p-adische Zahlen — strukturelle Beschreibung ohne Zahlenschreibweise

Kernidee ohne Zahlenschreibweise

Eine p-adische Zahl ist ein Äquivalenz- und Vollständigkeitsobjekt: Man startet mit den rationalen Zahlen Q. Man misst Größen nicht nach ihrer absoluten Größe, sondern nach ihrer Teilbarkeit durch p. Daraus entsteht eine Metrik, und Q wird komplettiert — das Resultat ist Q_p.

1. p-adische Bewertung

Für eine rationale Zahl $x \neq 0$ gibt es eine Darstellung

$$x = p^k \frac{a}{b}, gcd(a, p) = gcd(b, p) = 1,$$

und man definiert

$$v_p(x) = k.$$

2. p-adische Norm

$$|x|_p = p^{-v_p(x)}.$$

3. p-adische Metrik

$$d_p(x, y) = |x - y|_p.$$

4. Vervollständigung

$$Q_p = \text{Komplettierung von}(Q, d_p).$$

Damit ist eine p-adische Zahl kein Ziffern-String, sondern ein Grenzwert von Cauchy-Folgen bezüglich d_p.

Alternative, gleichwertige Beschreibungen

(1) Als Inverses Limes-Objekt

$$\mathbb{Z}_p = \varprojlim \mathbb{Z} / p^n \mathbb{Z}.$$

Eine p-adische ganze Zahl ist eine konsistente Familie von Restklassen mod $p, p^2, p^3, \ldots$

(2) Als kompakter topologischer Ring

- Z_p ist kompakt, vollständig und total unzusammenhängend.
- $Q_p = Z_p[p^{-1})$.

(3) Als lokaler Körper

- Maximales Ideal: pZ_p
- Restklassenkörper: F_p
- Diskreter Bewertungsring mit Uniformisator p

(4) Archimedisch vs. nicht-archimedisch

Reelle Zahlen ¿Komplettierung nach der archimedischen Norm ,
p-adische Zahlen ¿Komplettierung nach einer nicht-archimedischen Norm .

Die Dreiecksungleichung wird ultrametrisch:

$$|x+y)_p \leq max(|x)_p, |y)_p).$$

Intuitive Kurzform

- Reelle Zahlen messen „Größe im Unendlichen“.
- p-adische Zahlen messen „Tiefe der Teilbarkeit durch p“.
- Zwei Zahlen sind p-adisch nahe, wenn ihre Differenz stark durch p teilbar ist.