实验五 傅里叶变换的 MATLAB 求解

5.1 实验目的

（1）熟悉 MATLAB 软件的使用，学会使用新函数；

（2）掌握傅里叶变换及其意义。

5.2 实验预习

（1）复习周期信号与非周期信号的傅里叶变换；

（2）复习卷积定理，并利用时域卷积定理求解三角脉冲的频谱：

$$f(t)=\begin{cases}E\left(1-\frac{2|t|}{\tau}\right) & |t|\le\frac{\tau}{2}\\ 0 & |t|>\frac{\tau}{2}\end{cases} \qquad \text{（式 5-1）}$$

5.3 实验仪器

表 5- 1　实验仪器与器件列表

名称	数量	型号（推荐）
电脑	1	CPU i5 以上
MATLAB 软件	1	2012 以上版本

5.4 实验原理

1、信号频谱分析

1.1、连续周期信号的频谱分析

周期信号$f(t)$的周期为T_1，角频率为$\omega_1=2\pi f_1=\frac{2\pi}{T_1}$，$f(t)$的傅里叶变换可以写成

$$F(j\omega)=F[f(t)]=2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n\delta(\omega-n\omega_1) \qquad \text{式（5-2）}$$

其中，$F_n=\frac{1}{T_1}\int_{-T_1/2}^{T_1/2}f(t)\,e^{-jn\omega_1 t}dt$，为信号$f(t)$的傅里叶级数。

如实验二所述，周期信号还可以扩展成一些正余弦信号之和，或者一些虚指数信号之和：

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t} \\
&= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \qquad \text{式（5-3）} \\
&= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n)
\end{aligned}
$$

周期信号的频谱具有离散性，非连续性，由一些离散的频谱线组成。频谱线出现在角频率 ω_0 的倍数上，如 0，ω_0，$2\omega_0$，$n\omega_0$，频谱线的间隔为 ω_0。只要求出周期信号傅里叶级数，就可以根据角频率得到信号幅度频谱和相位频谱。谐波的幅度随着角频率倍数增加而减弱。表 5-2 是周期信号的三角函数傅立叶级数和指数形式傅立叶级数及其系数，以及系数之间的关系，如下：

表 5- 2

形式	指数形式	三角函数形式
周期信号傅立叶级数展开式	$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}$ $F_n = \|F_n\| e^{j\theta_n}$	$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t)$ $= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n)$
傅立叶系数	$F_n = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$ $n = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$	$a_0 = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt$ $a_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cos(n\omega_0 t) dt \quad n = 1, 2, 3, \ldots$ $b_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\sin(n\omega_0 t) dt \quad n = 1, 2, 3, \ldots$ $c_0 = a_0$ $c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$ $\theta_n = -\arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right) \quad n = 1, 2, 3, \ldots$
系数间的关系	$F_n = \frac{1}{2} c_n e^{j\theta_n} = \frac{1}{2}(a_n - jb_n)$ $\|F_n\| = \frac{1}{2} c_n = \frac{1}{2}\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, 是 n 的偶函数 $\theta_n = -\arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$, 是$n$ 的奇函数	$a_n = c_n \cos\theta_n = F_n + F_{-n}$, 是 n 的偶函数 $b_n = -c_n \sin\theta_n = j(F_n - F_{-n})$, 是$n$ 的奇函数 $c_n = 2\|F_n\|$ 注意：把-n 代入 F_n 可以求得 F_{-n}。

1.2、连续非周期信号的频谱分析

非周期信号的频谱特性可以直接通过傅里叶变换来进行分析。连续非周期信号$f_1(t)$的傅里叶变换可以写作

$$F(j\omega)=F[f_1(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(t)\,e^{-j\omega t}dt \qquad \text{式（5-4）}$$

非周期信号的傅里叶变换通常是一个复数，上式表示为

$$F(j\omega)=|F(j\omega)|e^{-j\varphi(\omega)}$$

傅里叶逆变换表示为

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(j\omega)|e^{j[\omega t+\varphi(\omega)]}d\omega$$

由此可以看出连续非周期信号可以分解成一系列不同频率的连续虚指数信号。$|F(j\omega)|$反映各频率信号分量的幅度特性，为幅度频谱。$\varphi(\omega)$反映各频率信号分量的相位特性，为相位频谱。通过傅里叶变换，可以获得非周期信号的幅度频谱和相位频谱。

在 MATLAB 中，可以调用函数 fourier 和 ifourier 实现傅里叶变换和逆变换。

例如：为了计算$tu(t)$的傅里叶变换，可以使用如下语句：

```
syms t                                  %定义符号t
F=fourier(t*heaviside(t))               %计算tu(t)的傅里叶变换，heaviside(t)为阶跃
                                           信号u(t)
```

输出：

```
F =
pi*dirac(1, w)*1i - 1/w^2
```

注意：dirac(1，ω)表示$\delta'(\omega)$。

若已知信号的解析式，可以通过数值积分近似计算信号的频谱。MATLAB 提供了 integral 等函数用以计算一元函数的数值积分。integral 函数的调用方式为：q = integral(fun, a, b)，作用是求取函数 fun 从 a 到 b 的积分。

例如：计算函数$g(x)=e^{-x^2}(lnx)^2$，x从 0 到 1 的积分可以使用下述语句实现：

```
fun = @(x) exp(-x.^2).*log(x).^2;        %创建函数
q = integral(fun,0,1)                    %计算积分
```

此外，常用的数值积分函数还有trapz，quad，quadl等。

2、卷积定理

卷积定理是傅里叶变换的一个重要性质，时域卷积定理和频域卷积定理分别

有如下表述：

（1）时域卷积定理

给定两个时间函数$f_1(t)$和$f_2(t)$，将它们的傅里叶变换分别表示为：

$$F_1(j\omega) = F[f_1(t)]$$

$$F_2(j\omega) = F[f_2(t)] \qquad 式（5-5）$$

则

$$F[f_1(t) * f_2(t)] = F_1(j\omega) \cdot F_2(j\omega)$$

（2）频域卷积定理

时间函数$f_1(t)$和$f_2(t)$与傅里叶变换$F_1(j\omega)$和$F_2(j\omega)$的对应关系如式（5-5），则有

$$F[f_1(t) \cdot f_2(t)] = \frac{1}{2\pi} F_1(j\omega) * F_2(j\omega)$$

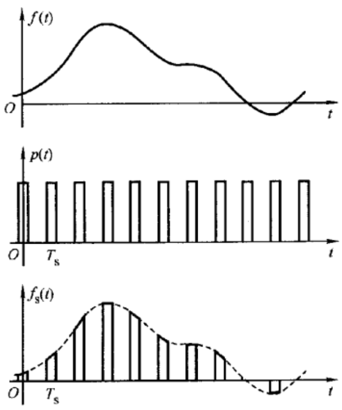
3、连续时间信号的抽样

连续时间信号经过抽样作用后变成抽样信号，抽样过程如下图所示。令连续时间信号$f(t)$、抽样脉冲$p(t)$、抽样信号$f_s(t)$的傅里叶变换分别为$F(j\omega)$、$P(j\omega)$、$F_s(j\omega)$，则它们之间有如下关系

$$f_s(t) = f(t) \cdot p(t) \qquad 式（5-6）$$

$$F_s(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n \cdot F[j(\omega - n\omega_s)] \qquad 式（5-7）$$

其中，$P_n = \frac{1}{T_s}\int_{-\frac{T_s}{2}}^{\frac{T_s}{2}} p(t)\, e^{-jn\omega_s t} dt$，$\omega_s$为抽样角频率。



5.5 实验内容

1、在$-5 \le t \le 5$时间范围内，画出双边指数信号$f_1(t) = e^{-|t|}$的时域波形；并对信号做傅里叶变换，在角频率区间$-10 \le \omega \le 10$内画出信号频谱。

（函数 fplot 可用于绘制表达式或函数）

2、一个三角脉冲信号表示为：

$$f_2(t) = \begin{cases} E\left(1 - \dfrac{2|t|}{\tau}\right) & |t| \le \dfrac{\tau}{2} \\ 0 & |t| > \dfrac{\tau}{2} \end{cases}$$

其中，$E = 1$，$\tau = 1$。

请分别使用三种方法绘制三角脉冲信号的频谱，在一张图中展示并标注 legend。

（1）**数值方法**近似计算三角脉冲的频谱；

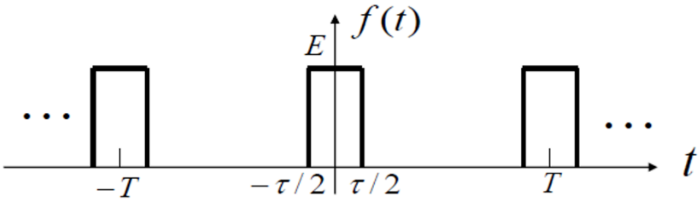
（2）根据卷积定理，通过计算矩形脉冲的频谱，得到三角脉冲的频谱。

（3）三角脉冲信号的理论计算值。

3、对时间范围$0 \le t \le 20$内的正弦信号$f_3(\mathrm{t}) = \sin(0.8\pi t)$进行抽样得到抽样信号，抽样频率分别取为$2Hz$、$0.8Hz$、$0.4Hz$，画出信号$f_3(\mathrm{t})$及不同抽样频率下抽样信号的时域波形，并对信号$f_3(\mathrm{t})$及抽样信号进行傅里叶变换，绘制幅度频谱曲线，对比不同抽样频率下的频谱。

4、附加题：

如图所示，*f(t)*为周期矩形脉冲信号。要求：



（1）采用三角函数形式对图中的周期矩形脉冲信号进行傅里叶级数分解，写出分解表达公式。

（2）根据表中给出的幅度频谱和相位频谱的计算公式，使用 MATLAB 编程，计算并绘制幅值为 1，周期为 10、信号宽度为 1 的信号的幅度频谱和相位频谱。

（3）改变周期矩形脉冲信号宽度和矩形脉冲信号周期，并绘制其图，观察和分析信号周期和宽度对信号频域特性的影响（信号幅值设为 1）：

a）信号周期 10，信号宽度 2。

b）信号周期 5，信号宽度 1。

5.6 注意事项

(1) **都必须独立完成任务，或查书，或百度谷歌，但是不允许复制粘贴（请自律），都尽可能地详尽，不能敷衍！！**

(2) 使用计算机和上网请遵守国家法律法规；

5.7 实验报告要求

(1) 独立完成实验内容，诚实记录实验结果；

(2) 实验思考题要写在实验报告中。

(3) 实验体会、意见和建议写在实验结论之后。

(4) 实验报告须包括：

1、电子版的实验报告；

2、程序源文件：*.m

以上内容请按照以下顺序放到一个文件夹内，并将文件夹命名为：学号-姓名-实验*，如：180110888-张三-实验一。