拉普拉斯变换、连续时间系统的S域分析

傅里叶变换

- 缺点
  - 只能处理符合狄里赫利条件的信号
  - 傅里叶逆变换对频率进行的无穷积分求解困难
- 比较
- 乘一衰减因子

傅里叶变换	拉普拉斯变换
自变量ω是实数，有明确的物理意义—频率	自变量s=σ+jω是复数，其物理意义不明确，通常称其为复频率
信号的傅里叶变换反映了不同频率分量的振幅大小与起始相位的值，即信号的频谱	信号的拉氏变换没有明确的物理意义
系统单位冲激响应的傅里叶变换，称作系统的频率响应，它表示不同频率的正余弦信号作用于系统时，系统输出的幅度与相位随输入频率改变而改变的特性	系统单位冲激响应的拉氏变换，称为系统的系统函数。它虽然较抽象，但是在表征系统特性及系统分析时起重要的作用
主要应用于信号与系统的频率分析，如调制、滤波、抽样等的频谱分析	主要应用于微分方程的求解、系统函数及其零极点分析等

比较

与傅里叶变换的转化

- LT收敛域包含虚轴 – 将拉氏变换中的s代以jω求得其傅里叶变换
- LT收敛域不包含虚轴 – 拉氏变换的极点在s平面上虚轴的右半平面，傅里叶变换不存在
- LT极点位于虚轴 – $X(j\omega)=X(s)|_{s=j\omega}+\frac{\pi A_0 j^{k-1}}{(k-1)!}\delta^{(k-1)}(\omega-\Omega_0)$

拉普拉斯变换

定义

- 拉普拉斯变换：$F(s)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt$ – 若为因果信号，则积分下限改为0_
- 拉氏逆变换：$f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}F(s)e^{st}\,ds$

常用信号的拉氏变换

时域信号 (t>0)	S域信号
$u(t)$	$\frac{1}{s}$
$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{s+\alpha}$
$\delta(t)$	1
$\delta(t-t_0)$	e^{-st_0}
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$

单边拉普拉斯变换

积分下限从0-开始

- 定义：$X(s)=\int_{0^-}^{\infty}x(t)e^{-st}dt$
- 基本性质
  - 线性：如有：$f_i(t)\xleftrightarrow{LT}F_i(s)$ 则 $f(t)=\sum_{i=1}^{N}a_if_i(t)\xleftrightarrow{LT}F(s)=\sum_{i=1}^{N}a_iF_i(s)$
  - 延时性：设 $f(t)\xleftrightarrow{LT}F(s)$，$f(t-t_0)u(t-t_0)\xleftrightarrow{LT}F(s)e^{-st_0}$ – 时移后的信号若为非因果信号不可用此性质；$e^{-\alpha t}u(t)$ 的延时是 $e^{-\alpha(t-t_0)}u(t-t_0)$
  - 频移性：设 $f(t)\xleftrightarrow{LT}F(s)$，S域平移性是 $f(t)e^{s_0t}\xleftrightarrow{LT}F(s-s_0)$
  - 时域和频域的位移
  - 时域展缩性：$f(t)\xleftrightarrow{LT}F(s)$，$f(at)\xleftrightarrow{LT}\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$ 常数a>0
  - 微积分性质
    - 时域微分性：设 $f(t)\xleftrightarrow{LT}F(s)$，$f'(t)\xleftrightarrow{LT}sF(s)-f(0^-)$；零状态条件下，时域微分一次，频域乘一个s
    - 时域积分性：$y(t)=\int_{-\infty}^{t}f(\tau)d\tau\xleftrightarrow{LT}\frac{y(0^-)}{s}+\frac{F(s)}{s}$
    - s域微分性：设 $f(t)\xleftrightarrow{LT}F(s)$，s域微分性 $-tf(t)\xleftrightarrow{LT}\frac{dF(s)}{ds}$　$tf(t)\xleftrightarrow{LT}-\frac{dF(s)}{ds}$
    - s域积分性：$\frac{f(t)}{t}\xleftrightarrow{LT}\int_{s}^{\infty}F(\lambda)d\lambda$
  - 卷积定理：设 $f_1(t)\xleftrightarrow{LT}F_1(s),f_2(t)\xleftrightarrow{LT}F_2(s)$ 则 $f_1(t)*f_2(t)\xleftrightarrow{LT}F_1(s)\cdot F_2(s)$，$f_1(t)f_2(t)\xleftrightarrow{LT}\frac{1}{2\pi j}F_1(s)*F_2(s)$
  - 初值与终值定理：设信号f(t)是因果的，且其导数的拉氏变换存在，则
    1、初值定理：$\lim_{t\to0^+}f(t)=f(0^+)=\lim_{s\to\infty}SF(s)$
    2、终值定理：若f(∞)存在，于是有 $\lim_{t\to\infty}f(t)=f(\infty)=\lim_{s\to0}SF(s)$

1.要考虑存在性，要注明收敛域
2.象函数的极点位于收敛域的两侧

双边拉氏变换

- 条件：$\lim_{t\to\infty}x(t)e^{-\sigma t}=0$ & $\lim_{t\to-\infty}x(t)e^{-\sigma t}=0$
- 右边信号：当信号是一右边信号，即t<t_0，x(t)=0，$X(s)=\int_{t_0}^{\infty}x(t)e^{-st}dt=\int_{t_0}^{\infty}x(t)e^{-\sigma t}e^{-j\omega t}dt$ – 使 $X(s)=X(\sigma_0+j\omega)=\int_{t_0}^{\infty}x(t)e^{-\sigma_0 t}e^{-j\omega t}dt$ 存在，则收敛域为 $\mathrm{Re}\{s\}=\sigma>\sigma_0$；因果信号是右边信号。
- 左边信号：当信号是一左边信号，即t>t_0，x(t)=0，$X(s)=\int_{-\infty}^{t_0}x(t)e^{-st}dt=\int_{-\infty}^{t_0}x(t)e^{-\sigma t}e^{-j\omega t}dt$ – 如果σ_1使上式满足绝对可积，即 $X(s)=X(\sigma_1+j\omega)=\int_{-\infty}^{t_0}x(t)e^{-\sigma_1 t}e^{-j\omega t}dt$ 存在，则收敛域为 $\mathrm{Re}\{s\}=\sigma<\sigma_1$
- 双边信号：当信号是一双边信号，其拉氏变换：$X(s)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-st}dt=\int_{-\infty}^{0}x(t)e^{-\sigma t}e^{-j\omega t}dt+\int_{0}^{\infty}x(t)e^{-\sigma t}e^{-j\omega t}dt$ – 如果σ_0使上式第二项满足绝对可积，σ_1使上式第一项满足绝对可积，即 $X(s)=\int_{-\infty}^{0}x(t)e^{-\sigma_1 t}e^{-j\omega t}dt+\int_{0}^{\infty}x(t)e^{-\sigma_0 t}e^{-j\omega t}dt$
  - 若$\sigma_0>\sigma_1$，以上X(s)不存在；
  - 若$\sigma_0<\sigma_1$，以上X(s)存在，且收敛域为：$\sigma_0<\mathrm{Re}\{s\}<\sigma_1$；
- 时限信号：当信号是一时限信号，即t_0>t>t_1，x(t)=0，$X(s)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-st}dt=\int_{t_0}^{t_1}x(t)e^{-st}dt=\int_{t_0}^{t_1}x(t)e^{-\sigma t}e^{-j\omega t}dt$ – 此时，若x(t)是绝对可积的，$x(t)e^{-\sigma t}$总是满足绝对可积的，所以其拉氏变换在整个s平面上均存在，即收敛域是s全平面。
- 收敛域
  - 收敛域与极点分布
    - 左边信号收敛域位于极点左边，右边信号收敛域位于极点右边
    - 双边信号收敛域是左边信号与右边信号收敛域的交集 – **交集为空，则对应双边LT不存在**
  - 求解
    - 右边信号$f(t)=e^{\alpha t}u(t)$，$F(s)=\int_0^{+\infty}e^{-(s-\alpha)t}dt,\mathrm{Re}\{s-\alpha\}>0\Rightarrow\alpha<\sigma$
    - 左边信号$f(t)=e^{\alpha t}u(-t)$，$F(s)=\int_{-\infty}^{0}e^{(\alpha-s)t}dt,\mathrm{Re}\{\alpha-s\}>0\Rightarrow\alpha>\sigma$
  - **收敛域不同，同一双边拉普拉斯变换式对应的双边信号可能不同**

拉普拉斯逆变换

- 大部分F（s）的分子分母均是s的有理多项式
  - 零点：分子多项式的根
  - 极点：分母多项式的根
- 求解方法
  - 部分分式法
    - 真分式
      - 极点为单实根的情况：$F(s)\xrightarrow{L^{-1}}f(t)=\left(k_1e^{p_1t}+\cdots+k_ne^{p_nt}\right)u(t)$ – 其中$k_i=(s-p_i)F(s)|_{s=p_i}$
      - 极点包含共轭复根的情况：$f_c(t)=e^{-\alpha t}(K_1e^{j\beta t}+K_1^*e^{-j\beta t})u(t)=2e^{-\alpha t}[A\cos(\beta t)-B\sin(\beta t)]u(t)$ – 其中$K_{1,2}=\frac{F_1(-\alpha\pm j\beta)}{\pm2j\beta}$（留数），$K_1$、$K_2$呈共轭关系：$K_{1,2}=A\pm jB$
      - 极点包含多重根的情况：$f_c(t)=\left[\frac{K_{11}}{(k-1)!}t^{k-1}e^{p_1t}+\cdots+\frac{K_{1i}}{(k-i)!}t^{k-i}e^{p_1t}+\cdots+K_{1k}e^{p_1t}\right]u(t)$ – $K_{1i}=\frac{1}{(i-1)!}\frac{d^{i-1}}{ds^{i-1}}[(s-p_1)^kF(s)]_{s=p_1}\quad(i=1,2,\ldots,k)$
      - 仅有共轭复根 – 可以拆成三角函数对应的LT形式
    - 假分式 – 长除法拆成真分式+多项式
  - 留数法：若极点$s=p_i$处留数为r_i，围线中有n个极点p_i(k阶)，则$f(t)=\sum_{i=1}^{n}r_i$，$r_i=\frac{1}{(k-1)!}\left[\frac{d^{k-1}}{ds^{k-1}}(s-p_i)^kF(s)e^{st}\right]$

电路分析

- 法一：将函数两边进行拉氏变换，用s域表示输出，再化为时域函数
- 法二：s域模型
  - 零状态响应适合用拉氏变换求，零输入响应用时域分析法求会比较迅速
  - 时域元件模型
    - $U_R(s)=RI_R(s)$，$U_L(s)=sLI_L(s)-Li_L(0^-)$，$U_C(s)=\frac{1}{sC}I_C(s)+\frac{1}{s}u_c(0^-)$ 回路分析（KVL）
    - $I_R=\frac{1}{R}U_R(s)$，$I_L(s)=\frac{1}{sL}U_L(s)+\frac{1}{s}i_L(0^-)$，$I_C(s)=sCU_C(s)-Cu_c(0^-)$ 结点分析（KCL）
  - 分析方法 – 时域求零输入响应（参数往往是定值，简单易求）；在s域利用系统函数求零状态响应 – 求零状态响应时，电路s域模型无需考虑由初始储能等效的电源

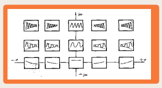
系统函数法与零极点分布

- 系统函数
  - 定义
    - 因果系统单位冲激响应的拉氏变换H(s)
    - 系统零状态响应的拉氏变换与激励的拉氏变换之比 — $H(s)=Y_{zs}(s)/X(s)$
    - 常见形式
      - 策动点函数 — 端口相同的i与v（单端口网络）
      - 转移函数 — 端口不同的i与v（双端口网络）

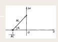
激励	响应	系统函数名称
电流	电压	策动点阻抗
电压	电流	策动点导纳
电流	电压	转移阻抗
电压	电流	转移导纳
电压	电压	转移电压比(电压传输函数)
电流	电流	转移电流比(电流传输函数)

- 系统函数零极点分布
  - 时域特性
    - 对象 — 集中参数LTI系统
    - 波形
      - 零点 — 影响波形的幅度、相位
      - 极点 — **决定波形的状态、形式**

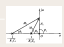
极点于S平面左半平面	h(t)呈衰减形式
极点于S平面右半平面	h(t)呈增长形式
极点于S平面虚轴上（不含原点）	h(t)等幅振荡（一阶极点）或增长振荡（多重极点）
极点于S平面实轴上（不含原点）	h(t)呈现与指数相关的变化（一阶或多重极点）
极点于S平面原点	h(t)等值u(t)（一阶极点）或增长t^n（多重极点）



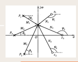
-
  -
    - 响应
      - 数学形式 — $r(t)=\sum_{i=1}^{n}K_ie^{p_it}+\sum_{k=1}^{v}K_ke^{p_kt}$
      - 固有频率与系统特性
        - 固有频率定义 — 因为$H(s)=\frac{\Delta_{jk}}{\Delta}$，故$H(s)$的极点都是系统的固有频率
          - 系统行列式的根
        - 结论
          - 零输入响应包含所有固有频率，能完全反映系统固有特性
          - H(s)可能存在零极相消，不一定像零输入响应一样包含所有系统固有特性
      - 分类
        - 自由与强迫 — **系统函数的极点决定自由响应形式，激励极点决定强迫响应形式，两者共同决定系数**
        - 稳态与瞬态
          - H(s)零点与E(s)极点相同 — 零极相消，E(s)对应的稳态响应不复存在
          - Re(pi)<0(稳定系统) — 瞬态响应包含自由响应
          - Re(pi)=0 — 稳态响应包含自由响应
  - 频响特性
    - 定义
      - 系统在正弦信号的稳态响应随信号频率的变化情况
      - $H(s)|_{s=j\omega}=H(j\omega)=|H(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$
幅频响应特性：$|H(j\omega)|$
相频响应特性：$e^{j\varphi(\omega)}$
    - 研究意义 — $e(t)=E_m\sin(\omega_0t)$，$H(s)=\frac{K_1}{s-p_1}+\ldots+\frac{K_n}{s-p_n}$
$r(t)=E_mH_0\sin(\omega_0t+\varphi_0)+K_1e^{p_1t}+\ldots+K_ne^{p_nt}$　$H(j\omega_0)=H_0e^{j\varphi_0}$
$r_{ss}(t)=E_mH_0\sin(\omega_0t+\varphi_0)$（对于稳定系统，稳态响应形式由激励决定）
故可通过设计$H(s)$，达到调控or筛选信号的目的
    - 分析方法 — 矢量分析法
      - 定义
        - 极点矢量 — 由极点出发指向虚轴上对应频点的矢量
        - 零点矢量 — 由零点出发指向虚轴上对应频点的矢量
      - 结论
        - 准则
          - **系统的幅频响应=零点矢量模之积/极点矢量模之积**
          - **相频响应=零点矢量相角之和-极点矢量相角之和**
        - 第一象限的零点矢量在ω→∞时，相位超过180°
      - 常见系统
        - 滤波特性（幅度）
          - 低通 — $H(s)=\frac{\alpha}{s+\alpha}$



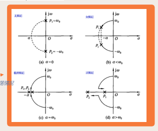
-
  -
    -
      -
        -
          - 高通 — $H(s)=\frac{s}{s+\alpha}$
          - 组合
            - 带阻 — 零点不在原点，且极点个数=零点个数
            - 带通
              - 高通和低通级联
              - 极点个数>零点个数，趋于零



-
  -
    -
      -
        -
          -
            - 全通
              - 零、极点分别位于虚轴右、左侧，且以虚轴为对称轴镜像对称



-
  -
    -
      -
        -
          -
            -
              - 特点 — 幅频特性为常数，相频特性随ω而改变
        - 相位特性
          - 最小相移函数 — **零点仅位于虚轴及左半平面**
          - 非最小相移函数
            - 存在零点位于右半平面
            - **可分解为最小相移函数+全通函数**
        - 二阶谐振系统的s域分析
          - 并联
          - 对二阶（RCL）电路，有极点：
$p_{1,2}=-\frac{G}{2C}\pm\sqrt{(\frac{G}{2C})^2-\frac{1}{LC}}$
衰减因子：$\alpha=\frac{G}{2C}$　谐振频率：$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$　阻尼频率：$\omega_d=\sqrt{\omega_0^2-\alpha^2}$
$p_{1,2}=-\alpha\pm\omega_d$
          - 零极点分布与振荡情况



当系统函数有一对靠近虚轴的极点 $p=\alpha_i\pm j\Omega_i$ ($\alpha_i<<\Omega_0$)，$\Omega_i\approx\Omega_0$，系统的幅频响应在ω=Ω_i附近会有一个峰值点（谐振），相频响应负向变化；

当系统函数有一对靠近虚轴的零点 $z=\alpha_j\pm j\Omega_j$ ($\Omega_0<<\alpha_j$)，系统的幅频响应在ω=Ω_j附近会有一个谷值点，相频响应正向变化。

若系统函数有远离虚轴的零点和极点，那它们对系统的频响曲线的形状影响较小，只是对总的幅频响应与相频响应的大小有所影响。

- 零极点分布与稳定性
  - 稳定性
    - 系统稳定充要条件
      - LTI系统 — $\int_{-\infty}^{\infty}|h(t)|dt<\infty$ — h(t)能包含δ(t)，但不能包含δ'(t)
      - 因果稳定系统
        - $\int_{0^-}^{\infty}|h(t)|dt<\infty$ — 视作σ=0，s=jω，故收敛域包含虚轴
        - 必要条件：极点分布在左半平面
    - 稳定性系统自身特性，与输入无关
  - 分类
    - 稳定系统
      - **所有极点落在左半平面（不含虚轴）**
      - **极点个数>=零点个数**
    - 临界 — 极点在虚轴上→等幅振荡or趋于非零值
    - 不稳定 — 存在极点落在右半平面or虚轴上有二阶及以上极点
  - 应用
    - 电路
      - 无源网络属于稳定or临界稳定系统
      - 含受控源的反馈系统则都有可能