

Spieltheorie und Simulation auf p-adischer Entscheidungsstruktur

1. Entscheidungsraum und Metrik

Sei X die Menge aller unendlichen Pfade in einem hierarchischen Entscheidungsbaum

$$x = (x_0, x_1, x_2, \dots), x_k \in L_k,$$

wobei L_k die politische Ebene der Tiefe k bezeichnet (Dorf, Bezirk, Bundesland, Nation, ...).

Die p-adische Konsenstiefe zweier Entscheidungen $x, y \in X$ ist

$$k(x, y) = \max \{ k \mid x_j = y_j \text{ für alle } j \geq k \}.$$

Die zugehörige Ultrametrik lautet

$$d(x, y) = p^{-k(x, y)}.$$

2. Konfliktkosten nach Hierarchieebenen

Seien $w_0 < w_1 < w_2 < \dots$ monoton wachsende Gewichte politischer Konflikte. Für zwei Entscheidungen definieren wir

$$C(x, y) = \sum_{k \geq 0} w_k \mathbf{1}[x_k \neq y_k],$$

wobei Konflikte auf höheren Ebenen stärker gewichtet werden.

3. Nutzenfunktion der Spieler

Es gebe N Spieler mit Entscheidungen $x^{[1]}, \dots, x^{[N]} \in X$. Der Nutzen von Spieler i ist

$$U_i(x^{[i]}, x^{-i}) = \alpha \sum_{j \neq i} f(d(x^{[i]}, x^{[j]})) + \beta g(x^{[i]}),$$

wobei

- f eine fallende Funktion der Distanz ist (Kohärenzpräferenz),
- g eine individuelle Präferenzfunktion ist,
- $\alpha, \beta > 0$ die Gewichtung von Konsens vs. Autonomie steuern.

Ein Spezialfall ist die konfliktbasierte Form

$$f(d) = -C(x^{[i]}, x^{[j]}), U_i = -\frac{1}{N-1} \sum_{j \neq i} C(x^{[i]}, x^{[j]}).$$

4. p-adische Anpassungsdynamik (Best Response)

Diskrete Zeit $t=0, 1, 2, \dots$. Jeder Spieler passt ausschließlich die *niedrigste Ebene* an, auf der kein Konsens besteht.

Sei $k_i(t)$ die höchste Ebene, auf der $x_t^{(i)}$ von der Mehrheitsentscheidung abweicht. Dann gilt

$$x_{t+1}^{(i)} = \arg \max_{y \in N_p^{(k_i(t))}(x_t^{(i)})} U_i(y, x_t^{-i}),$$

wobei $N_p^{(k)}(x)$ die Menge der Alternativen bezeichnet, die sich ausschließlich auf Ebene k vom aktuellen Pfad unterscheiden.

Damit entstehen:

- stabile hohe Ebenen (träge Struktur),
- flexible lokale Ebenen (Basisdynamik),
- sprunghafte Phasenübergänge bei Konsensbruch oben.

5. Beispieldinstanz

Für $p=5$ und drei Ebenen

$$k=0: \text{Dorf}, k=1: \text{Bezirk}, k=2: \text{Bundesland},$$

mit Gewichten $w_0=1, w_1=3, w_2=9$ ergibt sich

$$C(x, y) = \sum_{k=0}^2 w_k \mathbf{1}[x_k \neq y_k], U_i = -\frac{1}{N-1} \sum_{j \neq i} C(x^{(i)}, x^{(j)}).$$

Interpretation:

Kohärenz $\sim k(x, y)$ (gemeinsame Konsentiefe); Fragmentierung $\sim d(x, y)$ (Ultrametrik-Abstand).