Relationen zwischen p-adischen und perfektoiden Zahlen

Alexander Kern

January 27, 2026

1 Einleitung

In dieser Arbeit werden die grundlegenden Relationen zwischen *p-adischen Zahlen* $\mathbb{Q}_p$ und *perfektoiden Körpern* untersucht. Perfektoide Körper treten vor allem in der modernen Zahlentheorie und p-adischen Hodge-Theorie auf und können als perfekte Überdeckungen der p-adischen Zahlen verstanden werden.

2 Grundlagen

2.1 p-adische Zahlen

Für eine Primzahl p definieren wir $\mathbb{Q}_p$ als den *p-adischen Abschluss von* $\mathbb{Q}$. Wichtige Eigenschaften:

- Diskrete Bewertungsstruktur: $|\cdot|_p : \mathbb{Q}_p \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, ultrametrisch.
- Vollständigkeit: $\mathbb{Q}_p$ ist vollständig bzgl. $|\cdot|_p$.
- Lokaler Körper: Restklassenkörper $\mathbb{F}_p$.

2.2 Perfektoide Körper

Ein nicht-archimedischer Körper K heiSSt *perfektoid*, wenn:

1. K vollständig ist,
2. der Frobenius $\varphi : K^\circ/p \to K^\circ/p$ surjektiv ist (Restklassenkörper perfekt),
3. K charakteristik 0 hat, aber sein *Tilt* $K^\flat$ charakteristik p besitzt.

Der Tilt $K^\flat$ wird definiert als:

$$K^\flat := \varprojlim_{x \mapsto x^p} K.$$

Aspekt	$\mathbb{Q}_p$	Perfektoider Körper K
Charakteristik	0	0 (Tilt: char p)
Vollständigkeit	Ja	Ja
Bewertung	Ultrametrisch	Ultrametrisch
Restklassenkörper	$\mathbb{F}_p$	Perfekt, char p
Frobenius	Nicht surjektiv mod p	Surjektiv mod p
Beispiele	$\mathbb{Q}_p$, $\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^\infty})$	$\widehat{\mathbb{Q}_p(p^{1/p^\infty})}$, C_p

Table 1: Vergleich p-adische Zahlen vs. perfektoide Körper

3 Vergleichstabelle

4 Wichtige Relationen

4.1 Inklusionsrelation

$$\mathbb{Q}_p \subset K, \quad \text{wenn } K \text{ eine perfektoide Erweiterung von } \mathbb{Q}_p \text{ ist.}$$

4.2 Frobenius-Unterschied

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}_p \mod p &: \text{Frobenius nicht surjektiv} \implies \text{nicht perfekt} \\ K^\circ/p &: \text{Frobenius surjektiv} \implies \text{perfekt} \end{aligned}$$

4.3 Topologische Relation

Beide sind *vollständig ultrametrische Körper*. Die Topologie von K ist kompatibel mit der p-adischen Topologie von $\mathbb{Q}_p$.

4.4 Tilt-Beziehung

$$K \text{ perfektoid in char } 0 \quad \leftrightarrow \quad K^\flat \text{ perfekter Körper in char } p$$

5 Beispiel für eine perfektoide Erweiterung von $\mathbb{Q}_p$

$$\mathbb{Q}_p(p^{1/p^\infty}) := \text{Vervollständigung von } \mathbb{Q}_p(\text{alle p-potenz Wurzeln})$$

Diese Erweiterung ist perfektoid, da der Frobenius auf $(\mathbb{Q}_p(p^{1/p^\infty}))^\circ/p$ surjektiv ist. $\mathbb{Q}_p$ selbst ist nicht perfektoid.

6 Zusammenfassung

- Perfektoide Körper sind perfekte Überdeckungen der p-adischen Zahlen.
- Der Frobenius-Mod-p-Unterschied ist entscheidend: $\mathbb{Q}_p$ ist nicht perfekt, perfekte Tilts sind es.
- Topologisch sind beide vollständig ultrametrisch.

- Tilts ermöglichen den Übergang zwischen char 0 und char p.