ISFA - M2 Actuariat — Techniques Numériques
Projet à rendre pour le 25 janvier 2026 (avant 23h)

Estimation d'une *provision pour dépréciation durable* (PDD) et construction de *model points*.

En assurance, la PDD est constituée si la valeur de marché de l'actif est inférieure à sa valeur d'acquisition pendant au moins 6 mois consécutifs. Cette provision est calculée ligne à ligne pour l'ensemble des actifs non obligataires. Celle-ci est reprise en cas de vente d'actif ayant conduit à une dotation de PDD.

Sur un exercice comptable (une année), la dotation de PDD correspond à l'anticipation d'une perte de valeur de l'actif de plus de $\alpha\%$ ($\alpha \in [0,1]$) avec une perte durable. En d'autres termes, si l'on note $S = (S_t)_{t\geq 0}$ l'actif avec la dynamique suivante, sous la probabilité risque neutre $\mathbb{Q}$,

$$\frac{dS_t}{S_t} = r_t dt + \sigma dW_t, \tag{1}$$

et l'on suppose que ce dernier a été acquis à une date antérieure à $t = 0$ au prix S_a ; en fin du premier exercice, c.-à-d. $t = 1$, l'assureur enregistre une dépréciation lorsque les deux événements suivants se réalisent :

$$S_1 \leq \alpha S_a, \qquad \text{et} \qquad \sup_{u\in]1/2,1]} S_u \leq S_a.$$

Dans ce cas, la perte enregistrée (valeur nette comptable) est égale à $(S_a - S_1)$. La PDD pour cette période (calculée en début de période, $t = 0$) est donnée par l'espérance sous la probabilité risque neutre $\mathbb{Q}$ de la perte

$$\lambda_0(r,\sigma,S_a,S_0) = (S_a - S_1)\, \mathrm{I}_{\{S_1\leq \alpha S_a\}}\, \mathrm{I}_{\{\sup_{u\in]1/2,1]} S_u \leq S_a\}}, \tag{2}$$

et on a donc $\mathrm{PDD}_1 = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\big[\lambda_0(r,\sigma,S_a,S_0)\big]$. Pour la période suivante, la perte est enregistrée lorsque les deux événements précédents (calculés sur la seconde période) se réalisent. Autrement dit, la PDD_2 est donnée par l'espérance de la quantité suivante, pour $r = (r_t)_{t\geq 0}$,

$$\lambda_0(r,\sigma,S_a,S_0) + \lambda_1(r,\sigma,S_a,S_0)$$

où

$$\lambda_1(r,\sigma,S_a,S_0) = \big(S_a - \lambda_0(r,\sigma,S_a,S_0) - S_2\big)^+\, \mathrm{I}_{\{S_2\leq \alpha S_a\}}\, \mathrm{I}_{\{\sup_{u\in]3/2,2]} S_u \leq S_a\}}.$$

Par récurrence, nous avons la perte suivante en fin de période T :

$$\lambda_{T-1}(r,\sigma,S_a,S_0) = \big(\Omega_{T-1} - S_T\big)^+\, \mathrm{I}_{\{S_T\leq \alpha S_a\}}\, \mathrm{I}_{\{\sup_{u\in]T-1/2,T]} S_u \leq S_a\}} \tag{3}$$
$$\text{avec} \quad \Omega_{T-1} = S_a - \sum_{t=0}^{T-1} \lambda_t(r,\sigma,S_a,S_0).$$

La provision pour dépréciation durable (PDD) pour cet actif est la suivante (on simplifie en considérant le taux d'actualisation r_0 constant) :

$$\mathrm{PDD}_T(r,\sigma,S_a,S_0) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\sum_{t=0}^{T-1} e^{-r_0 t}\lambda_t(r,\sigma,S_a,S_0).\right]. \tag{4}$$

L'objectif de ce qui suit est l'estimation/quantification de cette PDD en environnement de taux non-constant, ainsi que l'évaluation de la pertinence de l'utilisation d'un *model point* pour l'agrégation des actifs.

1. Un seul actif et une seule période.

On considère le cas expliqué supra, que l'on complète avec le modèle de Vasicek pour la dynamique du taux sans risque :

$$dr_t = \gamma(b - r_t)dt + \sigma_r dW_t^r,$$

avec $(W_t^r)_{t\geq 0}$ et $(W_t)_{t\geq 0}$ (le mouvement Brownien de la dynamique de $(S_t)_{t\geq 0}$) deux mouvements Browniens de corrélation $\rho_r = 0.1$.

On utilisera dans cette section les valeurs suivantes :

$r_0 = 2\%$, $b = 2.5\%$, $\gamma = 0.2$, $\sigma_r = 1\%$, $\sigma = 30\%$, $S_a = 110$, $S_0 = 100$ et $\alpha = 0.8$.

L'objectif de cette section est d'estimer $\mathbb{P}[\lambda_0(r, \sigma, S_a, S_0) > 0]$ ainsi que PDD_1 avec une méthode de Monte-Carlo où les dynamiques de S et de r sont discrétisées via un schéma d'Euler dont vous préciserez le pas (à choisir).

On implémentera les deux méthodes suivantes :

Méthode naïve. On implémentera simplement la méthode de Monte-Carlo où $\sup_{u\in]t-1/2,t]} S_u$ est calculé sur les éléments de la trajectoires discrète de S.

Méthode raffinée. Ici, il s'agit d'un raffinement naturel de la méthode naïve consistant en l'utilisation d'un *pont Brownien* pour quantifier la probabilité de franchissement de la barrière S_a entre deux éléments consécutifs de la grille de discrétisation de la trajectoire de S.

1) Présenter les résultats et comparer la convergence des deux méthodes (en fonction du nombre de pas de discrétisation). Commenter les résultats.

2. Un seul actif et plusieurs périodes.

On considère les deux méthodes de simulation citées supra (naïve et raffinée). L'objectif est de comparer les deux méthodes dans le cadre de l'estimation de la PDD sur plusieurs périodes. On étudiera ensuite la sensibilité de la PDD par rapport aux paramètres (chocs simples) r_0, σ, S_a et S_0.

2.1 Estimation de la PDD.

En considérant les mêmes valeurs initiales pour les paramètres et à l'aide des deux méthodes précédentes :

i) Estimer la PDD pour les périodes suivantes : $T = 1, 2, 5, 10, 15$,

ii) Etudier l'évolution de la PDD en fonction de r_0 et σ pour $T = 1$ et $T = 10$.
On prendra dix valeurs de chaque paramètre.

2) Présenter et commenter les résultats obtenus.

2.2 La sensibilité de la PDD.

Ici, il s'agit de quantifier la sensibilité de la PDD par rapport à la volatilité σ, le taux d'intérêt sans risque initial r_0 et la valeur initiale de l'actif S_0. En d'autres termes, nous avons besoin d'approcher les quantités suivantes :

$$\text{Vega} = \frac{\partial}{\partial \sigma}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\lambda_0(r, \sigma, S_a, S_0)], \quad \text{Rho} = \frac{\partial}{\partial r_0}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\lambda_0(r, \sigma, S_a, S_0)], \quad \text{Delta} = \frac{\partial}{\partial S_0}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\lambda_0(r, \sigma, S_a, S_0)].$$

Vous pouvez utiliser, par exemple, une méthode de différence finies.

3) Tracer l'évolution de ces trois grecques de la PDD en fonction de r_0, σ et S_0. Commenter les résultats.

3. Plusieurs actifs. Dans cette partie on utilisera uniquement la méthode *naïve*. L'objectif est de calculer la PDD ainsi que la probabilité de dépréciation quand l'assureur détient d actifs, $d = 10$. Pour simplifier, on supposera que les actifs numéro 1 à 5 ont une pondération de 1, et les actifs numéro 6 à 10 une pondération de 3. Le portefeuille est donc composé de

$$\{S_1, S_2, \ldots, S_5, 3S_6, 3S_7, \ldots, 3S_{10}\}.$$

On utilisera la matrice de corrélation du vecteur $(S_1, S_2, \ldots, S_{10}, r)$, construite de la façon suivante. On introduit la matrice triangulaire supérieure Γ telle que, pour $1 \le i \le j \le d+1$,

$$\Gamma_{ij} = \mathbf{1}_{\{i=j\}} + u_{ij}\mathbf{1}_{\{i\neq j, j<d+1\}} + \mathbf{1}_{\{i<j=d+1\}}\tilde{u}_{i(d+1)}$$

où les $(u_{ij})_{1\le i\le j\le d}$ sont des lois uniformes sur $[0,1]$ et les $(\tilde{u}_{i(d+1)})_{1\le i\le d}$ des lois uniformes sur $[0, 0.2]$. La matrice de corrélation finale est obtenue en deux étapes : on pose d'abord $\Sigma^0 = \Gamma^T\Gamma$, puis on renormalise

$$\Sigma_{ij} = \frac{\Sigma^0_{ij}}{\sqrt{\Sigma^0_{ii}\Sigma^0_{jj}}}.$$

Notons que, du fait de la renormalisation, Γ^T n'est donc pas exactement la matrice de Cholesky de Σ. Les valeurs S_a d'acquisition des actifs seront données par d loi uniforme sur $[100, 120]$ et les valeurs S_0 des actifs en $t = 0$ seront données par d lois uniforme sur $[90, 110]$. La volatilité σ^i de chaque actif $1 \le i \le d$ sera donnée par une loi uniforme sur $[0.1, 0.5]$, et on gardera $\sigma_r = 1\%$. On pourra ainsi utiliser le code R suivant

```
sigma = runif(d, 0.1, 0.5)
Sa = runif(d, 100, 120)
S0 = runif(d, 90, 110)
```

Attention : On utilisera l'algorithme de Cholesky et non pas les fonctions de simulations multivariées existantes en R ou Python pour les simulations.

3.1 Construction d'un *model point* et simulation

Dans un premier temps, l'objectif est de calculer $\mathrm{PDD}_1 = \sum_{i=1}^d \alpha_i \mathrm{PDD}_1^i$ ainsi que $\mathbb{P}(\mathrm{PDD}_1 > 0)$ pour $T = 1$, avec PDD_1^i la dépréciation pour l'actif i, α_i le poids de l'actif au sein du portefeuille.

On suppose que l'assureur utilise un *model point*, dans le sens où l'on combine la dynamique du taux sans risque (mêmes paramètres que ci-dessus) avec celle d'un seul actif risqué caractérisé par des paramètres σ^0, S_a^0 et S_0^0 et une dynamique de Black & Scholes pour représenter l'ensemble des d actifs risqués (S^0 est un actif représentatif). Quelle serait la paramétrisation optimale σ^0, S_a^0 et S_0^0 pour reproduire la dépréciation PDD_0 ainsi que la probabilité $\mathbb{P}(\mathrm{PDD}_0 > 0)$? Autrement dit :

4) Décrire les paramètres de S^0 en fonction des σ^i, S_a^i, S_0^i et des corrélations Σ_{ij} pour reproduire la PDD calculée *actif par actif*. En déduire une estimation de PDD_1 par la méthode naïve.

5) Comparer la PDD obtenue à l'aide du *model point* avec celle issue de la simulation des trajectoires de chaque actif, pour $T = 5$ et $T = 10$. On prendra une unique matrice de corrélation, fixée initialement, pour l'ensemble des simulations Monte-Carlo et les deux méthodes. Commenter les résultats, en prenant aussi en compte le temps de calcul.

3.2 Value at Risk et comparaison.

On s'intéresse maintenant à la quantification du risque de provisionnement. Pour $T \ge 1$, on définit la perte totale (non actualisée) associée au portefeuille :

$$L_T = \sum_{i=1}^{10} \alpha_i \sum_{t=0}^{T-1} \lambda_t^i(r, \sigma^i, S_a^i, S_0^i),$$

où λ_t^i désigne la perte de l'actif i à la période t et α_i son poids dans le portefeuille.

On souhaite estimer la Value-at-Risk (VaR) de cette perte au niveau de confiance $\beta \in \{99\%, 99.5\%\}$, définie par

$$\mathrm{VaR}_\beta(L_T) = \inf\{x \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(L_T \le x) \ge \beta\}.$$

6) Estimer $\mathbf{VaR}_{99\%}(L_T)$ et $\mathbf{VaR}_{99.5\%}(L_T)$ pour $T = 1$ et $T = 5$ à l'aide de la simulation actif par actif. Tracer la distribution empirique de L_T.

7) Comparer avec les valeurs obtenues via le model point.

Consignes de rendu : Le rendu prendra la forme d'un rapport de 20 pages maximum expliquant vos démarches et commentant les résultats. Vous serez attentifs à la reproductibilité du code, par exemple en fixant la graine (seed) pour les simulations. On rendra aussi un **unique** fichier source pour les codes (R ou Python, me prévenir par mail sinon). Le rendu peut être rédigé en anglais.
Le projet est à rendre pour le dimanche 25 janvier 2026 avant 23h. Le rapport ainsi que le fichier source du code doivent être nommés de la façon suivante

Nom1_Nom2_Nom3_Nom4.extension

et les noms doivent également figurer en début de rapport. Le dépôt se fera directement sur Moodle, via l'onglet "Projet_Final".

Quelques références (cas similaires).

Dorobantu, D., Salhi, Y., & Thérond, P. E. (2018). Modelling net carrying amount of shares for market consistent valuation of life insurance liabilities. Methodology and Computing in Applied Probability, 1-35.

Azzaz, J., Loisel, S., & Thérond, P. E. (2015). Some characteristics of an equity security next-year impairment. Review of Quantitative Finance and Accounting, 45(1), 111-135.