PAC 4 - Interpolació, derivació i integració numèrica (I)

Amelia Martínez Sequera

16/10/2021

Una opció financera de compra és un contracte entre dues parts que li dóna al seu posseïdor el dret de comprar un determinat actiu financer subjacent (per exemple una acció), el preu actual de la qual (és a dir, t=0) és S_0, en una data futura t=T (anomenat venciment) per un determinat preu K (preu exercici). Si arribat el venciment, el valor del subjacent en el mercat S_T és superior a K, llavors l´opció s´exerceix i s´adquireix l´actiu pagant K, en cas contrari l´opció no s´exerceix. Aquest és l´anomenat preu de liquidació de l´opció, que pot resumir-se matemàticament amb la fòrmula,

$$max(S_T - K, 0)$$

és a dir, el màxim entre $S_T - K$ i 0.

El valor d´aquest contracte, és a dir, el preu que hem de pagar per adquirir el dret d´exercici, es coneix com prima de l´opció i sota el supòsit que els preus des de l´instant t=0 fins a venciment t=T es mouen seguint un determinat model, conegut com model de Black-Scholes, ve donat per:

$$v(S_0, \sigma, T, r, K) = S_0\phi(d_1) - e^{rT}K\phi(d_2)$$

on

$$d_1 = \frac{ln(S_0/K) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

,

$\int_{-\infty}^{x} \phi\,(y)\ dy$ és la funció de distribució.

$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ és la funció de densitat normal estàndard.

Els paràmetre r i σ són, respectivament, l´anomenat tipus d´interès lliure de risc i la volatilitat de l´actiu subjacent (que podem definir vagament com la variància de l´actiu subjacent).

A més del càlcul de la prima de l´opció, per a una adequada gestió del risc financer, els bancs calculen les denominades delta i gamma de l´opció,

$$\delta = v´(S)$$

$$\gamma = v''(S)$$

és a dir, la primera i la segona derivada de v respecte del valor de l´actiu subjacent, respectivament. La delta ens indica com varia el preu de l´opció davant una variació del valor del subjacent, mentre que la gamma ens diu com varia la delta quan varia el preu de l´actiu subjacent. Si derivem v obtenim:

$$\delta = \phi(d_1)$$

$$\gamma = \frac{\phi(d_1)}{\sigma\sqrt{T}S_0}$$

1. Interpolació

La següent taula conté els tipus d´interès(en %, per exemple, el tipus 1m representa r = 0.0144) del departament del tresor d'Estats Units per a opcions amb venciments (T) a 1, 2, 3 i 6 mesos, així com els venciments a 1, 2, 3, 5, 7 i 10 anys, on T = 1 representa 1 any.

Si volguéssim calcular el valor de quatre opcions amb venciments 1.5 mesos, 10 mesos, 6.5 anys i 9 anys, necessitaríem els seus corresponents tipus d´interès. Els tipus d´interès que no estan en la taula s´hauran d´obtenir per interpolació. El tipus d´interès ha de ser una quantitat estrictament positiva r>0.

1.1. Càlcul del polinomi interpolador

Realitzarem la interpolació corresponent per obtenir el tipus d´interès dels venciments: 1.5m. 10m, 6.5a i 9a, mitjançant dos mètodes:

1. Determinant de Vandermonde
2. Mètode de Lagrange

Sense fer cap càlcul, quin és el grau de cada polinomi en cada mètode?

Si tenim n+1 punts d´interpolació, un polinomi serà de grau n, o més petit que n si algun coeficient és 0. Això és perquè el polinomi s´obté d´un producte dels n+1 punts.

Per obtenir el polinomi interpolador, usarem tots els punts de la taula.

Per a un dels mètodes, escriurem com s´ha obtingut el polinomi interpolador.

```
#Tipus d'interes
ti1= 0.0144
ti2= 0.0145
ti3= 0.0149
ti4= 0.0151
ti5= 0.0155
ti6= 0.0159
ti7= 0.0165
```

```r
ti8= 0.0169
ti9= 0.0178
ti10= 0.0181

r=c(ti1,ti2,ti3,ti4,ti5,ti6,ti7,ti8,ti9,ti10)

#venciments
T=c(1/12, 1/6, 1/4, 0.5, 1,2,3,5,7,10)

#Venciments a interpolar
T1= 1.5/12
T2= 10/12
T3= 6.5
T4= 9
```

1. Càlcul del polinomi interpolador: Vandermonde

```r
polyinterp=function(x,y)
{
  if(length(x)!=length(y))
    stop ("La longitud de los vectores x e y debe ser la misma" )
  n=length(x)-1
  vandermonde=rep(1,length(x))
  for(i in 1:n){

    xi=x^i
    vandermonde=cbind(vandermonde,xi)
  }
  beta=solve(vandermonde,y)
  names(beta)=NULL
  return(beta)
}

#regla de Horner per avaluar polinomis
horner=function(x,coefs)
{
  y=rep(0,length(x))
  for(i in length(coefs):1)
    y=coefs[i]+x*y
  return(y)
}

p=polyinterp(T,r)
p

##  [1]  1.533716e-02 -2.174639e-02  1.579842e-01 -4.259726e-01
5.345058e-01
##  [6] -3.418750e-01  1.165670e-01 -2.113494e-02  1.900811e-03 -
6.604586e-05
```

El polinomi és:

$$p(x) = -0.000066x^9 + 0.0019x^8 - 0.021135x^7 + 0.116567x^6 - 0.341875x^5 + 0.534506x^4 - 0.425973x^3 + 0.157984x^2 - 0.021746x + 0.015337$$

Per avaluar el polinomi interpolador fem servir el mètode de Horner.

```
r1p=horner(T1,p)
r2p=horner(T2,p)
r3p=horner(T3,p)
r4p=horner(T4,p)

r1p; r2p; r3p; r4p

## [1] 0.01437588

## [1] 0.01435863

## [1] -3.627634

## [1] 118.4772
```

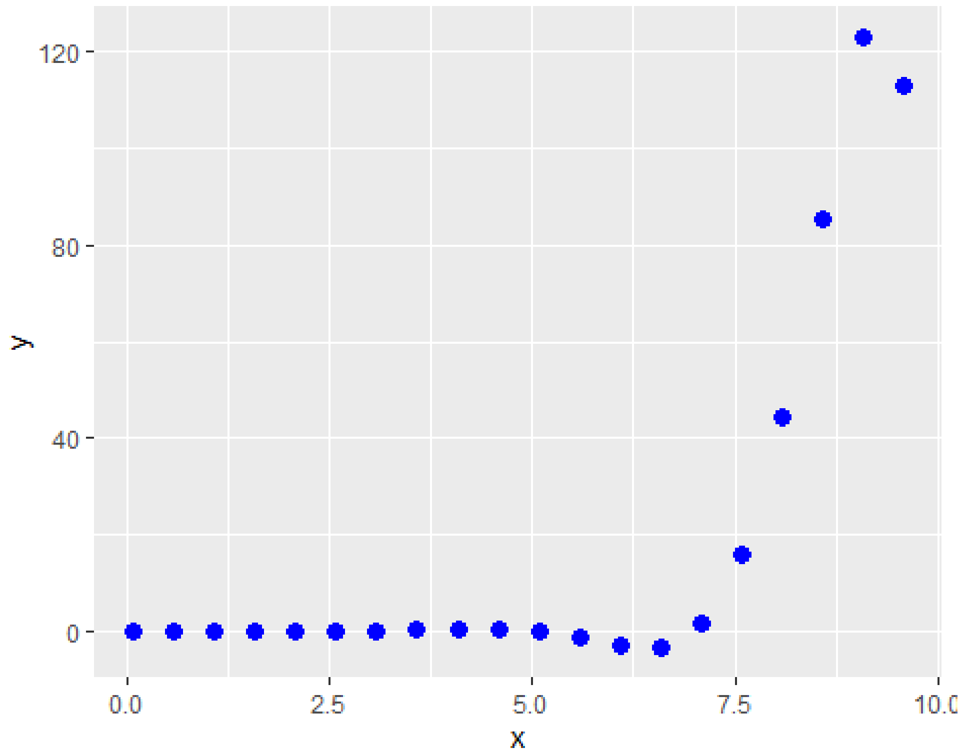
Els dos últims resultats semblen no ser correctes.

```
library(ggplot2)

#grafic del polinomi interpolador
x=seq(1/12,10,0.5)
y=horner(x,p)

dat <- data.frame(cbind(x, y))

ggplot(dat, aes(x=x, y=y)) +
  geom_point(size=3, col='blue')+
  stat_function(fun =p,  colour = 'lightblue')
```



2. Mètode de Lagrange.

Consisteix en calcular prèviament els polinomis $L_i(x)$, i= 0,1,…,n, anomenats polinomi de Lagrange o funcions cardinals de Lagrange, que verifiquen:

$$L_i(x_i) = 1, L_i(x_j) = 0$$

i diferent de j.

Aquests polinomis venen donats per l´expressió:

$$L_i(x) = \prod_{j=0}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

I el polinomi d´interpolació s´escriu de la forma:

$$p(x) = f_0 L_0(x) + f_1 L_1(x) + \ldots + f_n L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i \, L_i(x)$$

que és de grau més petit o igual a n.

Implementació vectoritzada a R:

```
lagrange= function(x,y,a){
  n =length(x)
  if(a < min(x) || max(x)<a)stop ("no s´està interpolant")
```

```
  X = matrix(rep(x, times=n), n, n, byrow = T)
  mN= a -X; diag(mN)= 1
  mD= X- t(X); diag(mD)= 1
  Lnk=apply(mN, 1, prod)/apply(mD, 2, prod)
  sum(y*Lnk)
}

T=c(1/12, 1/6, 1/4, 0.5, 1,2,3,5,7,10)
r= c(ti1,ti2,ti3,ti4,ti5,ti6,ti7,ti8,ti9,ti10)
```

Interpolem els 4 punts problema:

```
lagrange(T,r, T1)

## [1] 0.01437588

lagrange(T,r, T2)

## [1] 0.01435863

lagrange(T,r, T3)

## [1] -3.627634

lagrange(T,r, T4)

## [1] 118.4772
```

També el podem obtenir amb la funció poly.calc() del paquet polynom per interpolar els punts que ens planteja el problema:

```
library(polynom)
library(PolynomF)

polyLagr=poly.calc(T,r)

polyLagr

## 0.01533716 - 0.02174639*x + 0.1579842*x^2 - 0.4259726*x^3 + 
0.5345058*x^4 - 
## 0.341875*x^5 + 0.116567*x^6 - 0.02113494*x^7 + 0.001900811*x^8 - 
## 6.604586e-05*x^9
```

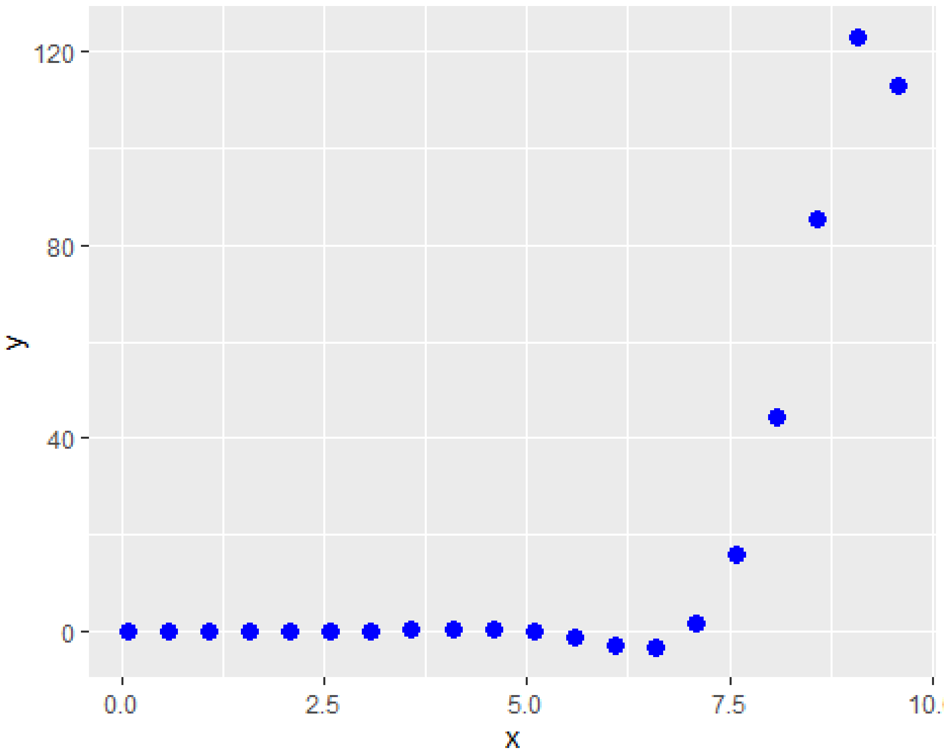
Comprovem que obtenim el mateixos resultats que amb el mètode de Vandermonde.

La gràfica del polinomi obtingut amb els punts original ens ajuda a confirmar visualment que el polinomi passa per sobre dels punts problema:

```
x=seq(1/12,10,0.5)
y=horner(x,polyLagr)

dat <- data.frame(cbind(x, y))
```

```r
ggplot(dat, aes(x=x, y=y)) +
  geom_point(size=3, col='blue')
```



Amb el paquet pracma també es poden calcular les interpolacions pels mètodes de Newton i Lagrange:

```r
library(pracma)

xs = c(T1,T2,T3, T4)

(newtonInterp(T, r, xs))

## [1]   0.01437588   0.01435863  -3.62763361 118.47715186

(lagrangeInterp(T, r, xs))

## [1]   0.01437588   0.01435863  -3.62763361 118.47715186
```

1.2. Interpolació per trams lineal

Calculem el tipus d´interès per als mateixos venciments de l´apartat anterior però aquesta vegada mitjançan interpolació per trams lineal.

```r
#interpolacio per trams lineal
#r=m*T+b
linterp=function(x1,y1,x2,y2)
{
  m=(y2-y1)/(x2-x1)
```

```
  b=y2-(m*x2)
  return(c(b,m))
}

#resultats interpolacio per trams lineal
p1=linterp(1/12,ti1,1/6,ti2)
r1=p1[[2]]*T1+p1[[1]]

p2=linterp(0.5,ti4,1,ti5)
r2=p2[[2]]*T2+p2[[1]]

p3=linterp(5,ti8,7,ti9)
r3=p3[[2]]*T3+p3[[1]]

p4=linterp(7,ti9,10,ti10)
r4=p4[[2]]*T4+p4[[1]]

r1;r2;r3;r4

## [1] 0.01445

## [1] 0.01536667

## [1] 0.017575

## [1] 0.018
```

En l´interpolació per trams linea s´obté una funció contínua, però no derivable, ja que presenta un pic en cadascun dels punts on s´uneixen dos polinomis interpoladors de primer grau i, per tant, les derivades laterals no coincideixen.

1.3. Anàlisi dels resultats

Detalla si observes algun resultat estrany al primer apartat i conclou quin dels dos mètodes emprats seria el més adequat per a l´obtenció dels tipus d´interès sol.licitats.

Els resultats per T3 i T4 no semblen no ser reals. T3 és negatiu, i han de ser estrictament positius, i T4 és massa gran. Això és degut a que hem fet servir molts punts i el grau del polinomi és molt alt i, encara que el polinomi interpolador passi pels punts donats, és possible que fluctuï àmpliamen entre dos punts (fenòmen de Runge).

Tant amb Lagrange com amb Vandermonde obtenim els mateixos resultats. La interpolació per trams lineal seria una alternativa, però ja hem vist que s´obté una funció no derivable. També podríem reduir el nombre de punts utilitzats.