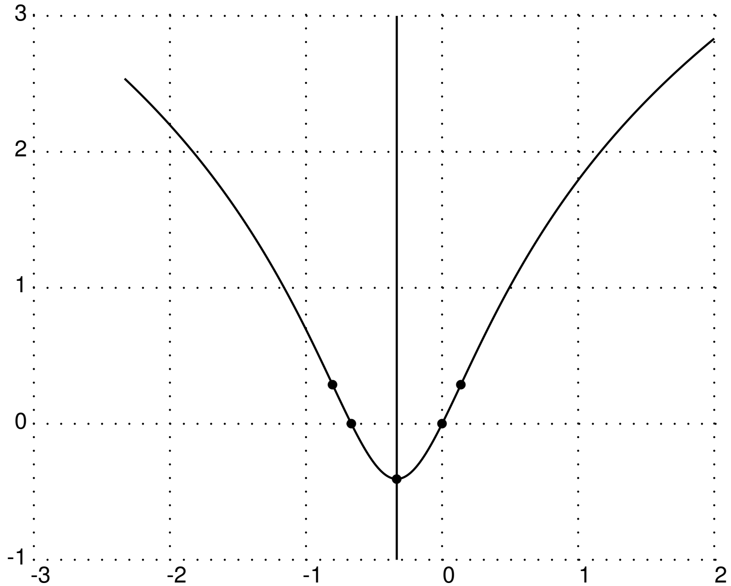
Dies ist die einzige Nullstelle der Ableitung. Da die Funktion bezüglich dieser Achse symmetrisch ist, und für $x \to \pm\infty$ gegen ∞ geht, liegt bei $x = -1/3$ ein Minimum.

f) Die Wendepunkte liegen an den Nullstellen der zweiten Ableitung:

$$\begin{aligned}
0 = f''(x) &= \frac{6(3x^2 + 2x + 1) - (6x + 2)^2}{(3x^2 + 2x + 1)^2} = \frac{-18x^2 - 12x + 2}{(3x^2 + 2x + 1)^2} \\
\Rightarrow \qquad x &= \frac{-1 \pm \sqrt{2}}{3}.
\end{aligned}$$

Links von $-1/3 - \sqrt{2}/3$ ist $f''(x) < 0$, also ist die Funktion dort konkav, rechts von $-1/3 - \sqrt{2}/3$ ist $f''(x) > 0$ und die Funktion f ist dort konvex. Rechts von $-1/3 + \sqrt{2}/3$ ist die Funktion wegen der Symmetrie wiederum konkav.

g)



Aufgabe 6.4: Newton-Verfahren

a) Gegeben seien die Funktionen

$$f(x) = \frac{x}{3} \text{ und } g(x) = \sin(x^2).$$

i) Skizzieren Sie die Funktionen und bestimmen Sie Näherungen für die Schnittstellen der beiden Funktionsgraphen.

ii) Bestimmen Sie die kleinste positive Schnittstelle mit dem Newton-Verfahren auf fünf Nachkommastellen genau.

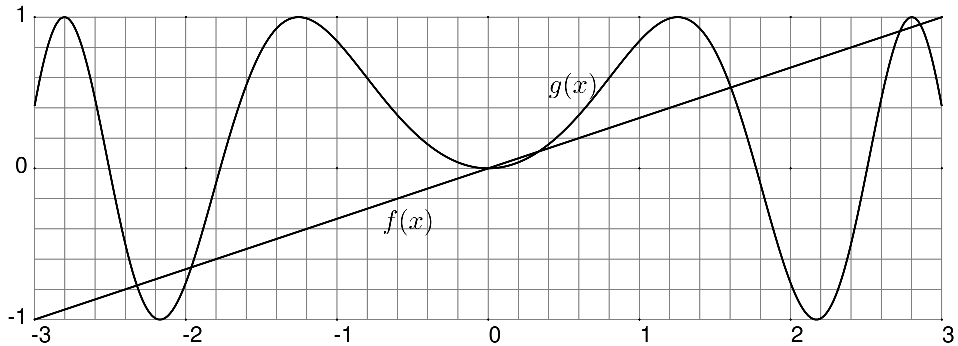
b) Führen Sie das Verfahren ebenso für die Funktionen

$$f(x) = x^3 \text{ und } g(x) = \cos(2\pi x)$$

und die betragskleinste Schnittstelle durch.

Lösung 6.4:

a)



i) Aus der Skizze kann man die ungefähren Schnittpunkte

$$(-2.3, -0.8),\ (-2, -0.7),\ (0, 0),\ (0.3, 0.1),\ (1.6, 0.5),\ (2.7, 0.9),\ (2.9, 0.9)$$

ablesen.

ii) Die kleinste positive Schnittstelle z liegt im Intervall $[0.3,\ 0.4]$. Sie ist Nullstelle der Funktion $F(x) = f(x) - g(x)$ mit

$$F'(x) = \frac{1}{3} - 2x\cos(x^2).$$

Die Iterationsvorschrift für das Newton-Verfahren lautet:

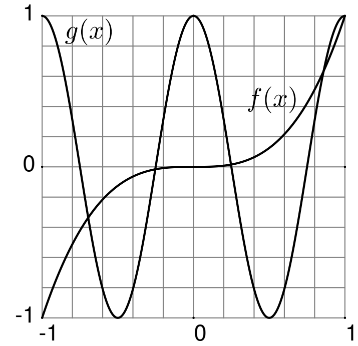
$$x_{i+1} = x_i - \frac{F(x_i)}{F'(x_i)}.$$

Mit $x_0 = 0.35$ liefert sie

n	x_n	$F(x_n)$	$F'(x_n)$	$F(x_n)/F'(x_n)$
0	0.3500000	-0.0055272	-0.3614210	0.0152929
1	0.3347071	-0.0002256	-0.3318845	0.0006798
2	0.3340273	-0.0000004	-0.3305673	0.0000014
3	0.3340259	0.0000000	-0.3305647	-0.0000000

Bereits nach drei Schritten findet keine Korrektur der ersten sechs Nachkommastellen mehr statt, der gesuchte Schnittpunkt liegt also bei $z \approx 0.33403$.

b)



i) Aus der Skizze kann man die ungefähren Schnittpunkte

$$(-0.6, -0.4),\ (-0.2, 0.0),\ (0.2, 0.0),\ (0.9, 0.6),\ (1.0, 1.0)$$

ablesen.

ii) Die betraglich kleinste Schnittstelle z liegt im Intervall $[0.2,\ 0.3]$. Sie ist Nullstelle der Funktion $G(x) = f(x) - g(x)$ mit

$$G'(x) = 3x^2 + 2\pi\sin(2\pi x).$$

Die Iterationsvorschrift für das Newton-Verfahren lautet:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{G(x_i)}{G'(x_i)}.$$

Mit $x_0 = 0.25$ liefert sie

n	x_n	$G(x_n)$	$G'(x_n)$	$G(x_n)/G'(x_n)$
0	0.250000	0.015625	6.470685	0.002415
1	0.247585	0.000004	6.466358	0.000001
2	0.247585	0.000000	6.466356	0.000000
3	0.247585			

Für diesen Fall hat das Verfahren bereits nach zwei Schritten die gewünschte Genauigkeit erreicht und das Ergebnis ist $z \approx 0.24759$.

Aufgabe 6.5: Ableitung der Umkehrfunktion

a) Leiten Sie die Formel für die Ableitung der Umkehrfunktion her.

b) Leiten Sie eine Formel für die zweiten Ableitung der Umkehrfunktion her.

c) Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \mathrm{e}^x + 2x.$$

i) Zeigen Sie, dass $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ umkehrbar ist.

ii) Bestimmen Sie die Ableitungen $g'(1)$ und $g''(1)$ der Umkehrfunktion

$$g = f^{-1}.$$

Lösung 6.5:

a) Für die Umkehrfunktion von f gilt:

$$x = f(f^{-1}(x))$$

Wir leiten beide Seiten dieser Identität einmal ab. Damit erhalten wir mit der Kettenregel

$$1 = f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1}(x))'$$

Wir stellen nach der Ableitung der Umkehrfunktion um und erhalten.

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

b) Um die Formel für die zweite Ableitung der Umkehrfunktion herzuleiten, leiten wir die Identität

$$x = f(f^{-1}(x))$$

zweimal ab. Wir erhalten

$$0 = f''(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1}(x))' \cdot (f^{-1}(x))' + f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1}(x))''$$

Wir stellen nach der zweiten Ableitung der Umkehrfunktion um. Damit erhalten wir

$$(f^{-1})''(x) = -f''(f^{-1}(x)) \cdot \frac{1}{(f'(f^{-1}(x))^2}$$

Alternativ kann man die Formel auch herleiten, indem man die Formel für die erste Ableitung der Umkehrfunktion nochmals ableitet.

c) **i)** Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist streng monoton steigend, denn $x \mapsto 2x$ und $x \mapsto \mathrm{e}^x$ sind beide streng monoton steigend.
Außerdem ist $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ und $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
Also werden von der stetigen Funktion $f(x)$ alle reellen Werte angenommen. Wegen der Monotonie wird jeder Wert nur genau ein Mal angenommen und die Funktion $f(x)$ ist umkehrbar.

ii) Es ist $f(0) = \mathrm{e}^0 + 2 \cdot 0 = 1$, also hat man $x_0 = 0$ und $y_0 = f(x_0) = 1$. Mit den Formeln für die Ableitung der Umkehrfunktion aus der Vorlesung und den Ableitungen $f'(x) = \mathrm{e}^x + 2$ sowie $f''(x) = \mathrm{e}^x$ folgt

$$g'(1) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{3} \text{ und } g''(1) = -\frac{f''(0)}{(f'(0))^3} = -\frac{1}{27}\,.$$