Zahl–Vektor–Korrespondenz in Basis n

Sei $n \in N$ mit $n \geq 2$. Wir definieren den Koeffizientenraum

$$C_n = \{(a_0, a_1, \dots, a_k) \mid k \in N, a_i \in \{0, \dots, n-1\}\}.$$

1. Abbildung Zahl → Vektor (Basisexpansion)

Für $x \in N$ definieren wir die Ziffern

$$a_i = \lfloor \frac{x}{n^i} \text{¿¿} mod\, n, i \geq 0,$$

so dass

$$x = \sum_{i=0}^{k} a_i n^i$$

für ein minimales k gilt. Die Abbildung

$$\Phi_n : N \to C_n, \Phi_n(x) = (a_0, \dots, a_k)$$

heißt *Basisexpansion (Zahl → Vektor)*.

2. Abbildung Vektor → Zahl (Synthese)

Sei $(a_0, \dots, a_k) \in C_n$. Wir definieren

$$\Psi_n(a_0, \dots, a_k) = \sum_{i=0}^{k} a_i n^i.$$

Dies ist die *Syntheseabbildung (Vektor → Zahl)*.

3. Isomorphie im endlichen Fall

Für alle $x \in N$ und alle $(a_0, \dots, a_k) \in C_n$ gilt

$$\Psi_n(\Phi_n(x)) = x, \Phi_n(\Psi_n(a_0, \dots, a_k)) = (a_0, \dots, a_k).$$

Damit sind Φ_n und Ψ_n zueinander inverse Bijektionen
zwischen endlichen Basisdarstellungen und ganzen Zahlen.

4. p-adische Erweiterung

Für eine Primzahl p definieren wir den Raum unendlicher Koeffizientenfolgen

$$Z_p = \{(a_0, a_1, a_2, \dots) \vee a_i \in \{0, \dots, p-1\}\},$$

mit der p-adischen Auswertung

$$x=\sum_{i=0}^{\infty} a_i p^i$$

und der ultrametrischen Norm

$$\left|p^k u\right)_p = p^{-k}, u \in Z, p \nmid u.$$

Damit wird Z_p ein vollständiger normierter Raum (ultrametrischer Vektorraum über Z_p).