Relationen zwischen p-adischen und perfektoiden Zahlen

Alexander Kern

1970-01-01

Einleitung

In dieser Arbeit werden die grundlegenden Relationen zwischen *p-adischen Zahlen* Q_p und *perfektoiden Körpern* untersucht. Perfektoide Körper treten vor allem in der modernen Zahlentheorie und p-adischen Hodge-Theorie auf und können als perfekte „Überdeckungen“ der p-adischen Zahlen verstanden werden.

Grundlagen

p-adische Zahlen

Für eine Primzahl p definieren wir Q_p als den *p-adischen Abschluss von* Q. Wichtige Eigenschaften:

- Diskrete Bewertungsstruktur: $|\cdot)_p : Q_p \to R_{\geq 0}$, ultrametrisch.
- Vollständigkeit: Q_p ist vollständig bzgl. $|\cdot)_p$.
- Lokaler Körper: Restklassenkörper F_p.

Perfektoide Körper

Ein nicht-archimedischer Körper K heißt *perfektoid*, wenn:

1. K vollständig ist,
2. der Frobenius $\varphi : K^\circ / p \to K^\circ / p$ surjektiv ist (Restklassenkörper perfekt),
3. K charakteristik 0 hat, aber sein *Tilt* $K^\flat$ charakteristik p besitzt.

Der Tilt $K^\flat$ wird definiert als:

$$K^\flat := \varprojlim_{x \mapsto x^p} K.$$

Vergleichstabelle

Vergleich p-adische Zahlen vs. perfektoide Körper

Aspekt	Q_p	Perfektoider Körper K
Charakteristik	0	0 (Tilt: char p)
Vollständigkeit	Ja	Ja
Bewertung	Ultrametrisch	Ultrametrisch
Restklassenkörper	F_p	Perfekt, char p
Frobenius	Nicht surjektiv mod p	Surjektiv mod p
Beispiele	Q_p, $Q_p\left(\zeta_{p^\infty}\right)$	$\widehat{Q_p\left(p^{1/p^\infty}\right)}$, C_p

Wichtige Relationen

Inklusionsrelation

$$Q_p \subset K \text{, wenn } K \text{ eine perfektoide Erweiterung von } Q_p \text{ ist.}$$

Frobenius-Unterschied

$$\begin{aligned} Q_p\, mod\ p \quad &: \text{Frobenius nicht surjektiv} \Longrightarrow \text{nicht perfekt} \\ K^\circ / p \quad &: \text{Frobenius surjektiv} \Longrightarrow \text{perfekt} \end{aligned}$$

Topologische Relation

Beide sind *vollständig ultrametrische Körper*. Die Topologie von K ist kompatibel mit der p-adischen Topologie von Q_p.

Tilt-Beziehung

$$K \text{ perfektoid in char } 0 \leftrightarrow K^\flat \text{ perfekter Körper in char } p$$

Beispiel für eine perfektoide Erweiterung von Q_p

$$Q_p\left(p^{1/p^\infty}\right) := \text{Vervollständigung von } Q_p\left(\text{alle p-potenz Wurzeln}\right)$$

Diese Erweiterung ist perfektoid, da der Frobenius auf $\left(Q_p\left(p^{1/p^\infty}\right)\right)^\circ / p$ surjektiv ist. Q_p selbst ist nicht perfektoid.

Zusammenfassung

- Perfektoide Körper sind „perfekte Überdeckungen“ der p-adischen Zahlen.

- Der Frobenius-Mod-p-Unterschied ist entscheidend: Q_p ist nicht perfekt, perfekte Tilts sind es.
- Topologisch sind beide vollständig ultrametrisch.
- Tilts ermöglichen den Übergang zwischen char 0 und char p.