

深入浅出通信原理

(截止 5 月 30 日)

原帖: <http://bbs.c114.net/viewthread.php?tid=394879>

作者: [chenaijun](#)

开场:

很多原理一旦上升为理论，常常伴随着繁杂的数学推导，很简单的本质反而被一大堆公式淹没，通信原理因此让很多人望而却步。

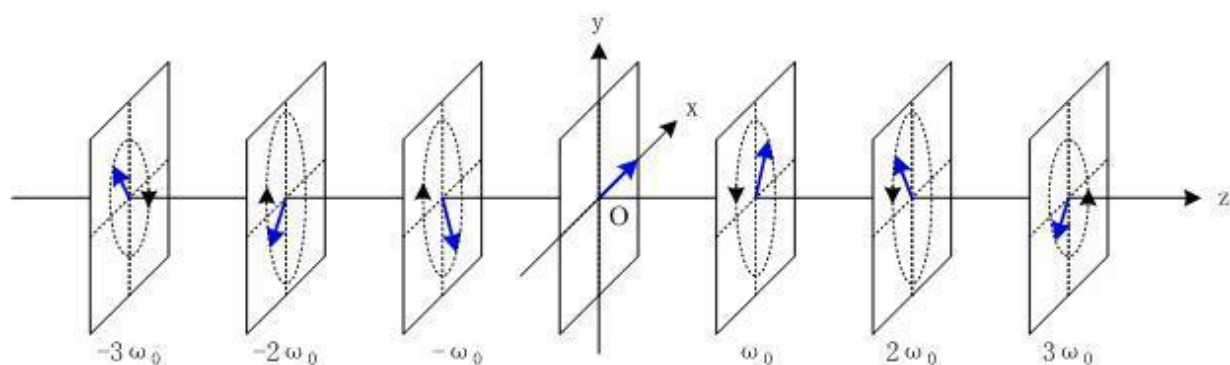
非常复杂的公式背后很可能隐藏了简单的道理。

真正学好通信原理，关键是要透过公式看本质。

以复傅立叶系数为例，很多人都只是会套公式计算，真正理解其含义的人不多。对于经常出现的“负频率”，真正理解的人就更少了。

复傅立叶级数展开式 $f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$ ，可以将 $f(t)$ 理解成由一系列旋转向量合成的信号，各旋转向量的初始位置（严格来讲是 $t=0$ 时刻所在的位置）就是复傅立叶系数 c_k 。

画出三维频谱图如下图所示：



连载 1: 从多项式乘法说起

多项式乘法相信我们每个人都会做：

$$(x+1)(x^2+2x+5) = (x^3+2x^2+5x) + (x^2+2x+5) = x^3+3x^2+7x+5$$

不知道大家想过没有：相乘的两个多项式系数和结果多项式系数之间是什么关系？

上面结果多项式中 x^3 的系数1、 x^2 的系数3、 x 的系数7、常数项5是通过先逐项相乘

再合并同类项的方法得到的，要得到结果多项式中的某个系数，需要两步操作才行，有没有办法一步操作就可以得到一个系数呢？

下面的计算方法就可以做到：

$$\begin{array}{rcl} \begin{array}{r} x+1 \\ 5+2x+x^2 \\ \hline \end{array} & \xrightarrow{\quad} & x^3 \\ \begin{array}{r} x+1 \\ 5+2x+x^2 \\ \hline 2x^2+x^2=3x^2 \end{array} & \xrightarrow{\quad} & 3x^2 \\ \begin{array}{r} x+1 \\ 5+2x+x^2 \\ \hline 5x+2x=7x \end{array} & \xrightarrow{\quad} & 7x \\ \begin{array}{r} x+1 \\ 5+2x+x^2 \\ \hline 5 \end{array} & \xrightarrow{\quad} & 5 \end{array}$$

这种计算方法总结起来就是：

反褶：一般多项式都是按 x 的降幂排列，这里将其中一个多项式的各项按 x 的升幂排列。

平移：将按 x 的升幂排列的多项式每次向右平移一个项。

相乘：垂直对齐的项分别相乘。

求和：相乘的各结果相加。

反褶、平移、相乘、求和——这就是通信原理中最常用的一个概念“**卷积**”的计算过程。

连载 2：卷积的表达式

多项式 $x+1$ 的系数 $[a(1) \ a(0)]=[1 \ 1]$

多项式 x^2+2x+5 的系数 $[b(2) \ b(1) \ b(0)]=[1 \ 2 \ 5]$

二者相乘所得的多项式 x^3+3x^2+7x+5 的系数 $[c(3) \ c(2) \ c(1) \ c(0)]=[1 \ 3 \ 7 \ 5]$

利用上面的计算方法，我们很容易得到：

$$c(0)=a(0)b(0)$$

$$c(1)=a(0)b(1)+a(1)b(0)$$

$$c(2)=a(0)b(2)+a(1)b(1)+a(2)b(0)$$

$$c(3)=a(0)b(3)+a(1)b(2)+a(2)b(1)+a(3)b(0)$$

$$\text{其中: } a(3)=a(2)=b(3)=0$$

在上面的基础上推广一下:

假定两个多项式的系数分别为 $a(n)$, $n=0\sim n_1$ 和 $b(n)$, $n=0\sim n_2$, 这两个多项式相乘所得的多项式系数为 $c(n)$, 则:

$$c(0)=a(0)b(0)$$

$$c(1)=a(0)b(1)+a(1)b(0)$$

$$c(2)=a(0)b(2)+a(1)b(1)+a(2)b(0)$$

$$c(3)=a(0)b(3)+a(1)b(2)+a(2)b(1)+a(3)b(0)$$

$$c(4)=a(0)b(4)+a(1)b(3)+a(2)b(2)+a(3)b(1)+a(4)b(0)$$

以此类推可以得到:

$$c(n) = \sum_{k=0}^n a(k)b(n-k), n = 0 \sim (n_1 + n_2)$$

上面这个式子就是 $a(n)$ 和 $b(n)$ 的卷积表达式。

通常我们把 $a(n)$ 和 $b(n)$ 的卷积记为: $a(n)*b(n)$, 其中的*表示卷积运算符。

连载 3: 利用 matlab 计算卷积

表面上看, 卷积的计算公式很复杂, 计算过程也很麻烦(反褶, 平移, 相乘, 求和), 实际上使用 Matlab 很容易计算。

以上面的 $a(n) = [1 \ 1]$, $b(n) = [1 \ 2 \ 5]$ 的卷积计算为例:

```
>> a = [1 1];
```

```
>> b = [1 2 5];
```

```
>> c = conv(a,b);
```

```
>> c
```

```
c =
```

```
1 3 7 5
```

后面很多地方的讲解都会用到 matlab, 没用过 matlab 的同学, 请到网上下载个 matlab 7.0, 安装后, 将上面前 4 行内容拷贝到命令窗口中执行, 即可得到上面的执行结果。

为了更好地理解卷积（**多项式相乘，相当于系数卷积**），我们用 matlab 画一下高中学过的杨辉三角。

杨辉三角是一个由数字排列成的三角形数表，一般形式如下：

				1					
			1		1				
		1		2		1			
	1		3		3		1		
1		4		6		4		1	
1	5		10		10		5		1
1	6	15	20	15	6	1			

其中每一横行都表示 $(a+b)^n$ （此处 $n=1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$ ）展开式中的系数。

杨辉三角最本质的特征是，它的两条斜边都是由数字 1 组成的，而其余的数则是等于它肩上的两个数之和。

```
>> x=[1 1];y=[1 1];
```

```
>> y
```

```
y =
```

```
1 1
```

```
>> y=conv(x,y)
```

```
y =
```

```
1 2 1
```

```
>> y=conv(x,y)
```

```
y =
```

```
1 3 3 1
```

```
>> y=conv(x,y)
```

```
y =
```

```
1 4 6 4 1
```

```
>> y=conv(x,y)
```

```
y =
```

```
1 5 10 10 5 1
```

```
>> y=conv(x,y)
```

```
y =
```

```
1 6 15 20 15 6 1
```

连载 4：将信号表示成多项式的形式

多项式乘法给了我们启发：如果信号可以分解为类似多项式的这种形式：

$a_2x^2 + a_1x + a_0$ ，同时满足 $x^n = f(n\omega_0)$ ，则两个信号相乘的结果就可以通过卷积计算出来。

注：之所以强调 $x^n = f(n\omega_0)$ ，是因为频谱分析时通常关心各频率成分的大小（任何一个周期信号都可以表示为多个频率分量之和：直流分量，基波分量（角频率 $\omega_0 = 2\pi f_0$ ），2次谐波分量（角频率为 $2\omega_0$ ），3次谐波分量（角频率为 $3\omega_0$ ），等等），所以我们希望多项式中的各项是 $n\omega_0$ 的函数。

存不存在满足这个条件的 x 呢？

前人早就给出了答案，那就是：

$$x = f(\omega_0) = \cos \omega_0 t + j \sin \omega_0 t$$

我们可以简单验算一下：

$$\begin{aligned} x^2 &= (\cos \omega_0 t + j \sin \omega_0 t)^2 \\ &= \cos^2 \omega_0 t - \sin^2 \omega_0 t + j 2 \sin \omega_0 t \cos \omega_0 t \\ &= \cos 2\omega_0 t + j \sin 2\omega_0 t \\ &= f(2\omega_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^3 &= (\cos 2\omega_0 t + j \sin 2\omega_0 t)(\cos \omega_0 t + j \sin \omega_0 t) \\ &= \cos 2\omega_0 t \cos \omega_0 t - \sin 2\omega_0 t \sin \omega_0 t + j(\sin \omega_0 t \cos 2\omega_0 t + \cos \omega_0 t \sin 2\omega_0 t) \\ &= \cos 3\omega_0 t + j \sin 3\omega_0 t \\ &= f(3\omega_0) \end{aligned}$$

附：前面推导过程中用到的几个三角公式：

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

令 $\beta = \alpha$ ，可得：

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

令 $\beta = 2\alpha$ ，可得：

$$\sin 3\alpha = \sin\alpha\cos 2\alpha + \cos\alpha\sin 2\alpha$$

$$\cos 3\alpha = \cos\alpha\cos 2\alpha - \sin\alpha\sin 2\alpha$$

连载 5：著名的欧拉公式

对于 $x = \cos \alpha_b t + j \sin \alpha_b t$ ，欧拉给出了一个更简洁的表达形式：

$$x = \cos \alpha_b t + j \sin \alpha_b t = e^{j\alpha_b t}$$

这就是著名的欧拉公式。

对于欧拉公式，大家知道结论就可以了，想知道怎么得来的同学请参考下面的证明。

欧拉公式的证明（利用泰勒级数展开）：

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots$$


令 $z=jx$ ，则：

$$\begin{aligned} e^{jx} &= 1 + jx + \frac{(jx)^2}{2!} + \frac{(jx)^3}{3!} + \frac{(jx)^4}{4!} + \frac{(jx)^5}{5!} + \frac{(jx)^6}{6!} + \frac{(jx)^7}{7!} + \cdots \\ &= 1 + jx - \frac{x^2}{2!} - j\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + j\frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - j\frac{x^7}{7!} + \cdots \\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + j\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\right) \\ &= \cos x + j \sin x \end{aligned}$$

↵

式中用到了：

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$



$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

连载 6：利用卷积计算两个信号的乘积

下面我们举个具体的例子来体会一下“如果信号可以分解为类似多项式的这种形式：

$a_2x^2 + a_1x + a_0$ ，同时满足 $x^n = f(n\omega_0)$ ，则两个信号相乘的结果就可以通过卷积计算出来。”

↵

假定有如下两个信号 $f(t)$ 和 $g(t)$ ：

$$f(t) = (\cos 2\alpha t + 5 \cos \alpha t + 6) + j(\sin 2\alpha t + 5 \sin \alpha t)$$

$$g(t) = (3 \cos \alpha t + 2) + j3 \sin \alpha t$$

按照一般的方法计算这两个信号相乘：

$$y(t) = f(t)g(t) = [(\cos 2\alpha t + 5 \cos \alpha t + 6) + j(\sin 2\alpha t + 5 \sin \alpha t)] \cdot [(3 \cos \alpha t + 2) + j3 \sin \alpha t]$$

会涉及一系列的三角函数公式，计算过程非常麻烦。具体的计算过程这里就不列了，大家可以试一下，看看有多麻烦。



如果我们把信号 $f(t)$ 和 $g(t)$ 都表示成 $\sum (e^{j\alpha t})^n$ 的形式：

$$f(t) = (\cos 2\alpha t + 5 \cos \alpha t + 6) + j(\sin 2\alpha t + 5 \sin \alpha t) = e^{j2\alpha t} + 5e^{j\alpha t} + 6 = (e^{j\alpha t})^2 + 5(e^{j\alpha t}) + 6$$

$$g(t) = (3 \cos \alpha t + 2) + j3 \sin \alpha t = 3(e^{j\alpha t}) + 2$$

令 $x = e^{j\alpha t}$ ，则：

$$f(t) = x^2 + 5x + 6$$

$$g(t) = 3x + 2$$

$$y(t) = f(t)g(t) = (x^2 + 5x + 6)(3x + 2) = 3x^3 + 17x^2 + 28x + 12$$

注：结果中的系数可以通过卷积计算出来： $[1, 5, 6] * [3, 2] = [3, 17, 28, 12]$

再将 $x = e^{j\alpha t}$ 代回去：

$$y(t) = f(t)g(t) = 3e^{j3\alpha t} + 17e^{j2\alpha t} + 28e^{j\alpha t} + 12$$

连载 7：信号的傅立叶级数展开

上面这种把信号表示成形式类似于多项式的方法，本质上就是傅里叶级数展开，多项式中各项的系数实际就是傅里叶系数：

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$$

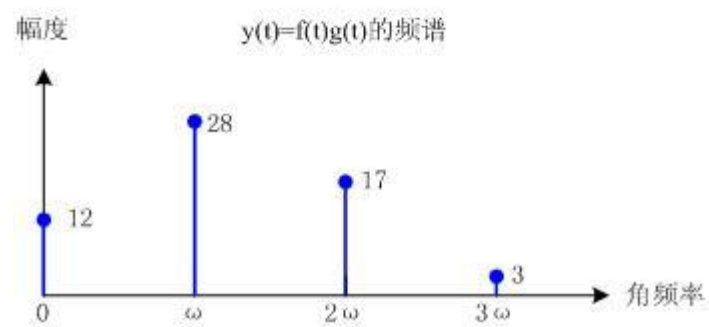
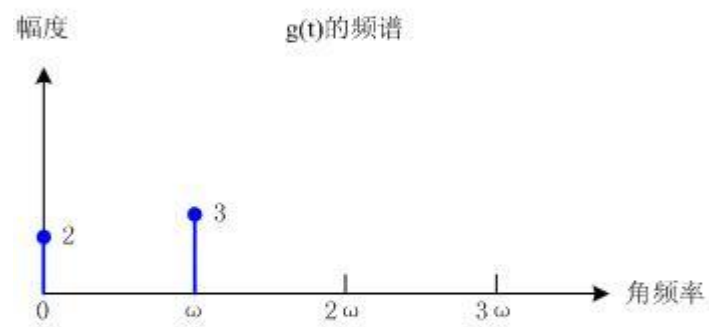
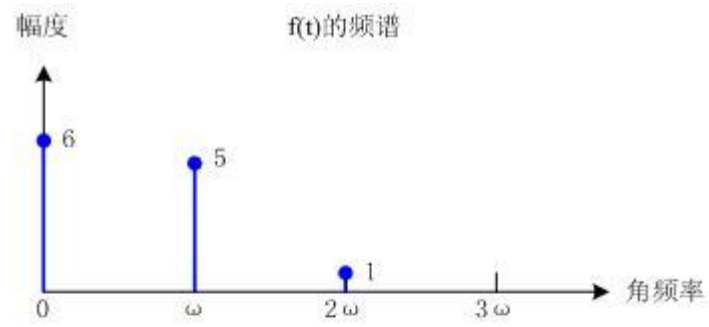
其中 c_k 就是傅里叶系数。

$$f(t) = e^{j2\alpha t} + 5e^{j\alpha t} + 6$$

$$g(t) = 3e^{j\alpha t} + 2$$

$$y(t) = f(t)g(t) = 3e^{j3\alpha t} + 17e^{j2\alpha t} + 28e^{j\alpha t} + 12$$

以频率为横轴，傅里叶系数为纵轴，画出的图就是频谱图。



前面我们已经知道: $[3, 17, 28, 12] = [1, 5, 6] * [3, 2]$

因此很容易得出: **时域相乘, 相当于频域卷积。**

连载 8: 时域信号相乘相当于频域卷积

从上面的描述我们可以得知：为了获得两个信号 $f(t)$ 和 $g(t)$ 在时域相乘的结果 $y(t)=f(t)g(t)$ ，我们可以先分析这两个信号的频谱 $f[n]$ 和 $g[n]$ ，再对这两个信号的频谱做卷积，得到乘积信号的频谱 $y[n]=f[n]*g[n]$ ，将各频谱分量 $y[n]$ 乘以对应的 $e^{j\omega x}$ 再相加就可以得到时域的乘积信号 $y(t)=\sum y[n] e^{j\omega x}$ 。

时域		频域
$f(t)$	\longleftrightarrow	$f[n]$
$g(t)$	\longleftrightarrow	$g[n]$
$y(t)=f(t)g(t)$	\longleftrightarrow	$y[n]=f[n]*g[n]$

。

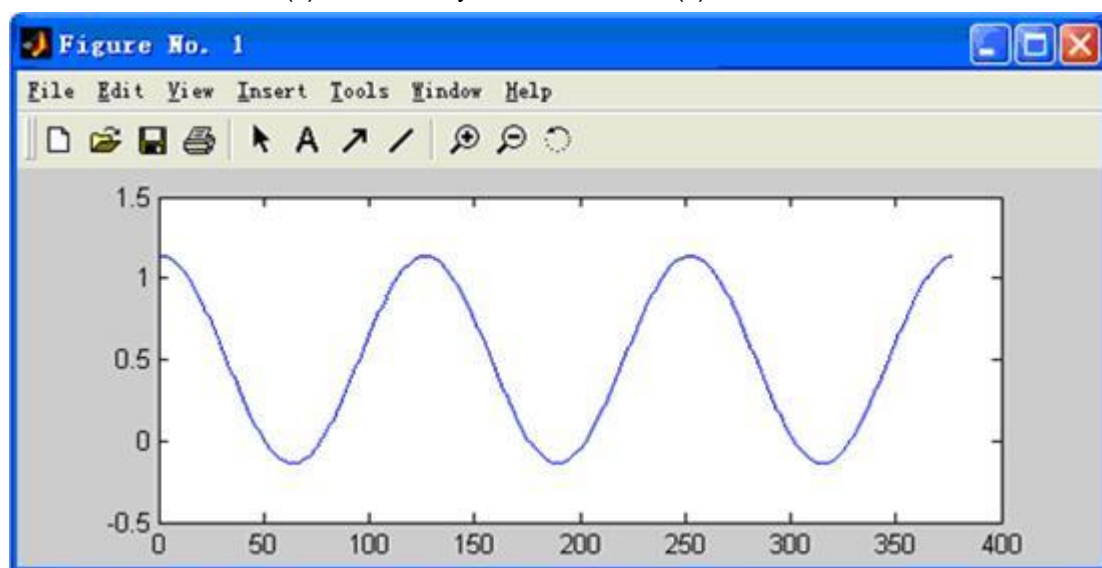
上面这段话，简单说就是“**时域信号相乘，相当于频域做卷积**”。

注意：当我们说频域的时候，我们说的只是频谱，也就是 $e^{j\omega x}$ 前的系数，不包括 $e^{j\omega x}$ 本身。各频谱分量乘以对应的 $e^{j\omega x}$ 再相加才能得到时域的信号。

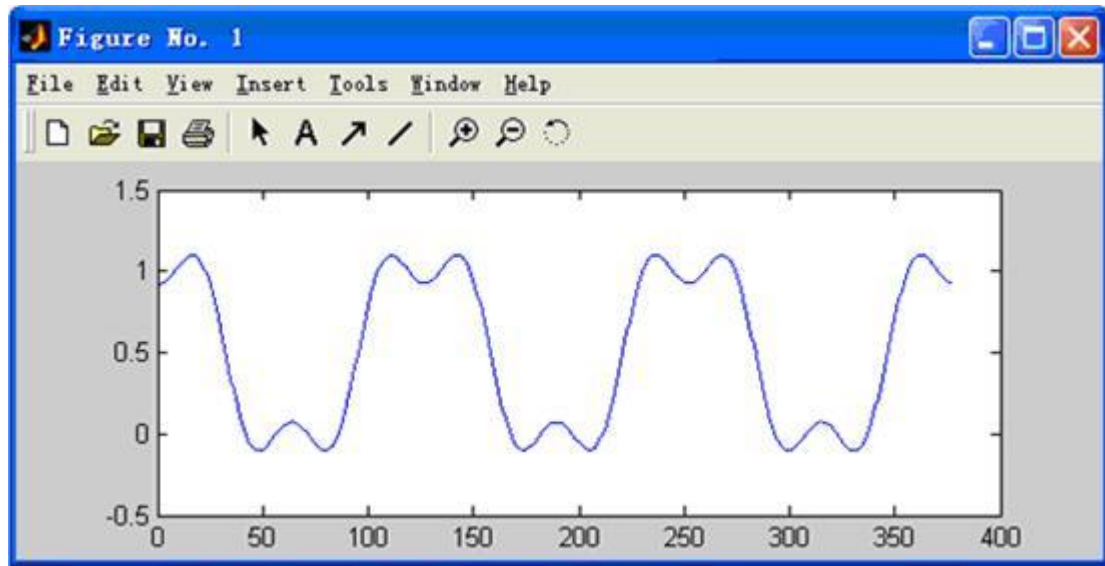
连载 9：用余弦信号合成方波信号

前面为了利用卷积，我们将信号表示成了多项式的形式，用多个复指数信号合成我们所需的信号。为了更好地理解多个复指数信号合成所需信号，我们先来看一下用多个余弦信号合成方波信号的过程。

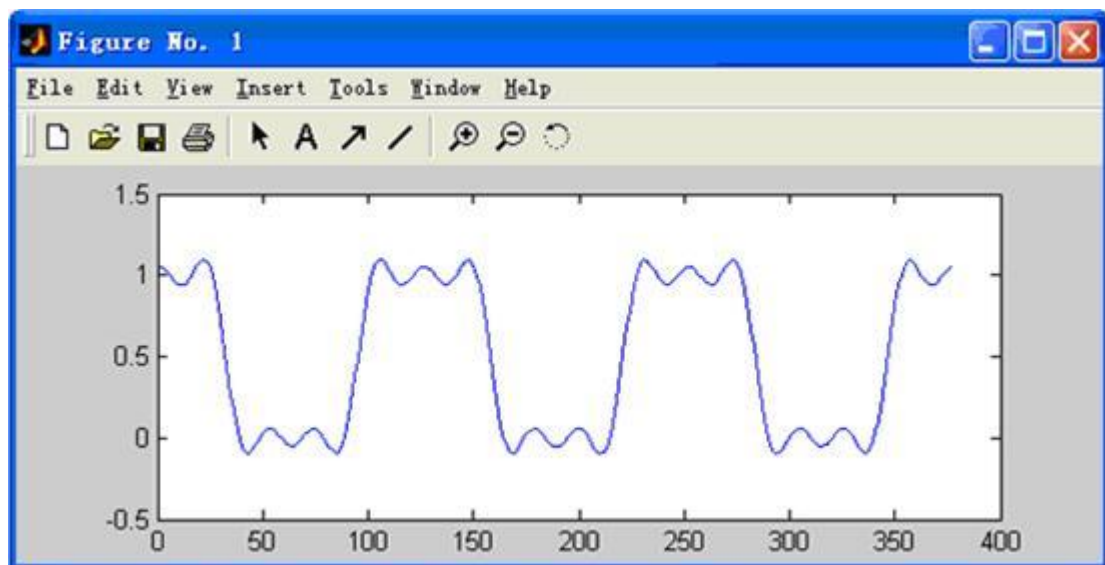
直流分量叠加一个 $\cos(x)$ 余弦分量： $y=0.5+0.637.*\cos(x)$;



再叠加一个 $\cos(3x)$ 余弦分量: $y=0.5+0.637.\cos(x)-0.212.\cos(3x)$;



再叠加一个 $\cos(5x)$ 余弦分量: $y=0.5+0.637.\cos(x)-0.212.\cos(3x)+0.127.\cos(5x)$;



随着合成的余弦信号越来越多，波形越来越逼近一个方波，这从一个侧面验证了傅立叶级数展开的正确性：可以将方波分解成一个直流分量和无数个余弦波分量之和。

连载 10：傅立叶级数展开的定义

周期函数 $f(t)$ ，周期为 T ，展成傅立叶级数为：

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega_0 t + b_k \sin k\omega_0 t)$$

其中，

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos k\omega_0 t dt \quad (k=0, 1, 2, \dots)$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin k\omega_0 t dt \quad (k=1, 2, \dots)$$

傅立叶级数展开的定义告诉我们：

周期函数 $f(t)$ 可以分解为：直流分量 ($a_0/2$)，余弦分量 ($a_k \cos k\omega_0 t$)，正弦分量 ($b_k \sin k\omega_0 t$)。其中 a_k 、 b_k 都可以通过上面的公式计算出来（至于 a_k 、 b_k 的计算公式是如何得来的，暂时不需要考虑），简单的周期函数直接就可以看出来，例如：

$$f(t) = \cos \omega_0 t: \quad a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad b_1 = 0$$

$$f(t) = \sin \omega_0 t: \quad a_0 = 0, \quad a_1 = 0, \quad b_1 = 1$$

连载 11：如何把信号展开成复指数信号之和？

前面我们已经把信号展开成了直流分量、余弦分量和正弦分量之和，可是如何把信号展开成复指数信号之和呢？

很容易想到前面介绍过的、把 $e^{j\alpha t}$ 与 $\cos \alpha t$ 和 $\sin \alpha t$ 联系起来的欧拉公式：

$$e^{j\alpha t} = \cos \alpha t + j \sin \alpha t$$

从这个公式可以推出：

$$\cos \alpha t = \frac{1}{2}(e^{j\alpha t} + e^{-j\alpha t})$$

$$\sin \alpha t = \frac{1}{2j}(e^{j\alpha t} - e^{-j\alpha t}) = -\frac{j}{2}(e^{j\alpha t} - e^{-j\alpha t})$$

将上述公式代入前面的傅立叶级数展开式中,我们就可以得到一个很简洁的复指数形式的傅立叶展开式。建议大家动手推导推导,这样可以加深印象。

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega_0 t + b_k \sin k\omega_0 t) \\
 &= \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} [a_k (e^{jk\omega_0 t} + e^{-jk\omega_0 t}) - jb_k (e^{jk\omega_0 t} - e^{-jk\omega_0 t})] \\
 &= \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} [(a_k - jb_k)e^{jk\omega_0 t} + (a_k + jb_k)e^{-jk\omega_0 t}] \\
 &= \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} [(a_k - jb_k)e^{jk\omega_0 t}] + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} [(a_k + jb_k)e^{-jk\omega_0 t}] \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2} (a_k - jb_k)e^{jk\omega_0 t} \right] + \sum_{k=-1}^{-\infty} \left[\frac{1}{2} (a_{-k} + jb_{-k})e^{jk\omega_0 t} \right] \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}
 \end{aligned}$$

即:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$$

其中:

$$c_k = \begin{cases} \frac{a_0}{2}, k=0 \\ \frac{1}{2}(a_k - jb_k), k=1, 2, \dots \\ \frac{1}{2}(a_{-k} + jb_{-k}), k=-1, -2, \dots \end{cases}$$

从原理上讲,只要我们能够得到 a_k 和 b_k ,我们就能够计算得出 c_k 。

连载 12: 复傅立叶系数

这个式子就是复指数形式的傅立叶级数展开式： $f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$

其中 c_k 就是复傅立叶系数。

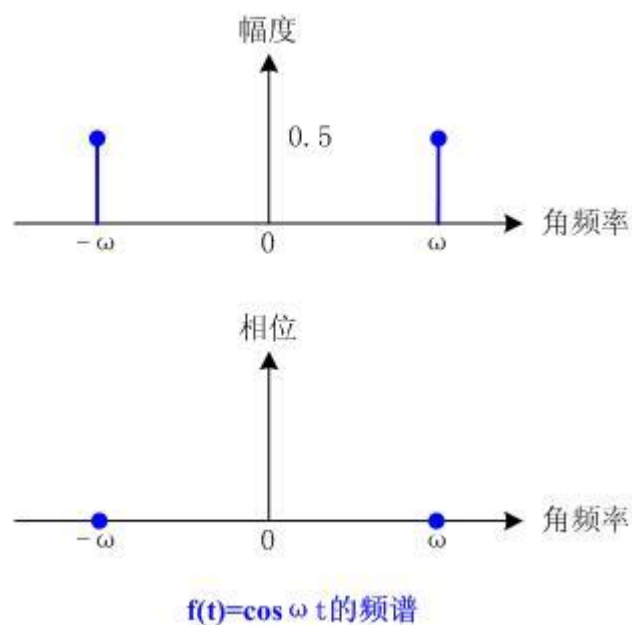
以周期信号 $f(t) = \cos \omega_0 t$ 和 $f(t) = \sin \omega_0 t$ 为例，我们初步认识一下复傅里叶系数。

$f(t) = \cos \omega_0 t$:

实傅立叶系数： $a_0 = 0$ ， $a_1 = 1$ ， $b_1 = 0$

复傅立叶系数： $c_{-1} = \frac{1}{2}$ ， $c_1 = \frac{1}{2}$

根据 c_k 画出频谱如下：

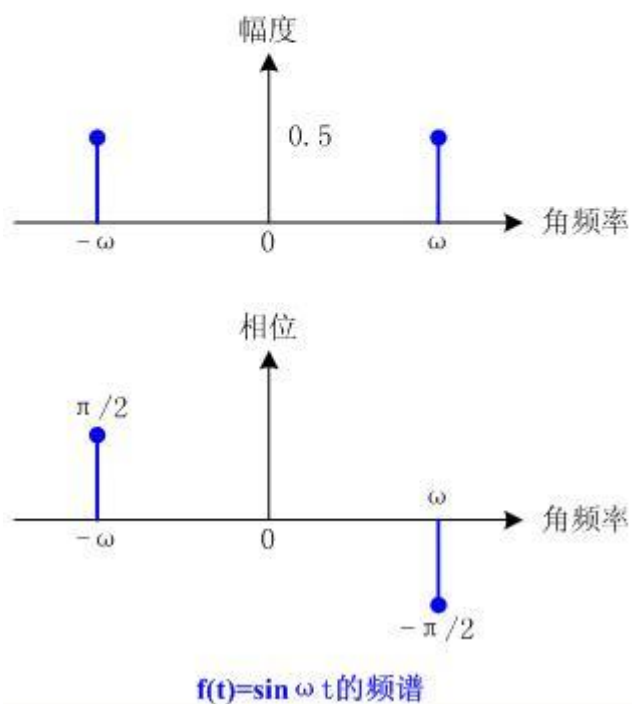


$$f(t) = \sin \omega_0 t :$$

实傅立叶系数: $a_0 = 0$, $a_1 = 0$, $b_1 = 1$

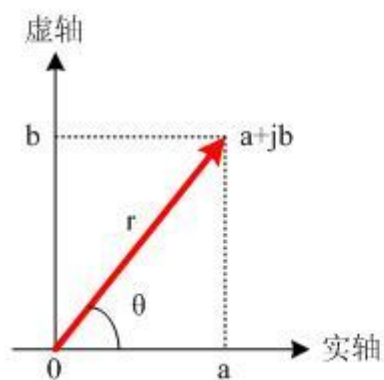
复傅立叶系数: $c_{-1} = \frac{j}{2}$, $c_1 = -\frac{j}{2}$

根据 c_k 画出频谱如下:



为了更好地理解上面的 c_k 频谱, 这里复习一下复数的模和相位的定义

假定复数 $c = a + jb$ (其中 a 和 b 都是实数) 的模为 r , 相位为 θ :



连载 13: 实信号频谱的共轭对称性

根据前面 c_k 的表达式和正余弦信号的频谱图，你有没有发现 k 为负的部分和 k 为正的部分是什么关系？答案只有2个字：共扼。↵

$$k = 1, 2, 3, \dots \quad \leftarrow$$

$-k = -1, -2, -3, \dots$ ，以 $-k$ 替代 k 代入 c_k 表达式中最下面那行，得：↵

$$c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + jb_k) \quad \leftarrow$$

因为：↵

$$c_k = \frac{1}{2}(a_k - jb_k) \quad \leftarrow$$

$$c_k^* = \frac{1}{2}(a_k + jb_k) \quad \leftarrow$$

所以：↵

$$c_{-k} = c_k^* \quad (c_k \text{ 的共扼}) \quad \leftarrow$$

这个结论告诉我们：对于实信号 $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega_0 t + b_k \sin k\omega_0 t)$ ，将其展开

为指数形式的傅立叶级数时， $f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$ ， k 为正值情况下的 c_k 与 k 为负值情况下的

c_k 是互为共扼的：模相等，相位相反。↵

连载 14：复指数信号的物理意义—旋转向量

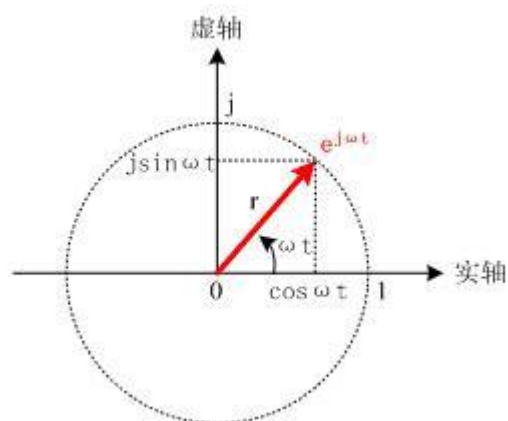
再回头仔细看一下 $f(t) = \cos \omega_0 t$ 和 $f(t) = \sin \omega_0 t$ 的频谱图，你就会发现一个问题：为什么会出现负频率（ $-\omega$ ，更多时候写为 $-f$ ，二者之间的关系为 $\omega = 2\pi f$ ）呢？按我们一般的理解，频率只有正的，没有负的，例如：交流电的频率是50Hz，如果有人说-50Hz的交流电，我们肯定无法理解。

这就涉及到 $e^{j\omega}$ 的物理意义：如何理解 $e^{j\omega}$ ？

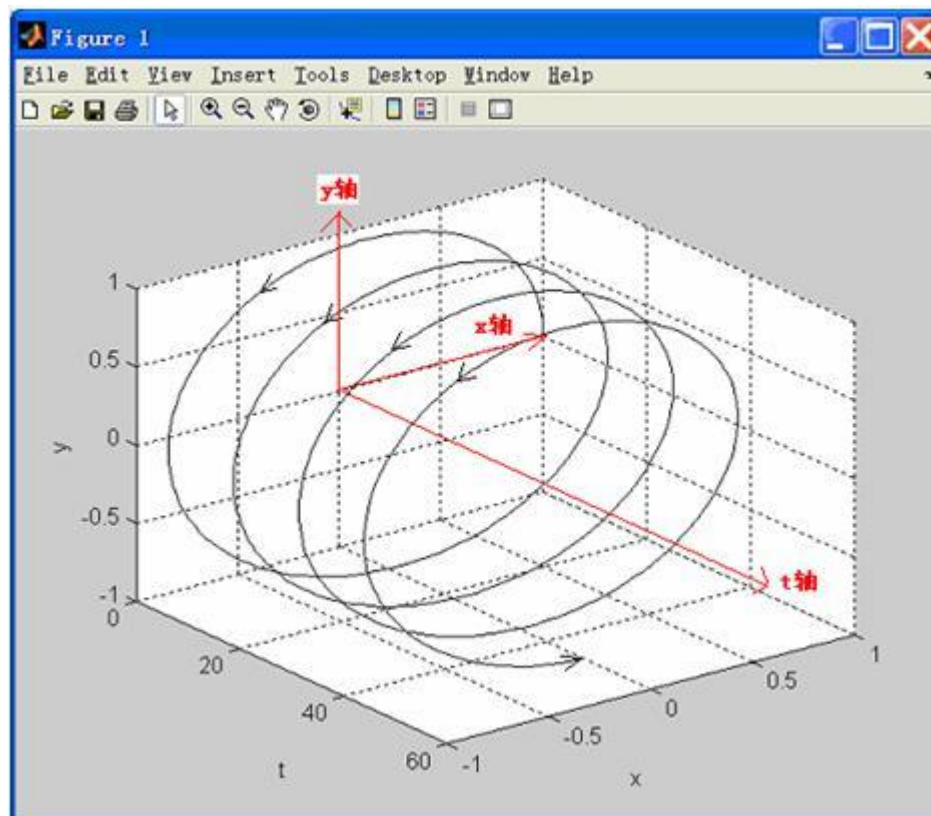
有很多书都讲：负频率是没有物理意义的，只在数学运算过程中会出现。真是这样吗？
答案是否定的！

关于 $e^{j\omega}$ 的物理意义，讲极坐标的书都会提到，遗憾的是：讲复傅立叶级数展开的书没有把 $e^{j\omega}$ 的物理意义应用起来，导致大家对复傅立叶级数展开没有任何概念！

先来看看 $e^{j\omega}$ 的物理意义： $e^{j\omega} = \cos \omega t + j \sin \omega t$ 表示一个初始相位为零的单位旋转向量，该向量的模为1，在实轴上的投影为 $\cos \omega t$ ，在虚轴上的投影为 $j \sin \omega t$ ：

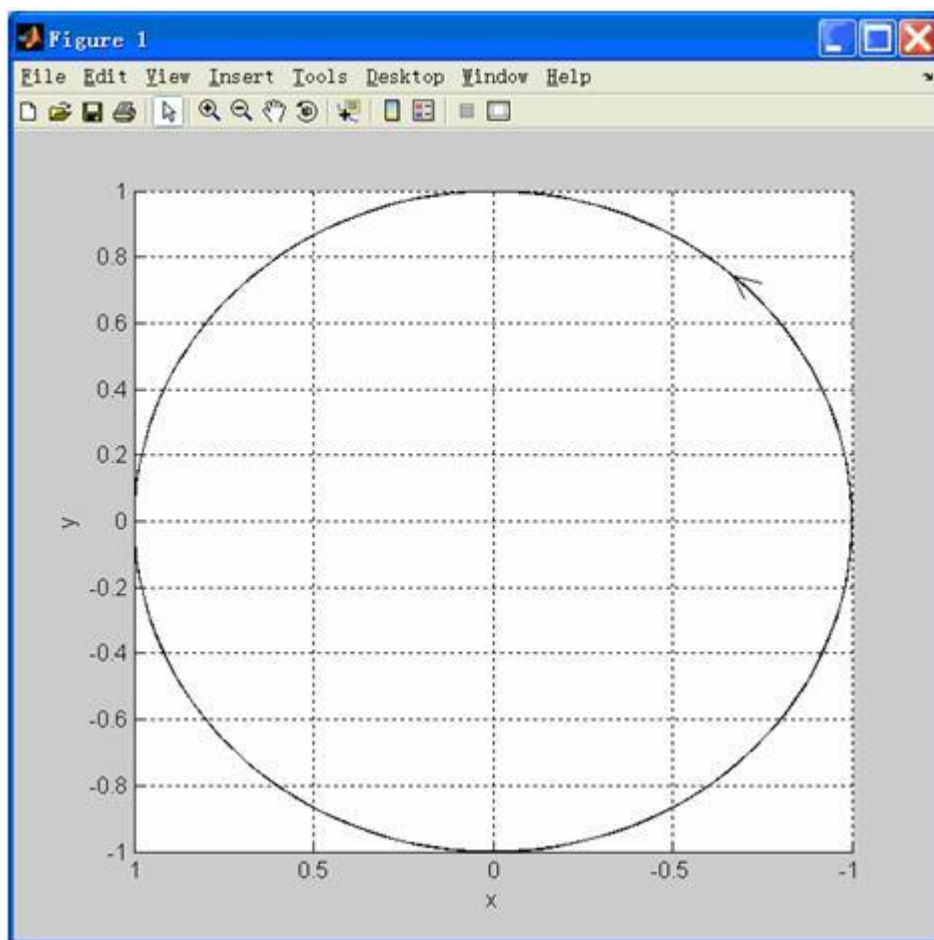


加上时间轴 t ，我们来看旋转向量的三维图：

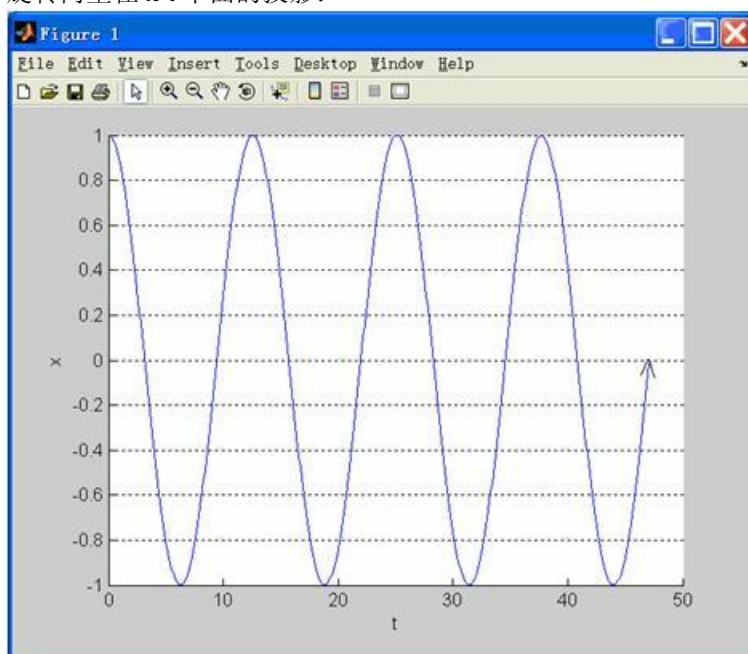


注：x 轴为实轴，y 轴为虚轴

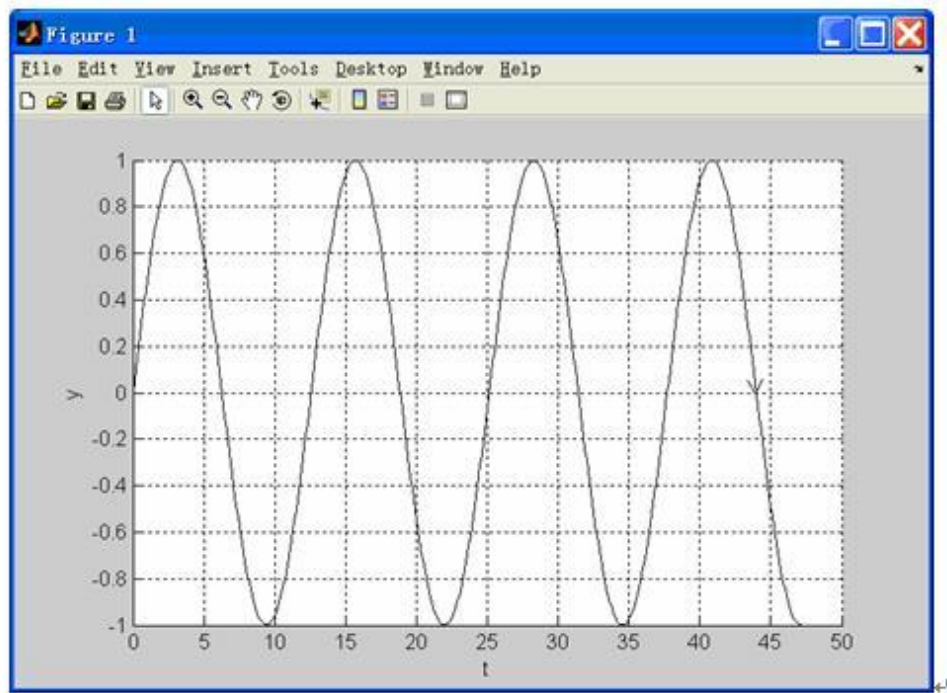
旋转向量在 x-y 平面的投影：



旋转向量在 x - t 平面的投影:



旋转向量在 y - t 平面的投影:



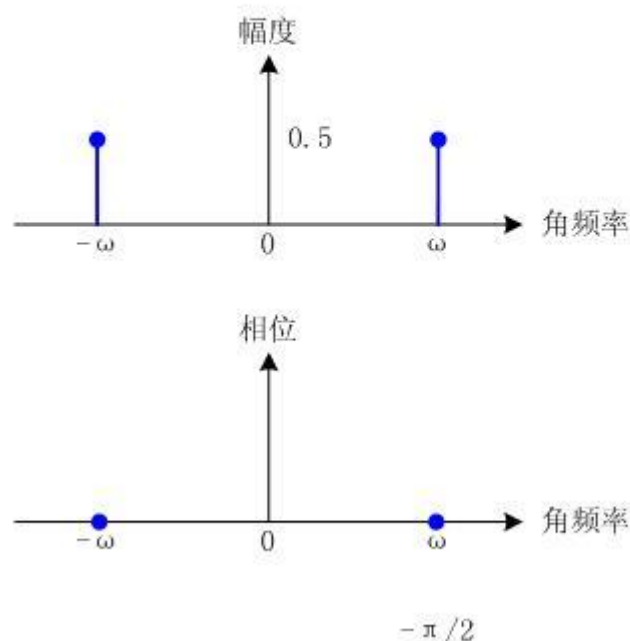
$e^{j\omega t}$ 中的 ω 为正值时，向量逆时针旋转；反之， ω 为负值时，向量顺时针旋转。这就解释了负频率的物理意义：正频率代表向量逆时针旋转，负频率代表向量顺时针旋转。

连载 15：余弦信号的三维频谱图

我们来回顾一下周期信号 $f(t) = \cos \omega_0 t$ 的复傅立叶系数：

$$f(t) = \cos \omega_0 t = \frac{1}{2} (e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})$$

它的频谱我们在前面已经画过：

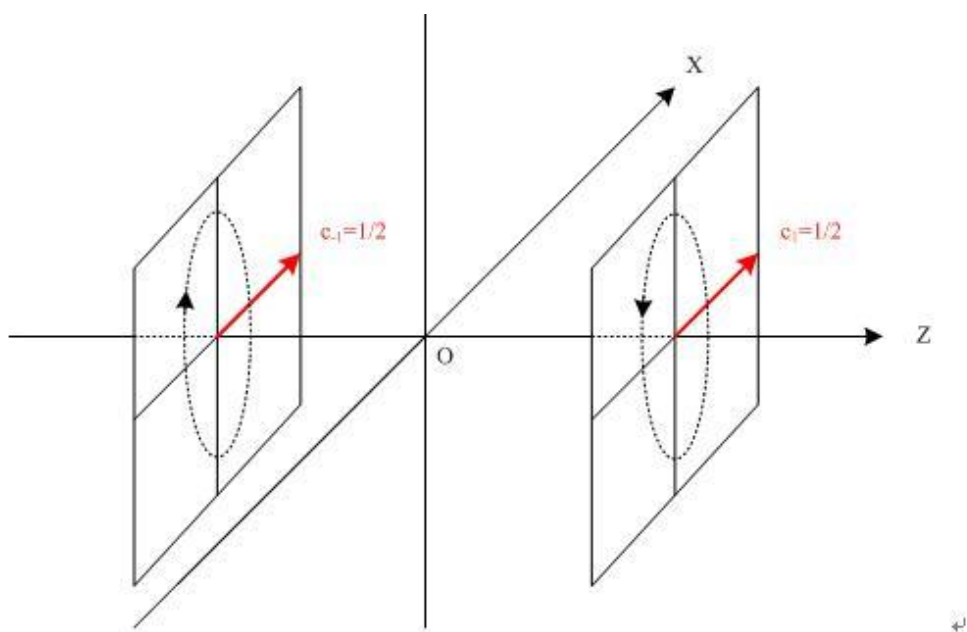


$f(t) = \cos \omega t$ 的频谱

结合 $e^{j\omega t}$ 的物理意义，我们可以将幅度-频谱图和相位-频谱图画在同一张三维的频谱图中，这样我们可以把傅立叶系数的含义看得更清楚些： x 轴为实轴， y 轴为虚轴， z 轴为频率轴，**所有初始位置的向量就构成了信号的复傅立叶系数。**

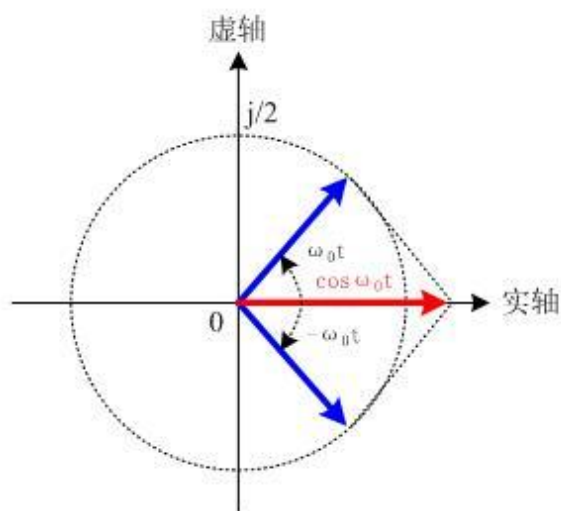
例： $f(t) = \cos \omega_0 t$ 的三维频谱图

$$f(t) = \cos \omega_0 t = \frac{1}{2} (e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})$$



$t=0$ 时刻，两个向量的位置如上图所示，注意这两个向量就是 $f(t) = \cos \omega_0 t$ 的复傅立叶系数。之后， $\omega = \omega_0$ 处的向量以角速度 ω_0 逆时针旋转； $\omega = -\omega_0$ 处的向量以角速度 ω_0 顺时针旋转。

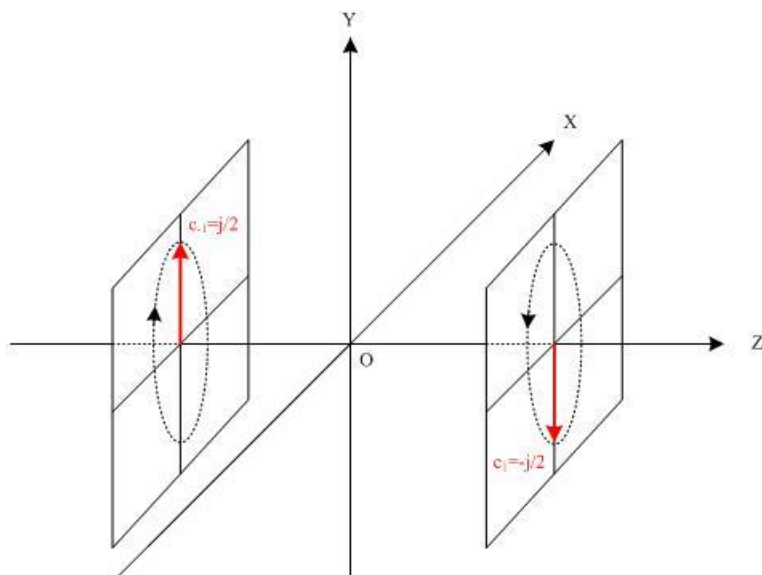
这两个旋转向量合成的结果正好就是余弦信号，如下图所示。



注意 $t=0$ 时刻两个向量的位置（初始位置）在实轴上，也就是说 $f(t) = \cos \omega_0 t$ 的复傅立叶系数是实数。

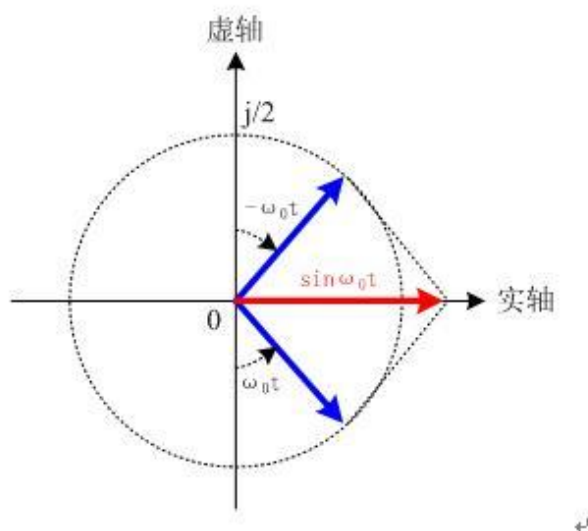
例: $f(t) = \sin \omega_0 t$ 的三维频谱图

$$f(t) = \sin \omega_0 t = \frac{1}{2j} (e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}) = -\frac{j}{2} (e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}) = -\frac{j}{2} e^{j\omega_0 t} + \frac{j}{2} e^{-j\omega_0 t}$$



$t=0$ 时刻，两个向量的位置如上图所示，注意这两个向量就是 $f(t) = \sin \omega_0 t$ 的复傅立叶系数。之后， $\omega = \omega_0$ 处的向量以角速度 ω_0 逆时针旋转； $\omega = -\omega_0$ 处的向量以角速度 ω_0 顺时针旋转。

这两个旋转向量合成的结果正好就是正弦信号，如下图所示。



注意 $t=0$ 时刻两个向量的位置（初始位置）在虚轴上，也就是说 $f(t) = \sin \omega_0 t$ 的复傅立叶系数是虚数。

连载 17：两个旋转向量合成余弦信号的动画

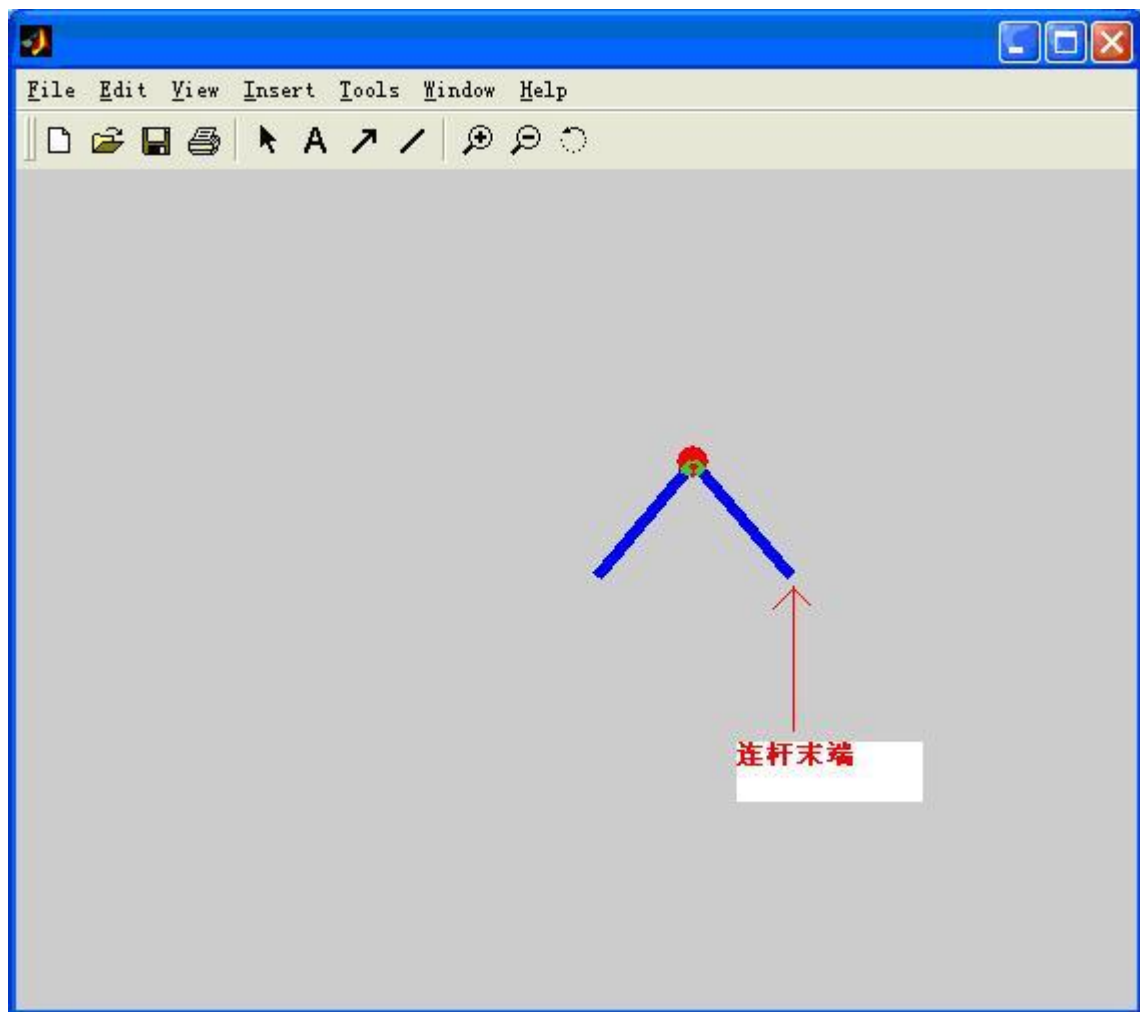
附件动画演示的是：两个旋转方向相反的向量合成余弦信号。

这个动画是利用 MATLAB 制作并转成.avi 文件的。方法没掌握好，动画的生成（转存为 avi 文件）花了不少于半小时的时间。请 matlab 高手指点一下。谢谢！

横轴是实轴，纵轴是虚轴。

连杆代表向量，连杆首尾相连代表向量相加，连杆的末端所经过的轨迹就是合成的信号。

初始位置的连杆代表的向量就是信号的复傅立叶系数。

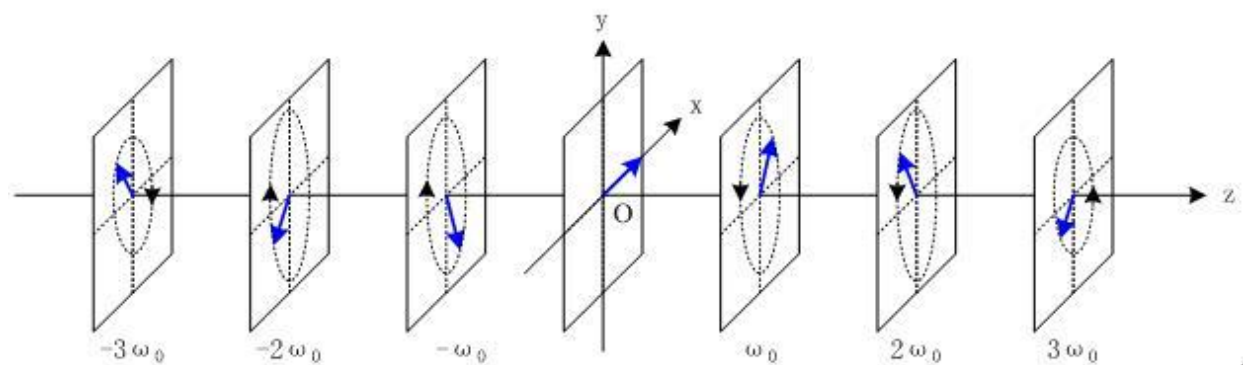


连载 18：周期信号的三维频谱图

复指数形式的傅立叶级数展开式： $f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$

可以将 $f(t)$ 理解成由一系列旋转向量合成的信号，初始位置（严格来讲是 $t=0$ 时刻所在的位置）的各旋转向量就是复傅立叶系数 c_k 。

以 z 轴为频率轴，将 c_k 画在 $z = k\omega_0$ 处的复平面上，得到三维频谱图，如下图所示：



组成 $f(t)$ 的各旋转向量

其中蓝色的向量就是 $t=0$ 时刻的旋转向量，即 $f(t)$ 的复傅立叶系数。

注意：上面三维频谱图对应的 $f(t)$ 是个实信号，其三维频谱中正频率部分的向量和负频率部分的向量共轭对称。

连载 19：复数乘法的几何意义

对于复指数形式的傅立叶级数展开式中的： $c_k e^{jk\omega_0 t}$ ，不知道大家真正理解没有？

暂且认为有人不清楚，我们一起来分析一下。

事实上， $c_k e^{jk\omega_0 t}$ 就是两个复数相乘，因为： c_k 是个复数（也可能是个实数或虚数），

$e^{jk\omega_0 t} = \cos k\omega_0 t + j \sin k\omega_0 t$ 也是个复数。

如何理解复数相乘呢？

考虑两个一般的复数： z_1 ， z_2 ，假定：

$$z_1 = r_1 e^{j\theta_1} = r_1 (\cos \theta_1 + j \sin \theta_1)$$

$$z_2 = r_2 e^{j\theta_2} = r_2 (\cos \theta_2 + j \sin \theta_2)$$

下面我们来计算一下 z_1 和 z_2 的乘积：

$$z_1 z_2 = r_1 e^{j\theta_1} r_2 e^{j\theta_2} = r_1 r_2 e^{j(\theta_1 + \theta_2)}$$

如果觉得不好接受，我们这样来计算：↵

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 (\cos \theta_1 + j \sin \theta_1) r_2 (\cos \theta_2 + j \sin \theta_2) \\ &= r_1 r_2 (\cos \theta_1 + j \sin \theta_1) (\cos \theta_2 + j \sin \theta_2) \\ &= r_1 r_2 [(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) + j(\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2)] \\ &= r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + j \sin(\theta_1 + \theta_2)] \\ &= r_1 r_2 e^{j(\theta_1 + \theta_2)} \end{aligned}$$

总结一下，就是：两个复数相乘，积的模等于各复数模的积，积的辐角等于各复数的辐角的和。↵

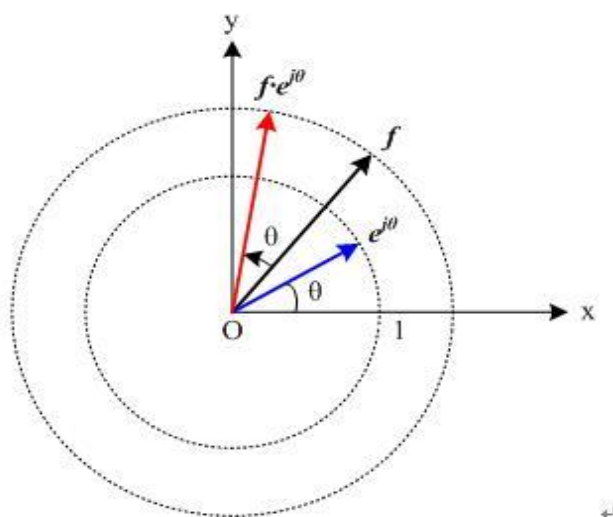
在复平面上，复数对应向量，上面的描述可以改成：**两个向量相乘，积的模等于各向量模的积，积的辐角等于各向量的辐角的和。**↵

具体到 $c_k e^{jk\omega_0 t}$ ：↵

c_k ：就是一个一般的向量。↵

$e^{jk\omega_0 t}$ ：初始位置位于实轴上、模为1、旋转角速度为 $k\omega_0$ 的旋转向量。↵

这两个向量相乘，得到的是：以 c_k 代表的向量为初始位置、模为 $|c_k|$ 、旋转角速度为 $k\omega_0$ 的旋转向量。如下图所示： c_k 代表的向量记为 f ， $\theta = k\omega_0 t$ 。↵

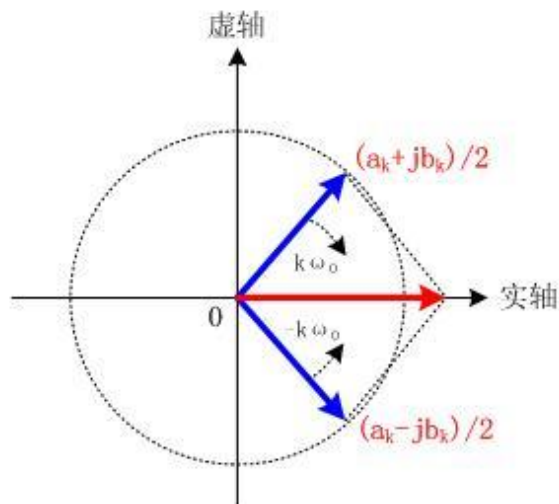


$t=0$ 时刻， $c_k e^{jk\omega_0 t}$ 就是向量 f （黑色）；↵

t 时刻， $c_k e^{jk\omega_0 t}$ 旋转到红色向量位置。↵

连载 20：用成对的旋转向量合成实信号

在上述周期信号的三维频谱图中，沿着 z 轴的反方向看过去， $k\omega_0$ 处和 $-k\omega_0$ 处的两个向量可以合并为一个向量：



注：图中蓝色的向量即代表复傅立叶系数，即 $t=0$ 时刻旋转向量所在的位置。

注意两点：

- 1、由于初始相位关于实轴对称，旋转角速度相同，旋转方向相反，合并后的旋转向量只在实轴上有分量，在虚轴上没有分量。得到这样的结论是因为：我们分析的信号本身是实信号。
- 2、正负频率对应的复傅立叶系数合并，是向量相加，不是简单的幅度相加。

从前面的分析来看，虽然我们通过复傅立叶级数展开将实信号分解为了一系列的旋转向量之和（由此引出了复数，使得实信号的表达式中出现了复数），但由于逆时针和顺时针旋转的向量成对出现，而且成对出现的旋转向量的初始相位关于实轴对称，旋转的角速度相同，旋转方向相反，所以这些旋转向量合成的结果最终还是一个实信号（只在实轴上有分量，虚轴上的分量相互抵消掉了）。

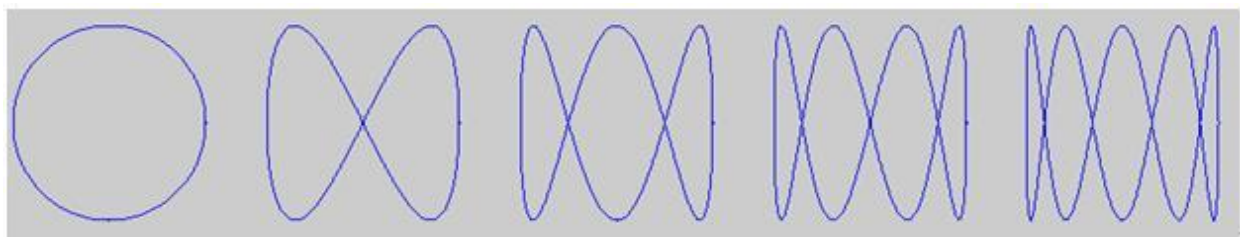
连载 21：利用李萨育图形认识复信号

通过前面的讲解，我们对实周期信号及其频谱有了一定的认识。

很多人会想到这个问题：如何理解复信号？

我们来回忆一下物理中学过的李萨育图形：当我们使用互相成谐波频率关系的两个信号分别作为 X 和 Y 偏转信号送入示波器时，这两个信号分别在 X 轴、 Y 轴方向同时作用于电子束而描绘出

稳定的图形，这些稳定的图形就叫“李萨育图形”，如下图所示：



第一个图： $x = \cos(2\pi ft), y = \sin(2\pi ft)$ ↵

电子束在示波器屏幕(复平面)上的运动轨迹： $f(t) = \cos(2\pi ft) + j \sin(2\pi ft) = e^{j2\pi ft}$,
我们已经很熟悉的旋转向量！这实质上就是一个复信号：因为这个信号不只是在实轴（x轴）
上有分量，在虚轴（y轴）上也有分量！ ↵

第二个图： $x = \cos(2\pi ft), y = \sin(4\pi ft)$ ↵

电子束在示波器屏幕（复平面）上的运动轨迹： $f(t) = \cos(2\pi ft) + j \sin(4\pi ft)$ ↵

第三个图： $x = \cos(2\pi ft), y = \sin(6\pi ft)$ ↵

电子束在示波器屏幕（复平面）上的运动轨迹： $f(t) = \cos(2\pi ft) + j \sin(6\pi ft)$ ↵

第四个图： $x = \cos(2\pi ft), y = \sin(8\pi ft)$ ↵

电子束在示波器屏幕（复平面）上的运动轨迹： $f(t) = \cos(2\pi ft) + j \sin(8\pi ft)$ ↵

第五个图： $x = \cos(2\pi ft), y = \sin(10\pi ft)$ ↵

电子束在示波器屏幕（复平面）上的运动轨迹： $f(t) = \cos(2\pi ft) + j \sin(10\pi ft)$ ↵

附：画出李萨育图形的 matlab 程序

```
for f=1 :5 ;  
t=0:0.001:1000;  
x= cos (2*pi*t);  
y= sin (2*pi*f*t) ;  
subplot(1,5,f) ;plot(x,y) ;  
axis off;  
end
```

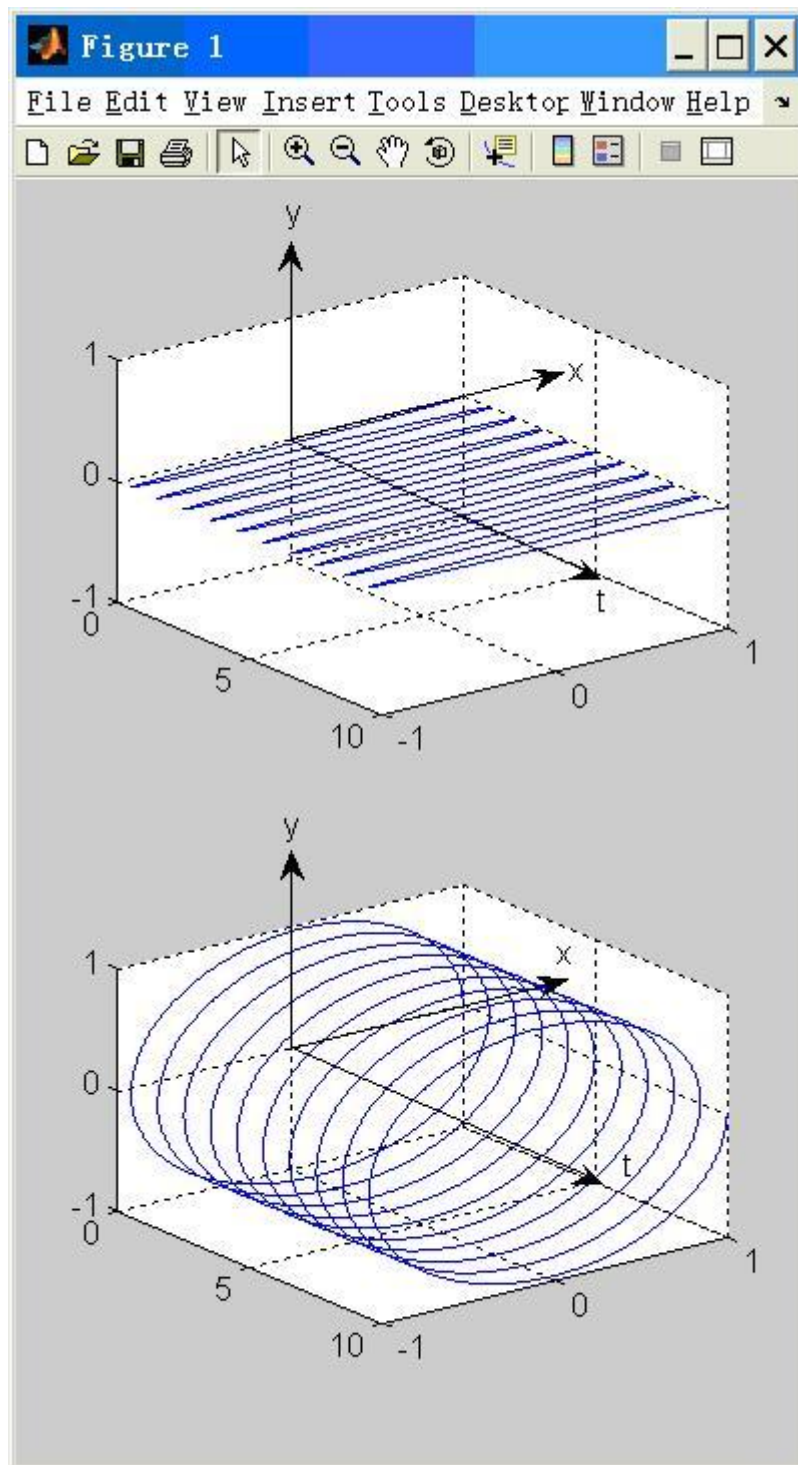
连载 22：实信号和复信号的波形对比

在下面两张图中：x 轴（实轴）、y 轴（虚轴）所在的平面是复平面，t 轴（时间轴）垂直于复平面。

上图为实信号 $f(t)=\cos(2\pi t)$ 的波形图。

下图为复信号 $f(t)=\cos(2\pi t)+j\sin(2\pi t)$ 的波形图。

对比这两张图，很容易得出：**实信号在复平面上投影时只有实轴方向有分量，而复信号在复平面上投影时实轴和虚轴方向都有分量。**



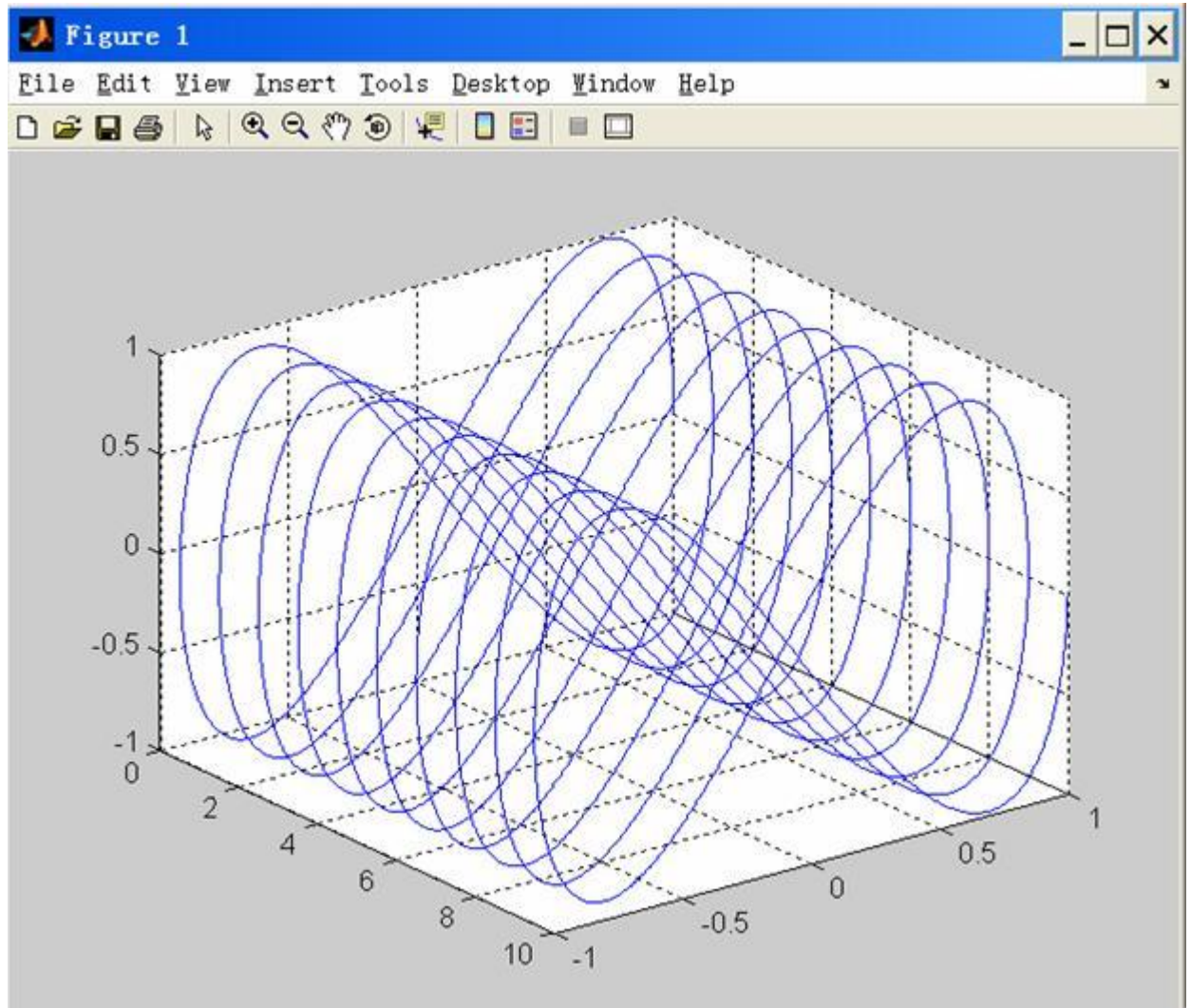
```
t=0:0.001:10;
x=cos(2*pi*t);
subplot(2,1,1);plot3(x,t,0*t);
set(gca,'YDir','reverse');
grid on;

x=cos(2*pi*t) ;
```



```
y=sin(2*pi*t);  
subplot(2,1,2);plot3(x,t,y);  
set(gca,'YDir','reverse');  
grid on;
```

再看一个复信号，该信号在复平面上的投影就是前面介绍过的李萨育图形中的第 2 张图。



```
t=0:0.001:10;  
x=cos(2*pi*t);  
y=sin(4*pi*t);  
plot3(x,t,y);  
set(gca,'YDir','reverse');  
grid on;
```

连载 23: 利用欧拉公式理解虚数

用到复数的地方都会涉及到虚数“j”。数学中的虚数一般用“i”表示，而物理中一般用“j”表示，物理中之所以不用“i”表示虚数，主要是因为物理中经常用“i”表示电流。

如果追溯起来，在高中的时候我们就学过虚数了。具体说来，我们第一次接触虚数应该是在解一元三次方程的时候。

已知： $x^3 - 2x^2 + x - 2 = 0$ ↵

求： x ↵

解： ↵

由： ↵

$$x^3 - 2x^2 + x - 2 = 0$$

得： ↵

$$x^2(x - 2) + x - 2 = (x - 2)(x^2 + 1) = 0$$

由： $x - 2 = 0$ ↵

得： $x = 2$ （实根） ↵

由： $x^2 + 1 = 0$ ， $x^2 = -1$ ↵

得： $x = \pm i$ （虚根） ↵

感觉高中的课本就是为了给 $x^2 = -1$ 一个解，才定义了虚数i，其平方为-1。至于虚数i有什么物理意义就不得而知了。按我们一般的理解：一个数和它自己相乘，应该得到一个正数才对，例如： $2 \times 2 = 4$ ， $(-1) \times (-1) = 1$ 。为什么虚数i和自己相乘会得-1呢？ ↵

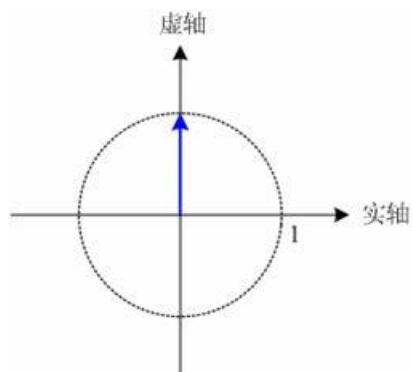
虚数刚被提出时，也曾经困扰了很多数学家，被大家认为是“虚无缥缈的数”，直至欧拉发现“欧拉公式”后，人们才对虚数的物理意义有了清晰的认识。

下面我们来看看如何利用欧拉公式理解虚数。

欧拉公式： $e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$

令 $\theta = \frac{\pi}{2}$ ，得： $e^{j\pi/2} = \cos \frac{\pi}{2} + j \sin \frac{\pi}{2} = j$

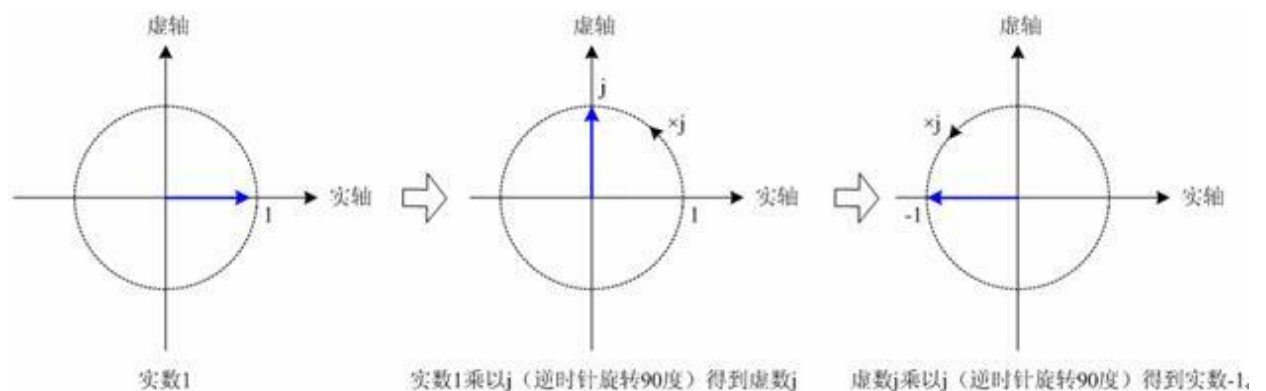
$j = e^{j\pi/2}$ 意味着：虚数 j 在复平面上对应了一个单位向量，该单位向量位于虚轴上。



如何理解虚数的平方，即 $j^2 = -1$ 呢？

根据前面讲过的“两个向量相乘，积的模等于各向量模的积，积的辐角等于各向量的辐角的和。”我们很容易得出：向量与 $j = e^{j\pi/2}$ 相乘，相当于将向量逆时针旋转90度。

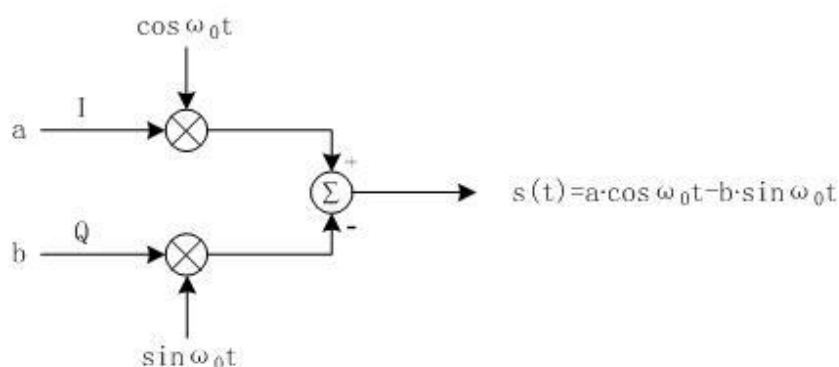
据此，实数1逆时针旋转90度（乘以 j ）得到虚数 j （ $1 \times j = j$ ），虚数 j 再逆时针旋转90度（乘以 j ）就得到了实数-1（ $j \times j = j^2 = -1$ ），如下图所示：



连载 24：IQ 信号是不是复信号？

我们先来看看什么是IQ信号。↵

IQ信号与IQ调制有关，IQ调制也叫正交调制，其调制原理如下：↵



I路和Q路分别输入两个数据a、b，I路信号与 $\cos \omega_0 t$ 相乘，Q路信号与 $\sin \omega_0 t$ 相乘，之后再叠加（通常Q路在叠加时会乘以-1），输出信号为： $s(t) = a \cos \omega_0 t - b \sin \omega_0 t$ 。这个过程我们称之为IQ调制，也叫正交调制。↵

输入正交调制器的信号一般被称为IQ信号，经常用复数来表示： $a+jb$ ，对应复平面上的一个点，因此IQ信号通常被大家称为“复信号”。如果再将与I路数据相乘的 $\cos \omega_0 t$ 和与Q路数据相乘的 $\sin \omega_0 t$ 表示为： $e^{j\omega_0 t} = \cos \omega_0 t + j \sin \omega_0 t$ ，这样IQ调制就可以利用复数乘法来实现：↵

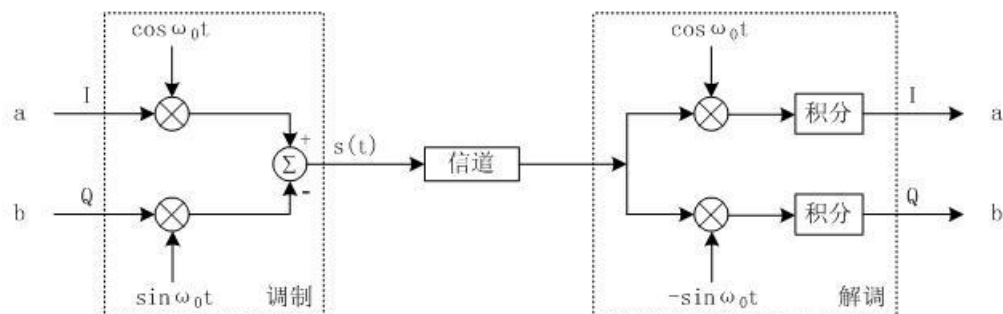


$$\begin{aligned}
 & \text{Re}\{(a + jb)e^{j\omega_0 t}\} \\
 &= \text{Re}\{(a + jb)(\cos \omega_0 t + j \sin \omega_0 t)\} \\
 &= \text{Re}\{(a \cos \omega_0 t - b \sin \omega_0 t) + j(b \cos \omega_0 t + a \sin \omega_0 t)\} \\
 &= a \cos \omega_0 t - b \sin \omega_0 t
 \end{aligned}$$

值得注意的是：在IQ调制过程中出现的信号a、b、 $\cos \omega_0 t$ 、 $\sin \omega_0 t$ 以及最终输出的信号 $s(t) = a \cos \omega_0 t - b \sin \omega_0 t$ 全部都是实信号，只是在实现过程中我们把相关的信号表示为复数而已。↵

连载 25: IQ 解调原理

IQ 解调原理如下图所示:



接收端收到 $s(t)$ 后, 分为两路: ↵

一路乘以 $\cos \omega_0 t$ 再积分, 就可以得到 a : ↵

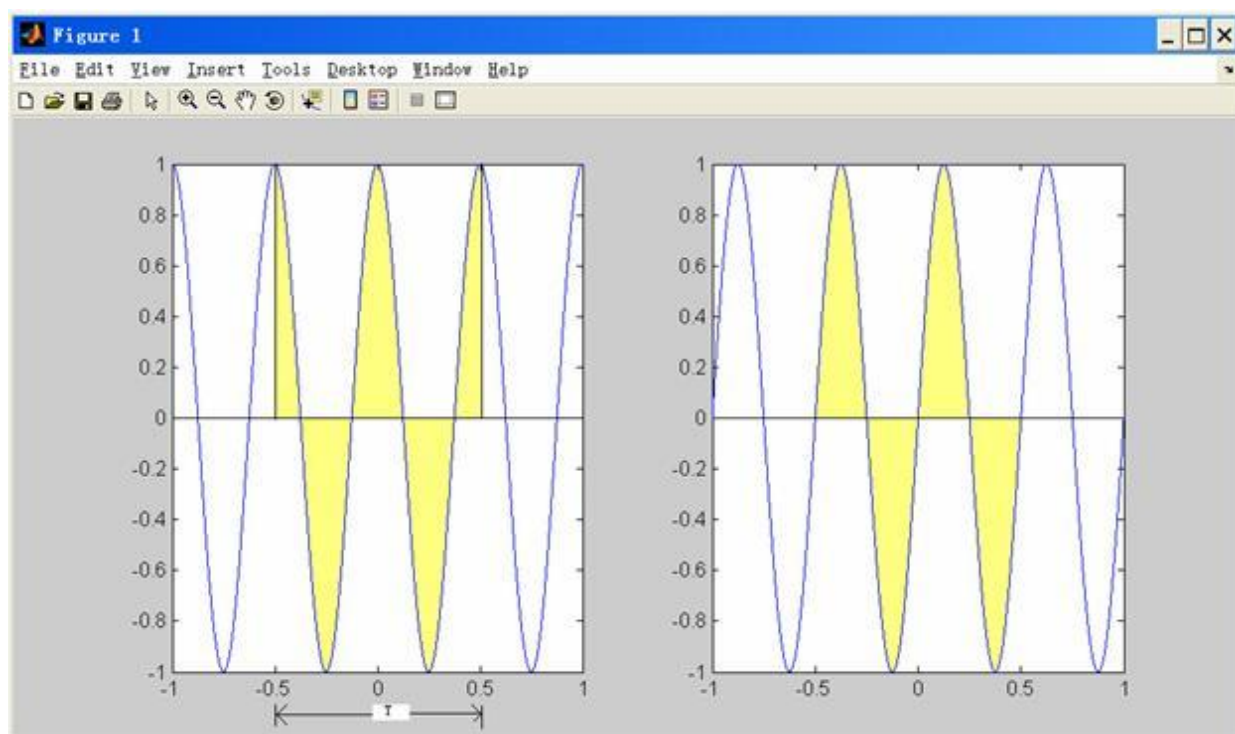
$$\begin{aligned}
 & \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cos \alpha_b t dt \\
 &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} (a \cos \alpha_b t - b \sin \alpha_b t) \cos \alpha_b t dt \\
 &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} (a \cos^2 \alpha_b t - b \sin \alpha_b t \cos \alpha_b t) dt \quad \leftarrow \\
 &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left[\frac{a}{2} (1 + \cos 2\alpha_b t) - \frac{b}{2} \sin 2\alpha_b t \right] dt \\
 &= \frac{2}{T} \cdot \frac{a}{2} \cdot T = a
 \end{aligned}$$

另一路乘以 $-\sin \omega_0 t$ 再积分, 就可以得到 b : ↵

$$\begin{aligned}
 & \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) (-\sin \alpha_b t) dt \\
 &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} (-a \cos \alpha_b t + b \sin \alpha_b t) \sin \alpha_b t dt \\
 &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} (-a \sin \alpha_b t \cos \alpha_b t + b \sin^2 \alpha_b t) dt \quad \leftarrow \\
 &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left[\frac{a}{2} (-\sin 2\alpha_b t) + \frac{b}{2} (1 - \cos 2\alpha_b t) \right] dt \\
 &= \frac{2}{T} \cdot \frac{b}{2} \cdot T = b
 \end{aligned}$$

其中 $T=2\pi/\omega_0$ ↵

注意: 上面用到了 $\sin 2\omega_0 t$ 和 $\cos 2\omega_0 t$ 在 $[-T/2, T/2]$ 区间内积分为0。这是很显然的, 如下图所示: 黄色部分面积(横轴上方的面积取正, 横轴下方的面积取负)的代数和为0。↵



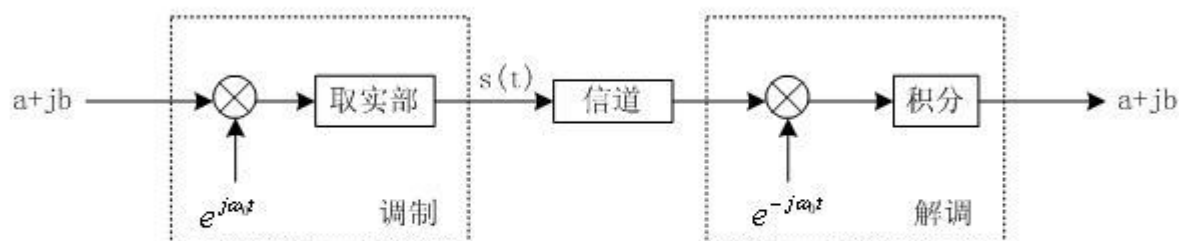
```

t=-1:0.001:1;
f=1;
y=cos(2*pi*f*t);
subplot(1,2,1);plot(t,y);
y=sin(2*pi*f*t);
subplot(1,2,2);plot(t,y);

```

连载 26：用复数运算实现正交解调

引入复数运算实现正交调制和解调的原理：



调制在前面已经讲过了，这里看一下解调。

接收信号与 $e^{-j\omega_0 t}$ 相乘，再积分，就可以将 $a+jb$ 解调出来：

$$\begin{aligned}
& \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} s(t) e^{-j\omega_0 t} dt \\
&= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} (a \cos \omega_0 t - b \sin \omega_0 t) (\cos \omega_0 t - j \sin \omega_0 t) dt \\
&= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} (a \cos^2 \omega_0 t - b \sin \omega_0 t \cos \omega_0 t) + j(b \sin^2 \omega_0 t - a \sin \omega_0 t \cos \omega_0 t) dt \\
&= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \left[\frac{a}{2} (1 + \cos 2\omega_0 t) - \frac{b}{2} \sin 2\omega_0 t \right] dt + j \int_{-T/2}^{+T/2} \left[\frac{b}{2} (1 - \cos 2\omega_0 t) - \frac{a}{2} \sin 2\omega_0 t \right] dt \\
&= \frac{2}{T} \left(\frac{aT}{2} + j \frac{bT}{2} \right) \\
&= a + jb
\end{aligned}$$

注意：对复数进行积分运算就是对实部和虚部分别进行积分运算。

回到前面的正交调制解调原理框图，如果我们把调制、信道传输、解调过程看作一个黑箱，那么在发送端送入黑箱的复信号被原封不动地传送到了接收端，表面上我们实现了复信号的发送和接收，实质上在信道上传输的是实信号 $s(t)=a \cos \omega_0 t - b \sin \omega_0 t$ 。

连载 27：为什么要对信号进行调制？

无线通信系统是用空间辐射的方式传送信号的，由电磁波理论可以知道：天线尺寸为被辐射信号波长的十分之一或更大些，信号才能被有效地辐射。

以语音信号为例。人能听见的声音频率范围为20Hz~20kHz，假定我们要以无线通信的方式直接发送一个频率为10kHz的单音信号出去。

该单音信号的波长为：

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \times 10^8 \text{ m/s}}{10 \times 10^3 \text{ /s}} = 30 \text{ km}$$

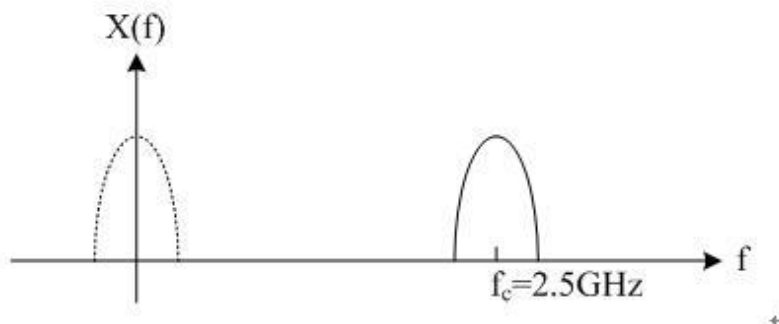
其中：

c：为光速，一般认为电磁波在空间的传播速度等于光速。

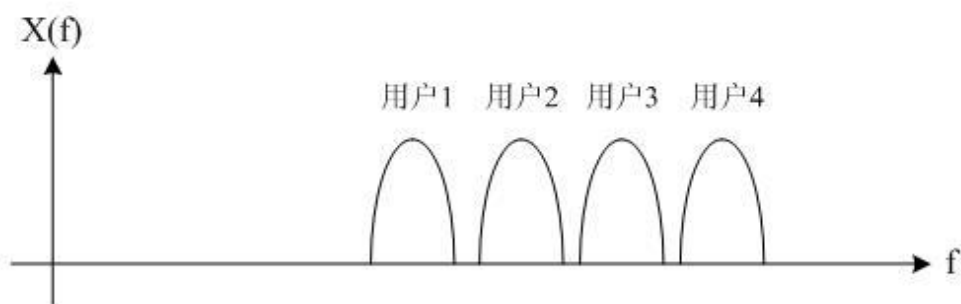
f：为信号的频率。

如果不经调制直接在空间发生这个单音信号，需要的天线尺寸至少要几公里！实际上根本不可能制造这样的天线。

调制过程将信号频谱搬移到任何所需的较高频率范围，这样就很容易以电磁波形式将信号辐射出去。



同时，通过调制把不同的信号频谱搬移到不同的频率范围内，也就实现了频分多路复用（FDM）。



连载 28：IQ 调制为什么被称为正交调制？

讲了半天 IQ 调制，还没说为什么这种调制方法又被称为“正交”调制呢？

答案是：因为 IQ 信号被调制到了一对正交的载波上。

前面我们已经看到了，IQ 调制用的载波一个是余弦波，另一个是正弦波。为什么说余弦波和正弦波是正交的呢？

这是因为正弦波和余弦波满足如下两个条件：

- 1) 正弦波和余弦波的乘积在一个周期内的积分等于 0。即：

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos \alpha_0 t \sin \alpha_0 t dt = 0 \quad \leftarrow$$

这个是显而易见的，因为： \leftarrow

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos \alpha_0 t \sin \alpha_0 t dt = \frac{1}{2} \int_{-T/2}^{T/2} \sin 2\alpha_0 t dt = 0 \quad \leftarrow$$

2) 正弦波、余弦波与自身的乘积在一个周期内的积分大于0。 \leftarrow

$$\frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos \alpha_0 t \cos \alpha_0 t dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos^2 \alpha_0 t dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left[\frac{1}{2} (1 + \cos 2\alpha_0 t) \right] dt = \frac{2}{T} \cdot \frac{T}{2} = 1 \quad \leftarrow$$

$$\frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sin \alpha_0 t \sin \alpha_0 t dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sin^2 \alpha_0 t dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left[\frac{1}{2} (1 - \cos 2\alpha_0 t) \right] dt = \frac{2}{T} \cdot \frac{T}{2} = 1 \quad \leftarrow$$

注：其中 $\sin 2\omega_0 t$ 和 $\cos 2\omega_0 t$ 在 $[-T/2, T/2]$ 区间内积分为0，我们在连载25中已经讲过了。 \leftarrow

正因为正弦波和余弦波满足了正交的2个条件，所以经它们调制的IQ信号到了接收端才能被分别解调出来。建议大家结合刚刚讲的正弦波和余弦波之间的正交性再复习一下前面讲的正交解调，这样理解会更深刻些。 \leftarrow

连载 29：三角函数的正交性

不只是正弦函数和余弦函数之间具有正交性，如下的三角函数之间也具备这种正交性。

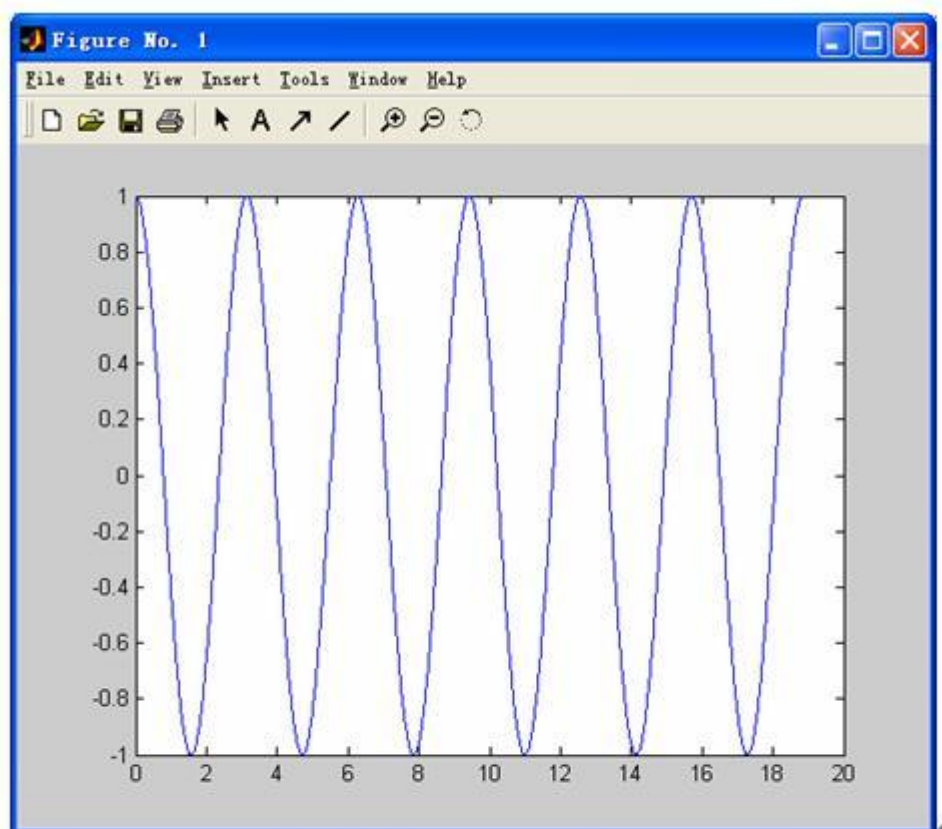
1、余弦函数的正交性

在余弦函数集合 $\{\cos \omega_0 t, \cos 2\omega_0 t, \cos 3\omega_0 t, \dots\}$ 中：

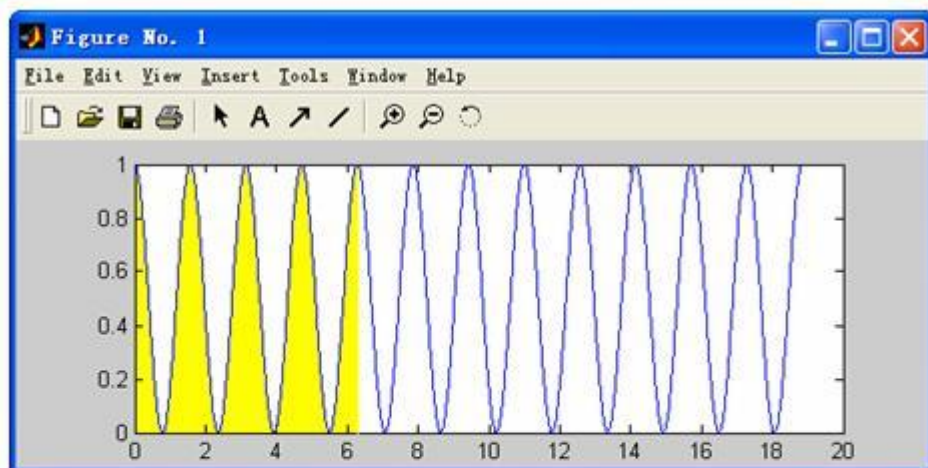
1) 任何一个余弦函数的平方在基波周期内积分大于零：

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos m \omega_0 t \cos m \omega_0 t dt > 0, \text{ 基波周期 } T = 2\pi / \omega_0$$

以 $\cos 2\omega_0 t$ 为例，其波形图如下所示：



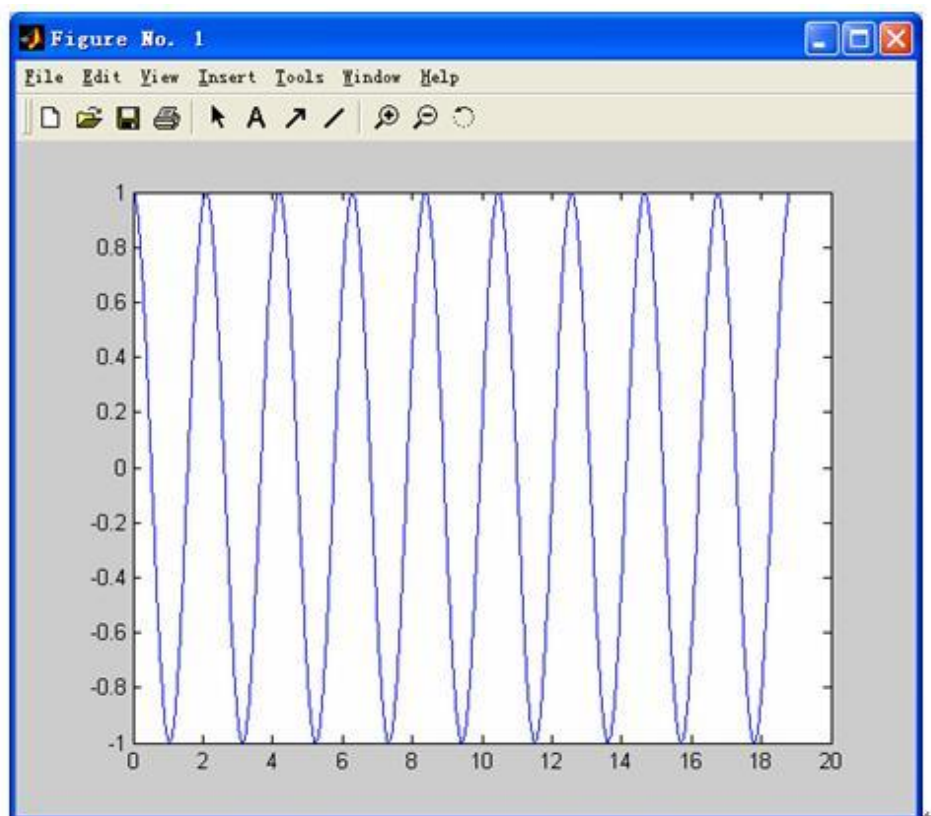
$\cos 2\omega_0 t \cos 2\omega_0 t$ 的波形图如下：在基波周期内求积分就是求下面黄色部分的面积，很显然大于零。



2) 任何两个余弦函数的乘积在基波周期内积分等于零：↵

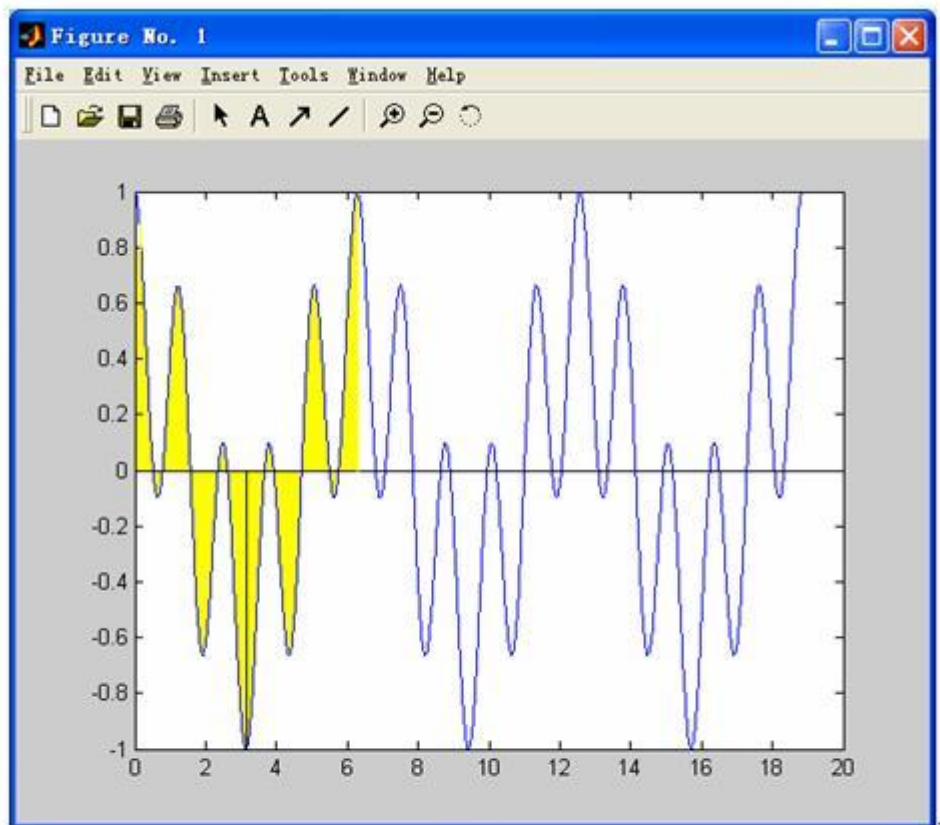
$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos m \omega_0 t \cos n \omega_0 t dt = 0, \text{ 基波周期 } T = 2\pi / \omega_0 \quad \leftarrow$$

以 $\cos 2\omega_0 t$ 和 $\cos 3\omega_0 t$ 为例， $\cos 3\omega_0 t$ 波形图如下所示：↵



$\cos 2\omega_0 t \cos 3\omega_0 t$ 的波形图如下：在基波周期内求积分就是求下面黄色部分的面积

（x轴下面的面积要取负值），很显然等于零。↵



2、正弦函数的正交性

与余弦函数类似，在正弦函数集合 $\{\sin \omega_0 t, \sin 2\omega_0 t, \sin 3\omega_0 t, \dots\}$ 中：

- 1) 任何一个正弦函数的平方在基波周期内积分大于零：

$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin m \omega_0 t \sin m \omega_0 t dt > 0, \text{ 基波周期 } T = 2\pi / \omega_0$$

- 2) 任何两个余弦函数的乘积在基波周期内积分等于零：

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos m \omega_0 t \cos n \omega_0 t dt = 0, \text{ 基波周期 } T = 2\pi / \omega_0$$

3、正弦函数和余弦函数之间的正交性

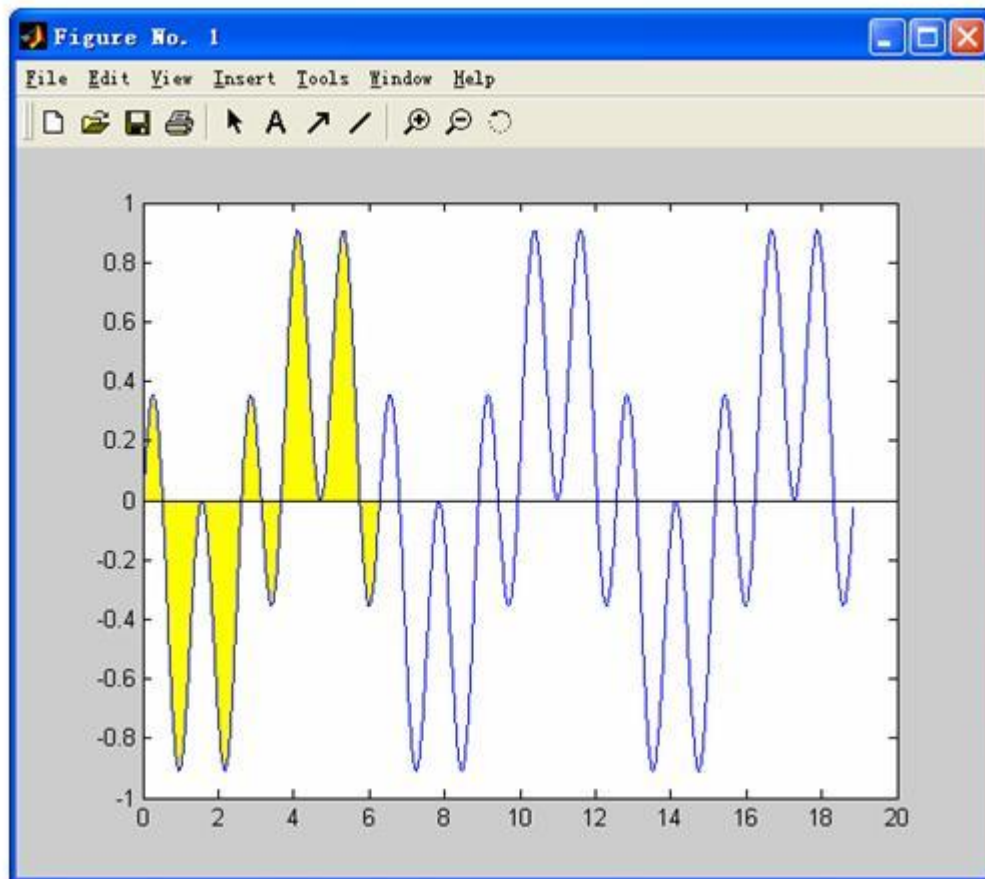
余弦函数集合 $\{\cos \omega_0 t, \cos 2\omega_0 t, \cos 3\omega_0 t, \dots\}$ 中的任何一个余弦函数与正弦函数集合

$\{\sin \omega_0 t, \sin 2\omega_0 t, \sin 3\omega_0 t, \dots\}$ 中的任何一个正弦函数的乘积在基波周期内积分等于零：

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos m \omega_0 t \sin n \omega_0 t dt = 0, \text{ 基波周期 } T = 2\pi / \omega_0$$

$\cos 3\omega_0 t \sin 2\omega_0 t$ 的波形图如下：在基波周期内求积分就是求下面黄色部分的面积

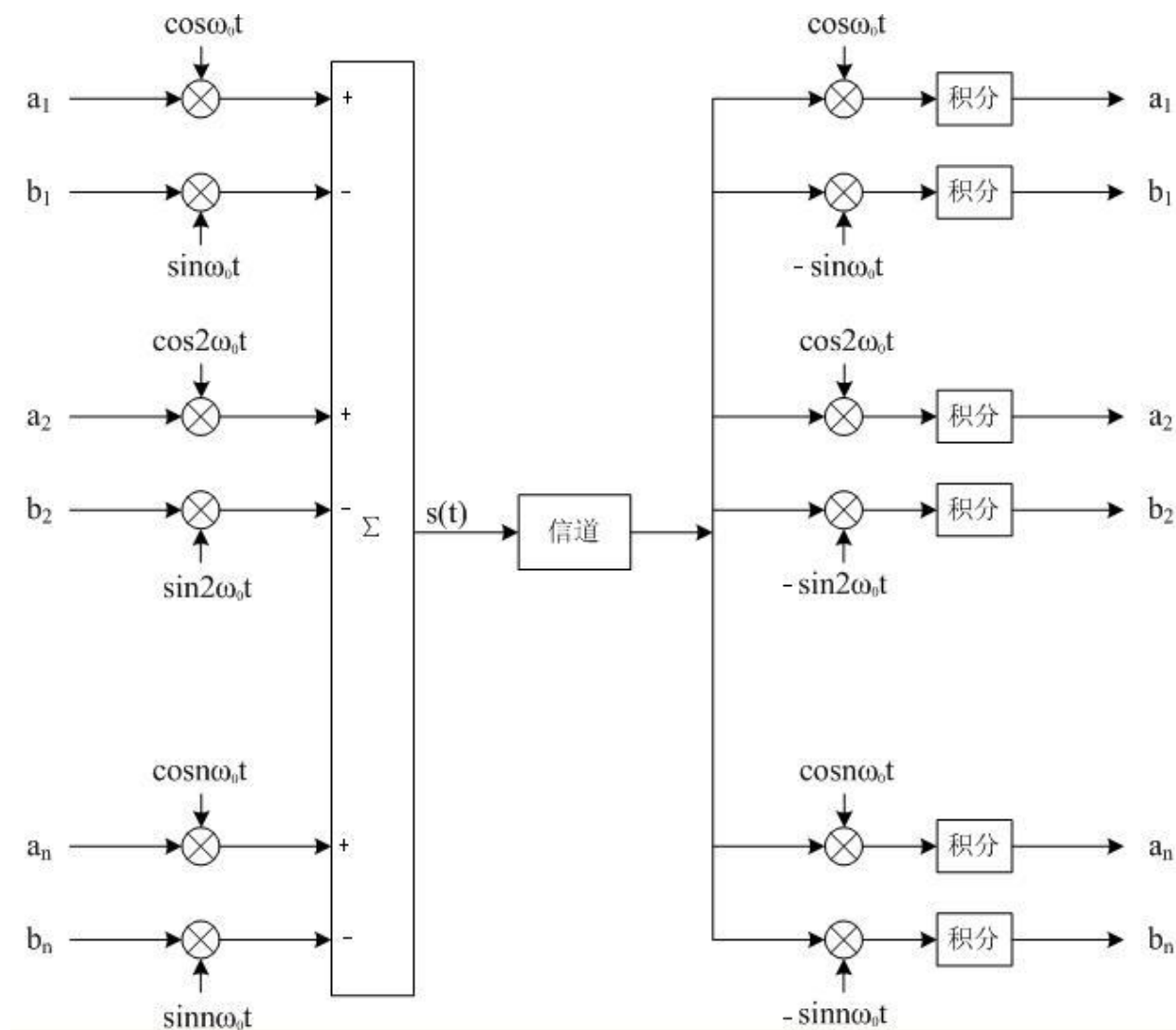
（x轴下面的面积要取负值），很显然等于零。



连载 30: OFDM 正交频分复用

和IQ正交调制利用了 $\cos \omega_0 t$ 和 $\sin \omega_0 t$ 之间的正交性类似，OFDM（正交频分复用）利用了 $\{\cos \omega_0 t, \cos 2\omega_0 t, \cos 3\omega_0 t, \dots\}$ 和 $\{\sin \omega_0 t, \sin 2\omega_0 t, \sin 3\omega_0 t, \dots\}$ 之间的正交性。

OFDM（正交频分复用）的原理框图如下：



图中所示共有n个子载波，注意：实际上每个子载波包含了正弦和余弦两个载波，承载了2个比特数据。

正是因为三角函数的正交性：

$$\frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos m \omega_0 t \cos m \omega_0 t dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \frac{1}{2} (1 + \cos 2m \omega_0 t) dt = 1$$

$$\frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sin m \omega_0 t \sin m \omega_0 t dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \frac{1}{2} (1 - \cos 2m \omega_0 t) dt = 1$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos m \omega_0 t \cos n \omega_0 t dt = 0$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin m \omega_0 t \sin n \omega_0 t dt = 0$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos m \omega_0 t \sin n \omega_0 t dt = 0$$

调制后的数据到了接收端才能被解调出来。

连载 31：OFDM 解调

发送端OFDM调制后的信号：

$$s(t) = \sum_{k=1}^n (a_k \cos k \omega_0 t - b_k \sin k \omega_0 t)$$

在接收端，将接收到的s(t)乘以 $\cos m \omega_0 t$ ，在 $[-T/2, T/2]$ 区间进行积分即可得到 a_m ；

将接收到的s(t)乘以 $-\sin m \omega_0 t$ ，在 $[-T/2, T/2]$ 区间进行积分即可得到 b_m 。

$$\begin{aligned} & \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cos m \omega_0 t dt \\ &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left[\sum_{k=1}^n (a_k \cos k \omega_0 t - b_k \sin k \omega_0 t) \right] \cos m \omega_0 t dt \\ &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left[\sum_{k=1}^n (a_k \cos k \omega_0 t \cos m \omega_0 t - b_k \sin k \omega_0 t \cos m \omega_0 t) \right] dt \\ &= \frac{2}{T} \sum_{k=1}^n \left[\int_{-T/2}^{T/2} (a_k \cos k \omega_0 t \cos m \omega_0 t - b_k \sin k \omega_0 t \cos m \omega_0 t) dt \right] \\ &= \frac{2}{T} \sum_{k=1}^n \left[\int_{-T/2}^{T/2} (a_k \cos k \omega_0 t \cos m \omega_0 t) dt - \int_{-T/2}^{T/2} (b_k \sin k \omega_0 t \cos m \omega_0 t) dt \right] \\ &= \frac{2}{T} \sum_{k=1}^n \left[a_k \int_{-T/2}^{T/2} (\cos k \omega_0 t \cos m \omega_0 t) dt \right] - \frac{2}{T} \sum_{k=1}^n \left[b_k \int_{-T/2}^{T/2} (\sin k \omega_0 t \cos m \omega_0 t) dt \right] \end{aligned}$$

由于三角函数的正交性，上式第二项中的积分为0，第一项中除了 $k=m$ 那一项积分为1外，其它 $k \neq m$ 项积分也为0（参见连载30）。↵

由此得：↵

$$\frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cos m\omega_0 t dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} a_m (\cos m\omega_0 t \cos m\omega_0 t) dt = a_m \quad \leftarrow$$

同理可得：↵

$$\frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) (-\sin m\omega_0 t) dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} b_m (\sin m\omega_0 t \sin m\omega_0 t) dt = b_m \quad \leftarrow$$

为了加深印象，建议大家来亲自动手推导一下。↵

连载 32：CDMA 中的正交码

不只是正交调制中用到的三角函数之间具备正交性，有一些码（矩形脉冲串）也具有这种特性，例如：CDMA 中所用的 walsh 码。

下面我们来看看 walsh 码，这是一种正交码。

Walsh 码在码分多址系统（CDMA、WCDMA 等）中一般被用于区分不同的信道，不同的用户将分配不同的信道（使用不同的 walsh 码）来传业务，“码分多址”中的“码”就包括 walsh 码。

我们先来看比较简单的4阶walsh码，共有4个：↵

$$W_0^4 = [+1 \quad +1 \quad +1 \quad +1]^{\leftarrow}$$

$$W_1^4 = [+1 \quad -1 \quad +1 \quad -1]^{\leftarrow}$$

$$W_2^4 = [+1 \quad +1 \quad -1 \quad -1]^{\leftarrow}$$

$$W_3^4 = [+1 \quad -1 \quad -1 \quad +1]^{\leftarrow}$$

一般将4个4阶的walsh码使用一个矩阵来表示：↵

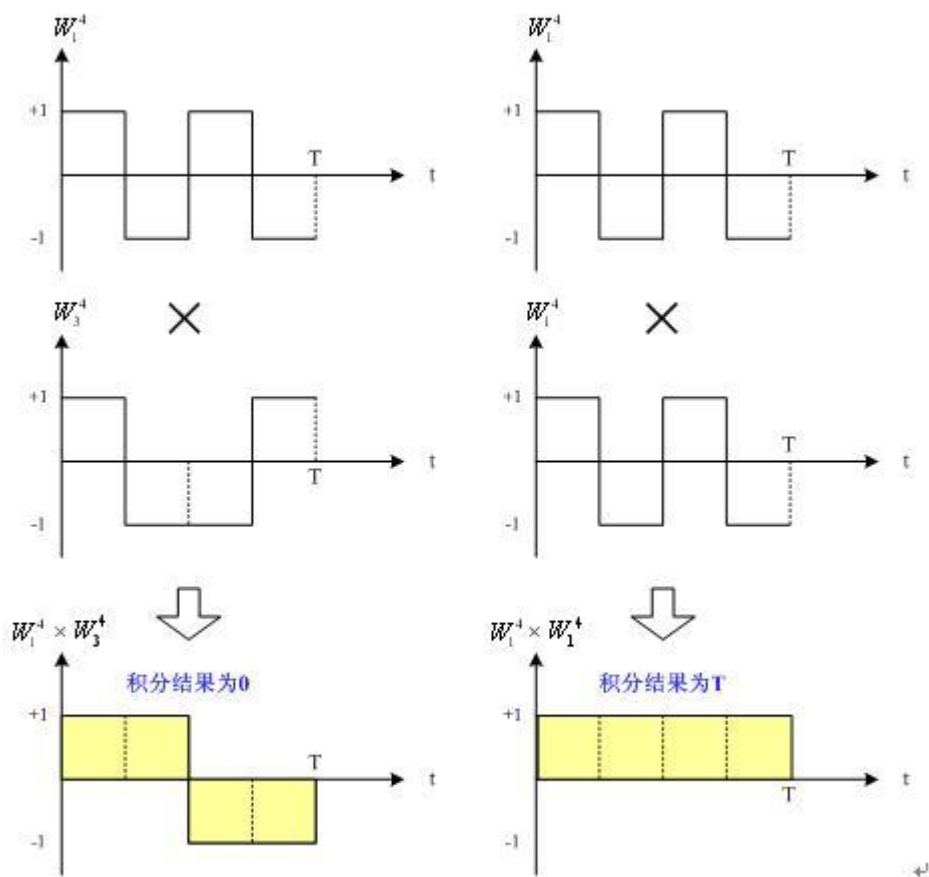
$$W^4 = \begin{bmatrix} +1 & +1 & +1 & +1 \\ +1 & -1 & +1 & -1 \\ +1 & +1 & -1 & -1 \\ +1 & -1 & -1 & +1 \end{bmatrix}^{\leftarrow}$$

矩阵中的第一行是 W_0^4 ，第二行是 W_1^4 ，第三行是 W_2^4 ，第四行是 W_3^4 。↵

Walsh码为什么可以用于区分不同信道呢？主要就在于walsh码间具有正交性，道理和三角函数之间的正交性相同。↵

不同的walsh码相乘，再在一个周期T时间内进行积分，结果为0。↵

相同的walsh码相乘，再在一个周期T时间内进行积分，结果为T（大于0）。↵

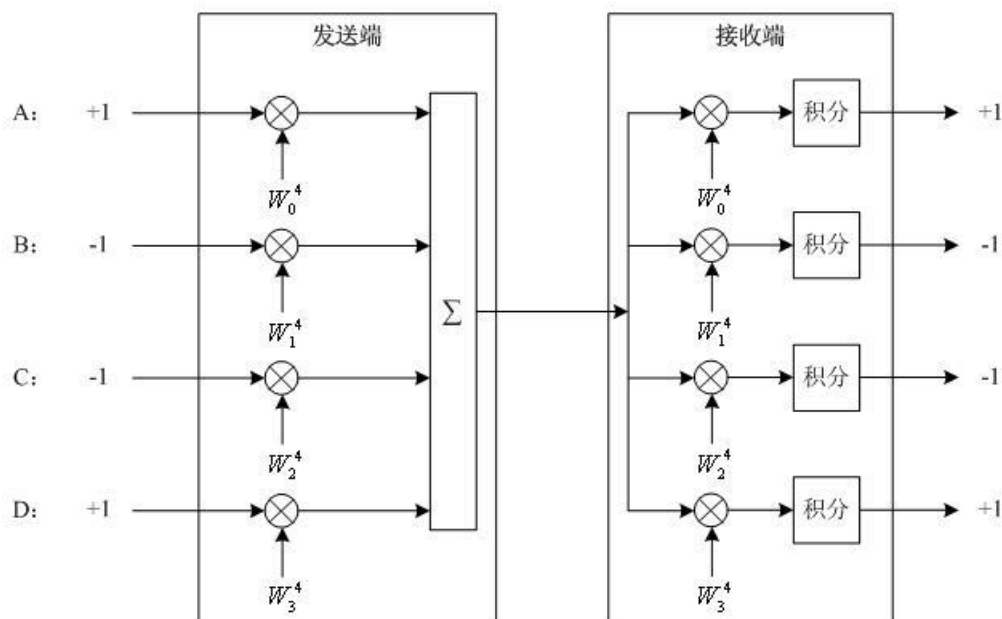


这就是walsh码的正交性。↵

连载 33: CDMA 的最基本原理

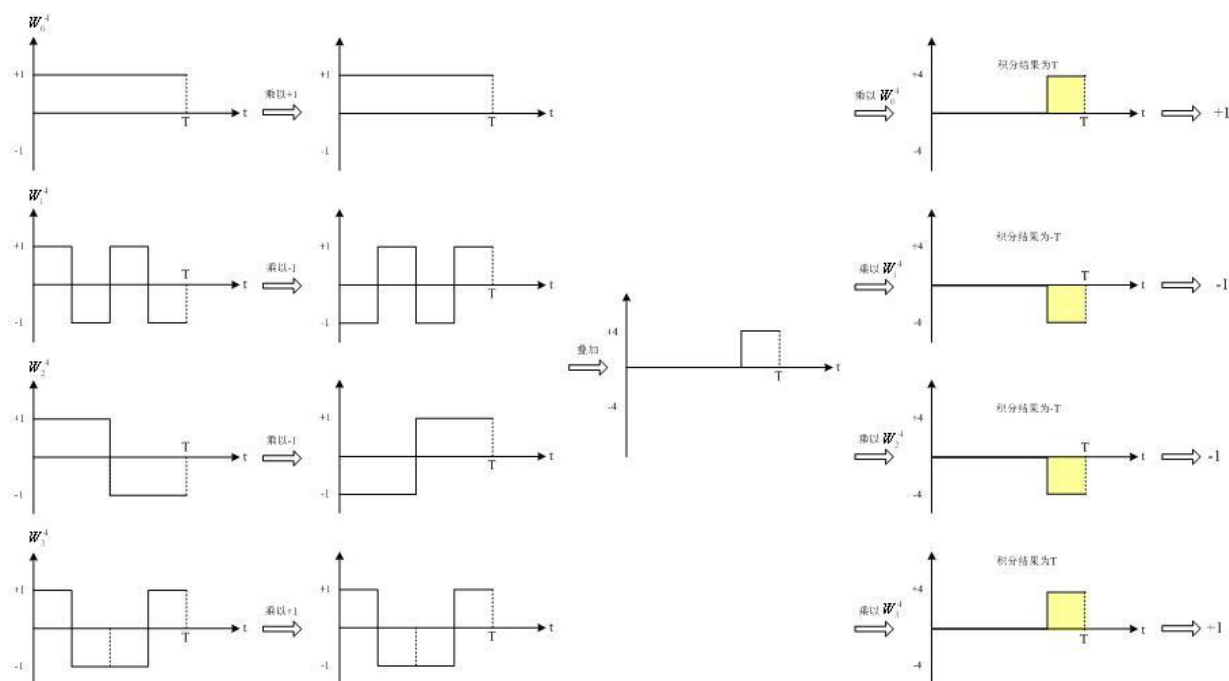
如何利用 walsh 码同时传送多路数据呢？

下面是利用4阶Walsh码实现4个信道单向通信的发送和接收原理框图：



大家可以根据上图试着自行验算一下，体会一下：4个信道的数据在发送端进行了叠加，但到了接收端各个信道的数据可以单独分离出来。

验算过程如下：



实际上这就是所谓的 CDMA（即“码分多址”）的最基本原理。

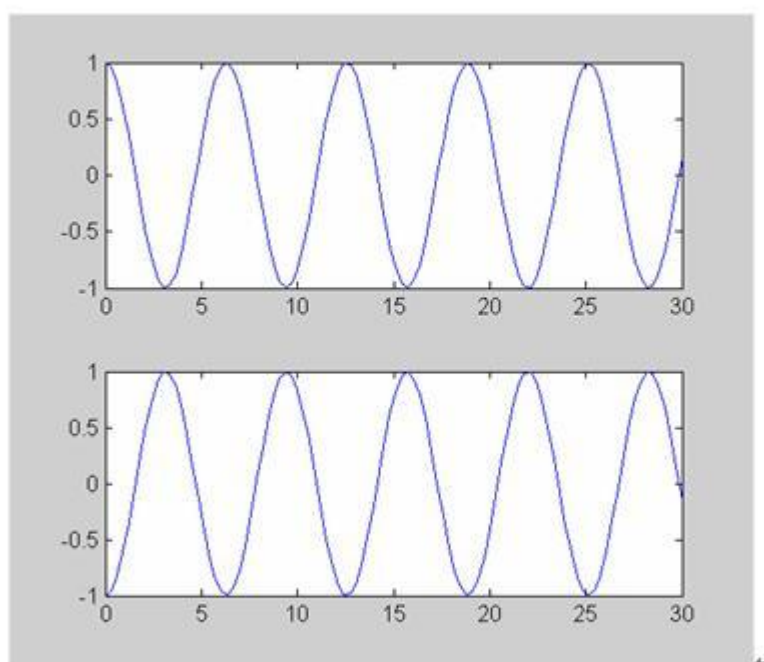
连载 34: 什么是 PSK 调制?

前面我们讲了 IQ 调制和解调的原理, 下面我们看一下如何应用 IQ 调制来实现 MPSK 调制 (QPSK、8PSK 等)、MQAM 调制 (16QAM、64QAM 等)。

先来了解一下 BPSK (Binary Phase Shift Keying, 二相相移键控)

先来了解一下BPSK (Binary Phase Shift Keying, 二相相移键控) ↵

两个信号源：一个相位为0: $\cos(\omega t)$, 一个相位为 π : $\cos(\omega t + \pi)$ ↵



根据输入，通过按键控制输出哪个信号(Phase Shift Keying)，例如：

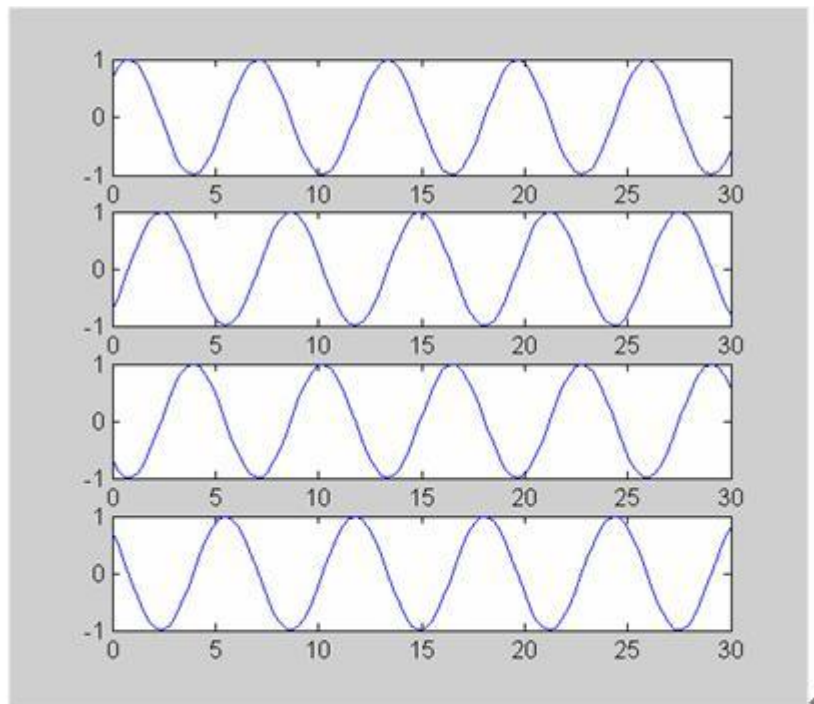
输入是0时输出 $\cos(\omega t)$ ，相位为0 ↵

输入是1时输出 $\cos(\omega t + \pi)$ ，相位为 π

这就是BPSK的最初含义。

BPSK：用2个相位分别表示0和1

QPSK：用4个相位分别表示00、01、10、11



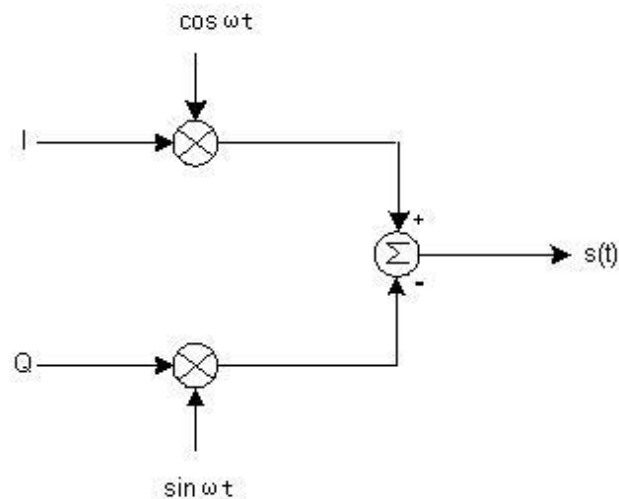
8PSK：用8个相位分别表示000、001、010、011、100、101、110、111

连载 35：如何用 IQ 调制实现 QPSK 调制？

除了上面的“键控”方法来实现PSK之外，有没有其它方法来实现呢？

有！那就是IQ正交调制，这是目前普遍使用的方法。

我们看一下：在IQ调制器的输入端分别输入 (+1, +1)、(-1, +1)、(-1, -1)、(+1, -1)，输出将得到什么？



$$s(t) = I \cdot \cos(\omega t) - Q \cdot \sin(\omega t) = A \cos(\omega t + \theta)$$

将 (+1, +1)、(-1, +1)、(-1, -1)、(+1, -1) 作为 (I, Q) 分别代入，经过简单的三角函数运算，可得： $A = \sqrt{2}$ ， θ 如下图所示：

输入信号		输出相位
I	Q	θ
+1	+1	$\pi/4$
-1	+1	$3\pi/4$
-1	-1	$5\pi/4$
+1	-1	$7\pi/4$

推导过程：

$$I=+1, Q=+1, s(t) = \cos \omega t - \sin \omega t = \sqrt{2} \cos(\omega t + \pi/4)$$

$$I=-1, Q=+1, s(t) = -\cos \omega t - \sin \omega t = \sqrt{2} \cos(\omega t + 3\pi/4)$$

$$I=-1, Q=-1, s(t) = -\cos \omega t + \sin \omega t = \sqrt{2} \cos(\omega t + 5\pi/4)$$

$$I=+1, Q=-1, s(t) = \cos \omega t + \sin \omega t = \sqrt{2} \cos(\omega t + 7\pi/4)$$

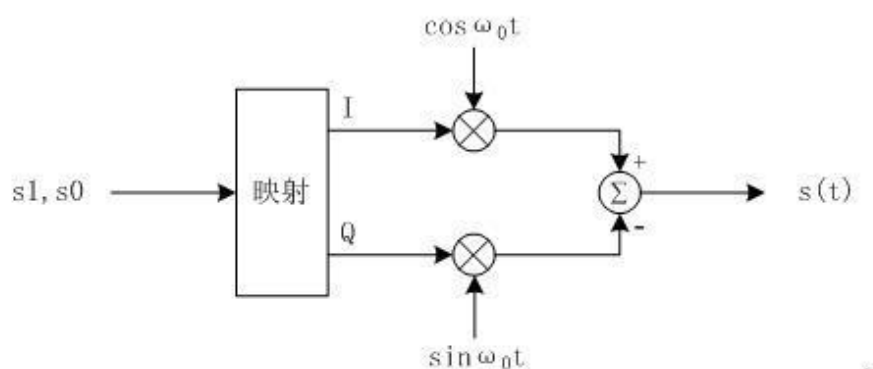
注：其中主要用到了 $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

为了使输出信号 $s(t)$ 的幅值 $A=1$ ，调整输入信号的幅度为 $1/\sqrt{2}$ 即可。

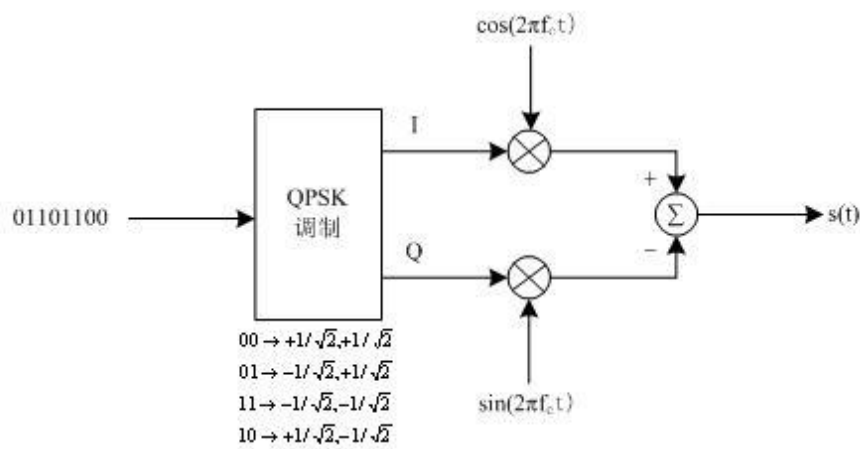
将上述4个相位及对应的IQ信号和输入的00、01、11、10建立映射关系：

输入信号：s1s0	IQ信号	输出信号相位
00	$+1/\sqrt{2}, +1/\sqrt{2}$	$\pi/4$
01	$-1/\sqrt{2}, +1/\sqrt{2}$	$3\pi/4$
11	$-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}$	$5\pi/4$
10	$+1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}$	$7\pi/4$

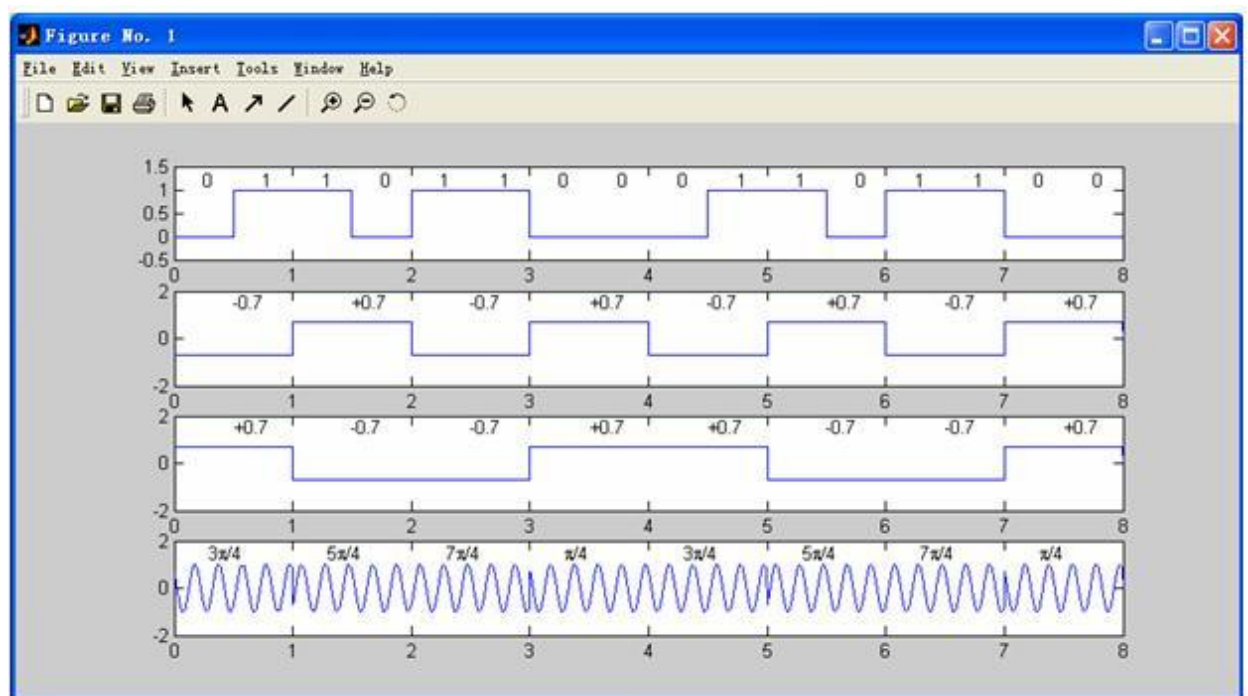
这实际上就实现了QPSK调制：将输入的数据每两个比特划分为一组：s1s0，再根据上面的映射关系转换为对应的IQ信号，最终对应一个输出信号的相位。



假定输入QPSK调制器的数据为：0110110001101100（假定左边的数据先进入调制器），如下图所示：



经QPSK调制后的信号 $s(t)$ 的时域波形如下图所示：从上至下依次为输入数据信号、I路信号、Q路信号、输出QPSK调制后的信号。



%输入信号

```
>> subplot(4,1,1);
```

```
>> t=0:0.001:8;
```

```
>> d=[0 0;0.5 1;1 1;1.5 0;2 1;2.5 1;3 0;3.5 0;4 0;4.5 1;5 1;5.5 0;6 1;6.5 1;7 0;7.5 0];
```

```
>> s=pulstran(t-0.25,d,'rectpuls',0.5);plot(t,s) ;
```

```
>> axis([0 8 -0.5 1.5]);
>> text(0.25,1.2,'0') ; text(0.75,1.2,'1') ; text(1.25,1.2,'1') ; text(1.75,1.2,'0') ;
>> text(2.25,1.2,'1') ; text(2.75,1.2,'1') ; text(3.25,1.2,'0') ; text(3.75,1.2,'0') ;
>> text(4.25,1.2,'0') ; text(4.75,1.2,'1') ; text(5.25,1.2,'1') ; text(5.75,1.2,'0') ;
>> text(6.25,1.2,'1') ; text(6.75,1.2,'1') ; text(7.25,1.2,'0') ; text(7.75,1.2,'0') ;
```

% I 路信号

```
>> subplot(4,1,2);
>> t=0:0.001:8;
>> a=1/sqrt(2);
>> d=[0 -a ;1 +a;2 -a;3 +a; 4 -a ;5 +a;6 -a;7 +a];
>> s=pulstran(t-0.5,d,'rectpuls');plot(t,s) ;
>> axis([0 8 -2 2]);
>> text(0.5,1.5,'-0.7') ; text(1.5,1.5,'+0.7') ;text(2.5,1.5,'-0.7') ;text(3.5,1.5,'+0.7');
>> text(4.5,1.5,'-0.7') ; text(5.5,1.5,'+0.7') ;text(6.5,1.5,'-0.7') ;text(7.5,1.5,'+0.7');
```

% Q 路信号

```
>> subplot(4,1,3);
>> t=0:0.001:8;
>> d=[0 +a;1 -a;2 -a;3 +a; 4 +a;5 -a;6 -a;7 +a];
>> s=pulstran(t-0.5,d,'rectpuls');plot(t,s) ;
>> axis([0 8 -2 2]);
>> text(0.5,1.5,'+0.7') ; text(1.5,1.5,'-0.7') ; text(2.5,1.5,'-0.7') ; text(3.5,1.5,'+0.7')
>> text(4.5,1.5,'+0.7') ; text(5.5,1.5,'-0.7') ; text(6.5,1.5,'-0.7') ; text(7.5,1.5,'+0.7')
```

%QPSK 调制信号

```
>> subplot(4,1,4);
>> t=0:0.001:8;
>> d1=[0 -a ;1 +a;2 -a;3 +a; 4 -a ;5 +a;6 -a;7 +a];
>> s1=pulstran(t-0.5,d1,'rectpuls').*cos(2*pi*5*t) ;
>> d2=[0 +a;1 -a;2 -a;3 +a; 4 +a;5 -a;6 -a;7 +a];
>> s2=pulstran(t-0.5,d2,'rectpuls').*sin(2*pi*5*t);
>> plot(t,s1-s2) ;
>> axis([0 8 -2 2]);
>> text(0.3,1.5,'3\pi/4') ; text(1.3,1.5, '5\pi/4') ; text(2.3,1.5,'7\pi/4') ; text(3.3,1.5,'\pi/4') ;
>> text(4.3,1.5, '3\pi/4') ; text(5.3,1.5, '5\pi/4') ; text(6.3,1.5,'7\pi/4') ; text(7.3,1.5,'\pi/4') ;
```

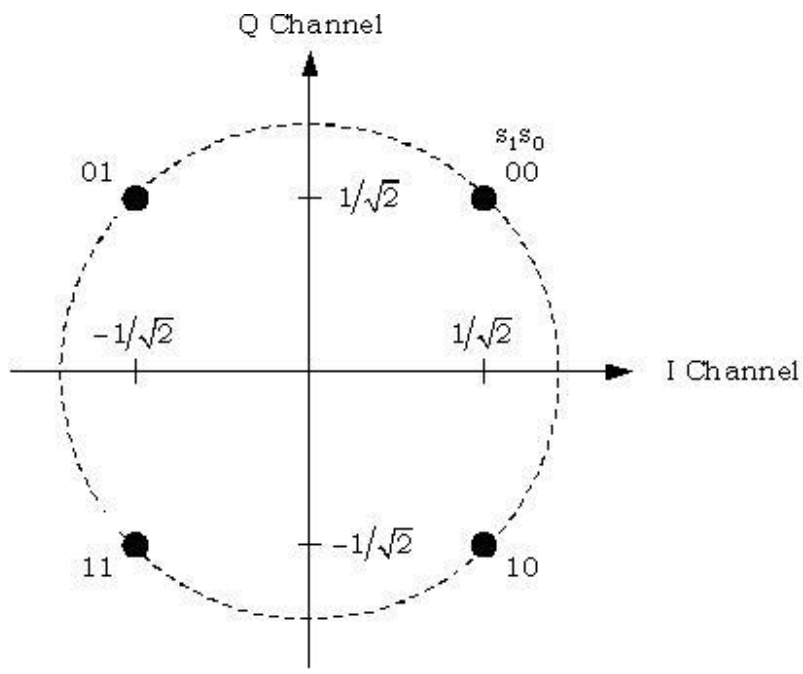
连载 37：QPSK 调制的星座图

前面已经讲过，QPSK调制中输入信号、IQ信号、输出信号相位之间的映射关系如下表所示：

输入信号：s ₁ s ₀	IQ信号	输出信号相位
00	$+1/\sqrt{2}, +1/\sqrt{2}$	$\pi/4$
01	$-1/\sqrt{2}, +1/\sqrt{2}$	$3\pi/4$
11	$-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}$	$5\pi/4$
10	$+1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}$	$7\pi/4$

这种映射关系可以画到一张图中，这张图被称为：星座图。

QPSK调制的星座图如下图所示：



4个点分别对应4个相位： $\pi/4$ 、 $3\pi/4$ 、 $5\pi/4$ 、 $7\pi/4$

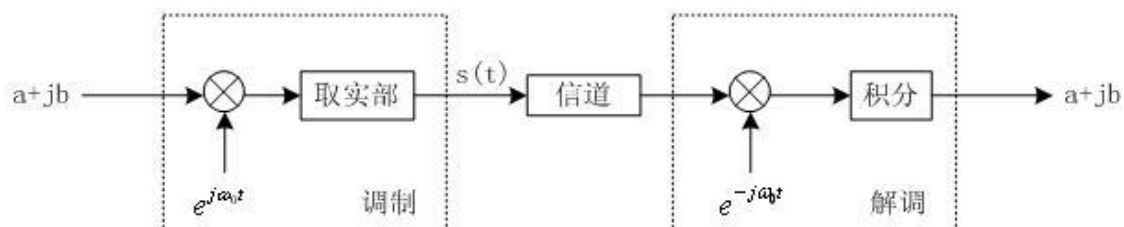
不只是QPSK调制，其它数字调制，包括PSK、QAM调制，都有对应的星座图。

由于星座图完整、清晰地表达了数字调制的映射关系，因此很多书中提到数字调制时经常只是画个星座图完事，不做过多描述。

数字调制也因此而经常被称为“星座调制”。

上面是从映射的角度来引出星座图的，下面我们再换个角度来理解。

这是前面已经讲过的利用复数运算来实现IQ调制解调的原理框图：



发送端：输入 $a+jb$ （I路输入 a ，Q路输入 b ）。

接收端：输出 $a+jb$ （I路输出 a ，Q路输出 b ）。

对于QPSK来讲， a 、 b 只有两种取值 $+1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}$ ， $a+jb$ 有四种取值：

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + j\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad -\frac{1}{\sqrt{2}} + j\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad -\frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad +\frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}}$$

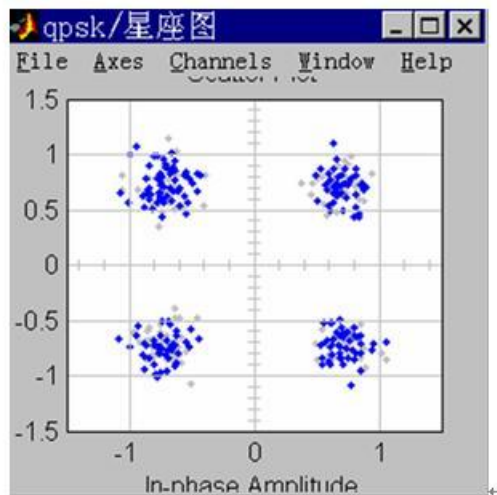
将这4个复数画到I、Q平面上（横轴为实轴，对应I路；纵轴为虚轴，对应Q路）就是QPSK的星座图。

连载 38：QPSK 的映射关系可以随意定吗？

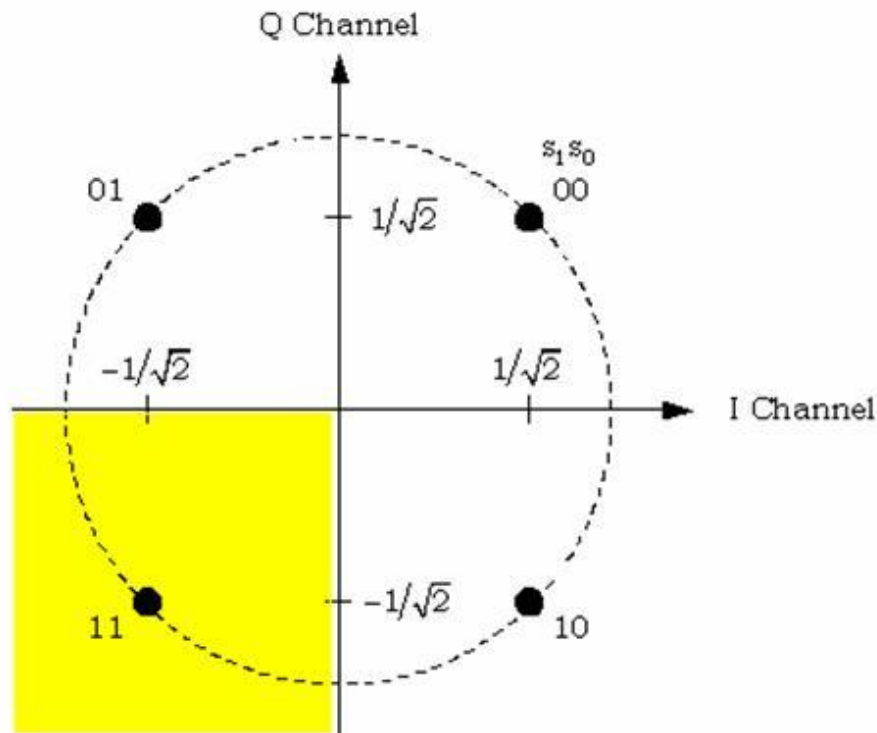
为什么映射时取00、01、11、10顺序与 $\pi/4$ 、 $3\pi/4$ 、 $5\pi/4$ 、 $7\pi/4$ 进行一一映射呢？为什么不取00、01、10、11的顺序呢？

这个需要从接收端的QPSK解调来理解。

由于信道条件不是理想的，当QPSK调制后的数据 $a+jb$ 通过信道到达接收端解调时，得到的数据 $a'+jb'$ 不会正好位于星座图中4个点中某个点正中央的位置，而是分布在4个点周边一定范围内：



接收端如何判决收到的数据 $a'+jb'$ 是星座图中的哪个点呢？最简单的办法就是看距离4个点中的哪个点最近。假定接收到的数据 $a'+jb'$ 位于IQ平面的第三象限，则判决接收到的数据为11，如下图所示：

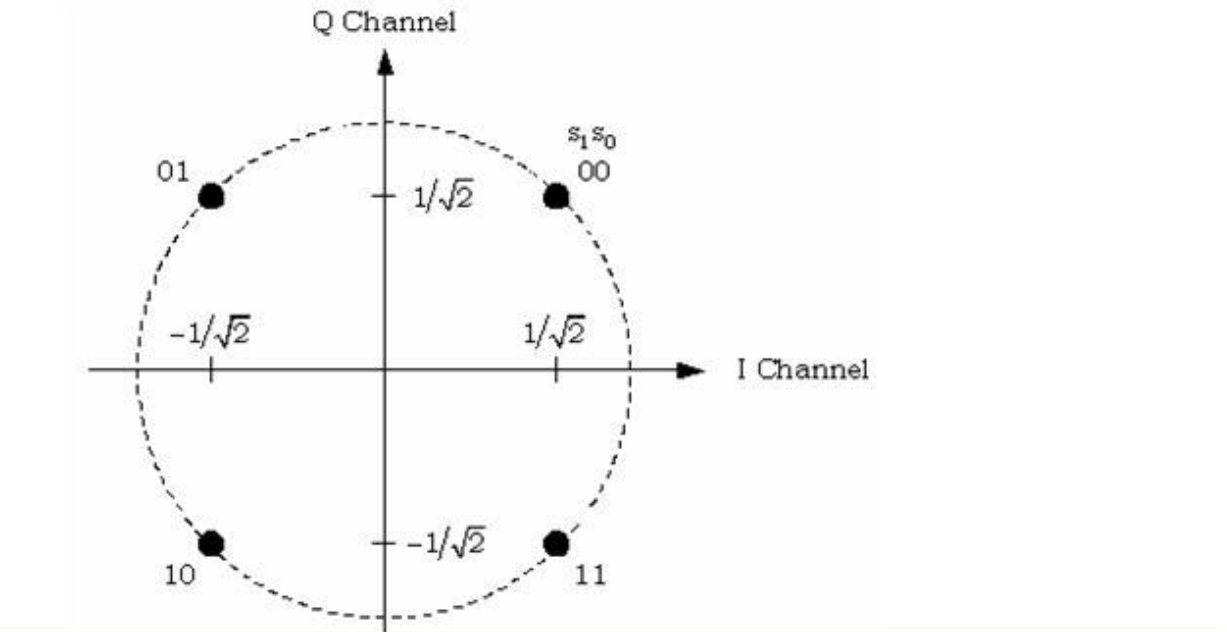


判决有可能出错：从概率的角度讲，误判为相邻点的概率要高于非相邻点。

以发送数据是11为例，接收数据如果没出现在第三象限，则其出现在二、四象限的概率要高于第一象限。

按上述映射关系，接收数据误判为01和10的概率要高于误判为00的概率。11误判为01、11误判为10都只是错了1个比特。

如果我们将映射关系改为：按00、01、10、11顺序与 $\pi/4$ 、 $3\pi/4$ 、 $5\pi/4$ 、 $7\pi/4$ 一一映射，如下图所示：



还以发送数据是11为例，接收数据误判为10和00的概率要高于误判为01的概率。11误判为10错了1个比特，但11误判为00却错了2个比特。

综上所述，在相同的信道条件下，采用 $00 \leftrightarrow \pi/4$ 、 $01 \leftrightarrow 3\pi/4$ 、 $10 \leftrightarrow 5\pi/4$ 、 $11 \leftrightarrow 7\pi/4$ 映射关系的QPSK调制的误比特率要高于采用 $00 \leftrightarrow \pi/4$ 、 $01 \leftrightarrow 3\pi/4$ 、 $11 \leftrightarrow 5\pi/4$ 、 $10 \leftrightarrow 7\pi/4$ 映射关系。

象00、01、11、10这样，相邻的两个码之间只有1位数字不同的编码叫做格雷码。QPSK调制中使用的就是格雷码。

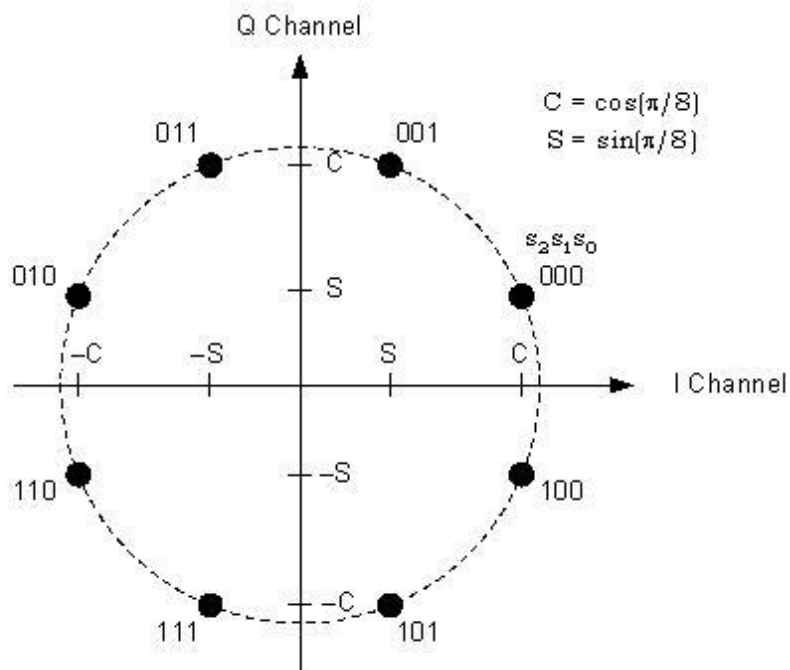
十进制数	自然二进制数	格雷码
0	0000	0000
1	0001	0001

2	0010	0011
3	0011	0010
4	0100	0110
5	0101	0111
6	0110	0101
7	0111	0100
8	1000	1100
9	1001	1101
10	1010	1111
11	1011	1110
12	1100	1010
13	1101	1011
14	1110	1001
15	1111	1000

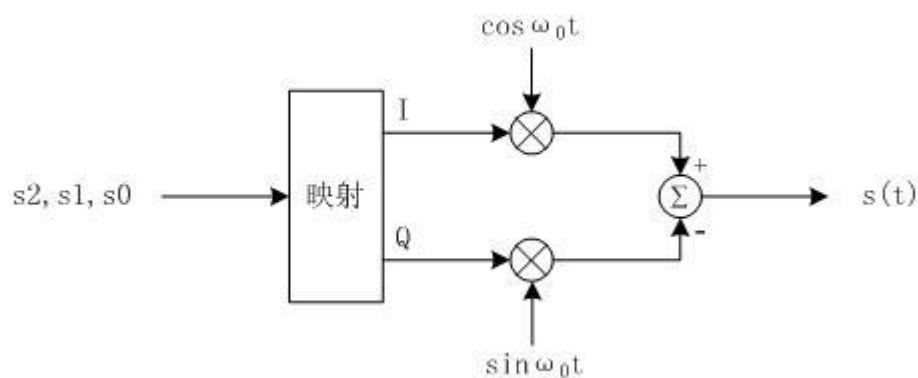
连载 39: 如何使用 IQ 调制实现 8PSK?

上面讲了QPSK，下面再来看看：如何使用IQ调制实现8PSK？

1、先照葫芦画瓢，把星座图画出来：



2、画原理框图：根据上面QPSK的实现，很容易想到：将输入的数据每三个比特划分为一组： $s_2s_1s_0$ ，共有8种组合，对应8个输出信号的相位。

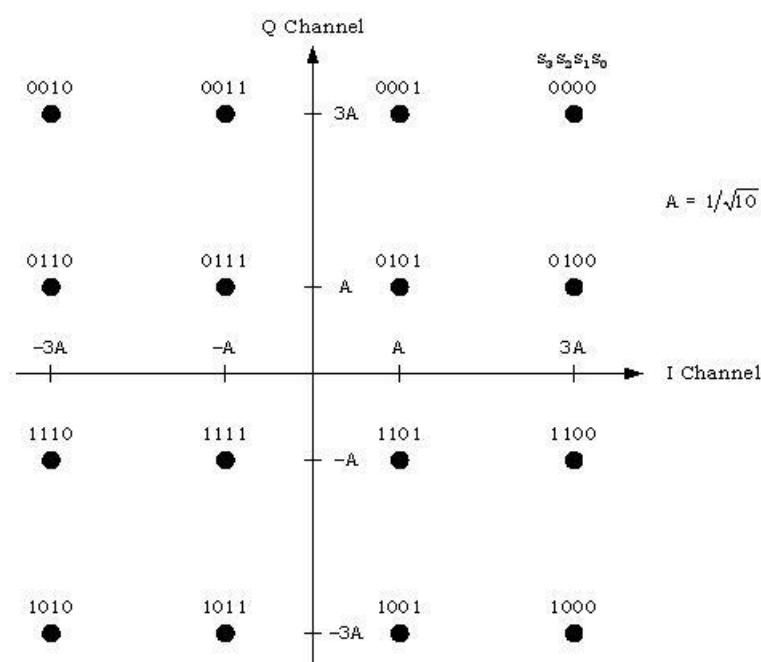


3、确定映射关系：随着输出相位的递增，输入的 $s_2s_1s_0$ 采用格雷码即可。

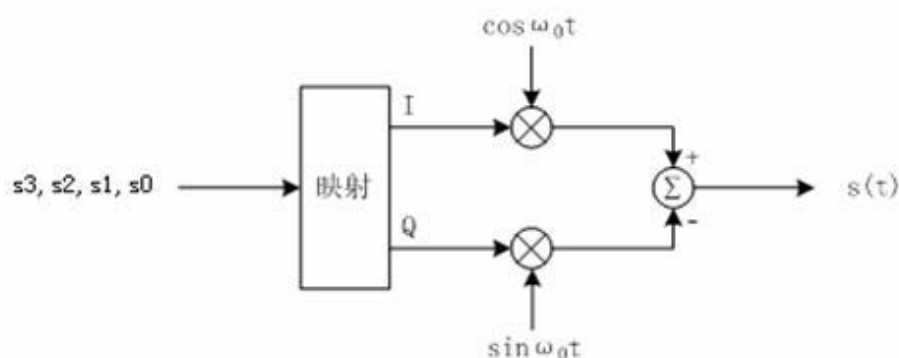
输入信号: $s_2s_1s_0$	IQ信号	输出信号相位
000	$+C, +S$	$\pi/8$
001	$+S, +C$	$3\pi/8$
011	$-S, +C$	$5\pi/8$
010	$-C, +S$	$7\pi/8$
110	$-C, -S$	$9\pi/8$
111	$-S, -C$	$11\pi/8$
101	$+S, -C$	$13\pi/8$
100	$+C, -S$	$15\pi/8$

连载 40: 如何使用 IQ 调制实现 16QAM?

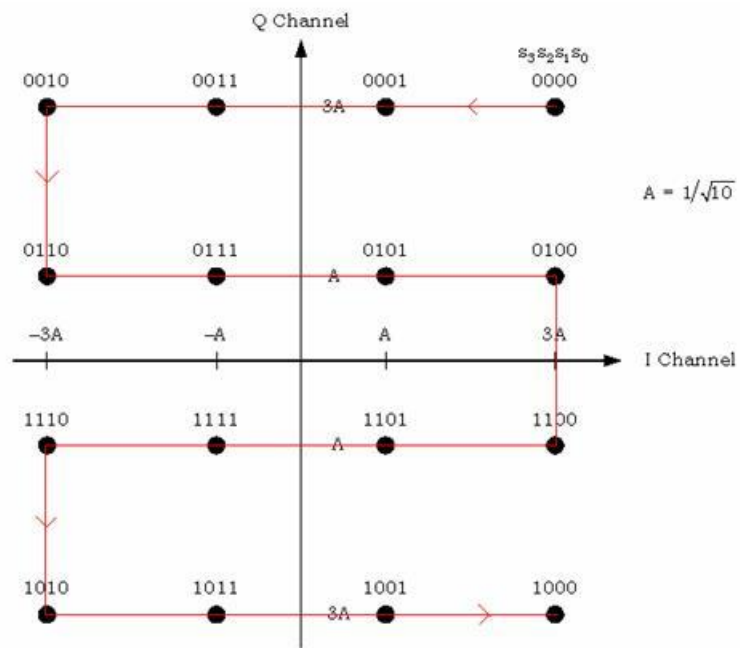
1、星座图：下面是最常见的一种16QAM星座图。



2、原理图：实际上不需要再画了，和前面没什么差别，主要是输入的比特被分成了4个一组： $s_3s_2s_1s_0$ 。



3、映射关系：注意格雷码与各个点之间的映射关系，非常巧妙的是：任何一个点和相邻的左、右、上、下四个点（不一定都有）对应的格雷码都只有1位不同，这样带来的好处是：在出现误码时错1个比特的概率高，而错多个比特的概率相对要低一些（道理与连载38中讲的类似）。



输入的格雷码和IQ信号之间的映射关系表（事实上这张图也没必要画了，一切都在上面的星座图中）：

$s_3s_2s_1s_0$	IQ信号
0000	$+3A, +3A$
0001	$+A, +3A$
0011	$-A, +3A$
0010	$-3A, +3A$
0110	$-3A, +A$
0111	$-A, +A$
0101	$+A, +A$
0100	$+3A, +A$
1100	$+3A, -A$
1101	$+A, -A$
1111	$-A, -A$
1110	$-3A, -A$
1010	$-3A, -3A$
1011	$-A, -3A$
1001	$+A, -3A$
1000	$+3A, -3A$

注：前面讲的 PSK 调制（QPSK、8PSK），星座图中的点都位于单位圆上，模相同（都为 1），只有相位不同。而 QAM 调制星座图中的点不再位于单位圆上，而是分布在复平面的一定范围内，各点如果模相同，则相位必不相同，如果相位相同则模必不相同。星座图中点的分布是有讲究的，不同的分布和映射关系对应的调制方案的误码性能是不一样的，这里不再展开去讲。

连载 41：什么是码元？

为了说清楚各种调制方式的调制效率，这里引出一个“码元”的概念。

码元又称为“符号”，即“Symbol”。

这是维基百科上对码元所做的解释：A symbol is a state or significant condition of the communication channel that persists for a fixed period of time. A sending device places symbols on the channel at a fixed and known symbol rate, and the receiving device has the job of detecting the sequence of symbols in order to reconstruct the transmitted data.

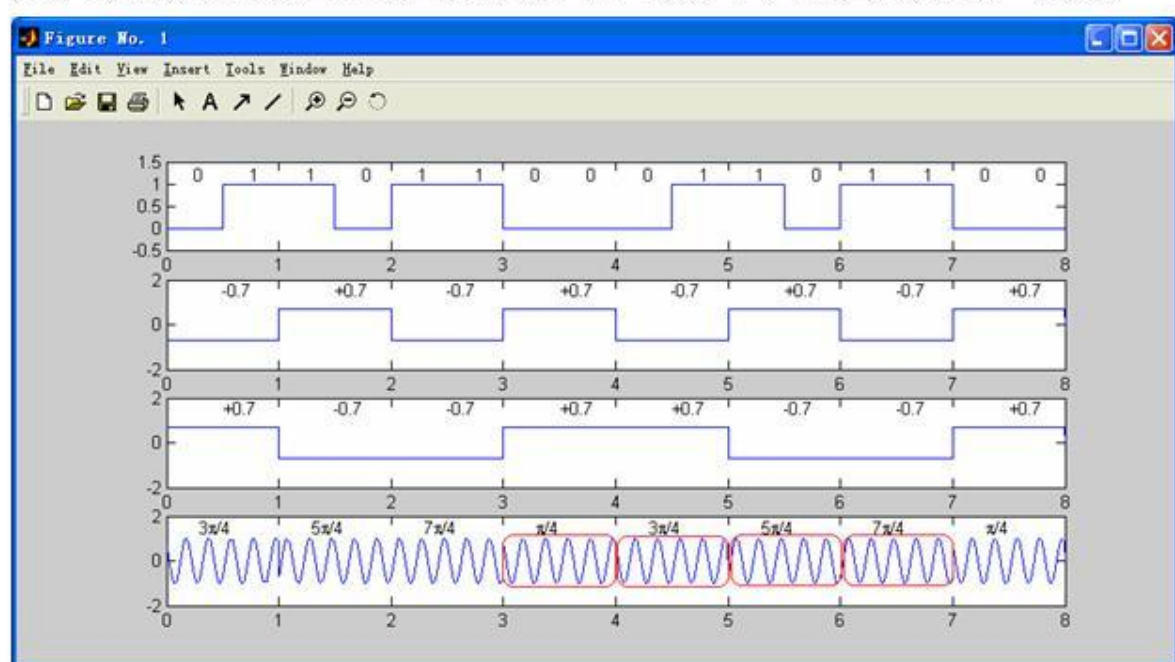
“持续一段固定时间的通信信道有效状态就是码元”感觉解释得也不是非常清楚。

到底码元的物理意义是什么？

想了很长时间，觉得这样理解比较合适：**在通信信道中持续固定时间，具有一定相位或幅值的一段余弦载波，就是码元。**

按这种理解，BPSK中有两种码元：对应两种相位的余弦波；

QPSK中有四种码元：对应4种相位的余弦波。如下图所示，每个红色框中都是一个码元。



16QAM中有16种码元，对应16种不同幅度和相位的余弦波。

连载 42：各种数字调制方式的性能比较

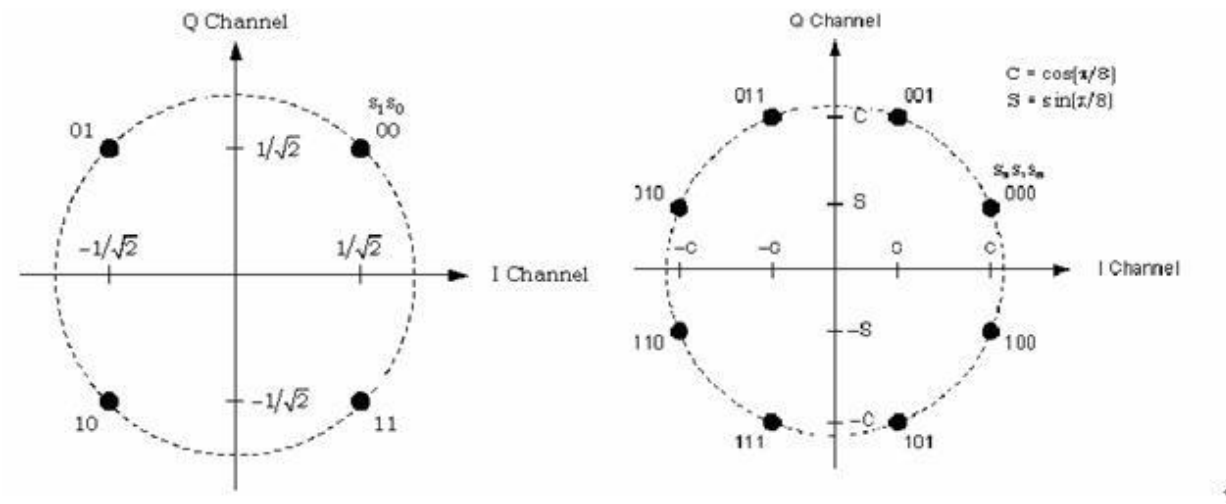
不同阶数的数字调制的调制效率不同，阶数越高，调制效率越高，也就是说：相同码元速率情况下承载的比特数越多，对应的比特速率也越高。

假定某数字调制对应的码元有N种，则每个码元承载的比特数为： $\log_2 N$

下表列出了常见的几种数字调制方式每个码元承载的比特数：

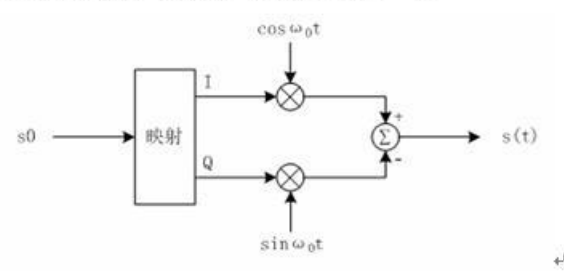
调制方式	每个码元承载的比特数
BPSK	1 bit
QPSK	2 bit
8PSK	3 bit
16QAM	4 bit
64QAM	6 bit

但是随着阶数的提高，星座图中点间距变小，数字调制的抗干扰能力也越差，对信道质量的要求也越高。



连载 43：利用 IQ 调制实现 BPSK 调制

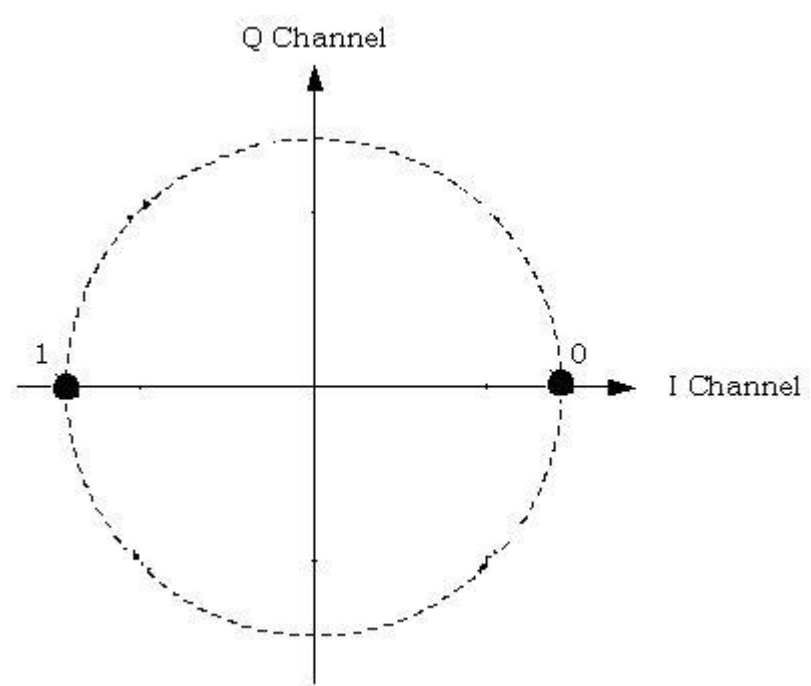
一般的系统中经常会同时用到BPSK、QPSK、QAM调制等多种调制方式，前面讲了QPSK、8PSK和QAM调制可以利用IQ调制来实现，那BPSK能不能用IQ调制来实现呢？
答案是肯定的—只要令Q路数据为0即可。



输入信号和IQ信号、输出信号相位之间的映射关系为：

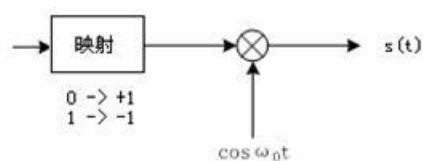
输入信号： s_0	IQ信号	输出信号相位
0	+1, 0	0
1	-1, 0	π

BPSK的星座图如下：

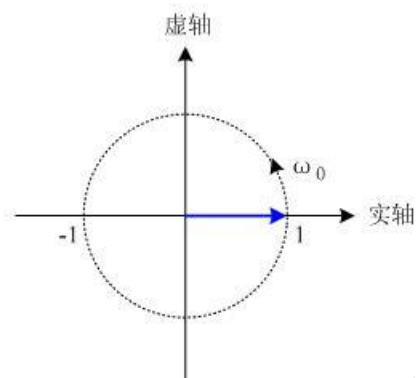


连载 44：利用旋转向量理解 BPSK 调制

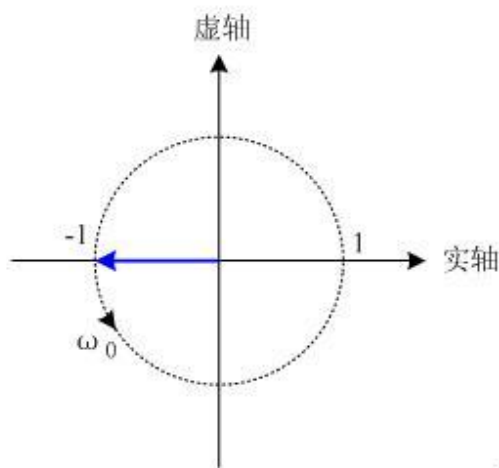
BPSK调制的过程如下：



当输入是0时，输出： $s(t) = \cos \omega_0 t = \text{Re}\{e^{j\omega_0 t}\}$ ，也就是复平面上初始位置如下图所示的旋转向量在实轴上的投影。

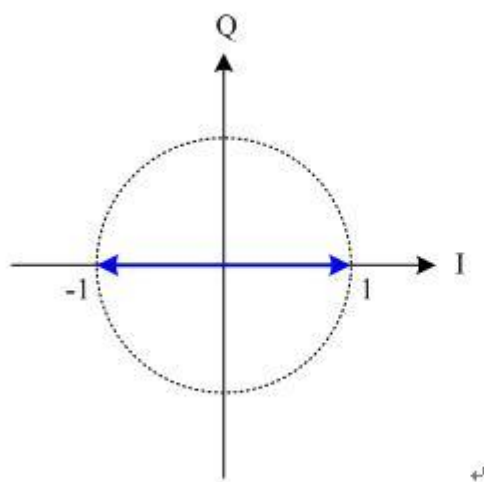


当输入是1时，输出： $s(t) = -\cos \omega_0 t = \cos(\omega_0 t + \pi) = \text{Re}\{e^{j(\omega_0 t + \pi)}\}$ ，也就是复平面上初始位置如下图所示的旋转向量在实轴上的投影。



BPSK调制的过程就是旋转向量的初始位置随着输入信号不断变化的过程：输入是0时，从 $1+j0$ 位置开始以 ω_0 的角速度逆时针旋转；输入是1时，从 $-1+j0$ 位置开始以 ω_0 的角速度逆时针旋转。旋转向量在实轴上的投影就是BPSK调制后的信号。

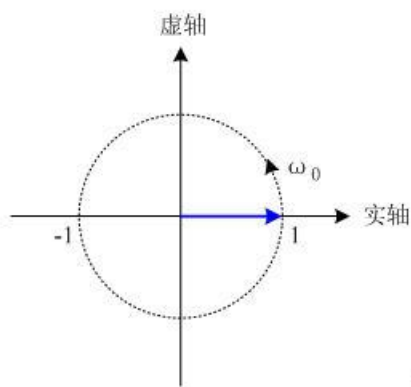
将上述两个初始位置的向量画在同一个复平面上，如下图所示：



这本质上就是BPSK调制的星座图。

连载 45：利用旋转向量理解 BPSK 解调（一）

从前一连载我们知道：当输入是0时，BPSK调制输出的信号为： $s(t) = \cos \omega_0 t = \text{Re}\{e^{j\omega_0 t}\}$ ，
也就是复平面上初始位置如下图所示的旋转向量在实轴上的投影。✎

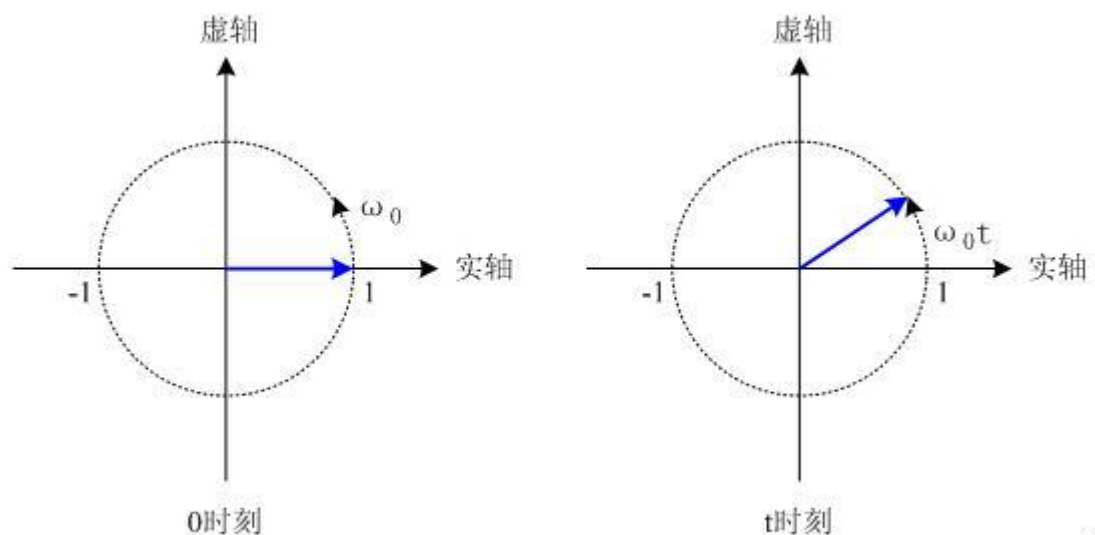


这个信号到了接收端如何解调出+1（0）来呢？✎

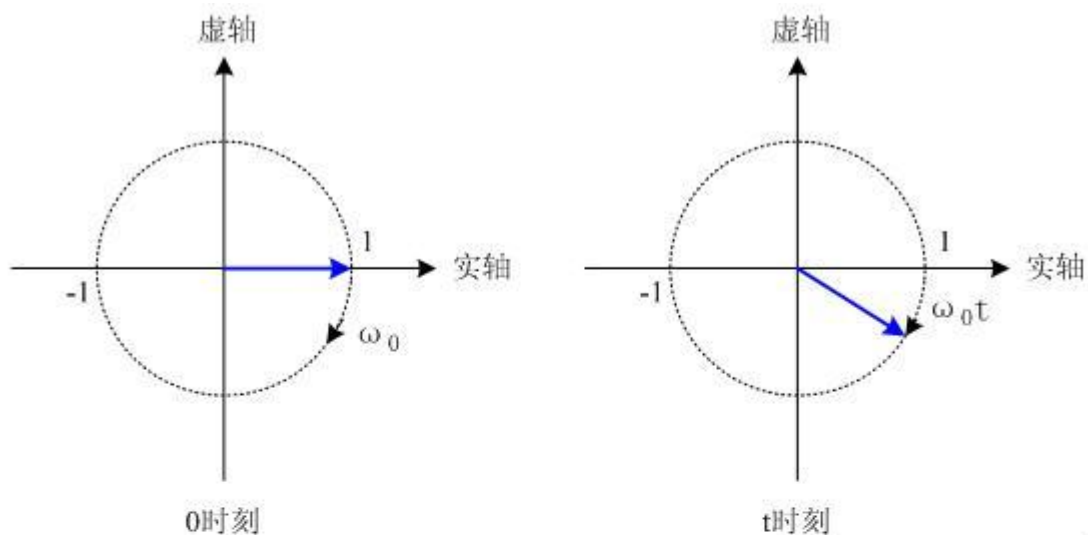
如果发送到接收端的信号是上面的旋转向量就好了，我们可以很容易地把+1给解调出来，怎么做呢？✎

使用一个初始位置位于实轴上，模为1，顺时针方向旋转，旋转角速度为 ω_0 的旋转向量与接收到的旋转向量相乘即可！（对向量相乘不熟悉的同学建议复习一下连载19）✎

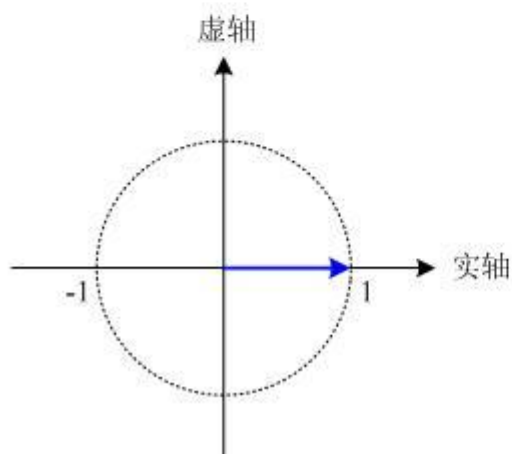
这是接收到的旋转向量0时刻和t时刻的位置：✎



这是本地解调用的旋转向量0时刻和t时刻的位置：✎

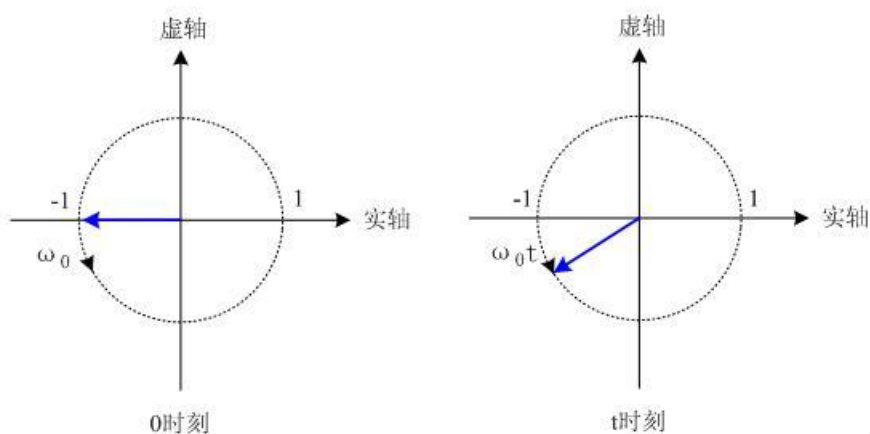


这两个向量相乘的结果是：得到一个停在实轴上、不旋转的向量！



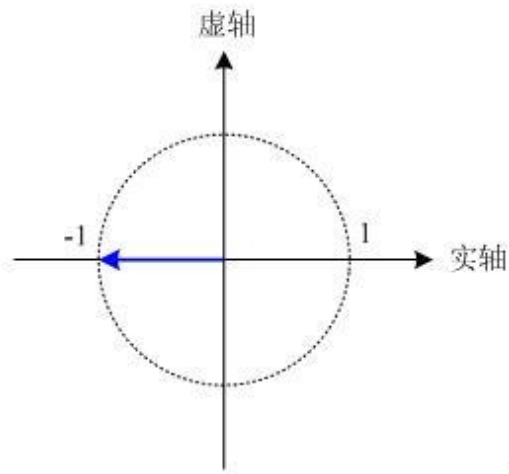
由此我们可以解调出+1，进而知道发送端发的是0。

如果接收到的旋转向量0时刻和t时刻的位置：



与本地解调用的旋转向量相乘后的结果是：得到一个停在实轴上、不旋转的向量！





由此我们可以解调出-1，进而知道发送端发的是1。

非常遗憾的是：我们在接收端收到的并不是旋转向量，而是该旋转向量在实轴上的投影！

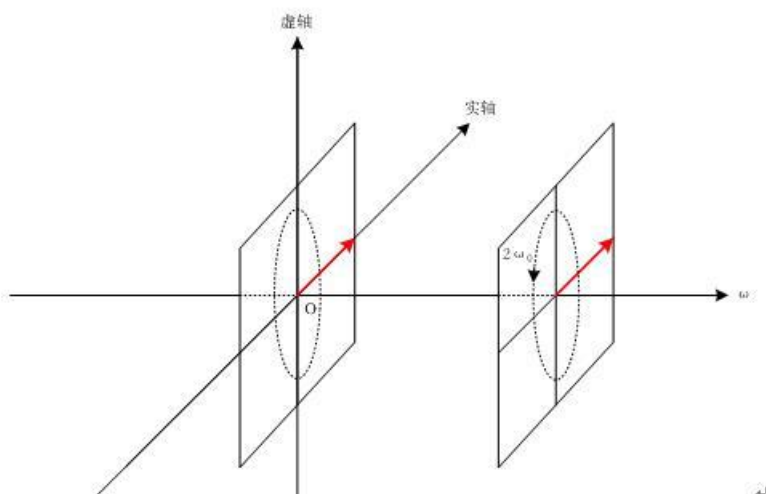
那怎么办呢？且听下回分解。

连载 46：利用旋转向量理解 BPSK 解调（二）

还记得连载11讲的“如何将信号分解为复指数信号之和”吗？虽然我们在接收端收到的是个实信号 $s(t) = \cos \omega_0 t = \text{Re}\{e^{j\omega_0 t}\}$ ，不是复指数信号，但根据欧拉公式，我们可以将这个信

号分解为两个旋转方向相反的旋转向量之和： $s(t) = \cos \omega_0 t = \frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})$

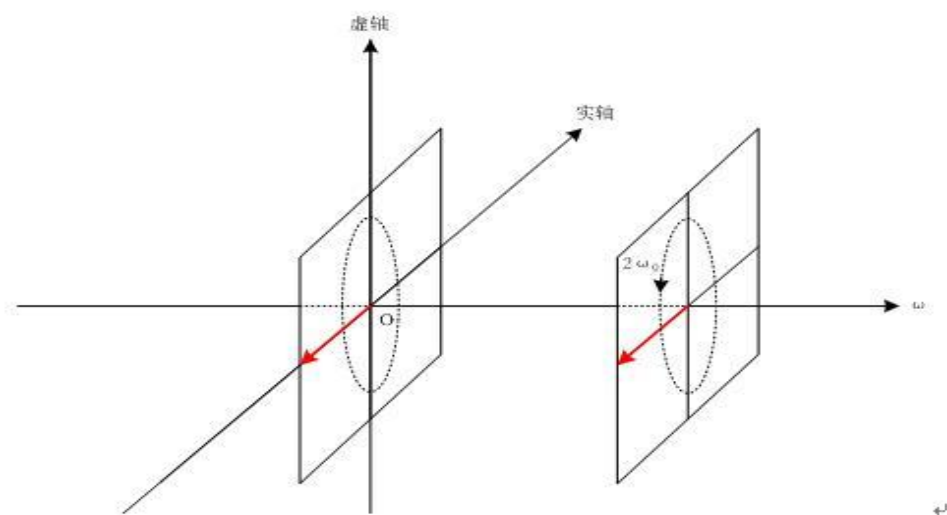
还是使用一个初始位置位于实轴上，模为1，顺时针方向旋转，旋转角速度为 ω_0 的旋转向量与上述接收信号相乘，再乘以2，我们得到一个停在实轴上、不旋转的向量和一个顺时针旋转的、旋转角速度为 $2\omega_0$ 的旋转向量！ $2s(t)e^{-j\omega_0 t} = 1 + e^{-j2\omega_0 t}$



如果发送端发送的是1（映射后为-1），接收端收到的信号为

$$s(t) = -\cos \omega_0 t = -\frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})$$

还是使用那个初始位置位于实轴上，模为1，顺时针方向旋转，旋转角速度为 ω_0 的旋转向量与上述接收信号相乘，再乘以2，我们得到一个停在实轴上、不旋转的向量和一个顺时针旋转的、旋转角速度为 $2\omega_0$ 的旋转向量！ $2s(t)e^{-j\omega_0 t} = -1 - e^{-j2\omega_0 t}$

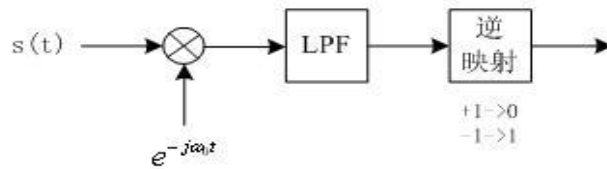


取出其中不旋转的那个向量，我们就可以解调出-1，进而知道发送端发的是1。

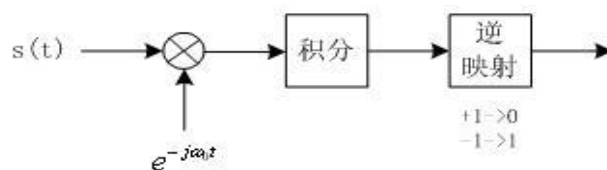
连载 47：利用旋转向量理解 BPSK 解调（三）

如何取出不旋转的那个向量呢？

1、使用低通滤波器（LPF，Low Pass Filter）进行低通滤波，滤除高频分量，得到直流分量。



2、积分：



$$\frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) e^{-j\omega_b t} dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} (1 + e^{-j\omega_b t}) dt = 1 + \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} (\cos 2\omega_b t + j \sin 2\omega_b t) dt = 1$$

$$\frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) e^{-j\omega_b t} dt = -\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} (1 + e^{-j\omega_b t}) dt = -1 - \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} (\cos 2\omega_b t + j \sin 2\omega_b t) dt = -1$$

注：其中用到了正弦函数和余弦函数在基波周期内的积分结果为0，由此很容易得出：旋转向量在基波周期内的积分为0。