实验六 拉普拉斯变换、连续时间系统的 s 域分析

6.1 实验目的

（1）掌握拉普拉斯变换及其意义；

（2）对连续时间系统进行 s 域分析。

6.2 实验预习

（1）复习拉普拉斯变换的定义、收敛域及拉普拉斯逆变换法分析系统；
（2）复习系统函数的零极点分布与系统的时间特性。

6.3 实验仪器

表 6-1 实验仪器与器件列表

名称	数量	型号（推荐）
电脑	1	CPU i5 以上
MATLAB 软件	1	2012 以上版本

6.4 实验原理

1、拉普拉斯变换

连续时间系统复频域分析的方法是采用拉普拉斯变换将连续时间系统时域变换成复频域，在复频域经过求解后再利用拉普拉斯逆变换从复频域变换到时域，完成连续时间系统的时域问题分析。此外，利用拉普拉斯变换方法也可以求解常系数线性微分方程。

连续时间信号$f(t)$的拉普拉斯变换$F(s)$的极点位置决定了信号$f(t)$的时域特性。$F(s)$的实极点决定了$f(t)$中的实指数信号分量，$F(s)$的共轭极点决定了$f(t)$中按指数规律变化的正弦（或余弦）振荡分量。

如果连续时间信号$f(t)$可以用符号表达式表示，则可以直接调用 MATLAB 的 laplace 函数来实现其单边拉普拉斯变换。调用 laplace 函数的命令格式为

L=laplace(F)

其中，输入参数 F 为连续时间信号$f(t)$的符号表达式，输出参量 L 为返回默认符号自变量 s 的关于 F 的拉普拉斯变换的符号表达式。例如，求单边正弦信号

$f(t)=\sin(\omega t)u(t)$的拉普拉斯变换，在 MATLAB 中输入：

```
syms t w;             %定义时间符号变量
F = sin(w*t);         %定义连续时间信号的表达式
L=laplace(F)          %计算拉普拉斯变换的符号表达式
```

运行结果为

```
L =
w/(s^2 + w^2)
```

利用 MATLAB 实现拉普拉斯逆变换的方法有两种：一种是利用 MATLAB 的符号运算完成拉普拉斯逆变换，另一种是采用部分分式展开法完成拉普拉斯逆变换。下面分别具体介绍两种方法的实现：

（1） 利用 ilaplace 函数进行拉普拉斯逆变换。

MATLAB 中 ilaplace 函数可以用于计算拉普拉斯逆变换，ilaplace 函数的调用方式为：

F=ilaplace(L)

其中，输入参量 L 为连续时间信号$f(t)$的拉普拉斯变换$F(s)$的符号表达式，输出参数 F 为返回默认符号自变量 t 的关于符号表达式 L 的拉普拉斯逆变换$f(t)$的符号表达式。例如，利用 MATLAB 求解以下函数的拉普拉斯逆变换：

$$F(s)=\frac{4s+5}{s^2+5s+6} \qquad \text{（式 6-1）}$$

在命令窗口中输入：

```
syms s;                   %定义复变量 s
L=(4*s+5)/(s^2+5*s+6);    %定义拉普拉斯变换的符号表达式
F=ilaplace(L)             %计算拉普拉斯逆变换
```

运行结果为：

```
F =
7*exp(-3*t) - 3*exp(-2*t)
```

（2） 利用部分分式展开函数 residue 进行拉普拉斯逆变换。

将连续时间信号$f(t)$的拉普拉斯变换$F(s)$写为如下形式：

$$F(s)=\frac{b(s)}{a(s)}=\frac{\sum_{j=0}^{M}b_j s^j}{\sum_{i=0}^{N}a_i s^i}=\sum_{i=0}^{N}\frac{r_i}{s-p_i}+\sum_{j=0}^{M-N}k_j s^j \qquad \text{（式 6-2）}$$

式中，p_i为$F(s)$的极点；若$M<N$，k_j为零。通过 residue 函数可以直接求出上式中$F(s)$的系数k_j、极点p_i及部分分式的系数。

residue 函数的调用形式为：[r, p, k]=residue(b, a)，输入参数 b 和 a 分别对应

于上式中拉普拉斯变换$F(s)$的分子和分母多项式 b(s)和 a(s)，输出参量 r 为包含$F(s)$所有部分分式展开系数的列向量r_i，p 为包含$F(s)$所有极点位置的列向量p_i，k 为多项式的系数列向量（大部分情况 k 为 0 或者常数）。

例如，已知一个连续时间系统在 s 域的系统函数为：

$$H(s) = \frac{2s+4}{s^3+4s} \qquad \text{（式 6-3）}$$

在 MATLAB 中输入：

```
b=[2,4];                    %定义分子多项式行向量 b
a=[1 0 4 0];                %定义分母多项式行向量 a
[r p k]=residue(b,a)        %计算部分分式展开系数
```

运行结果为

```
r =
  -0.5000 - 0.5000i
  -0.5000 + 0.5000i
   1.0000 + 0.0000i
p =
   0.0000 + 2.0000i
   0.0000 - 2.0000i
   0.0000 + 0.0000i
k =
     []
```

由上述结果可以看出，系统函数有三个极点，其中有一对共轭极点$P_{1,2} = \pm 2j$和一个实极点$P_3 = 0$。用 abs(r)和 angle(r)分别求出共轭极点对应的部分分式展开项系数的模和相位，也可以利用 cart2pol 函数将笛卡尔坐标转换成极坐标，比如输入：

```
[angle mag]=cart2pol(real(r),imag(r))
```

运行结果如下（这里的相位为$\pm\frac{3}{4}\pi$）：

```
angle =
   -2.3562
    2.3562
         0
mag =
    0.7071
    0.7071
```

```
1.0000
```

由程序运行结果可知，$H(s)$的部分分式展开为

$$H(s)=\frac{-0.5-j0.5}{s-j2}+\frac{-0.5+j0.5}{s+j2}+\frac{1}{s}=\frac{0.707e^{-j2.3562}}{s-j2}+\frac{0.707e^{j2.3562}}{s+j2}+\frac{1}{s}$$

$$=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-j\frac{3}{4}\pi}}{s-j2}+\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}e^{j\frac{3}{4}\pi}}{s+j2}+\frac{1}{s}$$

因此，得到该连续时间系统的单位冲激响应$h(t)$为

$$h(t)=[1+\sqrt{2}\cos\left(2t-\frac{3}{4}\pi\right)]u(t) \qquad (式 6-4)$$

2、连续时间系统的 s 域分析

在连续系统的复频域分析中，系统的零状态响应的拉普拉斯变换与激励的拉普拉斯变换之比称为系统函数，通过系统函数我们可以对系统的稳定性、时域特性等进行分析。

一般来说，系统函数$H(s)$为有理分式:

$$H(s)=\frac{\sum_{i=0}^{m}b_i s^i}{\sum_{i=0}^{n}a_i s^i} \qquad (式 6-5)$$

$H(s)$中分子分母均是 s 的有理多项式，将（式 6-5）的分子多项式与分母多项式的根分别称为$H(s)$的零点与极点。将$H(s)$因式分解后可以得到：

$$H(s)=\frac{A\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)} \qquad (式 6-6)$$

在上式中z_i和p_i分别是系统函数的零点与极点，零点与极点在 s 平面上的位置不同，对单位冲激响应的影响也有所不同。上式表明，系统函数的零点与极点分布完全决定了系统的特性。MATLAB 为系统函数的零点、极点分析提供了相应的函数。

（1）pole 函数用于计算系统函数的极点，调用方式为 p=pole(sys)，其中输入参量 sys 为系统函数对象，在实验三中已经介绍，sys 可由 tf 函数生成，输出参量 p 为包含系统函数所有极点位置的向量。

（2）zero 函数用于计算系统函数的零点，用法与 pole 函数类似，调用方式为 z=zero(sys)，其中输入参量 sys 为系统函数对象，输出参量 z 为包含系统函数所有零点位置的向量。

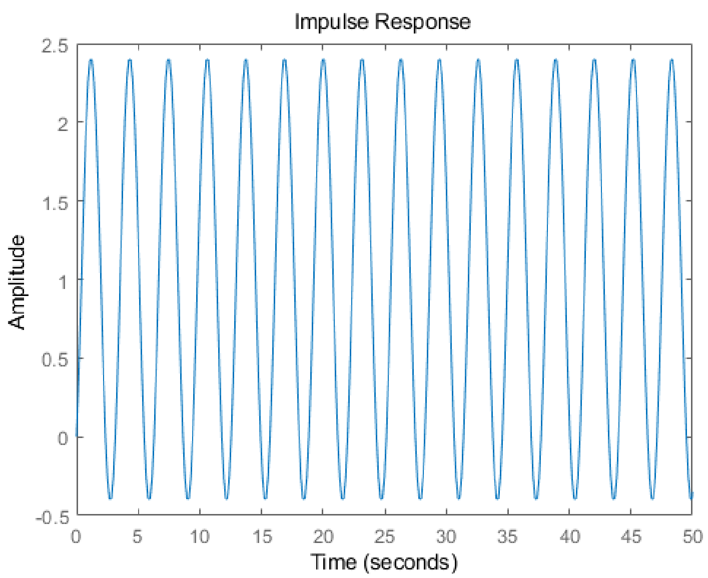
（3）pzmap 函数用于绘制系统的零点和极点分布图以及计算系统函数的零、极点位置，该函数有两种调用格式，第一种为 pzmap(sys)，sys 为系统函数对象，该用法下可直接绘出系统函数的零点和极点的分布图，在零极点图中，符号“o”代表零，符号“x”代表极点。第二种调用格式为[p z]=pzmap(sys)，同样地，sys

为系统函数对象，输出参数 p 和 z 分别返回系统函数的极点与零点位置的向量。

（4）impulse 函数可用于绘制系统冲激响应的时域波形，对式（6-3）所描述连续系统的传递函数，输入

```
b=[2,4];                    %定义分子多项式行向量 b
a=[1 0 4 0];                %定义分母多项式行向量 a
impulse(b,a)                %绘制系统冲激响应曲线
axis([0,50,-0.5 2.5])       %坐标轴范围
```

得到



6.5 实验内容

1、利用部分分式展开法求下式函数的拉普拉斯逆变换，并和 ilaplace 函数求得的结果对比。

$$F(s)=\frac{s^2+3}{(s^2+2s+5)(s+2)}$$

2、已知连续时间系统的系统函数的极点位置分别如下所示（假设系统无零点）

(1) $H(s)=\frac{1}{s^2+4}$

(2) $H(s)=\frac{1}{(s+1)^2+16}$

(3) $H(s)=\frac{1}{(s-1)^2+16}$

请用 MATLAB 分别绘制上述 3 个连续系统的极点分布图，并绘制对应的冲激响应$h(t)$的时域波形（选择合适的坐标轴范围），分析系统函数极点位置对冲

激响应时域波形的影响，并根据系统极点的位置，判断系统是否稳定。

3、已知连续时间系统的系统函数分别如下所示

(1) $H(s)=\frac{1}{s^2+2s+17}$

(2) $H(s)=\frac{s+8}{s^2+2s+17}$

(3) $H(s)=\frac{s-8}{s^2+2s+17}$

请用 MATLAB 分别绘制上述 3 个连续系统的零极点分布图，并绘制对应的冲激响应$h(t)$的时域波形（选择合适的坐标轴范围），分析系统函数零点位置对冲激响应时域波形的影响。

6.6 注意事项

(1) **都必须独立完成任务，或查书，或百度谷歌，但是不允许复制粘贴（请自律），都尽可能地详尽，不能敷衍!!**

(2) 使用计算机和上网请遵守国家法律法规；

6.7 实验报告要求

(1) 独立完成实验内容，诚实记录实验结果；

(2) 实验思考题要写在实验报告中。

(3) 实验体会、意见和建议写在实验结论之后。

(4) 实验报告须包括：

1、电子版的实验报告；

2、程序源文件：*.m

以上内容请按照以下顺序放到一个文件夹内，并将文件夹命名为：学号-姓名-实验*，如：180110888-张三-实验一。