```latex
\documentclass[11pt]{article}
\usepackage{amsmath, amssymb, amsthm, mathtools}

\title{Grundrechenarten in perfektoiden $p$-adischen Zahlen}
\date{}
\begin{document}
\maketitle

Wir betrachten einen perfektoiden Ring $R$ mit
\[
p \in \mathfrak m_R,
\qquad
R \text{ ist } p\text{-adisch vollständig}
\]
und einer $p$-adischen Bewertung
\[
v_p : R \to \mathbb R \cup \{\infty\}.
\]
Ein Element besitzt eine $p$-adische Reihenentwicklung
\[
x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n p^n,
\qquad a_n \in R/pR .
\]

\section*{1. Addition}
Für zwei Elemente
\[
x = \sum_{n\ge 0} a_n p^n,
\qquad
y = \sum_{n\ge 0} b_n p^n
\]
ergibt sich die Addition koeffizientenweise mit Übertrag
\[
x+y=\sum_{n\ge 0}
\left(a_n+b_n+c_{n-1}\right)p^n,
\]
wobei
\[
c_n
=
\left\lfloor
\frac{a_n+b_n+c_{n-1}}{p}
\right\rfloor .
\]
Für die Bewertung gilt
\[
v_p(x+y)\ge \min\{v_p(x),v_p(y)\},
\]
mit Gleichheit, falls $v_p(x)\ne v_p(y)$.

\section*{2. Subtraktion}
Analog gilt
\[
x-y=\sum_{n\ge0}\left(a_n-b_n-d_{n-1}\right)p^n,
\]
mit Borrow-Term
\[
d_n
=
```

```
\left\lceil
\frac{b_n+d_{n-1}-a_n}{p}
\right\rceil .
\]
Die Bewertungsungleichung ist
\[
v_p(x-y)\ge \min\{v_p(x),v_p(y)\}.
\]

\section*{3. Multiplikation}
Für
\[
x=\sum_{i\ge0}a_i p^i,
\qquad
y=\sum_{j\ge0}b_j p^j
\]
gilt das Cauchy-Produkt
\[
xy
=
\sum_{n\ge0}
\left(
\sum_{i+j=n} a_i b_j
\right)p^n .
\]
Für die Bewertung
\[
v_p(xy)=v_p(x)+v_p(y).
\]

Der Frobenius auf $R/p$
\[
\varphi:R/p\to R/p,
\qquad
\varphi(x)=x^p
\]
ist surjektiv, daher existieren kompatible $p$-Wurzeln
\[
x^{p^{-n}}\in R
\qquad \text{für alle } n\ge 0 .
\]

\section*{4. Division}
Sei $x\neq 0$. Dann existiert eine Zerlegung
\[
x=p^{v_p(x)}u,
\qquad u\in R^\times .
\]
Für $y\neq 0$ erhält man
\[
\frac{x}{y}
=
p^{\,v_p(x)-v_p(y)}
\frac{u_x}{u_y}.
\]

Ist $v_p(z)>0$, so gilt die $p$-adische Neumannreihe
\[
\frac{1}{1-z}
```

```
=
\sum_{n=0}^{\infty} z^n.
\]
Damit
\[
\frac{1}{y}
=
p^{-v_p(y)}
u_y^{-1}
=
p^{-v_p(y)}
\sum_{n\ge0}(1-u_y)^n .
\]

\section*{5. Tilt und Kompatibilität}
Der Tilt eines perfektoiden Rings lautet
\[
R^\flat
=
\varprojlim_{x\mapsto x^p} R/p .
\]
Für eine Folge $(x_0,x_1,\dots)$ mit $x_{n+1}^p=x_n$ gilt
\[
(x^\flat+y^\flat)_n
=
\lim_{m\to\infty}
\left(x_{n+m}+y_{n+m}\right)^{p^m},
\qquad
(x^\flat\cdot y^\flat)_n
=
x_n y_n .
\]
Damit sind die Grundrechenarten mit dem Tilt kompatibel.

\section*{6. Bewertungsübersicht}
\[
\begin{array}{c|c}
\text{Operation} & \text{Bewertungsgesetz}\\\hline
x+y & v_p(x+y)\ge \min(v_p(x),v_p(y))\\[4pt]
x-y & v_p(x-y)\ge \min(v_p(x),v_p(y))\\[4pt]
xy  & v_p(xy)=v_p(x)+v_p(y)\\[4pt]
x/y & v_p(x/y)=v_p(x)-v_p(y)
\end{array}
\]

\end{document}
```