信号与系统实验指导书

哈爾濱工業大學 (深圳)

实验与创新实践教育中心

2020 年 5 月

实验二 周期信号的分解与合成

1. 实验目的

（1） 熟练 MATLAB 软件使用；
（2） 掌握连续周期信号的频谱分析方法——傅立叶级数及其物理意义。

2. 实验预习要求

（1） 复习周期连续信号的傅立叶级数以及非周期连续信号的傅立叶变换；
（2） 回答以下问题

频谱的物理意义是什么？简述连续周期信号频谱的特点，以周期矩形脉冲信号为例，分析当信号的周期 T 和脉冲宽度 τ 发生变化的时候，信号的频谱将如何变化。

3. 实验仪器

表 9- 1 实验仪器与器件列表

名称	数量	型号（推荐）
电脑	1	CPU i5 以上
MATLAB 软件	1	2012 以上版本

4. 实验原理

（1）周期信号的三角函数傅立叶级数

设周期为 T 的周期信号 $f(t)$ 满足“狄利克莱（Dirichlet）条件”，则按照傅立叶级数的定义，$f(t)$ 可以由三角函数来表示，即

$$f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega_0 t+b_n\sin n\omega_0 t) \qquad \text{（式 1）}$$

式中，$\omega_0=2\pi/T$，为周期信号的角频率，a_0，a_n 和 b_n 称为傅立叶级数，可以由以下各式求出：

$$a_0=\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}f(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{（式 2）}$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}f(t)\cos n\omega_0 t\,\mathrm{d}t \qquad (n=1,2,\cdots) \qquad \text{（式 3）}$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}f(t)\sin n\omega_0 t\,\mathrm{d}t \qquad (n=1,2,\cdots) \qquad \text{（式 4）}$$

利用三角函数恒定公式：

$$a_n\cos n\omega_0 t+b_n\sin n\omega_0 t=c_n\cos(n\omega_0 t+\theta_n) \qquad \text{（式 5）}$$

式中，$a_n=c_n\cos\theta_n$，$b_n=-c_n\sin\theta_n$。将上式代入（式 1），即可得到把三角傅里叶级数写成更为简洁的余弦–相位形式：

$$f(t)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_n\cos(n\omega_0 t+\theta_n)\qquad (t_0\le t\le t_0+T) \tag{式 6}$$

其中：

$$\begin{aligned}&c_0=a_0\\&c_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2};\qquad \theta_n=-\tan^{-1}(b_n/a_n)\end{aligned} \tag{式 7}$$

任何满足狄利克莱条件的周期信号都可以分解为一系列不同频率余弦信号的叠加。其中，c_0 是常数项，属于周期信号中包含的直流分量；$c_n\cos(n\omega_0 t+\theta_n)$ 称为周期信号的 n 次谐波，c_n 表示谐波分量的幅值，θ_n 表示谐波分量的初始相位。

（2）周期信号的指数傅立叶级数

复指数集 $\exp(\mathrm{j}n\omega_0 t)$（$n$=0，±1，±2，…）在时轴上的任一周期内 $T=2\pi/\omega_0$ 内是正交的，即

$$\int_T e^{\mathrm{j}m\omega_0 t}(e^{\mathrm{j}n\omega_0 t})^*\mathrm{d}t=\int_T e^{\mathrm{j}(m-n)\omega_0 t}\mathrm{d}t=\begin{cases}0 & m\ne n\\ T & m=n\end{cases} \tag{式 8}$$

周期信号 $f(t)$（周期为 T）可以展开成指数傅立叶级数，

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n e^{\mathrm{j}n\omega_0 t} \tag{式 9}$$

式中

$$F_n=\frac{1}{T}\int_T f(t)\,e^{-\mathrm{j}n\omega_0 t}\mathrm{d}t \tag{式 10}$$

周期信号可以分解为一系列不同频率的虚指数信号的叠加，式中 F_n 称为傅立叶复系数。

事实上，可以直接从三角傅里叶级数推导出指数傅里叶级数。利用欧拉公式（式 5）中的谐波分量可以表示为

$$\begin{aligned}c_n\cos(n\omega_0 t+\theta_n)&=\frac{c_n}{2}[e^{\mathrm{j}(n\omega_0 t+\theta_n)}+e^{-\mathrm{j}(n\omega_0 t+\theta_n)}]\\&=\underbrace{(\frac{c_n}{2}e^{\mathrm{j}\theta_n})}_{F_n}e^{\mathrm{j}n\omega_0 t}+\underbrace{(\frac{c_n}{2}e^{-\mathrm{j}\theta_n})}_{F_{-n}}e^{-\mathrm{j}n\omega_0 t}\\&=F_n e^{\mathrm{j}n\omega_0 t}+F_{-n}e^{-\mathrm{j}n\omega_0 t}\end{aligned} \tag{式 11}$$

已知三角傅里叶级数的余弦–相位形式为

$$f(t)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_n\cos(n\omega_0 t+\theta_n) \tag{式 12}$$

将（式 11）代入上式，且令 $c_0=F_0$，即可得到

$$
\begin{aligned}
f(t) &= F_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(F_n e^{\mathrm{j}n\omega_0 t} + F_{-n}e^{-\mathrm{j}n\omega_0 t}) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{\mathrm{j}n\omega_0 t}
\end{aligned} \qquad \text{（式 13）}
$$

由此可见，指数傅里叶级数是三角傅里叶级数的另一种表达方式。表 1-1 给出了周期信号的三角函数傅立叶级数和指数形式傅立叶级数及其系数，以及系数之间的关系。

表 1-1　周期信号三角函数傅立叶级数及指数傅立叶系数关系表

形式	指数形式	三角函数形式
周期信号傅立叶级数展开式	$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n e^{\mathrm{j}n\omega_0 t}$ $F_n=\lvert F_n\rvert e^{\mathrm{j}\theta_n}$	$f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega_0 t+b_n\sin n\omega_0 t)$ $=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_n\cos(n\omega_0 t+\theta_n)$
傅立叶系数	$F_n=\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$ $n=0,\pm1,\pm2,\pm3,\ldots$	$a_0=\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}f(t)dt$ $a_n=\frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}f(t)\cos(n\omega_0 t)dt \quad n=1,2,3,\ldots$ $b_n=\frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}f(t)\sin(n\omega_0 t)dt \quad n=1,2,3,\ldots$ $c_0=a_0$ $c_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2} \quad n=1,2,3,\ldots$ $\theta_n=-\arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right) \quad n=1,2,3,\ldots$
系数间的关系	$F_n=\frac{1}{2}c_n e^{j\theta_n}=\frac{1}{2}(a_n-jb_n)$ $\lvert F_n\rvert=\frac{1}{2}c_n=\frac{1}{2}\sqrt{a_n^2+b_n^2}$， 是 n 的偶函数 $\theta_{\mathrm{n}}=-\arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$， 是$n$ 的奇函数	$a_n=c_n\cos\theta_n=F_n+F_{-n}$， 是 n 的偶函数 $b_n=-c_n\sin\theta_n=j(F_n-F_{-n})$， 是$n$ 的奇函数 $\mathrm{c}_n=2\lvert F_n\rvert$ 注意：把-n 代入 F_n 可以求得 F_{-n}。

5.　实验内容

5.1周期信号的分解与合成

MATLAB 的可视化功能可以直观地观察和分析周期信号的分解和合成。下面给出一个例

子，利用 MATLAB 观察周期方波信号分解和合成的实现方法和结果。

例 1：周期方波信号如图 1- 1 所示，求出该信号三角函数形式的傅立叶级数，用 MATLAB 编程实现各次谐波叠加情况，并观察与分析。

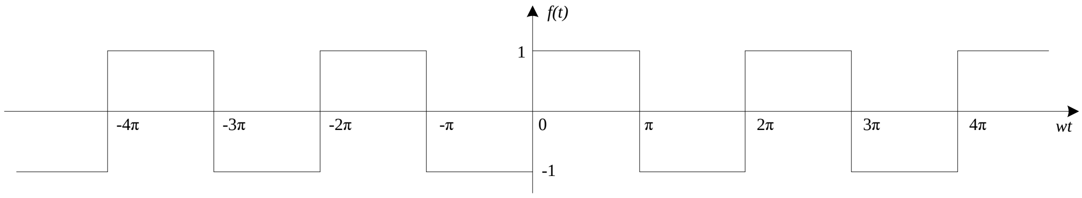

图 1- 1　周期方波信号时域波形

解：

由图可知，该方波信号的周期 T=2π，且为奇函数，故 a_n=0，所以

$$f\left(t\right)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\left(n\omega t\right)$$（式 14）

由（式 14）可以计算得到

$$b_n=\begin{cases}0 & n=2,4,6,\ldots \\ \dfrac{4}{n\pi} & n=1,3,5,\ldots\end{cases}$$（式 15）

则该周期方波信号的傅立叶级数为

$$f\left(t\right)=\frac{4}{\pi}\left\{\sin\left(t\right)+\frac{1}{3}\sin\left(3t\right)+\ldots+\frac{1}{2n-1}\sin\left[\left(2n-1\right)t\right]+\ldots\right\}\qquad n=1,2,\ldots$$（式 16）

因此，只要由 b_n 计算出 $f(t)$ 各次谐波的振幅，再根据各次谐波的频率，利用 MATLAB 绘出周期方波信号的各次谐波叠加后的波形。完成上述观察和分析过程的 MATLAB 程序见 Exp.m 文件。图 1-2 为输入 m=4 的程序运行结果。由图中可以看到，当周期信号合成中包含的谐波分量越多时，合成波形越接近原来的周期方波信号。但是，由于周期方波信号包含间断点（跳变点），因此在间断点附近，随着包含谐波次数的增加，合成波形的尖峰越接近间断点，但尖峰幅度未明显的减小，在教材中已经进行了详细的分析，即使合成波形含有的谐波次数 n→∞时，在间断处仍然有约 9%的偏差，这就是吉布斯(Gibbs)现象。在傅立叶级数的项数取得很大时，间断点处尖峰下的面积非常小以致趋近于零，因而在均方的意义下合成波形同原波形的真值之间没有区别。

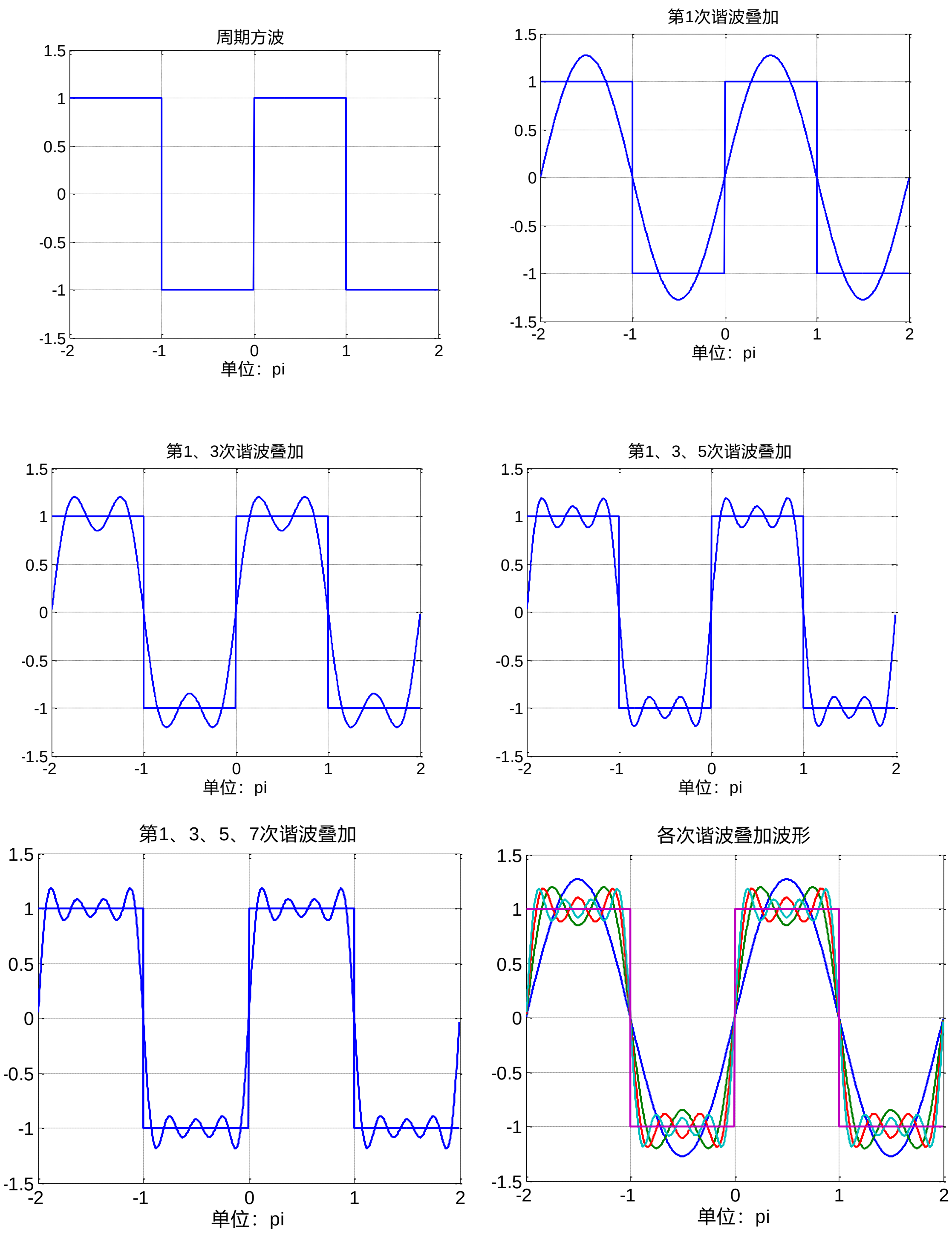

图 1- 2　周期方波信号的傅立叶级数分解

5.2利用 MATLAB 实现周期信号的分解与合成

已知周期锯齿脉冲信号的波形如图 1-3 所示，用 MATLAB 绘出该信号直流分量、一次、二次、三次、四次及五次谐波叠加后的波形图，并将其与原周期信号的时域波形进行比较，观察周期信号的分解与合成过程。

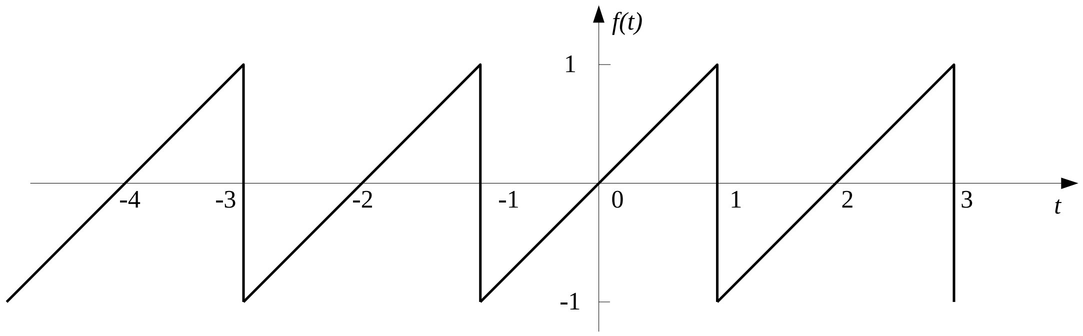

图 1- 3　周期锯齿脉冲信号时域波形

6.　注意事项

(1) **独立完成任务，或查书，或百度谷歌，尽可能地详尽。**
(2) 使用计算机和上网请遵守国家法律法规；
(3) 实验下课后，请关闭计算机。

7.　实验报告要求

(1) 独立完成实验内容，诚实记录实验结果；
(2) 实验思考题要写在实验报告中。
(3) 实验体会、意见和建议写在实验结论之后。
(4) 实验报告须包括：
1、电子版的实验报告；
2、程序源文件：*.m
以上内容请按照以下顺序放到一个文件夹内，并将文件夹命名为：学号-姓名-实验*，如：SZ160110888-张三-实验一。